



**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**  
**DEPARTAMENTO DE MECÁNICA**  
**VALPARAÍSO-CHILE**

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO NO-LINEAL**  
**DE MATERIALES UTILIZANDO APROXIMACIONES ELÁSTICAS**  
**Y EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

**Luis Carlos Pérez Pozo**

Doctorado en Ingeniería Mecánica

Enero de 2008





UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE MECÁNICA  
VALPARAÍSO-CHILE

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO NO-LINEAL  
DE MATERIALES UTILIZANDO APROXIMACIONES ELÁSTICAS  
Y EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

Tesis de Grado presentada por

**Luis Carlos Pérez Pozo**

como requisito parcial para optar al grado de

**Doctor en Ingeniería Mecánica**

Profesor Guía

Profesor Correferente

Dr. Franco Perazzo Maggi

Dr. Sergio Oller Martinez

Enero de 2008



TITULO DE LA TESIS:

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO NO-LINEAL  
DE MATERIALES UTILIZANDO APROXIMACIONES ELÁSTICAS  
Y EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS**

AUTOR:

**LUIS CARLOS PÉREZ POZO**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el Grado de Doctor en Ingeniería Mecánica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Franco Perazzo Maggi .....

Dr. Sergio Oller Martinez .....

Dr. Fernando Labbé Zepeda .....

Valparaíso, Chile, Enero de 2008

*A mis padres Luis y Rina,  
a mis hermanas Maricel y María Jesus,  
a mi amor Carolyn  
y a Don Ricardo en el cielo.*

# Agradecimientos

Deseo expresar mi gratitud a mis padres Luis y Rina por enseñarme el camino, a mis hermanas Marisel y María Jesús por recordarme su dirección, a mi amor Carolyn por acompañarme en el y a Don Ricardo por iluminarlo desde el cielo.

Al profesor Franco Perazzo M. por su todo su apoyo, consejo y motivación tanto en la parte final de mi doctorado como durante la dirección de esta tesis.

A mis amigos del Aula UTFSM-CIMNE: Katherine Devia M, Alfredo Martin N, Carlos Valdivia M, David Camus C, Juan Aranda P, Nicolás Ipinza C y Renato Covarrubias R, a quienes les deseo la mejor suerte del mundo.

A mi colega y amigo Alejandro Angulo C. por todo su apoyo, motivación y las largas conversaciones en torno a este trabajo, las cuales siempre terminaron con importantes conclusiones.

A los profesores Bernardo Müllers F. y Ernesto Urbina V, de la Escuela de Ingeniería Mecánica de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, por su constante apoyo y consejo.

Al Departamento de Mecánica y a la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María, en especial a la Srta. Elisa Moraga W. y a la Sra. Magali Lobos.

Al profesor Sergio Oller M. del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) por su fundamental apoyo y orientación en la etapa final de esta tesis en la Universidad Politécnica de Cataluña.

A mí tío Francisco Pozo H. quien fue mi padre, madre y hermano durante mi estadía en Caldes de Montbui.

*“Aquestes últimes paraules d’agraïments van dedicades a la família Quiñones-Soley, especialment al meu amic Josep, qui em va fer sentir com a casa meva. També agraeixo a la Marta Gual pel seu suport i per obrir-me la ment al català i a tot el seu context. Vull agrair també a la Laura Camon i al Gabriel Blázquez i els Arquers del Negrell, per donar-me la seva amistat”.*

Muchas gracias / *“Moltes gràcies”*.

# SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL COMPORTAMIENTO NO-LINEAL DE MATERIALES UTILIZANDO APROXIMACIONES ELÁSTICAS Y EL MÉTODO SIN MALLA DE PUNTOS FINITOS

PALABRAS CLAVE: *métodos sin malla, puntos finitos, colocación puntual, no-linealidad del material, análisis inelástico.*

## Resumen

Durante los últimos años, especialmente en la década de los 90, se ha producido un importante avance en la investigación y aplicación de nuevas técnicas numéricas que, a diferencia de otros métodos tradicionales (FEM, BEM, etc), no requieren de una subdivisión del dominio en una malla, razón por la cual han sido denominadas *métodos sin malla*, “*meshless*”, *libres de malla* o “*meshfree*”. Básicamente, estas comprenden un conjunto de métodos numéricos utilizados para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a partir de distribuciones espaciales de puntos regulares o irregulares.

La formulación sin malla del *método de puntos finitos* permite aprovechar en toda su potencialidad las ventajas de este tipo de técnica, habiéndose comprobado su buen funcionamiento mediante el desarrollo de aplicaciones en los campos de la mecánica de fluidos, mecánica de sólidos, ciencia de materiales y más tarde en adaptividad y electromagnetismo.

En esta tesis se utiliza el *método de puntos finitos* para el trabajar con un modelo constitutivo basado en la teoría de *deformación total* de *Hencky* y un enfoque elástico para aproximar la distribución de tensiones y de deformaciones en el rango no-lineal. Dicha aproximación introduce el concepto de propiedades efectivas del material las cuales se obtienen en forma iterativa mediante un procedimiento de corrección aplicado sobre la curva experimental de *tensión-deformación* del material.

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del proyecto de investigación USM-250521 y se ha desarrollado en el Aula UTFSM-CIMNE del Departamento de Mecánica, perteneciente a la Red de Aulas del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) de la Universidad Politécnica de Cataluña.



# NUMERICAL SIMULATION OF NON-LINEAR MATERIALS BEHAVIOR USING ELASTIC APPROXIMATIONS AND THE MESHLESS FINITE POINT METHOD

KEYWORDS: *meshless method, finite point, puntual collocation,  
non-linear material, inelastic analysis.*

## Summary

During the last years, especially in the nineties, had been produced important developments in the investigations and applications of new numerical techniques, unlike another traditional methods (FEM, BEM, etc), do not require of subdivide the domain in a mesh, for this reason has been called “*meshless*” or “*meshfree*”. Basically, these include a group of numerical method used to resolve differential equations in partial derivatives starting from spatial distributions, with regular or irregular points.

The *meshless* formulation of the *finite point method* makes possible to use all the advantages that brings this type of technique. Having already verified his good behaviour, with the development of applications in different fields on engineering such as fluid mechanics, solids Mechanics, materials science and recently in adaptivity and electromagnetism.

In this thesis, has been used the *finite point method* in order to develop a constitutive model based on *Hencky's total deformation theory*, and an elastic approach in order to obtain the stress and deformations distribution in the nonlinear range. This approach introduces the concept of effective material properties, which are obtained iteratively by means of a correction process used and applied on the experimental material *tension-deformation* curve for each material.

This project has been financed by Technical University Federico Santa Maria DGIP Proyect 250521, and developed in the UTFSM-CIMNE Classroom of Department of Mechanical, that belong to the Classroom Net of International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), from the Polytechnic University of Catalonia.

# SIMULACIÓ NUMÈRICA DEL COMPORTAMENT NO LINEAL DE MATERIALS UTILITZANT APROXIMACIONS ELÀSTIQUES I EL MÈTODE SENSE MALLA DE PUNTS FINITS

PARAULES CLAU: *mètodes sense malla, punts finits, col·locació puntual,  
no linealitat del material, anàlisi inelàstic.*

## Resum

Durant els últims anys, especialment en la dècada dels 90, ha tingut lloc un important avanç en la investigació i aplicació de noves tècniques numèriques que, a diferència d'altres mètodes tradicionals (FEM, BEM, etc), no requereixen d'una subdivisió del domini en una malla, raó per la qual han estat denominades *mètodes sense malla*, “*meshless*”, *lliures de malla* o “*meshfree*”. Bàsicament, aquests comprenen un conjunt de mètodes numèrics utilitzats per a resoldre equacions diferencials en derivades parcials a partir de distribucions espacials de punts regulars o irregulars.

La formulació sense malla del *mètode de punts finits* permet aprofitar en tota la seva potencialitat els avantatges d'aquest tipus de tècnica, després d'haver-se comprovat el seu bon funcionament mitjançant el desenvolupament d'aplicacions en els camps de la mecànica de fluids, mecànica de sòlids, ciència de materials i més tard, en adaptabilitat i electromagnetisme.

En aquesta tesi s'utilitza el *mètode de punts finits* per treballar amb un model constitutiu basat en la teoria de *deformació total* d' *Hencky* i un enfocament elàstic per a aproximar la distribució d'tensions i de deformacions en el rang no lineal. Aquesta aproximació introdueix el concepte de propietats efectives del material, les quals s'obtenen en forma iterativa mitjançant un procediment de correcció aplicat sobre la corba experimental de *tensió-deformació* del material.

Aquest treball ha estat finançat per la Direcció General d'Investigació i Postgrau de la Universitat Tècnica Federico Santa María, a través del projecte d'investigació USM-250521 i s'ha desenvolupat a l'Aula UTFSM-CIMNE del Departament de Mecànica, pertanyent a la Xarxa d'Aules del Centre Internacional de Mètodes Numèrics en Enginyeria (CIMNE) de la Universitat Politècnica de Catalunya.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>2</b>
1.1. Objetivos	3
1.2. Estructura de la Tesis	4
<b>2. Métodos sin malla</b>	<b>5</b>
2.1. Conceptos previos	5
2.2. Marco teórico	6
2.3. Reseña histórica	7
2.4. Clasificación de los <i>métodos sin malla</i>	11
2.4.1. Clasificación basada en el tipo de formulación	11
2.4.2. Clasificación basada en el tipo de <i>función de forma</i>	11
2.4.3. Clasificación basada en tipo de representación del dominio	12
<b>3. Formulación del método de Puntos Finitos</b>	<b>13</b>
3.1. Construcción de la aproximación	14
3.2. Función de ponderación de <i>Gauss</i>	17
3.3. Discretización mediante colocación puntual	20
3.4. Generación local de <i>nubes</i> de interpolación	22
3.5. Polinomio <i>base de interpolación</i> y <i>función de forma</i>	23
3.6. Derivabilidad de la aproximación	25
3.7. Estabilización de la aproximación	26
<b>4. Aproximación del comportamiento elástico lineal del material mediante el MPF</b>	<b>28</b>

4.1. Marco teórico . . . . .	28
4.2. Implementación numérica . . . . .	29
4.2.1. Estabilización de la aproximación . . . . .	33
4.3. Ejemplos numéricos . . . . .	33
4.3.1. Test de la parcela . . . . .	33
4.3.2. Test de la parcela de orden superior . . . . .	36
4.3.3. Puente bajo carga distribuida superior . . . . .	39
4.3.4. Test IC1-NAFEMS (Placa en tensión con carga normal) . . . . .	42
4.3.5. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna . . . . .	49
<b>5. Comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas y el MPF</b>	<b>53</b>
5.1. Marco teórico . . . . .	55
5.2. Formulación de un modelo no-lineal basado en la teoría de deformación total de <i>Hencky</i>	56
5.3. Determinación de los parámetros efectivos del material . . . . .	60
5.3.1. Modelo elásto-plástico perfecto . . . . .	61
5.3.2. Modelo elásto-plástico con endurecimiento lineal . . . . .	62
5.3.3. Modelo de Ramberg-Osgood . . . . .	63
5.4. Implementación numérica . . . . .	65
5.4.1. Aproximación del término $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$ . . . . .	67
5.4.2. Forma discreta de las ecuaciones de equilibrio no-lineal . . . . .	68
5.4.3. Criterio de convergencia . . . . .	69
5.4.4. Estabilización de la aproximación . . . . .	71
5.5. Teoría de Deformación Total versus Plasticidad Clásica . . . . .	72
<b>6. Resultados numéricos</b>	<b>74</b>
6.1. Placa rectangular sujeta a tensión constante . . . . .	74
6.1.1. Análisis . . . . .	79
6.2. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna . . . . .	80
6.2.1. Resultados numéricos para $P_i/\sigma_0 = 1$ . . . . .	81

6.2.2. Resultados numéricos para $P_i/\sigma_0 = 1.5$ . . . . .	82
6.2.3. Resultados numéricos para $P_i/\sigma_0 = 2$ . . . . .	82
6.2.4. Análisis . . . . .	83
6.3. Placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada . . . . .	84
6.3.1. Análisis . . . . .	85
6.4. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante . . . . .	86
6.4.1. Análisis . . . . .	89
<b>7. Conclusiones</b>	<b>92</b>
7.1. Futuras líneas de investigación . . . . .	94
<b>A. Principales rutinas del código MATLAB</b>	<b>96</b>
A.1. Rutina polinomio <i>base de interpolación</i> . . . . .	98
A.2. Rutina función de ponderación de <i>Gauss</i> . . . . .	99
A.3. Rutina <i>funciones de forma</i> . . . . .	100
A.4. Rutina método de proyección vertical . . . . .	102
A.5. Rutina para determinar el esfuerzo equivalente $\sigma_{eq_a}$ en un modelo de Ramberg-Osgood, método de proyección vertical, ecuación 5.17 . . . . .	104
A.6. Rutina para determinar los coeficientes de la matriz $\mathbf{D}_{eff}$ y sus derivadas . . . . .	105
<b>B. Resultados numéricos adicionales</b>	<b>107</b>
B.1. Placa rectangular sujeta a tensión constante . . . . .	107
B.2. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna . . . . .	110
B.3. Placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada . . . . .	113
B.4. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante . . . . .	115
<b>Bibliografía</b>	<b>123</b>

# Índice de figuras

2.1. Dominio de análisis $\Omega$ para un caso 2D utilizando un <i>método sin malla</i> y subdominios circulares. . . . .	6
3.1. Aproximación por <i>mínimos cuadrados ponderados fijos</i> FWLS. . . . .	17
3.2. Comportamiento de la <i>función de ponderación</i> de <i>Gauss</i> respecto del parámetro $k$ , ( $c = 0.25r, q = 1.1$ ). . . . .	19
3.3. Comportamiento de la <i>función de ponderación</i> de <i>Gauss</i> respecto del parámetro $q$ , ( $c = 0.25r, k = 1.0$ ). . . . .	19
3.4. Comportamiento de la <i>función de ponderación</i> de <i>Gauss</i> respecto del parámetro $c$ , ( $k = 1.0, q = 1.1$ ). . . . .	20
3.5. Dominio del problema $\Omega$ y <i>nube</i> $\Omega_I$ asociada al <i>nodo estrella I</i> . . . . .	22
3.6. Generación local de <i>nubes</i> 2D mediante el criterio de a) mínima distancia, b) ocho segmentos y c) cuatro cuadrantes. . . . .	23
3.7. Parámetros utilizados para adimensionalizar la <i>base de interpolación</i> en una <i>nube</i> de puntos 2D. . . . .	24
3.8. Definición de las componentes del vector $\mathbf{h}$ en 2D para subdominios del a) dominio y b) contorno. . . . .	27
4.1. Geometría del test de la parcela. . . . .	34
4.2. Discretización de puntos del dominio, test de la parcela. . . . .	34
4.3. Resultados numéricos test de la parcela, distribución regular e irregular de puntos. . . . .	35
4.4. Geometría y condiciones de contorno del test de la parcela de orden superior. . . . .	36
4.5. Discretización de puntos del dominio, test de orden superior. . . . .	37
4.6. Resultados numéricos test de orden superior, distribución regular de puntos, $N = 23$ . . . . .	38
4.7. Resultados numéricos test de orden superior, distribución regular de puntos, $N = 46$ . . . . .	38

4.8. Resultados numéricos test de orden superior, distribución irregular de puntos, $N = 23$ . . .	38
4.9. Resultados numéricos test de orden superior, distribución irregular de puntos, $N = 49$ . . .	39
4.10. Geometría del Puente bajo carga distribuida superior. . . . .	40
4.11. Geometría simplificada del puente bajo carga distribuida superior. . . . .	40
4.12. Discretización del puente bajo carga distribuida superior, $N = 385$ puntos. . . . .	41
4.13. Distribución de tensión horizontal $\sigma_x$ y vertical $\sigma_y$ sobre el eje de simetría a-b, puente bajo carga distribuida superior. . . . .	41
4.14. Resultados numéricos del puente bajo carga distribuida superior, $N = 59$ . . . . .	42
4.15. Geometría del test IC1-NAFEMS. . . . .	43
4.16. Discretización del dominio, distribución regular de puntos, test IC1-NAFEMS. . . . .	43
4.17. Discretización del dominio, distribución irregular de puntos, test IC1-NAFEMS. . . . .	44
4.18. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos, $N = 59$ . . . . .	45
4.19. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos, $N = 85$ . . . . .	45
4.20. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos, $N = 179$ . . . . .	45
4.21. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos, $N = 221$ . . . . .	46
4.22. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos, $N = 55$ . . . . .	46
4.23. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos, $N = 81$ . . . . .	46
4.24. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos, $N = 187$ . . . . .	47
4.25. Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos, $N = 240$ . . . . .	47
4.26. Geometría del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna. . . . .	49
4.27. Discretización del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna, $N = 660$ puntos. . . . .	50
4.28. Distribución de desplazamiento radial $u_r$ para el cilindro de pared gruesa. . . . .	51
4.29. Distribución de tensiones radial $\sigma_r$ y tangencial $\sigma_\theta$ para el cilindro de pared gruesa. . . . .	51
4.30. Contorno de desplazamiento radial $u_r$ para el cilindro de pared gruesa. . . . .	52
5.1. Definición de puntos <i>pseudo-elásticos</i> , cuerpo cargado . . . . .	55
5.2. Definición de puntos <i>pseudo-elásticos</i> . . . . .	56
5.3. Definición de módulo plástico secante en una curva <i>tensión-deformación</i> . . . . .	57
5.4. Deformación total en un sólido no-lineal . . . . .	58

5.5. Método de proyección vertical. . . . .	60
5.6. Esquema representativo del comportamiento del modelo elásto-plástico perfecto . . . . .	61
5.7. Esquema representativo del comportamiento del modelo elásto-plástico con endurecimiento lineal . . . . .	62
5.8. Esquema representativo del comportamiento del modelo de Ramberg-Osgoog (Ramberg & Osgood, 1943) . . . . .	63
5.9. Esquema de la variación de $\sigma_{eq}$ y $\varepsilon_{eq}$ entre iteraciones . . . . .	70
5.10. Posibles caminos de carga para las cargas combinadas en el tubo delgado . . . . .	72
6.1. Geometría y condiciones de la placa rectangular sujeta a tensión constante. . . . .	75
6.2. Discretización de puntos del dominio, $N = 36$ , placa rectangular sujeta a tensión constante. . . . .	76
6.3. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> , placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 50$ MPa. . . . .	76
6.4. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> , placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 100$ MPa. . . . .	77
6.5. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> , placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 150$ MPa. . . . .	77
6.6. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> , placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 200$ MPa. . . . .	78
6.7. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> , placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 250$ MPa. . . . .	78
6.8. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> , placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 300$ MPa. . . . .	79
6.9. Geometría del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna. . . . .	80
6.10. Discretización del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna, $N = 1056$ puntos. . . . .	81
6.11. Distribución normalizada de a) tensiones, b) deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna, $P_i/\sigma_0 = 1$ . . . . .	81
6.12. Distribución normalizada de a) tensiones, b) deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna, $P_i/\sigma_0 = 1.5$ . . . . .	82
6.13. Distribución normalizada de a) tensiones, b) deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna, $P_i/\sigma_0 = 2$ . . . . .	82
6.14. Distribución de los parámetros efectivos de material del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna. . . . .	83
6.15. Geometría de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	84



6.16. Discretización de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada, $N = 183$ puntos. . . . .	85
6.17. Comparación de distribución normalizada de tensión equivalente $\sigma_{eq}$ y deformación plástica equivalente $\varepsilon_{eq}^p$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	85
6.18. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> ubicado en la esquina $A$ (figura 6.15) de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	86
6.19. Deformada del contorno de desplazamiento total (factor de escala = 100), placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	87
6.20. Geometría del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	88
6.21. Discretización del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante, $N = 812$ puntos. . . . .	88
6.22. Distribución normalizada de tensiones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	89
6.23. Distribución normalizada de deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	89
6.24. Gráfico de convergencia de un punto <i>pseudo-elástico</i> ubicado en la superficie interior del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	90
6.25. Contornos de deformación equivalente plástica $\varepsilon_{eq}^p$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	90
A.1. Diagrama de flujo de la técnica propuesta en esta tesis. Se indican entre parentesis las rutinas correspondientes a cada paso . . . . .	97
B.1. Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 50$ MPa. . . . .	107
B.2. Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 100$ MPa. . . . .	108
B.3. Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 150$ MPa. . . . .	108
B.4. Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 200$ MPa. . . . .	108
B.5. Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 250$ MPa. . . . .	109
B.6. Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante $\sigma_c = 300$ MPa. . . . .	109
B.7. Contorno de deformación plástica equivalente $\varepsilon_{eq}^p$ para el cilindro de pared gruesa, $P_0/\sigma_0 = 1$ . . . . .	110
B.8. Contorno de esfuerzo equivalente $\sigma_{eq}$ para el cilindro de pared gruesa, $P_0/\sigma_0 = 1$ . . . . .	110
B.9. Contorno de deformación plástica equivalente $\varepsilon_{eq}^p$ para el cilindro de pared gruesa, $P_0/\sigma_0 = 1.5$ . . . . .	111

B.10. Contorno de esfuerzo equivalente $\sigma_{eq}$ para el cilindro de pared gruesa, $P_0/\sigma_0 = 1.5$ . . . . .	111
B.11. Contorno de deformación plástica equivalente $\varepsilon_{eq}^p$ para el cilindro de pared gruesa, $P_0/\sigma_0 = 2$ . . . . .	112
B.12. Contorno de esfuerzo equivalente $\sigma_{eq}$ para el cilindro de pared gruesa, $P_0/\sigma_0 = 2$ . . . . .	112
B.13. Contornos de deformación equivalente $\varepsilon_{eq}$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	113
B.14. Contornos de deformación equivalente plástica $\varepsilon_{eq}^p$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	113
B.15. Contornos de tensión equivalente $\sigma_{eq}$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	114
B.16. Contornos de módulo de elasticidad efectivo normalizado $E_{eff}/E$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	114
B.17. Contornos de relación de <i>Poisson</i> efectiva normalizada $\nu_{eff}/\nu$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	114
B.18. Contornos de tensión equivalente $\sigma_{eq}$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	115
B.19. Contornos de deformación equivalente $\varepsilon_{eq}$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	115
B.20. Contornos de módulo de elasticidad efectivo normalizado $E_{eff}/E$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	116
B.21. Contornos de relación de <i>Poisson</i> efectiva normalizada $\nu_{eff}/\nu$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	116

# Índice de tablas

2.1. Listado de <i>métodos sin malla</i> desarrollados hasta esta fecha. . . . .	9
2.2. Principales combinaciones de métodos <i>sin malla</i> /con malla desarrollados hasta esta fecha. . . . .	10
2.3. Clasificación de los <i>métodos sin malla</i> propuesta por (Gu, 2005). . . . .	12
4.1. Coordenadas del punto central (4) para el test de la parcela con 9 puntos. . . . .	35
4.2. Resultados numéricos para el test de la parcela con 14 puntos. . . . .	35
4.3. Principales resultados test IC1-NAFEMS, discretización regular. . . . .	44
4.4. Principales resultados test IC1-NAFEMS, discretización irregular. . . . .	44
6.1. Parámetros del material, placa rectangular sujeta a tensión constante. . . . .	75
6.2. Principales resultados placa rectangular sujeta a tensión constante. . . . .	76
6.3. Parámetros del material, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna. . . . .	80
6.4. Parámetros del material, Placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. . . . .	84
6.5. Parámetros del material, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante. . . . .	86

# Capítulo 1

## Introducción

El método de *elementos finitos* - “*Finite Element Method*” (FEM) (Zienkiewicz & Taylor, 2000) ha sido durante las últimas décadas, y sigue siendo, la herramienta numérica más utilizada para abordar una gran variedad de problemas en diversos áreas de la ciencia. El buen prestigio que ostenta este método se debe en gran medida a la fiabilidad de sus resultados y la variada gama de situaciones que permite simular. A pesar de lo anterior, esta técnica ha presentado ciertas limitaciones inherentes al uso de una malla o elementos, en aplicaciones específicas, tales como: problemas que envuelven grandes deformaciones y propagación de grietas, problemas con fronteras en movimiento, procesos adaptivos que requieran de una actualización de la malla, rompimiento de materiales en una gran cantidad de fragmentos, etc. (Belytschko et al., 1996; Liu, 2002; Li & Liu, 2004; Gu, 2005).

En la última década se ha producido un avance importante en el conocimiento y posibilidades de aplicación de un nuevo tipo de técnicas numéricas que, a diferencia de otros métodos, no requieren de una subdivisión del dominio en una malla, razón por la cual han sido denominadas *métodos sin malla*, “*meshless*”, *libres de malla* o “*meshfree*”. Dichas técnicas han sido aplicadas exitosamente no sólo en el campo de las matemáticas, sino también en diversas áreas de la ingeniería, presentándose en la actualidad como una alternativa a métodos tradicionales como FEM o “*Boundary Element Method*” (BEM) (Banerjee & Butterfield, 1987).

Dentro de esta nueva generación de métodos numéricos se destaca “*Finite Point Method*”- *Método de Puntos Finitos* (MPF) (Oñate et al., 1996a,b), técnica totalmente libre de malla en la cual el dominio se discretiza mediante un número finito de puntos, la aproximación local se obtiene mediante la técnica de mínimos cuadrados ponderados, utilizándose colocación puntual para obtener el sistema de ecuaciones diferenciales (Perazzo, 2002).

En este trabajo se utiliza el MPF para el desarrollo de un modelo constitutivo basado en la teoría de *deformación total* de Hencky y un enfoque elástico para aproximar la distribución de tensiones y de deformaciones en el rango no-lineal. Dicha aproximación introduce el concepto de propiedades efectivas del material las cuales se obtienen en forma iterativa mediante un procedimiento de corrección aplicado sobre la curva experimental de *tensión-deformación* del material.

Para demostrar la validez de la metodología propuesta, se han resuelto ejemplos numéricos extraídos de la literatura relacionada y han sido comparados ya sea con los resultados publicados o con los obtenidos

de la modelación de estos, mediante el software comercial de *elementos finitos* ADINA (ADINA, 2007). La implementación de estos ejemplos se ha realizado mediante un código programado en MATLAB (MATLAB, 2007), cuyas principales rutinas se entregan en el apéndice A. Además, este código ha sido integrado con el software comercial de pre y post proceso gráfico GiD (GiD-v8.0, 2007).

## 1.1. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es obtener y desarrollar una metodología basada en el *método de puntos finitos*, como técnica totalmente libre de malla, para el análisis del comportamiento no-lineal de materiales. Este análisis utiliza un modelo constitutivo basado en la teoría de *deformación total* de Hencky y un enfoque elástico para aproximar la distribución de tensiones y de deformaciones en el rango no-lineal. Para cumplir este objetivo se pretende estudiar los aspectos relevantes de la fundamentación matemática del método, es decir, la aproximación mediante mínimos cuadrados, la *función de ponderación*, las *funciones de forma*, la técnica de colocación puntual, etc. Por otro lado, también se hace necesario estudiar el funcionamiento del método en la resolución de las ecuaciones de elasticidad lineal en sólidos, como base fundamental para la metodología propuesta en esta tesis.

Algunos objetivos secundarios de este trabajo son:

- Estudiar el concepto de *métodos sin malla* y hacer una revisión general de estas técnicas, clasificándolas de acuerdo a criterios establecidos en la literatura existente.
- Revisar la formulación del MPF y estudiar el comportamiento de los factores que lo afectan, indicando los parámetros que se usaran en este trabajo.
- Implementar numéricamente el *método de puntos finitos* en un caso de elasticidad lineal 2D, como paso previo de la modelación del comportamiento no-lineal de materiales.
- Desarrollar una metodología sin malla mediante el MPF para analizar el comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas.
- Formular un modelo no-lineal basado en la teoría de deformación total de Hencky.
- Introducir el concepto de propiedades efectivas del material y presentar el procedimiento iterativo con el cual se obtienen sus valores.
- Hacer una breve comparación entre la *teoría de deformación total* de Hencky y la de plasticidad clásica.
- Desarrollar e implementar un código en lenguaje MATLAB para la simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales utilizando la presente técnica.
- Resolver una serie de ejemplos numéricos que permitan comprobar el funcionamiento del *método de puntos finitos* y la metodología propuesta en este trabajo.

## 1.2. Estructura de la Tesis

El presente trabajo esta compuesto de 7 capítulos y 2 apéndices, cuyos contenidos se resumen a continuación:

- En el capítulo 1 se entrega una breve introducción sobre el tema central de esta tesis, se establecen los objetivos principales y secundarios de este trabajo y se indica la forma en que los contenidos serán desarrollados en el presente documento.
- En el capítulo 2 se introduce el concepto de *métodos sin malla*, se presenta un recuento histórico y una revisión general de los *métodos sin malla*, clasificando estos de acuerdo a criterios establecidos en la literatura existente.
- En el capítulo 3 se estudia el *método de puntos finitos* y su aplicación a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, presentándose además, las principales expresiones de la técnica de interpolación por mínimos cuadrados utilizada por esta técnica.
- En el capítulo 4 se desarrolla un procedimiento para implementar numéricamente el *método de puntos finitos* en un caso 2D de un sólido lineal elástico, paso previo de la modelación del fenómeno no-lineal.
- En el capítulo 5 se presenta una metodología sin malla mediante el *método de puntos finitos* para analizar el comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas.
- En el capítulo 6 se resuelven una serie de ejemplos numéricos que permiten evaluar el desempeño del *método de puntos finitos* utilizando la metodología propuesta en este trabajo.
- En el capítulo 7 se entregan las conclusiones derivadas del presente estudio junto con las posibilidades de trabajos futuros que puedan ser desarrollados a partir del método propuesto en esta tesis.
- En el apéndice A se entregan las principales rutinas del código programado en lenguaje MATLAB utilizado en la implementación de los ejemplos numéricos resueltos.
- En el apéndice B se presentan resultados numéricos adicionales asociados a los problemas desarrollados en el capítulo 6.

## Capítulo 2

# Métodos sin malla

### 2.1. Conceptos previos

En este apartado se definen globalmente y con la idea de establecer conceptos, las características que debe poseer una técnica numérica para que sea considerada como *método sin malla*.

Una primera propuesta para definir un *método sin malla* se entrega en (Duarte, 1995). Un método numérico se considera sin malla si las ecuaciones básicas que gobiernan el modelo discreto del problema de contorno no dependen de la disponibilidad de una malla bien definida. Años más tarde, (Liu, 2002) define *método sin malla* como una técnica numérica usada para establecer un sistema de ecuaciones algebraicas para todo el dominio del problema, sin el uso de una malla predefinida para la discretización del dominio o el contorno. Ambas definiciones son equivalentes, sin embargo, se observará en este capítulo que algunos métodos son aceptados como sin malla a pesar de tener una débil dependencia de esta (se utiliza una malla para calcular la cuadratura numérica de las ecuaciones integrales que gobiernan el modelo discreto).

Considerando lo anterior, (Oñate et al., 1996b) establece las condiciones básicas para que una aproximación numérica pueda ser considerada como un *método sin malla*, dichas condiciones son:

- Las incógnitas y sus derivadas deben ser representadas en términos de las coordenadas de un conjunto de puntos pertenecientes al dominio de análisis y de los parámetros especificados por estos.
- La función de ponderación y sus derivadas deben poder ser definidas solamente en términos de la posición de los puntos localizados dentro del dominio de análisis.
- No es necesario realizar ninguna integración de volumen o superficie, o
- Cualquier integración de volumen o superficie debiera ser realizada en forma independiente del procedimiento de interpolación escogido.

## 2.2. Marco teórico

La aproximación de la función incógnita en el dominio de análisis y su obtención, es fundamental en todo *método sin malla*. Para esto se considera que la aproximación  $\hat{u}(\mathbf{x})$  de la función  $u(\mathbf{x})$  en el dominio  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  o  $3$ , se obtiene a partir de las funciones

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N \phi_I(\mathbf{x}) u_I^h \quad (2.1)$$

El dominio en cuestión,  $\Omega$ , es discretizado por un conjunto de nodos o puntos  $\mathbf{x}_I$ , con  $I = 1, \dots, N$ , siendo  $N$  el número total de puntos y  $u_I^h$  el valor aproximado de la función  $u(\mathbf{x})$  en el punto  $I$ ,  $u(\mathbf{x}_I) \cong u_I^h$ . La función  $\phi_I(\mathbf{x})$  se denomina función de interpolación o *función de forma* y se define de forma local en cada subdominio  $\Omega_I \subset \Omega$ , de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \phi_I(\mathbf{x}) &\neq 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \\ \phi_I(\mathbf{x}) &= 0 & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_I \end{aligned} \quad (2.2)$$

Cada subdominio  $\Omega_I$  está formado por una cantidad  $n$  de puntos, tal que  $n \ll N$ .

El carácter local de la *función de forma* se obtiene utilizando una *función de ponderación*  $\omega_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \omega(\bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x})$  cuyo valor es distinto de cero, sólo en el subdominio  $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}} \subset \Omega$ . El argumento  $\mathbf{x}$  indica un punto cualquiera del subdominio  $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$  y  $\bar{\mathbf{x}}$  es el punto donde se está efectuando la aproximación y donde la *función de ponderación* alcanza su valor máximo.

En adelante, el símbolo  $\Omega_I$  se utiliza para indicar el subdominio asociado a un punto de coordenadas  $\mathbf{x}_I$ , en el cual se desea obtener la aproximación, ver figura 2.1, mientras  $\Omega_{\mathbf{x}}$  o  $\Omega_{\bar{\mathbf{x}}}$  se refiere al subdominio asociado a un punto de coordenadas genéricas  $\mathbf{x}$  o  $\bar{\mathbf{x}}$  respectivamente.

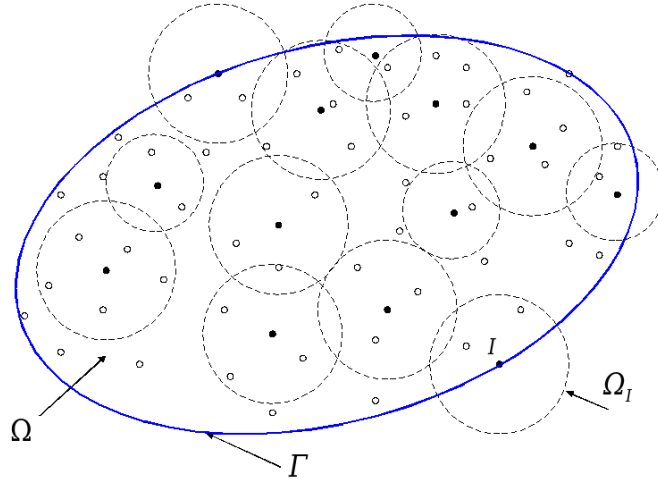


Figura 2.1: Dominio de análisis  $\Omega$  para un caso 2D utilizando un *método sin malla* y subdominios circulares.

La figura 2.1 muestra el dominio de análisis  $\Omega$  para un problema 2D, su contorno  $\Gamma$  y algunos subdo-



minios  $\Omega_I$ , en este caso circulares<sup>1</sup>, asociados a su respectivo nodo  $I$ , es evidente que la intersección o traslape existente entre ellos es mayor al mostrado en la figura, esto debido a que cada nodo de la partición tiene asociado su correspondiente subdominio. Queda de manifiesto además, que el tamaño geométrico de cada uno de estos subdominios no es siempre el mismo y dependerá de la distancia al punto más alejado o de la densidad de nodos de la discretización.

A continuación se entrega un recuento histórico y una revisión general de los *métodos sin malla* existentes en la literatura, clasificándolos de acuerdo a tres parámetros: la formulación a nivel de ecuaciones diferenciales, las funciones de forma y la representación del dominio del problema.

### 2.3. Reseña histórica

Las primeras referencias a técnicas sin malla se registran en los años 30 y se relacionan con métodos de colocación (Slater, 1934; Frazer et al., 1937), sin embargo, el primer *método sin malla* desarrollado y reconocido como tal sólo surge en 1977 cuando (Lucy, 1977) y (Gingold & Monaghan, 1977) proponen “*Smooth Particle Hydrodynamics method*” (SPH) el cual fue usado para modelar fenómenos astrofísicos sin la presencia de contornos, como la explosión de estrellas y nubes de partículas. Dicho método contaba con una gran versatilidad, pero estaba limitado por su baja precisión.

Años más tarde, (Liszka & Orkisz, 1980) define “*Generalized Finite Difference method*” (GFD), como una forma alternativa de obtener la aproximación de la función incógnita y sus derivadas mediante la expresión general de su desarrollo en serie de Taylor alrededor de un punto del dominio.

El desarrollo de los *métodos sin malla* tuvo su mayor avance sólo en la década de los 90 cuando (Nayroles et al., 1992) propone “*Diffuse Element method*” (DE), el cual se basa en la técnica de interpolación por mínimos cuadrados, sin embargo, las simplificaciones adoptadas por el autor motivan nuevos desarrollos en este método.

Posteriormente y como resultado de algunas correcciones a DE implementadas por (Belytschko et al., 1994), se origina “*Element Free Galerkin method*” (EFG), técnica que supera los inconvenientes en el cálculo de las derivadas, pero a su vez aumenta notablemente los costos computacionales.

En el año 1995 aparece “*Reproducing Kernel Particle Method*” (RKPM) (Liu et al., 1995, 1996), que hace correcciones a las funciones de forma del SPH, logrando mejorar la aproximación en zonas cercanas a los contornos.

En (Oñate et al., 1996a,b) se propone “*Finite Point Method*”- *Método de Puntos Finitos* (MPF), el cual utiliza una aproximación por mínimos cuadrados ponderados y un procedimiento de colocación puntual para aproximar la función incógnita.

El trabajo de (Atluri & Zhu, 1998) presenta “*Meshless Local Petrov-Galerkin approach*” (MLPG), método que define una aproximación basada en mínimos cuadrados móviles y formulaciones débiles.

<sup>1</sup>En 1D el subdominio  $\Omega_I$  es siempre un intervalo, mientras que en 2D y 3D se utilizan principalmente subdominios circulares y esféricos respectivamente

Ese mismo año (Zhu et al., 1998a,b) proponen “*Local Boundary Integral Equation method*” (LBIE) que permite evaluar integrales fácilmente, en círculos y esferas.

Otros *métodos sin malla* desarrollados en esta década son “*Meshless Collocation Method*” (MCM) (Kansa, 1990a,b), “*Particle in Cell method*” (PIC) (Sulsky et al., 1992), “*Hp cloud method*” (hp-cloud) (Duarte & Oden, 1996), “*Partition of Unity method*” (PU) (Babuska & Melenk, 1995, 1996), “*Boundary Node Method*” (BNM) (Kothnur et al., 1999), etc.

En los años siguientes, la investigación y aplicación de este tipo de técnicas ha presentado un desarrollo continuo, la tabla 2.1 muestra los *métodos sin malla* registrados en la literatura a partir del surgimiento del SPH. Cabe mencionar que algunos de los métodos listados en esta tabla sólo han quedado en la fase de formulación y no presentan desarrollos posteriores.

Tabla 2.1: Listado de *métodos sin malla* desarrollados hasta esta fecha.

<i>Método sin malla</i>	Autor(es)
“ <i>Smooth Particle Hydrodynamics</i> ” (SPH)	(Lucy, 1977), (Gingold & Monaghan, 1977)
“ <i>Generalized Finite Difference method</i> ” (GFD)	(Liszka & Orkisz, 1980)
“ <i>Meshless Collocation Method</i> ” (MCM)	(Kansa, 1990a,b)
“ <i>Diffuse Element method</i> ” (DE)	(Nayroles et al., 1992)
“ <i>Particle in Cell method</i> ” (PIC)	(Sulsky et al., 1992)
“ <i>Wavelet Galerkin Method</i> ” (WGM)	(Qian & Weiss, 1993)
“ <i>Element Free Galerkin method</i> ” (EFG)	(Belytschko et al., 1994), (Lu et al., 1994)
“ <i>Reproducing Kernel Particle Method</i> ” (RKPM)	(Liu et al., 1995, 1996)
“ <i>Partition of Unity method</i> ” (PU)	(Babuska & Melenk, 1995, 1996)
“ <i>Hp cloud method</i> ” (hp-cloud)	(Duarte & Oden, 1996)
“ <i>Finite Point Method</i> ”- <i>Método de Puntos Finitos</i> (MPF)	(Oñate et al., 1996a,b)
“ <i>Local Boundary Integral Equation method</i> ” (LBIE)	(Zhu et al., 1998a,b)
“ <i>Meshless Local Petrov-Galerkin approach</i> ” (MLPG)	(Atluri & Zhu, 1998)
“ <i>Boundary Node Method</i> ” (BNM)	(Kothnur et al., 1999)
“ <i>Free-Mesh method</i> ” (FMM)	(Yeon & Youn, 2000)
“ <i>Finite Spheres Method</i> ” (FSM)	(De & Bathe, 2000)
“ <i>Extended Finite Element Method</i> ” (XFEM)	(Sukumar et al., 2000)
“ <i>Finite Cloud Method</i> ” (FCM)	(Aluru & Li, 2001)
“ <i>Local Radial Point Interpolation Method</i> ” (LRPIM)	(Liu & Gu, 2001b)
“ <i>Generalized Finite Element Method</i> ” (GFEM)	(Strouboulis et al., 2001)
“ <i>Least-Squares Collocation Meshless Method</i> ” (LSCMM)	(Zhang et al., 2001)
“ <i>Point Interpolation Method</i> ” (PIM)	(Liu & Gu, 2001c; Liu, 2002)
“ <i>Hybrid Boundary Node Method</i> ” (HBNM)	(Zhang et al., 2002)
“ <i>Boundary Point Interpolation Method</i> ” (BPIM)	(Gu & Liu, 2002a)
“ <i>Meshless Finite Element Method</i> ” (MFEM)	(Idelsohn et al., 2003)
“ <i>Hybrid Boundary Point Interpolation Method</i> ” (HBPIM)	(Gu & Liu, 2003)
“ <i>Moving Kriging Interpolation</i> ” (MKI)	(Tongsuk & Kanok-Nukulchai, 2004)
“ <i>Meshfree Weak-Strong form method</i> ” (MWS)	(Liu et al., 2004)

Por otro lado, con el objetivo de simplificar la imposición de condiciones de frontera esenciales y permitir la aplicación de cargas puntuales en el caso de la mecánica de sólidos, se han desarrollado algunas combinaciones de *métodos sin malla*/métodos con malla. La idea es aprovechar las ventajas evitando al mismo tiempo los inconvenientes de los métodos combinados. La tabla 2.2 entrega un listado de las principales combinaciones registradas en la literatura.

Tabla 2.2: Principales combinaciones de métodos *sin malla*/con malla desarrollados hasta esta fecha.

Combinación método <i>sin malla</i> /con malla	Autor(es)
SPH/FEM	(Attaway et al., 1994) (Vuyst et al., 2005)
EFG/FEM	(Belytschko et al., 1995c) (Rao & Rahman, 2001)
EFG/BEM	(Gu & Liu, 2002b)
MPLG/FEM	(Chen & Raju, 2002)
MLPG/FEM/BEM	(Gu & Liu, 2003)
FCM/BEM	(Li et al., 2003)
HBPIM/EFG	(Gu & Liu, 2003)

## 2.4. Clasificación de los *métodos sin malla*

A continuación se presenta una clasificación los *métodos sin malla* de acuerdo a tres parámetros: la formulación a nivel de ecuaciones diferenciales, las funciones de forma y la representación del dominio del problema.

### 2.4.1. Clasificación basada en el tipo de formulación

De acuerdo al tipo de formulación, los *métodos sin malla* pueden agruparse en cuatro categorías (Li & Liu, 2004), las cuales se señalan a continuación:

- ***Métodos sin malla en formulación débil***: en estos métodos las ecuaciones de gobierno y las condiciones de contorno del problema son en primer lugar transformadas a una forma integral, forma débil, posteriormente estas ecuaciones son utilizadas en la obtención de un conjunto de ecuaciones algebraicas, ver tabla 2.3.
- ***Métodos sin malla en formulación fuerte***: en estos métodos las ecuaciones diferenciales parciales/ordinarias que rigen el problema y sus correspondientes condiciones de contorno son directamente discretizadas en los nodos usando técnicas de colocación y funciones de forma para obtener un conjunto de ecuaciones discretas, ver tabla 2.3.
- ***Métodos sin malla en formulación débil-fuerte***: en estos métodos se utilizan ambas formulaciones en el mismo problema, para diferentes grupos de nodos que tienen diferentes ecuaciones y condiciones de contorno, ver tabla 2.3.
- ***Métodos sin malla en formulación integral***: en estos métodos la aproximación de la función incógnita se realiza mediante una forma integral, forma débil, pero las ecuaciones son directamente discretizadas por colocación, forma fuerte, en los puntos, ver tabla 2.3.

### 2.4.2. Clasificación basada en el tipo de *función de forma*

De acuerdo al tipo de *función de forma* utilizada, los *métodos sin malla* pueden agruparse en cuatro categorías (Gu, 2005), las cuales se señalan a continuación:

- ***Métodos sin malla con función de forma integral***: estos métodos utilizan una representación integral para la aproximación de la función incógnita, ver tabla 2.3.
- ***Métodos sin malla con “moving least squares” MLS***: estos métodos usan como *función de forma* un interpolante MLS, ver tabla 2.3.
- ***Métodos sin malla con funciones de base radial***: estos métodos utilizan funciones de forma de base radial, ver tabla 2.3.
- ***Métodos sin malla con otras funciones de forma***: ver tabla 2.3.

### 2.4.3. Clasificación basada en tipo de representación del dominio

En forma similar a FEM y BEM, los *métodos sin malla* también pueden ser agrupados en las siguientes dos categorías (Gu, 2005):

- **Métodos sin malla aplicados al dominio y contorno:** en estos métodos, tanto el dominio como su frontera son utilizados para discretizar el sistema de ecuaciones, ver tabla 2.3.
- **Métodos sin malla aplicados sólo al contorno:** en estos métodos sólo se utiliza el contorno del problema para discretizar el sistema de ecuaciones, ver tabla 2.3.

La tabla 2.3 clasifica los métodos sin malla de acuerdo a tres parámetros: la formulación a nivel de ecuaciones diferenciales, funciones de forma y representación del dominio del problema.

Tabla 2.3: Clasificación de los *métodos sin malla* propuesta por (Gu, 2005).

Tipo de formulación	
débil	DEM, EFG, RPIM, MLPG, LRPIM
fuerte	MPF, GFDM, MCM, MFS, hp-cloud
débil-fuerte	MWS
integral	SPH
Tipo de <i>función de forma</i>	
representación integral	SPH, RKPM
“ <i>moving least squares</i> ” MLS	MLPG, BNM
funciones de base radial	LRPIM
otras	hp-cloud, PU, MK
Tipo de representación del dominio	
dominio y contorno	MPF, EFG, MLPG, SPH, RKPM, GFDM, etc
contorno	BNM, BRPIM, etc

Para profundizar en las características de cada uno de los métodos señalados se sugiere revisar directamente las fuentes citadas. Además, se propone en forma complementaria los trabajos de (Duarte, 1995), (Chao, 1997), (Liu, 2002), (Li & Liu, 2004), (Gu, 2005) y (Chen et al., 2006).

## Capítulo 3

# Formulación del método de Puntos Finitos

Es adecuado mencionar en este apartado una breve aclaración respecto del nombre de *Puntos Finitos*, con el cual se ha denominado al método numérico estudiado en esta tesis. Dicho nombre se debe a las características particulares del método, es decir, una técnica numérica totalmente libre de malla en la cual el dominio se discretiza mediante un número finito de puntos (Perazzo, 2002).

El *método de puntos finitos* fue propuesto por Oñate et al. (Oñate et al., 1996a,b) inicialmente con el propósito de resolver problemas de transporte convectivo y fluidos. Posteriormente su aplicación se extendió a transporte difusivo advectivo (Oñate & Idelsohn, 1998) y fluidos incompresibles (Oñate et al., 2000).

Los trabajos de (Oñate et al., 2001) y (Perazzo, 2002) sientan las bases para la utilización del MPF en el contexto de la mecánica de sólidos, aplicando esta técnica en la resolución de problemas de elasticidad lineal. En estas publicaciones también se implementa la técnica de estabilización basada en el procedimiento de cálculo finitesimal -“*Finite Increment Calculus*” (FIC) propuesta en (Oñate, 1996; Oñate et al., 1996b).

En (Perazzo et al., 2004) se desarrolla una formulación basada en el MPF para el análisis de problemas de la dinámica lineal de sólidos, implementado un esquema de integración temporal explícita de diferencias finitas centradas para resolver el sistema de ecuaciones dependientes del tiempo.

También en el contexto de elasticidad lineal de sólidos, (Perazzo et al., 2006; Martin, 2006; Perazzo et al., 2007), desarrollan un indicador del error para el MPF, basado en la evaluación del funcional de mínimos cuadrados utilizado para el cálculo de la función de forma.

Por otro lado el trabajo de (Angulo, 2007) presenta una implementación adaptativa del MPF mediante una estimación de los errores de las aproximaciones, junto con un procedimiento de refinamiento de la solución que utiliza la topología de la nube y el concepto de vecinos de Voronoi para insertar nuevos puntos en el dominio.

En (Aranda, 2007) se desarrolla un módulo de cálculo para el análisis lineal de geometrías tridimensionales mediante el MPF, proponiendo algunas mejoras relacionadas con la adimensionalización del polinomio de interpolación y de la función de ponderación, además, se integra una alternativa de estabilización de la matriz de momentos.

El *método de puntos finitos* también ha sido aplicado en otras áreas de la ciencia, es así como en (Mitchell & Aluru, 1999) se presenta un método para la simulación de transporte por electro-ósmosis en capilaridades, en (Wordelman et al., 2000) se utiliza esta técnica para modelar la ecuación de Poisson en un semiconductor no lineal, en el trabajo de (Cheng & Cheng, 2007) se propone una metodología para la estimación de error en el MPF y en (Zhang et al., 2007) se desarrolla un procedimiento para simular la solidificación del metal en procesos de colada continua.

Como se observa en el párrafo anterior, ninguno de los trabajos indicados apunta hacia la utilización del *método de puntos finitos* para la simulación del comportamiento no-lineal de materiales, siendo esto una de las motivaciones de esta tesis.

Se presentan a continuación las principales expresiones de la técnica de interpolación por mínimos cuadrados utilizadas en el MPF.

### 3.1. Construcción de la aproximación

Sea  $\Omega_I$  el subdominio de interpolación de una función  $u(\mathbf{x})$  y  $S_j$  (con  $j = 1, 2, \dots, n$ ) una colección de  $n$  puntos con coordenadas  $\mathbf{x}_j \in \Omega_I$ . En el léxico del MPF, el subdominio  $\Omega_I$  es denominado *nube* y el punto de coordenadas  $\mathbf{x}_I$  asociado a este, es el *nodo estrella* 2.1.

La función incógnita  $u$  puede ser aproximada en el interior de  $\Omega_I$  por

$$u(\mathbf{x}) \cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x})\alpha_k = \mathbf{p}(\mathbf{x})^T \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.1)$$

donde  $\boldsymbol{\alpha}$  es un vector de coeficientes de ponderación y  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  un vector denominado *base de interpolación* el cual contiene típicamente monomios que aseguran una base completa en el espacio de coordenadas. Como ejemplo para el caso 2D se tiene

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y]^T \quad \text{para } m = 3 \quad (3.2)$$

y

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2]^T \quad \text{para } m = 6 \text{ etc.} \quad (3.3)$$

La función incógnita  $u(\mathbf{x})$  puede ser evaluada en los  $n$  puntos pertenecientes a la *nube*  $\Omega_I$ , obteniendo



$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} u_1^h \\ u_2^h \\ \vdots \\ u_n^h \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \vdots \\ \hat{u}_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \mathbf{p}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}_I \boldsymbol{\alpha}, \quad (3.4)$$

donde los valores  $u_j^h = u(\mathbf{x}_j)$  son las incógnitas, pero los valores buscados  $u$  en el punto  $j$ ,  $\hat{u}_j = \hat{u}(\mathbf{x}_j)$  son los valores aproximados y  $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}(\mathbf{x}_j)$ .

En una aproximación mediante FEM, el número de puntos en el subdominio se escoge de forma que  $m = n$ . En este caso  $\mathbf{C}_I$  es una matriz cuadrada y el procedimiento conduce a las funciones de forma estándar del método de elementos finitos (Zienkiewicz & Taylor, 2000).

Si  $n > m$ , la aproximación utilizada no se puede adaptar a todos los valores de  $u_j^h$ . El problema puede ser resuelto, determinando los valores de  $\hat{u}$  que minimicen la suma de la distancia al cuadrado o error en cada punto, ponderado por una función  $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$ , es decir:

$$J_I = \sum_{j=1}^n \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) (u_j^h - \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_j) \boldsymbol{\alpha})^2 \quad (3.5)$$

Esto corresponde a una aproximación por mínimos cuadrados ponderados - “*Weighted Least Square*” (WLS). Se debe notar que si se elige  $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) = 1$  se obtiene una aproximación por mínimos cuadrados estándar - “*Least Square*” (LSQ).

La aproximación WLS descrita anteriormente, depende en gran medida de la forma y manera de aplicar la función de ponderación  $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$ . La forma más simple, y que es la que se utiliza en el MPF, consiste en definirla como una función fija en cada uno de los subdominios  $\Omega_I$ , aproximación por *mínimos cuadrados ponderados fijos* - “*Fixed Weighted Least Squares*” (FWLS) (Oñate et al., 1996a,b; Oñate & Idelsohn, 1998; Oñate et al., 2000, 2001; Perazzo, 2002; Perazzo et al., 2007), entonces

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_I) &= 1 \\ \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) &\neq 0 \quad \mathbf{x}_j \in \Omega_I \\ \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) &= 0 \quad \mathbf{x}_j \notin \Omega_I \end{aligned} \quad (3.6)$$

La *función de ponderación*  $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j)$  utilizada en el MPF corresponde a la función de Gauss normalizada (Oñate et al., 1996a,b; Taylor et al., 1995; Perazzo, 2002), cuyas características se estudiarán en el apartado 3.2.

La ecuación 3.5 puede ser expresada en forma matricial compacta como sigue

$$J_I = (\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{W}_I (\mathbf{u}^h - \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \boldsymbol{\alpha}) \quad (3.7)$$

donde

$$\mathbf{u}^h = [u_1^h \ u_2^h \ \dots \dots \ u_n^h]^T, \in \text{Vec}(n), \ n = \text{card}(S(\mathbf{x}_I))$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}_I) = \begin{bmatrix} p_1(\mathbf{x}_1) & p_2(\mathbf{x}_1) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_1) \\ p_1(\mathbf{x}_2) & p_2(\mathbf{x}_2) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\mathbf{x}_n) & p_2(\mathbf{x}_n) & \cdots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad \in \text{Mat}(n \times m)$$

$$\mathbf{W}_I = \begin{bmatrix} \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_n) \end{bmatrix}, \quad \in \text{Mat}(n \times n) \quad (3.8)$$

La minimización del funcional  $J_I$ , ecuación 3.5, respecto del vector  $\boldsymbol{\alpha}$ , permite obtener

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h, \quad \text{con } \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \quad (3.9)$$

con  $\mathbf{A}_I = \mathbf{A}(\mathbf{x}_I)$  (matriz de momentos) y  $\mathbf{B}_I = \mathbf{B}(\mathbf{x}_I)$

$$\mathbf{A}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \quad (3.10)$$

$$[A_I]_{ij} = \sum_{k=1}^n p_i(\mathbf{x}_k) \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_k) p_j(\mathbf{x}_k) \quad i, j = 1, \dots, m \quad (3.11)$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{W}_I \quad (3.12)$$

$$[B_I]_{ij} = p_i(\mathbf{x}_j) \omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n \quad (3.13)$$

La aproximación final en el *método de puntos finitos* se obtiene reemplazando la expresión 3.9 en 3.1, con lo que se logra

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\cong \hat{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_I^{-1} \mathbf{u}^h \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} u_i^h \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_I \end{aligned} \quad (3.14)$$

El término que acompaña a  $u_i^h$  en la ecuación anterior, corresponde a la *función de forma* del MPF, es decir,

$$\begin{aligned} \phi_I^i(\mathbf{x}) &= \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{C}_I^{-1} = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}_I^{-1} \mathbf{B}_I \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_k(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} \quad , \quad i \in S(\mathbf{x}_I) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Se debe notar que debido al carácter de mínimos cuadrados de la aproximación,  $u(\mathbf{x}_j) \simeq \hat{u}(\mathbf{x}_j) \neq u_j^h$ , es decir, los valores locales de la función aproximada, no coinciden con los valores nodales de la función incógnita, ver figura 3.1. De todas formas  $\hat{u}$  es una aproximación válida con la cual se busca satisfacer la ecuación diferencial y condiciones de contorno, siendo  $u_j^h$  simplemente parámetros desconocidos.

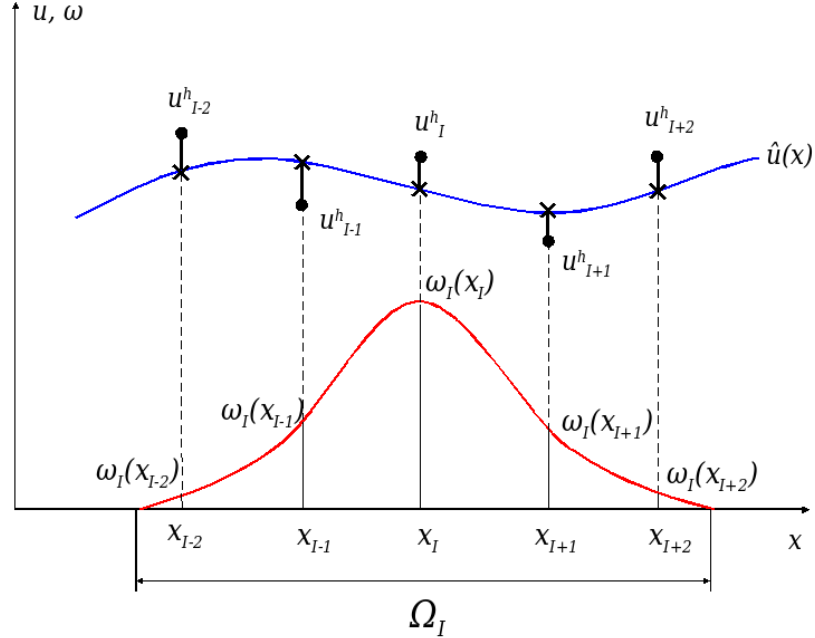


Figura 3.1: Aproximación por *mínimos cuadrados ponderados fijos* FWLS.

### 3.2. Función de ponderación de *Gauss*

En el MPF se recurre al uso de la *función de ponderación* de *Gauss* para conferir el carácter local a la interpolación y a la vez distribuir o ponderar el error cometido en la interpolación, según el tamaño de la *nube* y su radio de influencia  $r$ , (Oñate et al., 1996a,b; Oñate & Idelsohn, 1998; Oñate et al., 2000, 2001; Perazzo, 2002; Perazzo et al., 2007).

$$\omega(d^{2k}) = \begin{cases} \frac{\exp(-(d/c)^{2k}) - \exp(-(r/c)^{2k})}{(1 - \exp(-(r/c)^{2k}))} & \text{si } d \leq r \\ 0 & \text{si } d > r \end{cases} \quad (3.16)$$

siendo  $d$  la norma euclídeana de la diferencia de los vectores posición entre el *nodo estrella* y un nodo de la *nube*. El parámetro  $c$ , denominado factor de apuntamiento, y el exponente  $k$ , establecen la forma de la *función de ponderación*. El factor de apuntamiento determina el que los "pesos" de la *función de ponderación* sean mayores, tanto cerca como lejos de  $\mathbf{x}_I$ . No existe un criterio claro para fijar el valor de  $c$ , es así como en (Belytschko et al., 1994) se sugiere

$$c = \beta c_I, \quad 1 \leq \beta \leq 2 \quad (3.17)$$

con

$$c_I = \max_{j \in S_j} \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\| \quad (3.18)$$

siendo  $S_j$  el menor conjunto de puntos necesarios para determinar un polígono alrededor de  $\mathbf{x}_I$ .

Por otro lado, en el trabajo de (Oñate et al., 1996a) se propone determinar  $c$  en función del radio de influencia de acuerdo a

$$c = \beta r, \quad \beta = 0,5 \quad (3.19)$$

mientras que (Hegen, 1996) sugiere

$$c = \beta r, \quad \beta = 0,25 \quad (3.20)$$

Posteriormente, (Atluri et al., 2000) propone otro enfoque para la selección de los parámetros  $c$  y  $r$  de la *función de ponderación de Gauss*

$$\frac{r}{c} = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{\pi N}{am}} \quad (3.21)$$

con  $l$  una longitud característica,  $a$  el area del dominio de análisis,  $N$  el número total de nodos utilizados y  $m$  el número de términos de la base de interpolación. Reordenando la expresión anterior, los valores buscados corresponden a

$$c = \beta r, \quad \beta = \frac{2}{l} \sqrt{\frac{am}{\pi N}} \quad (3.22)$$

En general, el radio de influencia es evaluado como el producto de una constante entera positiva por la máxima distancia,  $d_{m\acute{a}x}$ , entre los nodos de la *nube*  $\Omega_I$  y el *nodo estrella*, Perazzo (2002)

$$r = q \max_{j \in \Omega_I} \|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_j\| = 1,1 d_{m\acute{a}x}. \quad (3.23)$$

La constante entera positiva se utiliza para evitar la singularidad de la matriz  $\mathbf{A}_I$ , ecuación 3.10, en el caso que  $m = n$ . Al escoger un radio de influencia igual a la distancia entre el *nodo estrella*  $\mathbf{x}_I$  y el  $n$ -ésimo punto más lejano, se obtiene que  $\omega(\mathbf{x}_I - \mathbf{x})$  se anula en dicho punto. Si además, en esa *nube* se verifica que  $m = n$ , entonces uno de los coeficientes de la diagonal de  $\mathbf{W}_I$ , ecuación 3.8, sera nulo y por tanto  $\text{rango}(\mathbf{A}_I) < m$ , la matriz  $\mathbf{A}_I$  no es invertible y la aproximación no existiría.

En esta tesis, se utiliza para el calculo de la *función de ponderación de Gauss*,  $q = 1,1$ ,  $k = 1,0$  y  $c = 0,25r$ .

Las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 muestran la variación en la forma de la *función de ponderación de Gauss*, observándose una alta sensibilidad de esta respecto a los valores de los parámetros  $c$ ,  $q$  y  $k$ .

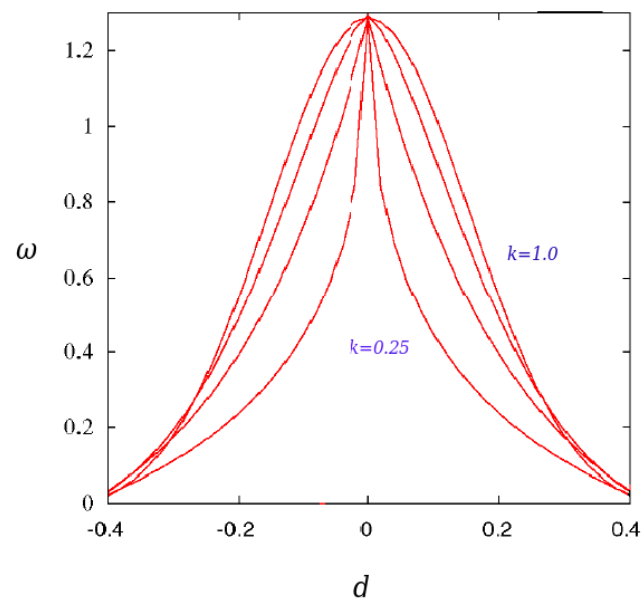


Figura 3.2: Comportamiento de la *función de ponderación* de Gauss respecto del parámetro  $k$ , ( $c = 0.25r, q = 1.1$ ).

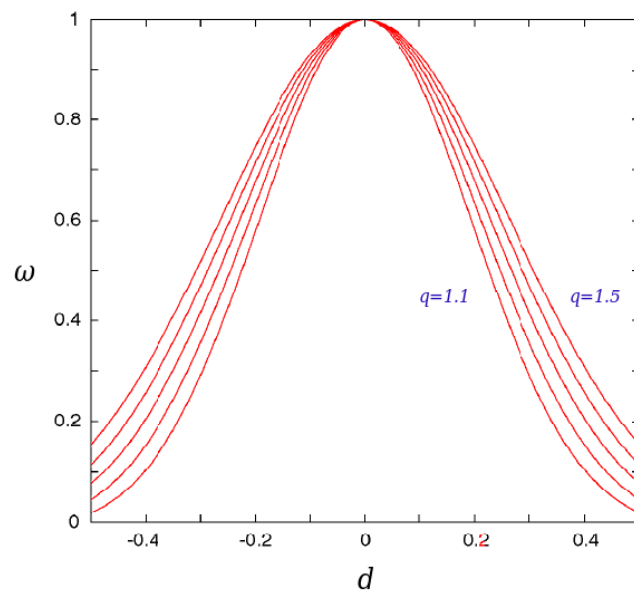


Figura 3.3: Comportamiento de la *función de ponderación* de Gauss respecto del parámetro  $q$ , ( $c = 0.25r, k = 1.0$ ).

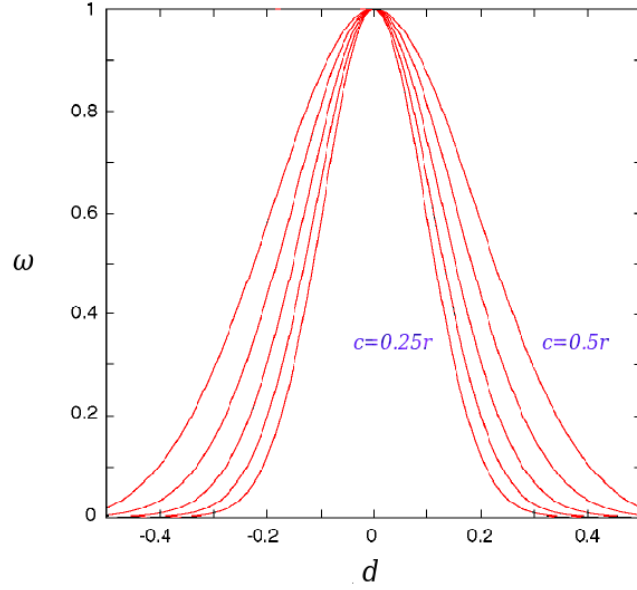


Figura 3.4: Comportamiento de la *función de ponderación de Gauss* respecto del parámetro  $c$ , ( $k = 1.0, q = 1.1$ ).

### 3.3. Discretización mediante colocación puntual

De acuerdo con la ecuación 3.1, la función aproximada  $\hat{u}(\mathbf{x})$  se define para cada subdominio de interpolación  $\Omega_I$ , por lo que la aproximación para un punto  $K$  que pertenezca a dos nubes  $\Omega_I$  y  $\Omega_J$ , respectivamente, no tiene un único valor ( $\phi_K^I \neq \phi_K^J$ ), ver figura 2.1. En el MPF esta disyuntiva se resuelve utilizando el procedimiento de *colocación puntual* (Oñate et al., 1996a,b; Oñate & Idelsohn, 1998; Oñate et al., 2000, 2001; Perazzo, 2002; Perazzo et al., 2007) que se describe a continuación.

Considérese un problema general vectorial gobernado por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.24)$$

con su condición de contorno de *Neumann* (natural) <sup>1</sup>

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}) = \mathbf{t}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (3.25)$$

y condición de *Dirichlet* (esencial) <sup>2</sup>

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_p = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3.26)$$

el cual debe satisfacerse en un dominio  $\Omega$  con contorno  $\Gamma := \Gamma_t \cup \Gamma_u$ . En las expresiones anteriores,  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son operadores diferenciales,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  será el vector de incógnitas<sup>3</sup> y  $\mathbf{u}_p$  el valor prescrito de  $\mathbf{u}$

<sup>1</sup>En este trabajo esta condición corresponde al *campo de tensiones prescritas*.

<sup>2</sup>En este trabajo esta condición corresponde al *campo de desplazamientos prescritos*.

<sup>3</sup>En este trabajo  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$  será el *campo de desplazamientos*.

a lo largo del contorno  $\Gamma_u$ . Por otro lado,  $\mathbf{b}$  y  $\mathbf{t}$ , representan las fuerzas forzantes<sup>4</sup> actuando sobre el dominio  $\Omega$  y a lo largo del contorno  $\Gamma_t$ , respectivamente.

Una forma general para resolver el problema anterior es el *método de los residuos ponderados* (Zienkiewicz & Taylor, 2000), técnica que permite obtener una aproximación a partir de una ecuación integral equivalente al sistema de ecuaciones diferenciales del problema.

Si la solución exacta  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  se aproxima por  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ , por ejemplo utilizando la aproximación final del MPF definida en la Ec. 3.14, en general se tiene que las expresiones 3.24, 3.25 y 3.26 no serán satisfechas obteniéndose unos residuos o errores tanto en el dominio  $\Omega$  como en el contorno  $\Gamma$ .

La solución aproximada al problema original se consigue ponderando el error cometido en la aproximación mediante el uso de  $N$  *funciones test* de acuerdo a

$$\int_{\Omega} \mathbf{v}_I(\mathbf{x}) (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b}) d\Omega + \int_{\Gamma_t} \bar{\mathbf{v}}_I(\mathbf{x}) (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t}) d\Gamma_t + \int_{\Gamma_u} \bar{\bar{\mathbf{v}}}_I(\mathbf{x}) (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_p) d\Gamma_u = 0 \quad (3.27)$$

$$\forall \mathbf{v}_I(\mathbf{x}), \bar{\mathbf{v}}_I(\mathbf{x}), \bar{\bar{\mathbf{v}}}_I(\mathbf{x}) \in V, \quad I = 1, \dots, N$$

donde  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ ,  $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ ,  $\bar{\bar{\mathbf{v}}}(\mathbf{x})$  son las *funciones test*,  $V$  es un subespacio finito de *Sobolev* y  $N$  el número de incógnitas del problemas.

Si para la ecuación 3.27 se escogen *funciones test* tal que

$$\mathbf{v}_I(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{v}}_I(\mathbf{x}) = \bar{\bar{\mathbf{v}}}_I(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \quad I = 1, \dots, N \quad (3.28)$$

se obtiene la discretización mediante *colocación puntual* utilizada en el MPF, donde el término  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$  corresponde a la función delta de *Dirac*, es decir,

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{b})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Omega - \Gamma \\ (\mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t})_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \\ (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_p)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (3.29)$$

Reemplazando la aproximación 3.14 en el sistema de ecuaciones 3.29, se obtiene finalmente el conjunto de ecuaciones discretizadas cuya forma compacta es

$$\mathbf{K}\mathbf{u}^h = \mathbf{f} \quad (3.30)$$

donde la matriz  $\mathbf{K} \in \text{Mat}(N \times N)$  contiene las *funciones de forma*  $\phi_I(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{u}^h \in \text{Vec}(N)$  contiene los parámetros desconocidos o incógnitas del problema sin malla, y  $\mathbf{f} \in \text{Vec}(N)$  los términos que incluyen los valores prescritos de fuerzas  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$  y los desplazamientos  $\mathbf{u}_p$ .

De esta forma, la colocación puntual, permite satisfacer ecuaciones diferenciales en puntos del dominio de solución, sin tener que definir subdominios de integración como en el caso de las formulaciones débiles (por ejemplo FEM).

<sup>4</sup>En esta tesis corresponden a *fuerzas internas* y *fuerzas externas*.

### 3.4. Generación local de *nubes* de interpolación

Debido al carácter local de la aproximación utilizada en el *método de puntos finitos*, es indispensable definir para cada nodo del dominio una *nube de puntos* que considere sólo los nodos más próximos a él. Se puede observar que un mismo punto podrá ser *nodo estrella* o vecino dependiendo de la *nube* en que se encuentre. La figura 3.5 muestra esquemáticamente una partición típica de un dominio en *nubes* circulares de radios variables.

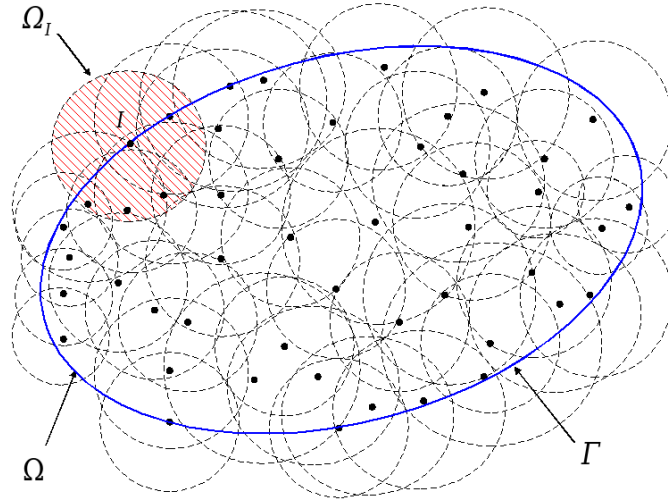


Figura 3.5: Dominio del problema  $\Omega$  y nube  $\Omega_I$  asociada al *nodo estrella*  $I$ .

A pesar de no ser fácilmente cuantificables, se pueden establecer intuitivamente ciertos criterios que permitan generar *nubes* de buena calidad, por ejemplo

1. el *nodo estrella* debe estar completamente rodeado por los otros nodos pertenecientes a la *nube*.
2. el centro de gravedad de la *nube* debe estar situado lo más cerca posible al *nodo estrella*.
3. las *nubes* asociadas a nodos vecinos deben tener suficiente traslape como para asegurar la convergencia global de las aproximaciones locales por FWLS.
4. otro aspecto relevante en la definición las *nubes* asociadas a cada uno de los nodos, es que su superposición debe conformar el dominio estudiado en toda su amplitud, es decir,

$$\bigcup_{I=1}^N \Omega_I = \Omega \quad (3.31)$$

A continuación se señalan algunos criterios generalmente utilizados en la generación de *nubes* y que permiten la satisfacción adecuada de las condiciones indicadas previamente, la figura 3.6 muestra esquemáticamente estos criterios en un caso 2D. En dicha figura los nodos candidatos a pertenecer a la *nube* se indican con fondo sólido azul.



- a) Criterio de mínima distancia (Jensen, 1972), donde los puntos que forman la *nube*, se sitúan dentro del círculo de radio  $R_I$  centrado en el *nodo estrella*. El valor de  $R_I$  debe permitir obtener *nubes* con un número suficiente de puntos de modo que la realización de una interpolación por mínimos cuadrados sea posible, ver figura 3.6.
- b) Criterio de ocho segmentos - “*eight segment criterion*” (Perrone & Kao, 1975), que consiste en subdividir el entorno que rodea al *nodo estrella* con ocho segmentos y seleccionar por cada sector generado el nodo más cercano, ver figura 3.6.
- c) Criterio de cuatro cuadrantes - “*four quadrant criterion*” (Liszka & Orkisz, 1980; Oñate et al., 2001; Perazzo, 2002), consiste en utilizar un sistema cartesiano de ejes centrado en el *nodo estrella* y escoger los dos puntos más cercanos al origen de éste por cada cuadrante, ver figura 3.6.

Para profundizar en las características e implementación de cada uno de los criterios señalados se sugiere revisar directamente las fuentes citadas.

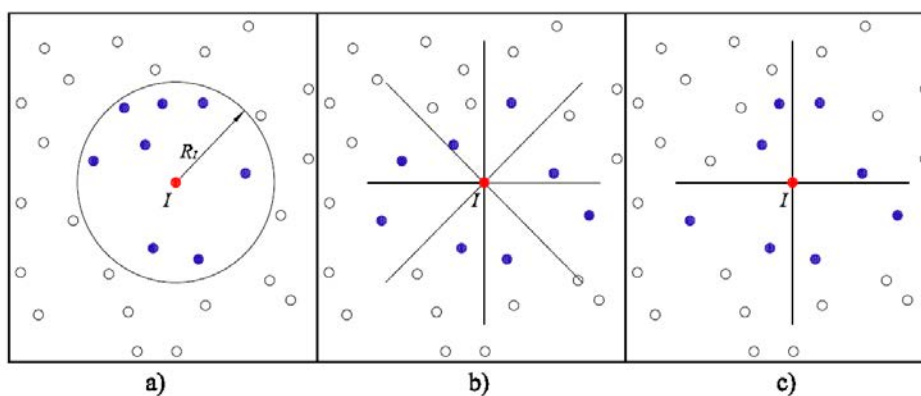


Figura 3.6: Generación local de *nubes* 2D mediante el criterio de a) mínima distancia, b) ocho segmentos y c) cuatro cuadrantes.

En esta tesis se utiliza el criterio de cuatro cuadrantes para la generación local de las *nubes* asociadas a cada uno de los nodos con los que se caracteriza el dominio de análisis, además, el número de nodos de la *nube*  $n$ , se ha fijado en 9 puntos para los ejemplos 2D desarrollados.

### 3.5. Polinomio base de interpolación y función de forma

Un aspecto importante en la construcción de la *función de forma* y el cálculo de sus derivadas cuando se utiliza una aproximación por mínimos cuadrados, es la necesidad de invertir la matriz de momentos  $A_I$  presente en la ecuación 3.9 para cada punto de la discretización. Para evitar un posible mal condicionamiento de esta matriz cuando las coordenadas globales del punto se alejan del origen del sistema de referencia, es deseable expresar la *base de interpolación* en coordenadas locales (centrada en el *nodo estrella*) y adimensionales (Oñate et al., 2001; Perazzo, 2002). Con este cambio de coordenadas, en un caso 2D, las *bases de interpolación* señaladas en las ecuaciones 3.2 y 3.3 son remplazadas por la nueva base cuadrática definida por

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}) = \left[ 1 \quad \frac{x_I - x}{dx_{\max}} \quad \frac{y_I - y}{dy_{\max}} \quad \left( \frac{x_I - x}{dx_{\max}} \right)^2 \quad \left( \frac{(x_I - x)(y_I - y)}{dx_{\max} dy_{\max}} \right) \quad \left( \frac{y_I - y}{dy_{\max}} \right)^2 \right]^T \quad (3.32)$$

donde, tal como se indica esquemáticamente en la figura 3.7, se han utilizado las distancias máximas en la *nube* respecto al *nodo estrella* para adimensionalizar la base. En esta figura los nodos pertenecientes a la *nube I* se indican con fondo sólido azul.

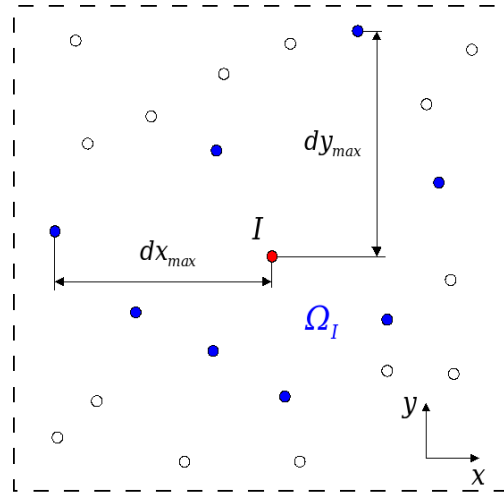


Figura 3.7: Parámetros utilizados para adimensionalizar la *base de interpolación* en una *nube* de puntos 2D.

Esta forma de definir las bases hace que la implementación del MPF mediante *colocación puntual* se torne especialmente simple, puesto que en este tipo de técnica sólo se evalúa la *base de interpolación* en el nodo  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_I) = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (3.33)$$

### 3.6. Derivabilidad de la aproximación

La derivabilidad de la aproximación construida a partir de un procedimiento WLS, depende de la *base de interpolación* y la *función de ponderación*. Según (Lancaster & Salkauskas, 1981), si se demuestra que la base es continuamente derivable hasta el orden  $k$  en  $\Omega$  y la *función de ponderación* es continuamente derivable hasta el orden  $l$  en  $\Omega$ , se tiene que las *funciones de forma* y por tanto la aproximación, es derivable hasta un orden dado por  $\min(k, l)$ . De esta forma, se pueden considerar aproximaciones con *funciones de ponderación* derivables hasta el orden requerido por el problema a resolver, ecuación 3.29. Si el orden de derivabilidad es suficientemente alto, entonces se pueden calcular las derivadas.

La derivada parcial de la *función de forma* en la aproximación FWLS, se obtiene derivando solamente los términos de la *base de interpolación*, ya que a diferencia de lo que ocurre en el caso MLS, el vector de parámetros  $\alpha$ , ecuaciones 3.1 y 3.9, contiene términos constantes que no dependen de la posición del punto donde se quiere evaluar la aproximación, por tanto la derivada de la *función de forma* tiene la siguiente expresión (recordar ecuación 3.15)

$$\phi_{I,l}^i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m p_{k,l}(\mathbf{x}) [A_I]_{kj}^{-1} [B_I]_{ji} \quad (3.34)$$

el subíndice que sigue a la coma, representa la derivada respecto de la coordenada espacial  $l$  –ésima, es decir  $(\cdot)_{,l} = \partial(\cdot)/\partial x^l$ . Las derivadas de orden superior se pueden obtener repitiendo el mismo procedimiento.

### 3.7. Estabilización de la aproximación

En el MPF y debido a las características propias de la técnica de *colocación puntual* utilizada, la prescripción de condición de contorno de *Dirichlet* se realiza en forma sencilla imponiendo el valor directamente en el punto y sin un tratamiento adicional en el sistema de ecuaciones 3.29.

Por otro lado, la condición de contorno de *Neumann* se debe asignar en los puntos donde se conocen las componentes del vector de *fuerzas externas* y adicionalmente en los puntos del contorno libre (sistema de ecuaciones 3.29), por ende, se hace necesario, preservar la simetría de la *nube* para una adecuada aproximación de las derivadas de la función incógnita, lo cual es difícil de conseguir en los subdominios del contorno. Otra particularidad de la técnica de *colocación puntual* es que las ecuaciones de equilibrio sólo se imponen en los nodos interiores del dominio, lo que suele afectar la exactitud de la solución cuando no se utiliza un número suficiente de puntos.

Una forma de abordar estas particularidades, en definitiva inestabilidades, consiste en modificar el sistema final de ecuaciones agregando nuevos términos que son función de las ecuaciones originales de gobierno del problema. En el contexto del *método de puntos finitos*, la técnica para obtener este nuevo sistema de ecuaciones, está basada en el procedimiento de cálculo finitesimal - “*Finite Increment Calculus*” (FIC) Oñate (1996, 2004).

Las ideas claves del procedimiento FIC se resumen en

1. imponer las ecuaciones de equilibrio o balance sobre un dominio de tamaño finito
2. aproximar el campo desconocido o incógnita del problema utilizando una expansión en serie de *Taylor*
3. conservar los términos de un orden superior que aquellos utilizados en una aproximación infinitesimal estándar

De este modo se obtiene el nuevo sistema de ecuaciones estabilizado

$$\begin{aligned}
 \left( \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) \mathbf{b} \right)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Omega - \Gamma \\
 \left( \mathcal{B}(\hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2} h_n \mathcal{A}(\hat{\mathbf{u}}) - \mathbf{t} \right)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \\
 (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_p)_{\mathbf{x}_I} &= 0 & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

siendo  $\nabla$  el operador gradiente,  $\mathbf{h}$  un vector que contiene la longitud característica del subdominio donde son impuestas las ecuaciones de equilibrio y  $h_n$  corresponde a la proyección del vector  $\mathbf{h}$  en la dirección de la normal  $\hat{\mathbf{n}}$  del contorno, es decir,  $h_n = \mathbf{h}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}$ .

Se debe notar que si en el sistema de ecuaciones 3.35 el vector  $\mathbf{h}$  tiende a cero, es decir, cuando la longitud característica del dominio es infinitesimal, se recupera la forma original de las ecuaciones del problema, ecuación 3.29.

En esta tesis, la longitud característica se obtiene de acuerdo a

$$\mathbf{h} = \mathbf{d}_{min} \quad (3.36)$$

donde  $\mathbf{d}_{min}$  contiene las distancias entre el nodo estrella y el nodo más cercano a este. La figura. 3.8 muestra esquemáticamente lo anterior para un caso 2D. En esta figura los nodos pertenecientes a la nube  $I$  se indican con fondo sólido azul.

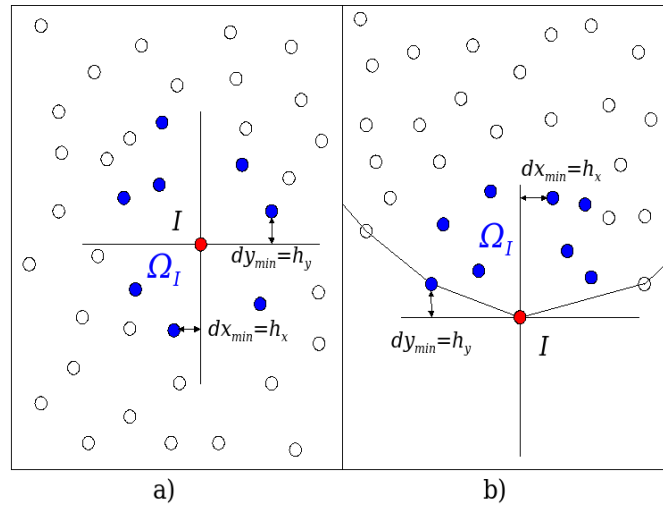


Figura 3.8: Definición de las componentes del vector  $\mathbf{h}$  en 2D para subdominios del a) dominio y b) contorno.

## Capítulo 4

# Aproximación del comportamiento elástico lineal del material mediante el MPF

El principal objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento no-lineal del material utilizando aproximaciones elásticas y el *método de puntos finitos*. Para conseguir este, se hace necesario y fundamental disponer de herramientas que permitan obtener soluciones elásticas robustas como paso previo de la modelación del fenómeno no-lineal. En este capítulo se entrega un procedimiento para implementar numéricamente el MPF en un caso 2D de un sólido lineal elástico.

### 4.1. Marco teórico

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el comportamiento de un sólido lineal elástico, cuyas fuerzas de inercias son despreciables, es decir, la ecuación de equilibrio

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (4.1)$$

con su correspondiente condición de *Neumann*

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (4.2)$$

y condición de *Dirichlet*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (4.3)$$

siendo  $\nabla$  el operador divergencia,  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones,  $\rho$  la densidad volumétrica del sólido,  $\rho \mathbf{b}$  el vector de *fuerzas másicas* en el interior del sólido,  $\hat{\mathbf{n}}$  el vector normal al contorno  $\Gamma_t$ ,  $\mathbf{u}$  el vector de desplazamientos y  $\bar{\mathbf{t}}$ ,  $\bar{\mathbf{u}}$  los vectores de tracción y desplazamientos prescritos sobre el contorno  $\Gamma_t$  y  $\Gamma_u$  respectivamente.

Utilizando las relaciones fundamentales *tensión-deformación* (ecuación constitutiva - ley de *Hooke*) y *deformación-desplazamiento* (ecuación geométrica), se obtiene el siguiente sistema expresado únicamente en términos de los desplazamientos [Malvern \(1969\)](#); [Timoshenko & Goodier \(1970\)](#); [Sadd \(2005\)](#)

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x})) + \mu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{x}) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}))\mathbf{n} + \mu(\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{aligned}$$

donde  $\otimes$  es el operador gradiente y  $\lambda, \mu$  son las constantes de *Lamé* que caracterizan el comportamiento elástico del material.

Mediante el uso de la aproximación final del *método de puntos finitos*, ecuación 3.14, para el campo de desplazamientos y la técnica de *colocación puntual* definida en el apartado 3.3, se obtiene en conclusión el siguiente sistema discreto de ecuaciones

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I)) + \mu\nabla^2\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) + \rho\mathbf{b}(\mathbf{x}_I) &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x}_I \in (\Omega - \Gamma) \\ \lambda(\nabla \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I))\mathbf{n} + \mu(\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) \otimes \nabla + \nabla \otimes \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I)) \cdot \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I) & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_t \\ \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) &= \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_I) & \forall \mathbf{x}_I \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (4.4)$$

del cual se destacan los siguientes aspectos propios del procedimiento de *colocación puntual* utilizado en la construcción de la aproximación MPF

1. La ecuación de equilibrio del problema se impone únicamente en los nodos interiores del dominio  $(\Omega - \Gamma)$ .
2. La condición de contorno de *Neumann* se impone también en los nodos donde el vector de tracciones prescrito  $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x}_I)$  sea nulo, contorno libre del sólido.
3. La condición de contorno de *Dirichlet* se impone de manera directa sin un un procedimiento especial.

## 4.2. Implementación numérica

A continuación se entrega el procedimiento para implementar numéricamente el MPF en un caso 2D de un sólido lineal elástico. Este mismo proceso puede ser aplicado tanto para un caso 1D como 3D con las características geométricas y físicas del problema en cuestión.

Desarrollando el sistema de ecuaciones 4.4 es posible encontrar la solución del campo de desplazamientos de acuerdo a:

Ecuación de equilibrio

$$\begin{aligned}\sigma_{x,x} + \tau_{xy,y} + \rho b_x &= 0 \\ \tau_{yx,x} + \sigma_{y,y} + \rho b_y &= 0\end{aligned}\quad (4.5)$$

Condición de *Neumann*

$$\begin{aligned}\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= \bar{t}_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y &= \bar{t}_y\end{aligned}\quad (4.6)$$

Condición de *Dirichlet*

$$\begin{aligned}u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v}\end{aligned}\quad (4.7)$$

cuya forma matricial compacta se escribe como

$$\begin{aligned}\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma \\ \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{t}} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u\end{aligned}\quad (4.8)$$

siendo  $\mathbf{L}$  un operador que define la ecuación diferencial,  $\mathbf{N}$  matriz que contiene los cosenos directores en la dirección normal exterior al contorno,  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ) es el vector de tensiones,  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos,  $\rho \mathbf{b}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$  y  $\bar{\mathbf{u}}$  son las fuerzas másicas, fuerzas distribuidas y desplazamientos prescritos respectivamente. Estas variables se definen a partir de

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, & \mathbf{N} &:= \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma} &:= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, & \mathbf{u} &:= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \rho \mathbf{b} &:= \begin{bmatrix} \rho b_x \\ \rho b_y \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{t}} &:= \begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{u}} &:= \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Para obtener un sistema equivalente en términos de los desplazamientos, se debe usar la relación *tensión - deformación* (ley de *Hooke*) y la relación *deformación - desplazamiento* de la siguiente forma



$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L}\mathbf{u}\end{aligned}\tag{4.9}$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  representa el vector de deformaciones y  $\mathbf{D}$  (caso 2D) representa la matriz simétrica constitutiva (o de constantes elásticas), cuyas componentes en el caso de un material elástico isótropo [Timoshenko & Goodier \(1970\)](#); [Sadd \(2005\)](#) son

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix}\tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}d_{11} &= d_{22} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \\ d_{12} &= d_{21} = \bar{\nu}d_{11} \\ d_{33} &= \frac{\bar{E}}{2(1 + \bar{\nu})}\end{aligned}$$

con

$$\bar{E} = \begin{cases} E & \text{tensión plana} \\ \frac{E}{(1 - \nu)} & \text{deformación plana} \end{cases}$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & \text{tensión plana} \\ \frac{\nu}{(1 - \nu)} & \text{deformación plana} \end{cases}$$

siendo  $E$  y  $\nu$ , parámetros que caracterizan el material, denominados módulo de elasticidad longitudinal y coeficiente de *Poisson* respectivamente.

Reemplazando 4.9 en 4.8 y utilizando la aproximación sin malla del MPF definida en 3.14 para los componentes  $u$  y  $v$  del vector de desplazamientos incógnitos  $\mathbf{u}$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\cong \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_I^1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & \phi_I^n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_I^1(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & \phi_I^n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^h \\ v_1^h \\ \vdots \\ u_n^h \\ v_n^h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_I^1 & \Phi_I^2 & \cdots & \Phi_I^n \end{bmatrix} \mathbf{u}^h \quad \Phi_I^i \in Mat(2 \times 2), i = 1, \dots, n \\ &= \Phi \mathbf{u}^h\end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema matricial de ecuaciones

$$[\mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \Phi] \mathbf{u}^h = -\rho \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma\tag{4.11a}$$

$$[\mathbf{N}^T \mathbf{D} \mathbf{L} \Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (4.11b)$$

$$[\Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (4.11c)$$

con su forma compacta (recordar la ecuación 3.30)

$$\mathbf{K}_I \mathbf{u}^h = \mathbf{f}_I \quad I = 1, \dots, N \quad (4.12)$$

La matriz  $\mathbf{K}_I$  para cada punto  $I$  del dominio esta a su vez formada por  $n$  sub-matrices  $\mathbf{K}_I^i \in \text{Mat}(2 \times 2)$

$$\mathbf{K}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_I^1 & \mathbf{K}_I^2 & \mathbf{K}_I^3 & \dots & \mathbf{K}_I^{n-1} & \mathbf{K}_I^n \end{bmatrix}$$

donde el superíndice  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , identifica el nodo en la *nube* perteneciente al nodo estrella  $I$ .

Los coeficientes de cada sub-matriz  $\mathbf{K}_I^i$  y su correspondiente vector de fuerzas independientes  $\mathbf{f}_I \in \text{Vec}(2 \times 1)$  se obtienen mediante la técnica de *colocación puntual* de la siguiente forma

- si  $I \in \Omega - \Gamma$

$$\mathbf{K}_I^i \begin{cases} [\mathbf{K}_I^i]_{11} = d_{11}\phi_{I,xx}^i + d_{33}\phi_{I,yy}^i \\ [\mathbf{K}_I^i]_{12} = \phi_{I,xy}^i(d_{12} + d_{33}) \\ [\mathbf{K}_I^i]_{21} = [\mathbf{K}_I^i]_{12} \\ [\mathbf{K}_I^i]_{22} = d_{22}\phi_{I,yy}^i + d_{33}\phi_{I,xx}^i \end{cases}, \quad \mathbf{f}_I = -\rho \mathbf{b}$$

- si  $I \in \Gamma_t$

$$\mathbf{K}_I^i \begin{cases} [\mathbf{K}_I^i]_{11} = d_{11}\phi_{I,x}^i n_x + d_{33}\phi_{I,y}^i n_y \\ [\mathbf{K}_I^i]_{12} = d_{12}\phi_{I,y}^i n_x + d_{33}\phi_{I,x}^i n_y \\ [\mathbf{K}_I^i]_{21} = d_{33}\phi_{I,y}^i n_x + d_{12}\phi_{I,x}^i n_y \\ [\mathbf{K}_I^i]_{22} = d_{33}\phi_{I,x}^i n_x + d_{22}\phi_{I,y}^i n_y \end{cases}, \quad \mathbf{f}_I = \bar{\mathbf{t}}$$

- si  $I \in \Gamma_u$

$$\mathbf{K}_I^i \begin{cases} [\mathbf{K}_I^i]_{11} = \phi_I^i \\ [\mathbf{K}_I^i]_{12} = 0 \\ [\mathbf{K}_I^i]_{21} = 0 \\ [\mathbf{K}_I^i]_{22} = \phi_I^i \end{cases}, \quad \mathbf{f}_I = \bar{\mathbf{u}}$$

Resolviendo el sistema matricial 4.12, se obtiene el vector de parámetros  $\mathbf{u}^h$  y a partir de éste el vector del campo de desplazamiento aproximado  $\hat{\mathbf{u}}$ , el vector de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y el vector de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ .

### 4.2.1. Estabilización de la aproximación

La técnica de estabilización basada en (FIC) Oñate (1996, 2004) descrita en el apartado 3.7 se aplica al sistema de ecuaciones 4.11 definiendo

$$\mathbf{r}_{\text{FIC}} = [\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\Phi}] \quad (4.13)$$

obteniéndose

$$\left\{ [\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{L}^T\boldsymbol{\Phi}] - \frac{1}{2}\mathbf{h}^T\nabla\mathbf{r}_{\text{FIC}} \right\} \mathbf{u}^h = -\rho\mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma \quad (4.14a)$$

$$\left\{ [\mathbf{N}^T\mathbf{D}\mathbf{L}\boldsymbol{\Phi}] - \frac{1}{2}h_n\mathbf{r}_{\text{FIC}} \right\} \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{2}h_n\rho\mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (4.14b)$$

$$[\boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (4.14c)$$

siendo  $\nabla$  el operador gradiente,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\rho\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$  y  $\bar{\mathbf{u}}$  las matrices y vectores definidos en el apartado 4.2 y  $h_n$  la proyección del vector  $\mathbf{h}$  en la dirección de la normal exterior  $\hat{\mathbf{n}}$  del contorno, sección 3.7.

Se debe reiterar que si en el sistema de ecuaciones 4.14 el vector  $\mathbf{h}$  tiende a cero, es decir, cuando la longitud característica del dominio es infinitesimal, se recupera la forma original de las ecuaciones del problema, sistema 4.11

Por último, cabe mencionar, que las modificaciones introducidas al sistema de ecuaciones 4.14 que gobierna el problema lineal elástico, no alteran la naturaleza sin malla del *método de puntos finitos*.

## 4.3. Ejemplos numéricos

En este trabajo se ha desarrollado e implementado un código en lenguaje MATLAB (MATLAB, 2007) para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el *método de puntos finitos*, ver apéndice A. Además, dicho código ha sido integrado con el software comercial de pre y post proceso gráfico GiD (GiD-v8.0, 2007).

A continuación se presentan una serie de ejemplos numéricos que permiten evaluar el desempeño del *método de puntos finitos* en la simulación del comportamiento elástico lineal de sólidos isótropos. Estos problemas han sido extraídos de la literatura indicándose sus fuentes donde corresponda.

### 4.3.1. Test de la parcela

Para comprobar la convergencia del MPF en problemas de elasticidad 2D, se resuelve en primer lugar el test de la parcela simple (Zienkiewicz & Taylor, 2000), prueba ampliamente utilizada en la verificación de programas de elementos finitos.

En el contexto de los *métodos sin malla*, este test ha sido empleado en (Belytschko et al., 1994) para demostrar la pérdida de consistencia de la aproximación, cuando no se utilizan multiplicadores de Lagrange para imponer las condiciones de contorno. También se ha usado en los trabajos de (Liu & Gu, 2001a) y (Atluri et al., 2000) en el ámbito del PIM y MLPG respectivamente. Por otro en (Oñate et al., 2001; Perazzo, 2002) se ha utilizado para comprobar la convergencia del MPF y el código programado en dicho trabajo. Recientemente se ha empleado en la verificación del funcionamiento de un método adaptivo basado en una formulación radial del PIM (Liu et al., 2006).

En primer lugar, se resuelven las ecuaciones de elasticidad en tensión plana, para el dominio cuadrado mostrado en la figura 4.1. Se ha utilizado una discretización uniforme de 9 nodos y una *base de interpolación* cuadrática ( $m = 6$ ), ecuación 3.32. Los valores empleados para el módulo elástico y el coeficiente de *Poisson* son  $E = 1000$  y  $\nu = 0,3$  respectivamente.

En los 8 nodos del contorno se prescriben desplazamientos  $u = v = x + y$ , verificándose la respuesta obtenida mediante el MPF para las distintas posiciones del punto central (4) indicadas en la tabla 4.1.

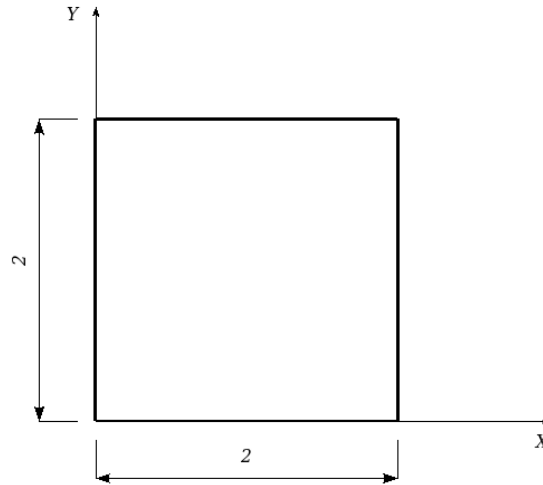


Figura 4.1: Geometría del test de la parcela.

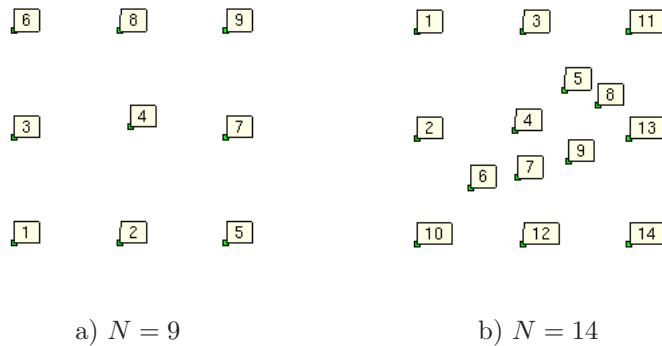


Figura 4.2: Discretización de puntos del dominio, test de la parcela.

En todas las situaciones, los valores numéricos del desplazamiento y tensión del nodo interior coinciden

Tabla 4.1: Coordenadas del punto central (4) para el test de la parcela con 9 puntos.

Coordenadas punto 4
(1,0 ; 1,0)
(1,2 ; 0,35)
(0,22 ; 0,15)
(0,3 ; 1,76)
(1,87 ; 1,9)

Tabla 4.2: Resultados numéricos para el test de la parcela con 14 puntos.

Punto	Coordenadas	Desplazamiento ( $u = v$ )	$\sigma_x = \sigma_y$	$\tau_{xy}$
4	(0,925826; 1,074174)	2	1428,6	769,23
5	(1,391055; 1,455919)	2,846974	1428,6	769,23
6	(0,503017; 0,536515)	1,039532	1428,6	769,23
7	(0,948477; 0,626476)	1,574953	1428,6	769,23
8	(1,703278; 1,310207)	3,013485	1428,6	769,23
9	(1,422055; 0,784908)	2,206963	1428,6	769,23

de forma exacta con la solución teórica.

Un segundo test consiste en utilizar la distribución aleatoria de 14 puntos mostrada en la figura 4.2-b, calculando esta vez la respuesta en todos los puntos interiores del dominio. Al igual que en el caso anterior, se prescriben los desplazamientos para los puntos sobre el contorno. Los objetivos perseguidos son por un lado que los desplazamientos en los nodos interiores sigan la misma distribución lineal prescrita en el contorno, y las deformaciones y tensiones sean constantes en la parcela.

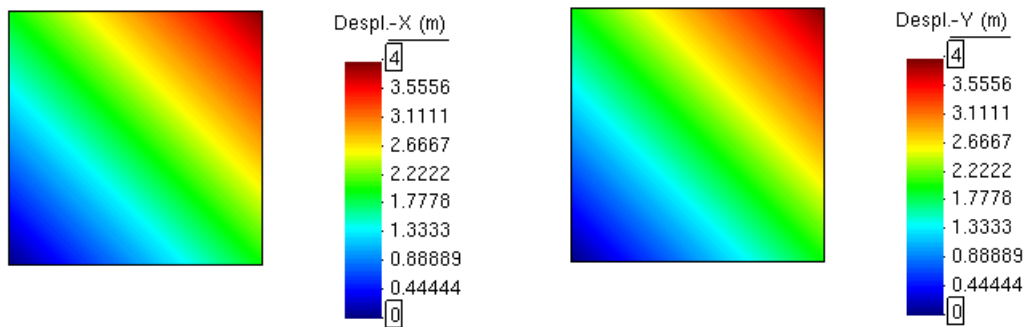
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$       b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$ 

Figura 4.3: Resultados numéricos test de la parcela, distribución regular e irregular de puntos.

La tabla 4.2 entrega un resumen de resultados numéricos de este último test mientras que la figura 4.3 muestra el contorno de desplazamientos tanto para la distribución regular e irregular de puntos. En todos los puntos analizados se obtienen los valores exactos de la solución teórica, por lo tanto, el

método de puntos finitos cumple con el test de la parcela.

### 4.3.2. Test de la parcela de orden superior

El test de la parcela resulta ser una verificación apropiada de la correcta programación del MPF, sin embargo, no asegura el funcionamiento preciso de dicha programación cuando se prescriben condiciones de contorno de *Neumann*. Para verificar lo anterior se realiza un segundo test, de orden superior, en el que se incluyen este tipo de condiciones (ver figura 4.4).

Para discretizar el dominio se han utilizado dos distribuciones regulares (23 y 46 puntos) y dos distribuciones irregulares (23 y 49 puntos) ver figura 4.5. Se considera un espesor unitario y condición de tensión plana. Los valores del módulo de elasticidad y relación de *Poisson* son  $E = 1,0$  y  $\nu = 0,25$  respectivamente. En la solución numérica mediante el MPF se ha utilizado un polinomio de interpolación cuadrático y *nubes* de 9 puntos.

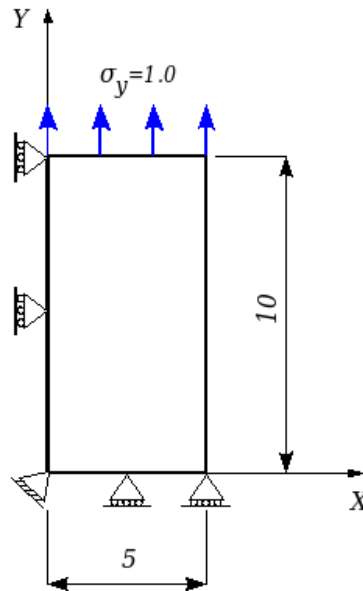


Figura 4.4: Geometría y condiciones de contorno del test de la parcela de orden superior.

Cuando la tensión se distribuye uniformemente, la solución teórica es  $u = \frac{x}{E}$  y  $v = -\frac{\nu y}{E}$  (Timoshenko & Goodier, 1970).

En las figuras 4.6, 4.7, 4.8 y 4.9 se muestran los contornos de desplazamientos obtenidos numéricamente en esta prueba, distribución regular e irregular de puntos. Los resultados conseguidos en este test, tanto en la componente horizontal  $u$  como vertical  $v$  del desplazamiento, coinciden nuevamente con la solución teórica indicada.

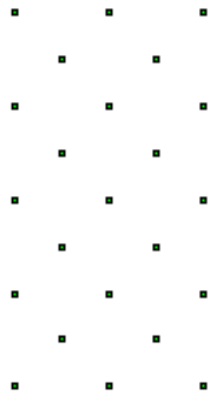
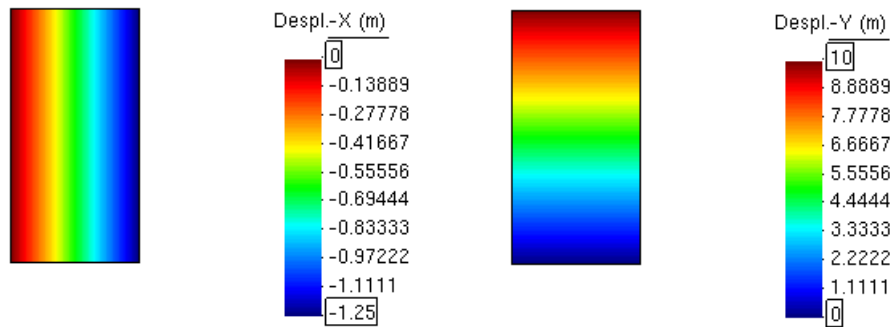
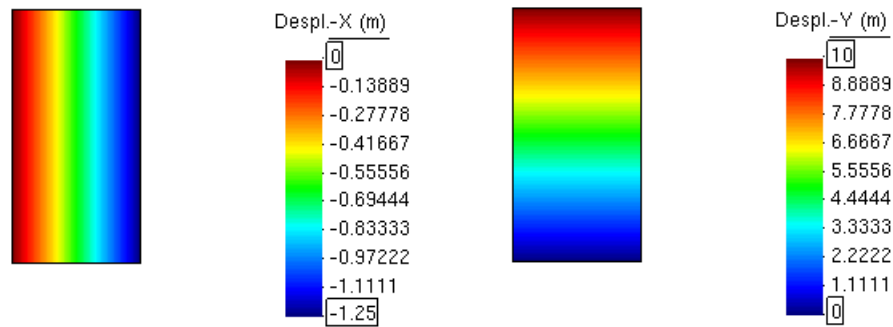
a) Regular,  $N = 23$ b) Regular,  $N = 46$ c) Irregular,  $N = 23$ d) Irregular,  $N = 49$ 

Figura 4.5: Discretización de puntos del dominio, test de orden superior.



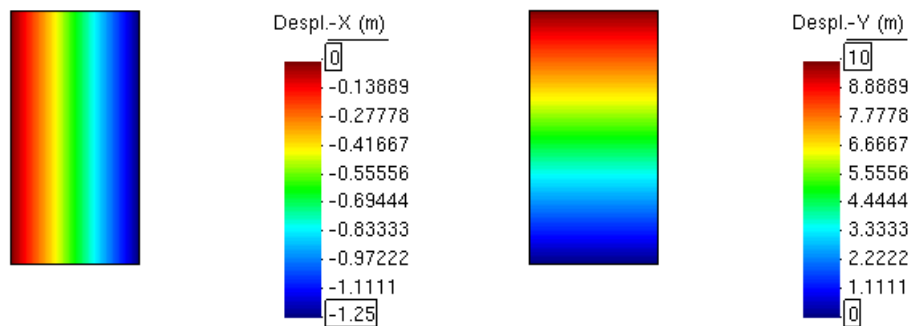
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura 4.6: Resultados numéricos test de orden superior, distribución regular de puntos,  $N = 23$ .



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

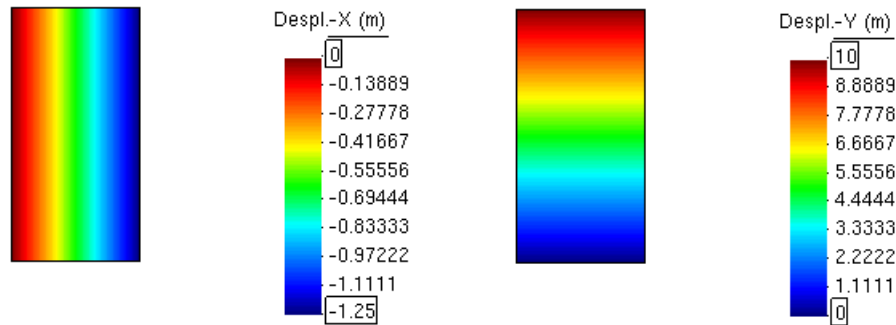
Figura 4.7: Resultados numéricos test de orden superior, distribución regular de puntos,  $N = 46$ .



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura 4.8: Resultados numéricos test de orden superior, distribución irregular de puntos,  $N = 23$ .





a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura 4.9: Resultados numéricos test de orden superior, distribución irregular de puntos,  $N = 49$ .

### 4.3.3. Puente bajo carga distribuida superior

El siguiente ejemplo de elasticidad lineal, corresponde al análisis de tensiones en un puente sujeto a una carga uniformemente distribuida superior  $P$ . Este problema ha sido extraído del trabajo de (Liu et al., 2006), donde se ha utilizado en la verificación del funcionamiento de un método adaptivo basado en una formulación radial del PIM .

La geometría del dominio y condiciones de contorno se entregan en la figura 4.10. Sobre la parte superior del puente se prescribe una carga uniformemente distribuida  $P = 1000 \frac{N}{m^2}$ , se considera una condición de deformación plana. Los valores del módulo de elasticidad y relación de *Poisson* son  $E = 40$  GPa y  $\nu = 0,15$  respectivamente.

Debido a la simetría del problema con respecto al eje a-b, se modela solamente una mitad del dominio de estudio, ver figura 4.11. En la solución numérica mediante el MPF se ha utilizado un polinomio de interpolación cuadrático y *nubes* de 9 puntos. La discretización utilizada se muestra en la figura 4.12. Se han empleado como valores referenciales, los resultados presentados en el trabajo de (Liu et al., 2006), con los cuales se entrega la distribución de tensiones horizontal  $\sigma_x$  y vertical  $\sigma_y$  sobre el eje de simetría a-b de la figura 4.10 y 4.11, ver figura 4.13. Adicionalmente, la figura 4.14 muestra los contornos de tensión horizontal  $\sigma_x$  y vertical  $\sigma_y$ . En estas gráficas se puede observar el buen ajuste de la solución mediante el *método de puntos finitos* con la solución numérica presentada en el trabajo de (Liu et al., 2006).

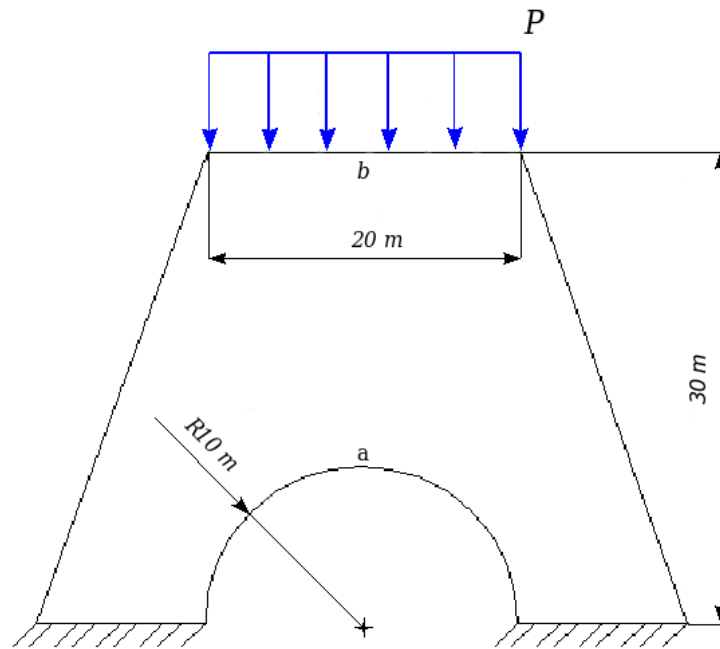


Figura 4.10: Geometría del Puente bajo carga distribuida superior.

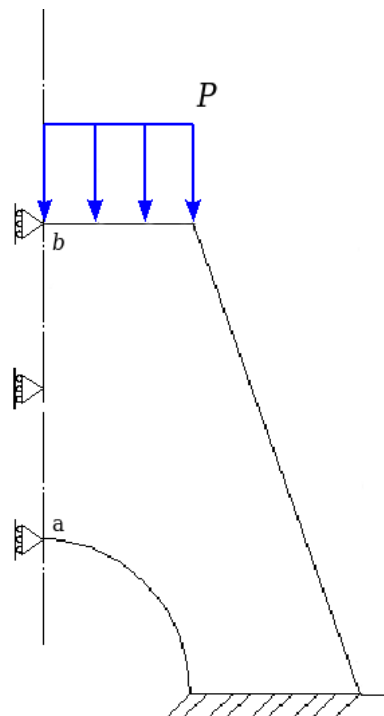


Figura 4.11: Geometría simplificada del puente bajo carga distribuida superior.

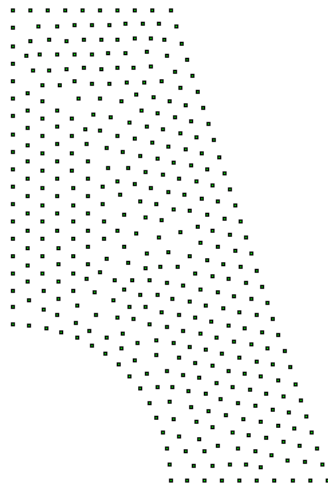


Figura 4.12: Discretización del puente bajo carga distribuida superior,  $N = 385$  puntos.

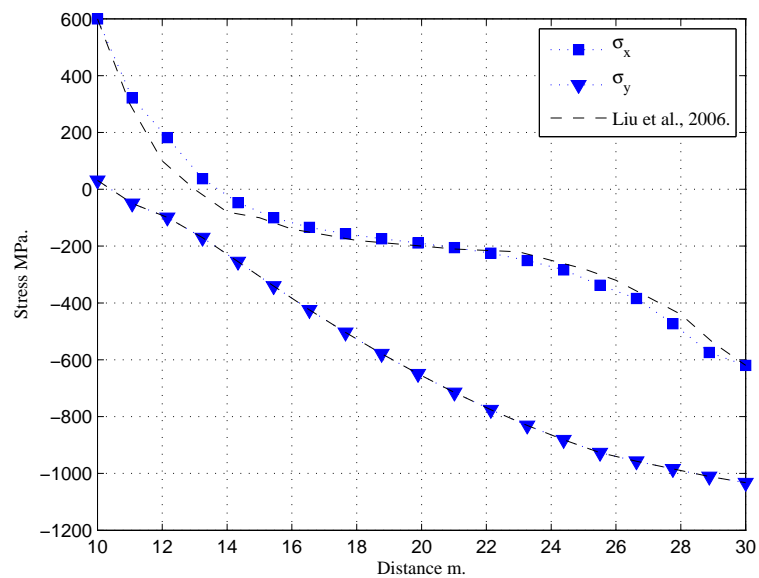


Figura 4.13: Distribución de tensión horizontal  $\sigma_x$  y vertical  $\sigma_y$  sobre el eje de simetría a-b, puente bajo carga distribuida superior.

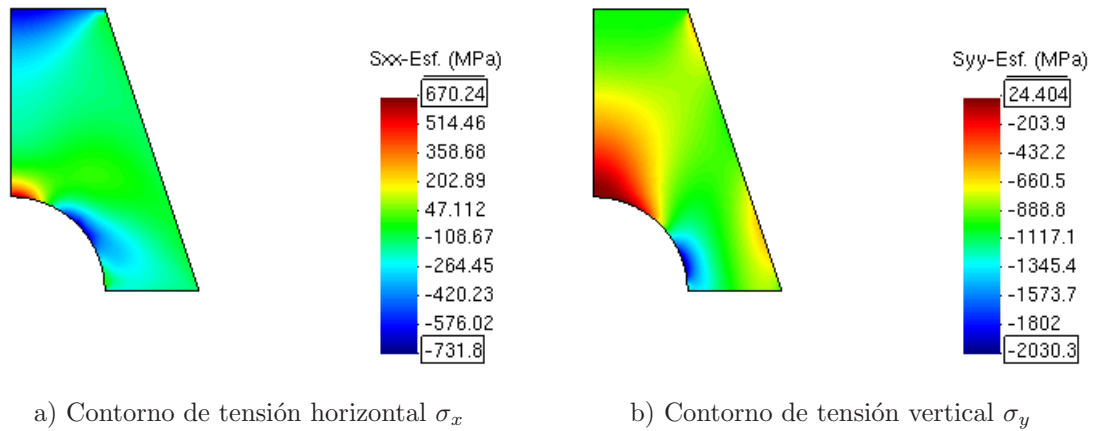


Figura 4.14: Resultados numéricos del puente bajo carga distribuida superior,  $N = 59$ .

#### 4.3.4. Test IC1-NAFEMS (Placa en tensión con carga normal)

Con la intención de promover el uso seguro y fiable de la tecnología de elementos finitos, la “*National Agency for Finite Element Methods and Standards*” NAFEM Sha formulado una serie de test para poder validar la respuesta que entrega un código basado en esta técnica (NAFEMS, 1987). Para comprobar la eficiencia del MPF, se ha escogido el Test IC1 el cual también se ha utilizado en (Perazzo, 2002) con el mismo objetivo.

La geometría del dominio y condiciones de contorno se entregan en la figura 4.15. La placa tiene un espesor de  $e = 0,1m$  y sobre el contorno  $FC$  se prescriben condiciones de *Neumann* en forma de una carga distribuida según  $P = 10 \frac{MN}{m}$ , sobre el contorno  $ED$  se prescriben condiciones de *Dirichlet* restringiendo el movimiento en la dirección del eje  $X$ . Adicionalmente para el punto  $A$  (punto medio del contorno  $ED$ ) se restringe el movimiento en la dirección  $Y$ . Los valores del módulo de elasticidad y relación de *Poisson* son  $E = 2,1 \cdot 10^5 MPa$  y  $\nu = 0,3$  respectivamente.

Los resultados que se buscan para este test son el desplazamiento en el punto  $B$  (punto medio del contorno  $FC$ )  $u_B = 0.00144m$ , la tensión horizontal en  $A$ ,  $\sigma_{xA} = 61.3MPa$  y la fuerza de reacción sobre el contorno  $ED$ , cuyo valor teórico es de  $R_{xED} = 20MN$  y se determina mediante la expresión  $R_{xA} = \int_{-2}^2 \sigma_x dA = \int_{-2}^2 \sigma_x e dy$ .

Se han estudiado 4 configuraciones con arreglos regulares y 4 con arreglos irregulares de puntos, figuras 4.16.y 4.17 respectivamente. Los resultados numéricos obtenidos se resumen en las tablas 4.3 y 4.3, mientras que las figuras 4.18 a la 4.25 muestran los contornos de desplazamiento horizontal  $u$  y de tensión horizontal  $\sigma_x$ . de este test.

En la solución numérica mediante el MPF se ha utilizado un polinomio de interpolación cuadrático y *nubes* de 9 puntos.

Se puede observar en la tabla 4.3 y en las gráficas de contornos 4.18, 4.19, 4.20 y 4.21, la convergencia hacia la solución esperada, cuando se utilizan distribuciones regulares mas densas de puntos.

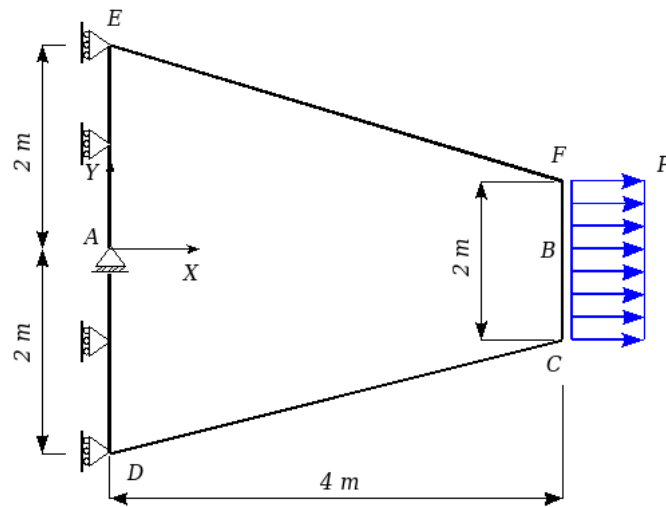


Figura 4.15: Geometría del test IC1-NAFEMS.

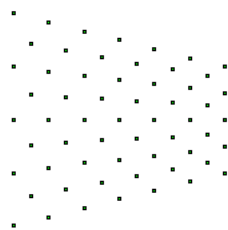
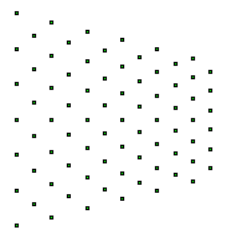
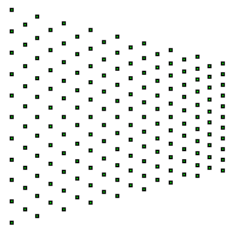
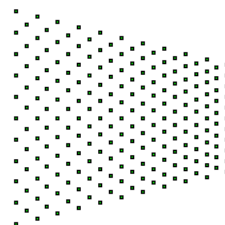
a)  $N = 59$ b)  $N = 85$ c)  $N = 179$ d)  $N = 221$ 

Figura 4.16: Discretización del dominio, distribución regular de puntos, test IC1-NAFEMS.

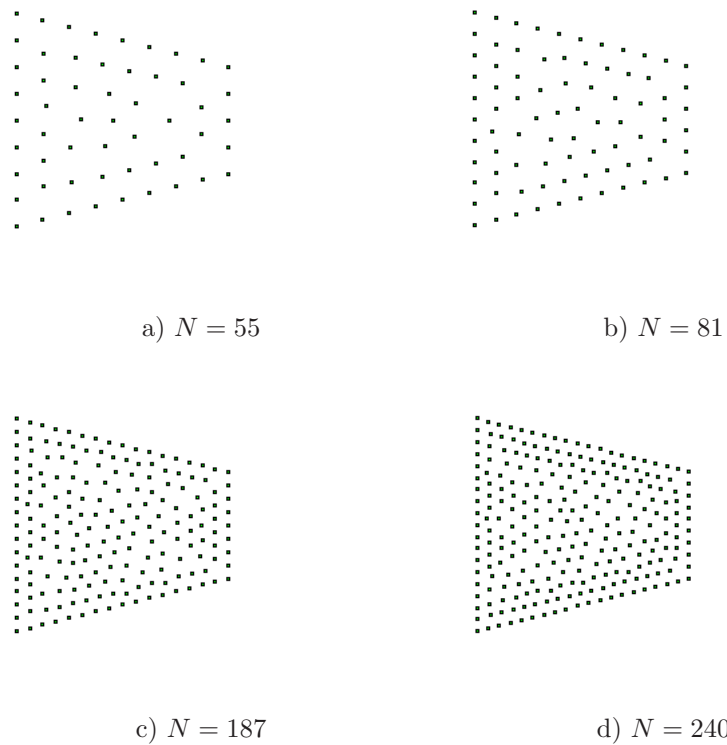


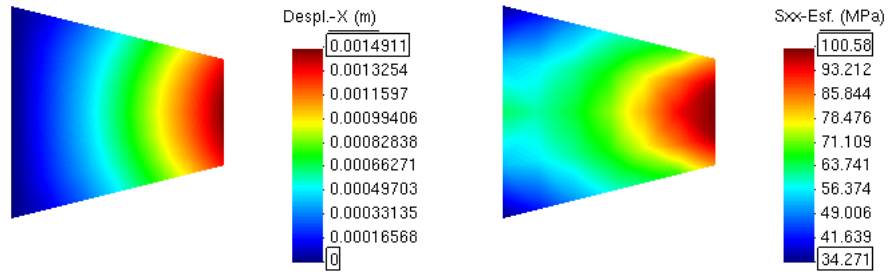
Figura 4.17: Discretización del dominio, distribución irregular de puntos, test IC1-NAFEMS.

Tabla 4.3: Principales resultados test IC1-NAFEMS, discretización regular.

$N$ puntos	$u_B$ $m$	$\sigma_{xA}$ $MPa$	$R_{xED}$ $MN$
59	0.001491	68.9486	22.1774
85	0.001487	64.8265	20.8231
179	0.001479	64.0463	20.8964
221	0.001445	63.7808	20.6306

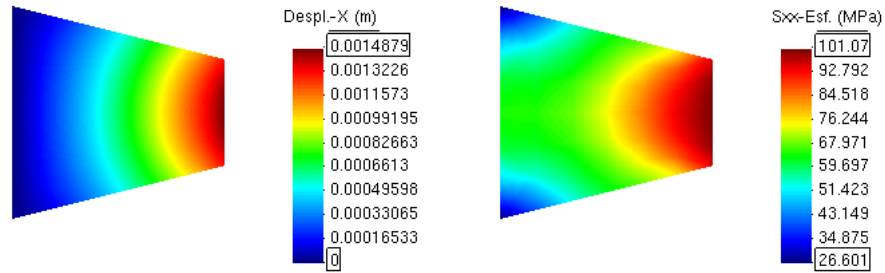
Tabla 4.4: Principales resultados test IC1-NAFEMS, discretización irregular.

$N$ puntos	$u_B$ $m$	$\sigma_{xA}$ $MPa$	$R_{xED}$ $MN$
55	0.001375	50.9503	20.9500
81	0.001381	88.4647	23.1575
187	0.001418	59.2288	20.4437
240	0.001430	59.1674	20.4174



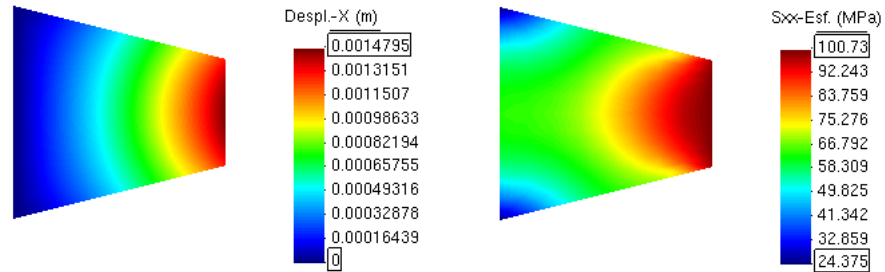
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

Figura 4.18: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos,  $N = 59$ .



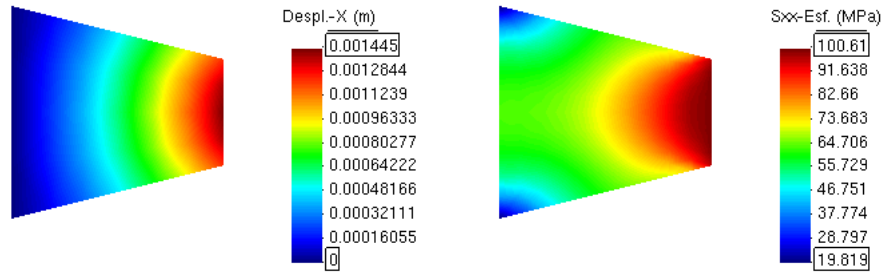
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

Figura 4.19: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos,  $N = 85$ .



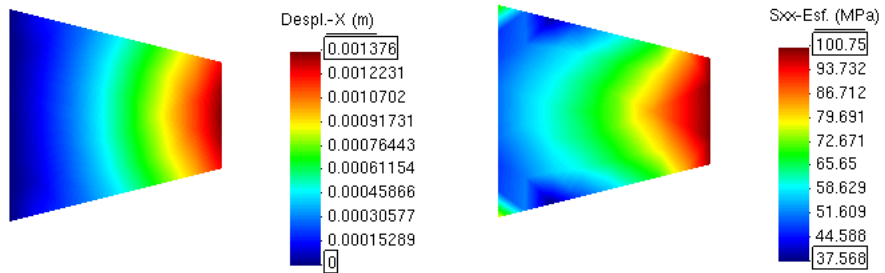
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

Figura 4.20: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos,  $N = 179$ .



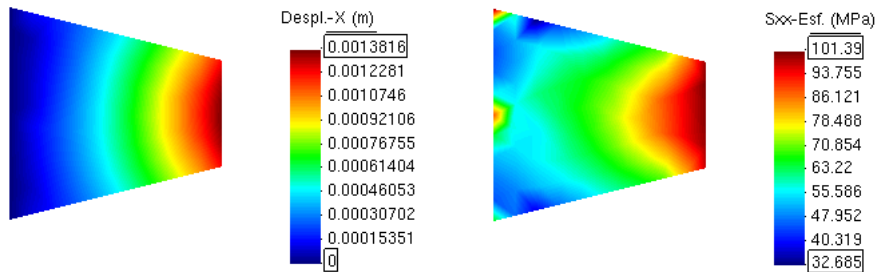
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

Figura 4.21: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución regular de puntos,  $N = 221$ .



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

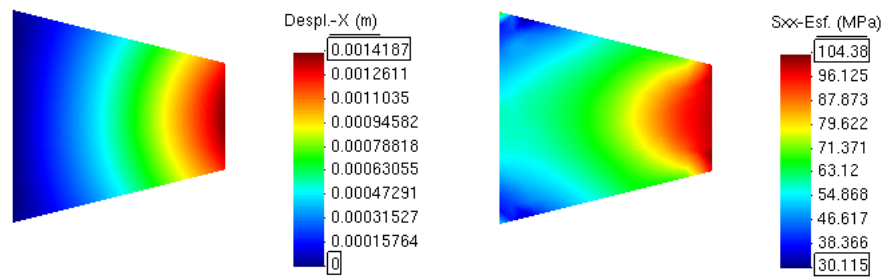
Figura 4.22: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos,  $N = 55$ .



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

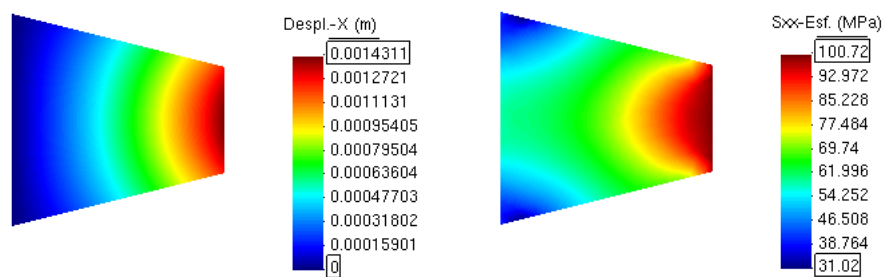
Figura 4.23: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos,  $N = 81$ .





a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

Figura 4.24: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos,  $N = 187$ .



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de tensión horizontal  $\sigma_x$

Figura 4.25: Resultados numéricos test IC1-NAFEMS, distribución irregular de puntos,  $N = 240$ .

Este comportamiento también es apreciable en la tabla 4.4, sin embargo, como se observa en las figuras 4.22-b y 4.23-b, la distribución de tensión horizontal muestra un comportamiento errático atribuible por un lado a la falta de simetría en la discretización y por otro a la mala calidad de las *nubes* empleadas. A pesar de lo anterior, este efecto disminuye al aumentar el número de puntos de la discretización, figuras 4.24-b y 4.25-b.

Cabe destacar que lo previo no se observa en las distribuciones regulares de puntos, debido a que en estos casos, los nodos se han dispuesto en forma simétrica respecto al eje horizontal.

### 4.3.5. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna

El siguiente ejemplo de elasticidad lineal analizado corresponde a un cilindro de pared gruesa de radio interior  $R_{int}$  y radio exterior  $R_{ext}$ , sujeto a una presión interna  $P_i$ . Este problema ha sido ampliamente utilizado en el contexto de la elasticidad lineal mediante *métodos sin malla*, algunos de estos trabajos son, (Pardo, 2000; Oñate et al., 2001; Perazzo, 2002; Gu & Liu, 2003; Zhang et al., 2003; Liu & Gu, 2004; Liu et al., 2006; Angulo, 2007).

La geometría del dominio y las condiciones de contorno se muestran en la figura 4.26. Se considera  $R_{ext}/R_{int} = 5$  y presión interna unitaria. Los valores del módulo de elasticidad y relación de *Poisson* son  $E = 1000$  y  $\nu = 0,3$  respectivamente.

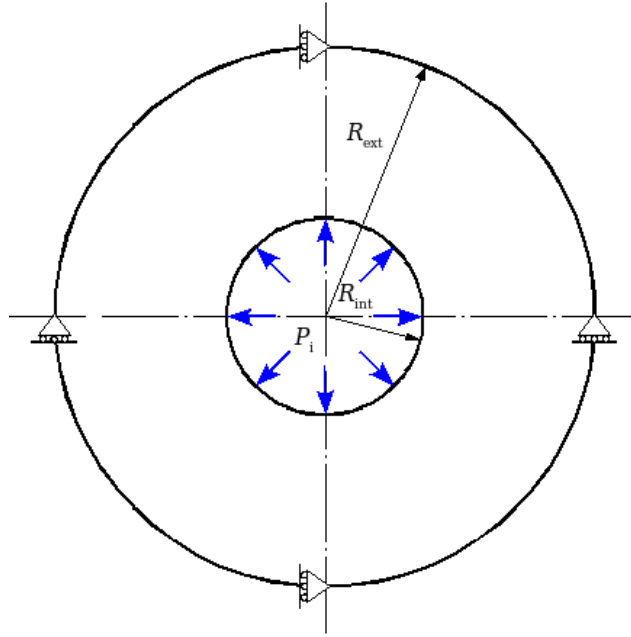


Figura 4.26: Geometría del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna.

La solución analítica para los desplazamientos, asumiendo una condición de deformación plana y expresando sus valores en coordenadas polares corresponde a (Timoshenko & Goodier, 1970)

$$u_r = \frac{P_i R_{int}^2 \cdot (r)}{E (R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \cdot \left( (1 - \nu) + \left( \frac{R_{ext}}{r} \right)^2 (1 + \nu) \right) \quad (4.15)$$

$$u_\theta = 0 \quad (4.16)$$

Las componentes del tensor tensiones bajo los mismos supuestos son

$$\sigma_r = \frac{P_i R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \cdot \left( 1 - \left( \frac{R_{ext}}{r} \right)^2 \right) \quad (4.17)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{P_i R_{int}^2}{(R_{ext}^2 - R_{int}^2)} \cdot \left( 1 + \left( \frac{R_{ext}}{r} \right)^2 \right) \quad (4.18)$$

$$\sigma_{r\theta} = 0 \quad (4.19)$$

Nótese que las soluciones teóricas, tanto para desplazamientos como tensiones, predicen una distribución dependiente sólo de la coordenada radial  $r$ .

En la solución numérica mediante el *método de puntos finitos* se ha utilizado una *base de interpolación* cuadrática ( $m = 6$ ) y *nubes* de 9 puntos. La discretización utilizada se muestra en la figura 4.27.

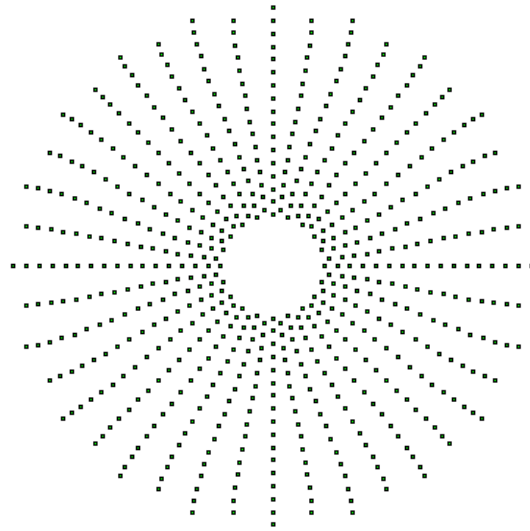


Figura 4.27: Discretización del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna,  $N = 660$  puntos.

Las distribuciones de desplazamiento radial  $u_r$  y de tensión radial  $\sigma_r$  y tangencial  $\sigma_{\theta}$  se muestran en la figuras 4.28 y 4.29 respectivamente. Adicionalmente la figura 4.30 entrega el contorno de desplazamiento radial  $u_r$ . En estas gráficas se puede observar el buen ajuste de la solución mediante el *método de puntos finitos* con la solución analítica presentada en (Timoshenko & Goodier, 1970).

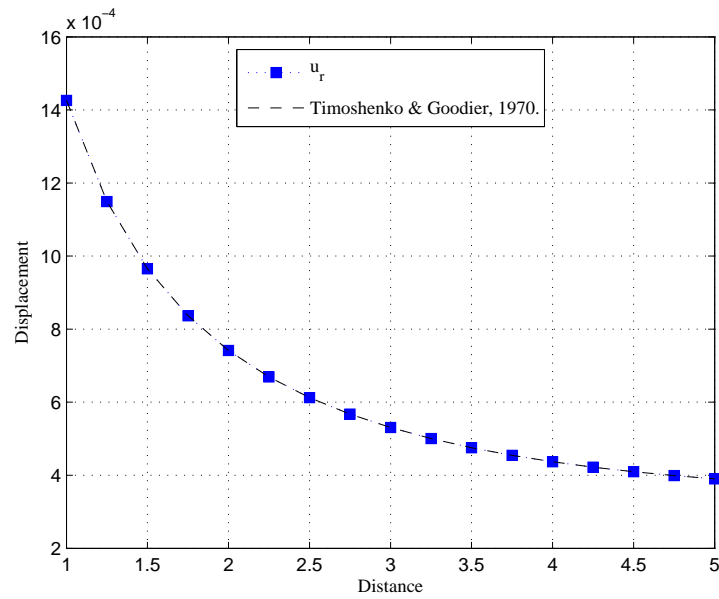


Figura 4.28: Distribución de desplazamiento radial  $u_r$  para el cilindro de pared gruesa.

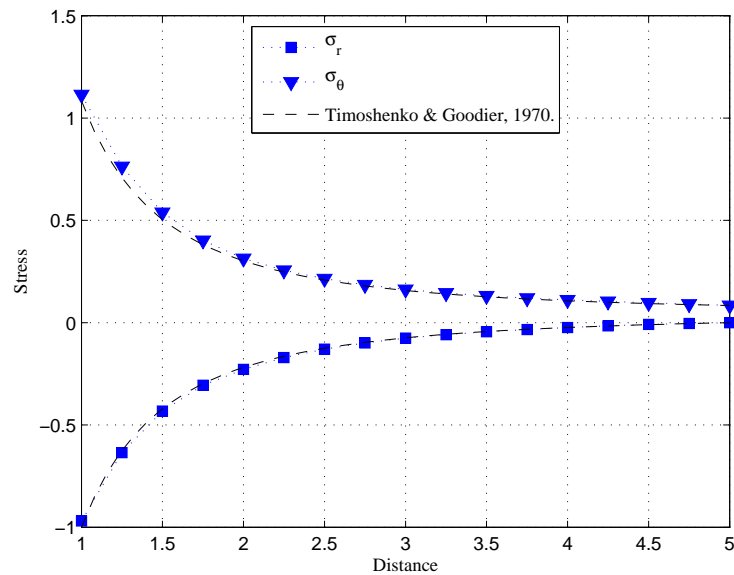


Figura 4.29: Distribución de tensiones radial  $\sigma_r$  y tangencial  $\sigma_\theta$  para el cilindro de pared gruesa.

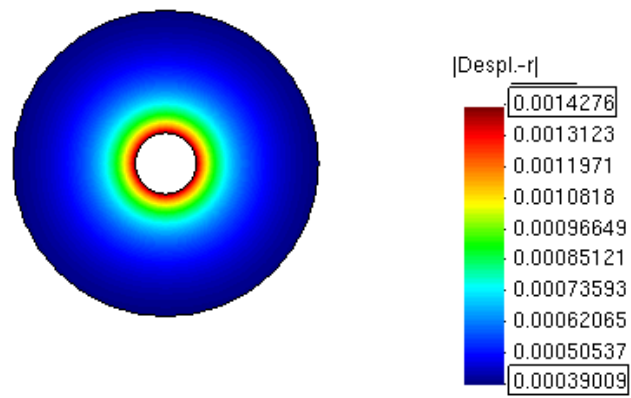


Figura 4.30: Contorno de desplazamiento radial  $u_r$  para el cilindro de pared gruesa.

## Capítulo 5

# Comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas y el MPF

El entendimiento del comportamiento del material es fundamental para el análisis y diseño de partes, por lo cual, el rápido desarrollo de la ingeniería y ciencias ha generado un importante foco de estudio en los problemas de no-linealidad del material. Empero la relación no-lineal *tensión-deformación* y la dependencia de la historia de carga presentes en este tipo de problemas hace que estos se tornen complicados, existiendo limitadas soluciones analíticas aplicables a problemas con geometrías y condiciones de carga muy sencillas (Dai et al., 2005) y poco interesantes desde el punto de vista ingenieril.

En los últimos años, el *método de elementos finitos* se ha transformado en la herramienta numérica más utilizada para el análisis del comportamiento del material tanto en el rango elástico como en el inelástico, especialmente en aplicaciones prácticas. Normalmente estos problemas son afrontados en forma incremental tangente, donde la solución en cualquier etapa no depende sólo del paso de carga sino también de su historia (Owen & Hinton, 1980; Crisfield, 1991; Simo & Hughes, 1998; Belytschko et al., 2000; Zienkiewicz & Taylor, 2000). Estos conceptos también han sido aplicados en el contexto de los *métodos sin malla*, algunos ejemplos son los trabajos de (Belytschko et al., 1995a), (Belytschko et al., 1995b), (Krysl & Belytschko, 1996), (Fleming et al., 1997), (Sukumar et al., 1997), (Yoon & Chen, 2002), (Guo & Nakanishi, 2003), (Chen et al., 2004), (Kargarnovin et al., 2004), (Guo et al., 2005), (Yeon & Youn, 2005), etc.

Una alternativa distinta para aproximar el comportamiento no-lineal de un material es mediante el uso de soluciones elásticas, concepto que tiene origen en el trabajo de (Neuber, 1961), donde se obtienen los campos de tensiones y deformaciones elásto-plásticas en puntos de concentración, asumiendo que la energía elástica de deformación se conserva en la punta de la entalla. Años más tarde, (Dhalla & Jones, 1986) proponen realizar un análisis elástico mediante FEM para determinar cargas límites, técnica que luego es modificada y mejorada por (Seshadri, 1991) llamándola “*Generalized Local Stress and Strain*” (GLOSS). Este procedimiento efectúa dos análisis elásticos sucesivos vía FEM aproximando el campo de deformación plástica en forma local.

Posteriormente (Mackenzie & Boyle, 1993) presentan un método para estimar cargas límites en recipientes de presión, técnica en la cual las zonas de concentración de tensiones son sistemáticamente debilitadas por medio de una reducción local del módulo elástico.

En el trabajo de (Jahed et al., 1997) se desarrolla un método para análisis inelástico de cilindros bajo presión usando un número finito de franjas elásticas denominado “*Variable Material Properties*” (VPM). Siguiendo esta metodología (Desikan & Sethuraman, 2000) proponen una técnica que permite modelar el comportamiento no-lineal de materiales en forma iterativa y mediante aproximaciones elásticas con el *método de elementos finitos* denominado “*Pseudo Elastic Finite Element Method*” (PEFEM).

En (Babu & Iyer, 1998) se desarrolla un método robusto basado en GLOSS y en conceptos de relajación para satisfacer las fuerzas de equilibrio en el rango plástico.

Recientemente y en el marco de los *métodos sin malla*, (Sethuraman & Reddy, 2004) han extendido la metodología de VPM y PEFEM a EFG (“*Element Free Galerkin method*”) para realizar un análisis de no-linealidad del material. Posteriormente en (Dai et al., 2005) y (Gu et al., 2007) se emplea el mismo concepto mediante LRPIM (“*Local Radial Point Interpolation Method*”).

En este capítulo se presenta una metodología sin malla mediante el *método de puntos finitos* para analizar el comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas. Cabe mencionar, que debido a las características intrínsecas del MPF, esta técnica ha sido desarrollada mediante una formulación fuerte, forma no abordada en la literatura existente relativa al uso de este tipo de aproximación no-lineal.



## 5.1. Marco teórico

Considérese un sólido no-lineal cargado como el mostrado en la figura 5.1. Asumiendo que el sólido es homogéneo e isótropo, entonces la misma ecuación constitutiva<sup>1</sup> gobierna a todos los puntos que lo componen, teniendo la forma general (Jahed et al., 1997)

$$\varepsilon = f(\sigma) \quad (5.1)$$

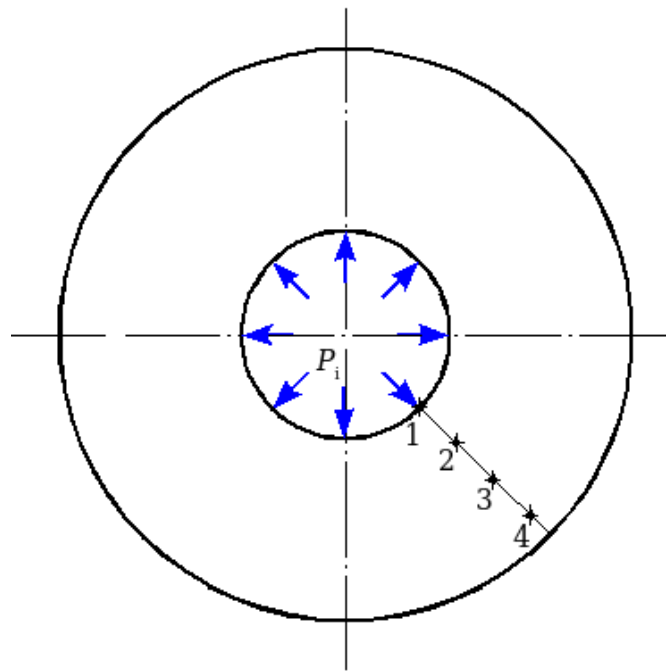


Figura 5.1: Definición de puntos *pseudo-elásticos*, cuerpo cargado

La figura 5.2-a) muestra gráficamente un ejemplo del comportamiento de la ecuación 5.1, destacándose la esencia no-lineal de dicha expresión.

Es evidente que producto de las condiciones de carga los puntos 1, 2, 3 y 4 de la figura 5.1, están solicitados a distintos niveles tanto de tensiones como de deformación. De acuerdo a este estado de carga, estos puntos pueden ser representados por sus recíprocos en la figura 5.2-a).

Para identificar el estado de carga de un punto cualquiera, es posible “seguir el camino” trazado por la curva no-lineal de *tensión-deformación* mostrado en la figura 5.2-a) o alternativamente utilizar los caminos lineales indicados en la figura 5.2-b). De esta manera la relación *tensión-deformación* en el punto, puede ser considerada como lineal y aplicable sólo a ese estado de carga. Los puntos definidos de la forma anterior son denominados *pseudo-elásticos*<sup>2</sup> y deben entenderse simplemente como puntos que a pesar de tener un comportamiento no-lineal, son analizados en forma lineal elástica.

<sup>1</sup>En el caso de un sólido lineal elástico, la ecuación constitutiva corresponde a la ley de Hooke y esta dada por la ecuación 4.9.

<sup>2</sup> pseudo - 1. elem. compos. Significa “falso”. *Seudópodo, seudocientífico*. [www.rae.es](http://www.rae.es)

Se observa en la figura 5.2-a) 5.2-b) , que los puntos 3 y 4 siguen un comportamiento lineal elástico dado por la pendiente inicial de la curva *tensión-deformación*, mientras que los puntos 1 y 2 se encuentran en el rango no-lineal, por tanto corresponden a puntos *pseudo-elásticos*.

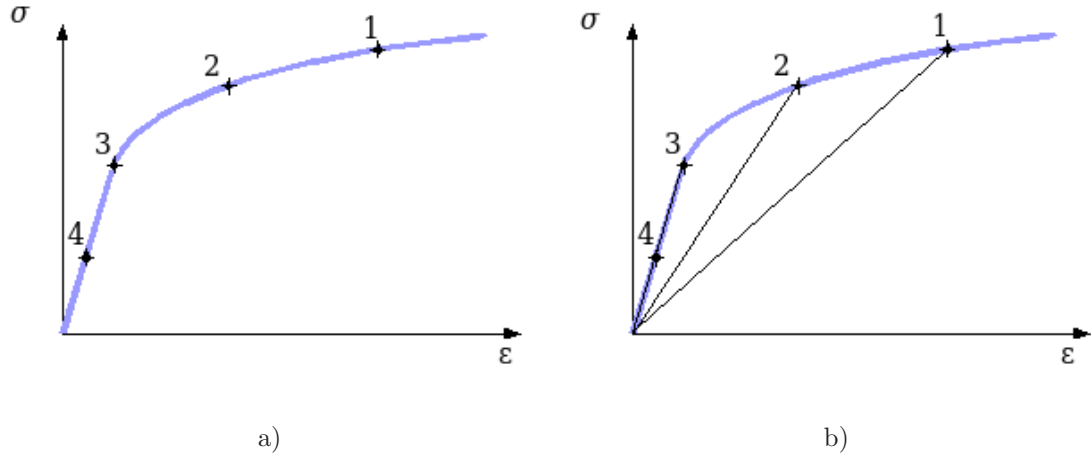


Figura 5.2: Definición de puntos *pseudo-elásticos*.

## 5.2. Formulación de un modelo no-lineal basado en la teoría de deformación total de *Hencky*

La teoría de la deformación total de *Hencky* ([Hencky, 1924](#)) establece una relación entre los tensores de deformación plástica y tensiones en forma similar a la ley de *Hooke*<sup>3</sup> para materiales isotrópicos, dada por

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{1 + \frac{1}{2}}{E_p} \sigma_{ij} - \frac{\frac{1}{2}}{E_p} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.2)$$

siendo  $E_p$  el módulo plástico definido de acuerdo a

$$E_p = \frac{\sigma_{eqa}}{\varepsilon_{eqa}^p} \quad (5.3)$$

expresión que corresponde al módulo secante en una curva  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}^p$  como se muestra en la figura 5.3, variable que decrece conforme la deformación plástica progresa a lo largo de la curva  $\sigma_{eq} - \varepsilon_{eq}^p$  del material.

Como se observa en la ecuación 5.2 la relación de *Poisson*  $\nu$  presente en la ley de *Hooke* es reemplazada por  $\frac{1}{2}$ , lo cual es equivalente a la suposición que la deformación plástica no contribuye al cambio volumétrico (material incompresible), situación que tiene soporte en evidencias experimentales en metales ([Downling, 1993](#)).

<sup>3</sup>La ley de *Hooke* establece  $\varepsilon_{ij}^e = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \delta_{ij} \sigma_{kk}$

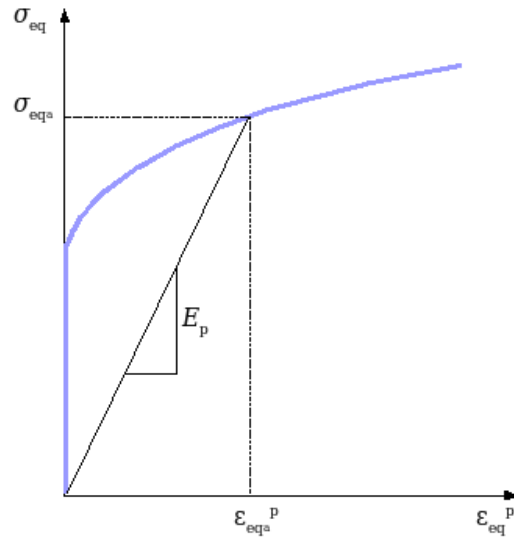


Figura 5.3: Definición de módulo plástico secante en una curva *tensión-deformación*

La relación 5.2 puede ser reescrita de la forma

$$\varepsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{1}{E_p} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right) \quad (5.4)$$

donde la expresión entre parentesis corresponde a la parte desviadora del tensor de tensiones, cuya forma general es

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.5)$$

dando lugar a una relación entre el tensor de deformación plástica y la parte desviadora del tensor de tensiones, dada por <sup>4</sup>

$$\varepsilon_{ij}^p = \psi s_{ij} \quad (5.6)$$

con  $\psi$  es una función escalar que se obtiene de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{3}{2} \frac{1}{E_p} \\ \psi &= \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_{eq}^p}{\sigma_{eq}} \end{aligned} \quad (5.7)$$

siendo

<sup>4</sup>Nótese que esta expresión corresponde al flujo plástico de *Levy-Mises*

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3}\varepsilon_{ij}^p\varepsilon_{ij}^p} \quad y \quad \sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2}s_{ij}s_{ij}} \quad (5.8)$$

la deformación plástica y la tensión equivalente respectivamente.

Por otro lado, la relación *tensión-deformación* de la ecuación 5.1 puede también ser escrita como

$$\varepsilon_{ij} = f(\sigma_{ij}) \quad (5.9)$$

donde el tensor de deformación total<sup>5</sup>  $\varepsilon_{ij}$  se descompone en una componente elástica y una plástica

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (5.10)$$

La figura 5.4 muestra gráficamente lo señalado en la ecuación 5.10

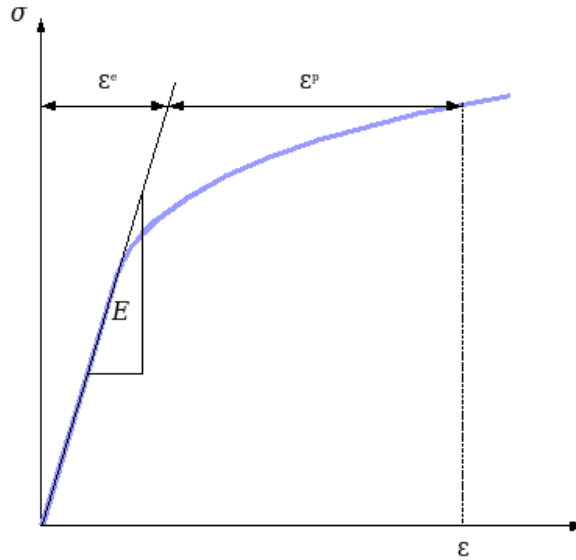


Figura 5.4: Deformación total en un sólido no-lineal

Usando la ley de *Hooke* para materiales isotrópicos, ecuaciones 4.9 y 4.10, el tensor de deformaciones elásticas se relaciona con el de tensiones por

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\delta_{ij}\sigma_{kk} \quad (5.11)$$

siendo  $E$  y  $\nu$ , parámetros que caracterizan el material, denominados módulo de elasticidad longitudinal y coeficiente de *Poisson* respectivamente (Capítulo 4)

Reemplazando las ecuaciones 5.11 y 5.6 en 5.10 se obtiene

<sup>5</sup>Al utilizar la plasticidad clásica y un procedimiento incremental se recurre al uso de la expresión  $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$ .

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1+\nu}{E} \right) \sigma_{ij} - \left( \frac{\nu}{E} \right) \delta_{ij} \sigma_{kk} + \psi \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk} \right)$$

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1+\nu}{E} + \psi \right) \sigma_{ij} - \left( \frac{\nu}{E} + \frac{1}{3} \psi \right) \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.12)$$

Nótese la semejanza de la estructura de la ecuación 5.12 con 5.11. En base a lo anterior se logra

$$\varepsilon_{ij} = \left( \frac{1+\nu_{\text{eff}}}{E_{\text{eff}}} \right) \sigma_{ij} - \left( \frac{\nu_{\text{eff}}}{E_{\text{eff}}} \right) \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (5.13)$$

siendo  $E_{\text{eff}}$  el módulo de elasticidad efectivo y  $\nu_{\text{eff}}$  es la relación de *Poisson* efectiva, los cuales son función de  $E$ ,  $\nu$  y  $\psi$ .

Los parámetros efectivos del material se obtienen al comparar la ecuación 5.12 con 5.13

$$E_{\text{eff}} = \left( \frac{1}{E} + \frac{2}{3} \psi \right)^{-1} \quad (5.14)$$

$$\nu_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \left( \frac{\nu}{E} + \frac{1}{3} \psi \right) \quad (5.15)$$

De esta manera la matriz simétrica constitutiva (o de constantes elásticas) definida en la ecuación 4.10 es reescrita como

$$\mathbf{D}_{\text{eff}} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= d_{22} = \frac{\bar{E}}{1-\bar{\nu}^2} \\ d_{12} &= d_{21} = \bar{\nu} d_{11} \\ d_{33} &= \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})} \end{aligned}$$

con

$$\bar{E} = \begin{cases} E_{\text{eff}} & \text{tensión plana} \\ E_{\text{eff}}/(1-\nu_{\text{eff}}) & \text{deformación plana} \end{cases}$$

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu_{\text{eff}} & \text{tensión plana} \\ \nu_{\text{eff}}/(1-\nu_{\text{eff}}) & \text{deformación plana} \end{cases}$$

donde  $E_{\text{eff}}$  y  $\nu_{\text{eff}}$  son el módulo de elasticidad efectivo y la relación de *Poisson* efectiva, definidos en las ecuaciones 5.14 y 5.15 respectivamente.

### 5.3. Determinación de los parámetros efectivos del material

La obtención de las propiedades efectivas del material, presentes en la matriz 5.16, se realiza en forma iterativa mediante un procedimiento de corrección aplicado sobre la curva experimental de *tensión-deformación* del material.

En este trabajo se ha utilizado el método de proyección vertical para determinar los valores de  $E_{\text{eff}}$  y  $\nu_{\text{eff}}$  (Jahed et al., 1997; Desikan & Sethuraman, 2000; Sethuraman & Reddy, 2004; Dai et al., 2005; Gu et al., 2007), procedimiento que se presenta a continuación.

En primer lugar, se realiza una solución elástica, ver figura 5.5. Esto define el estado equivalente de *tensión-deformación* en cada punto,  $(\sigma_{eq}; \varepsilon_{eq})_a$ . El valor de deformación  $\varepsilon_{eq_a}$  se fija y proyecta en la curva de *tensión-deformación* del material. Luego se debe calcular el estado de tensión  $\sigma_{eq_{a'}}$  correspondiente al nuevo punto proyectado en la curva. El valor actualizado de  $E_{\text{eff}}$  para cada punto se obtiene mediante la razón entre la tensión y deformación equivalente, es decir,

$$E_{\text{eff}} = \frac{\sigma_{eq_{a'}}}{\varepsilon_{eq_a}} \quad (5.17)$$

el correspondiente valor actualizado de  $\nu_{\text{eff}}$  se debe calcular usando la ecuación 5.15.

Este procedimiento se debe repetir hasta que el estado de *tensión-deformación* de cada punto coincida con la curva uniaxial de tensión del material.

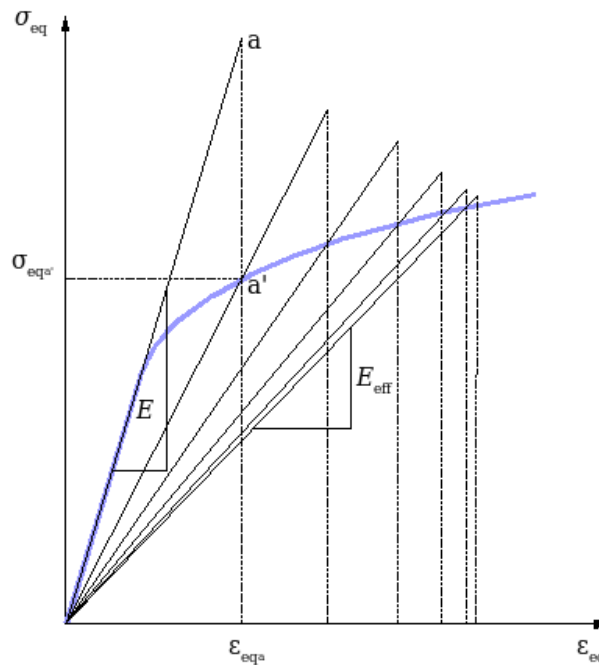


Figura 5.5: Método de proyección vertical.

La obtención del valor de  $\sigma_{eq}$ , y por ende  $E_{eff}$  presentes en la ecuación 5.17, depende del tipo de material empleado. A continuación se presentan los modelos mas utilizados en la literatura para aproximar la curva de *tensión-deformación* del material.

### 5.3.1. Modelo elásto-plástico perfecto

En este modelo se asume que la deformación plástica comienza cuando la tensión equivalente alcanza la tensión de fluencia del material  $\sigma_0$  despreciando a su vez el efecto del endurecimiento por deformación, de esta manera la relación *tensión-deformación* se escribe como

$$\varepsilon_{eq} = \begin{cases} \frac{\sigma_{eq}}{E} & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ \frac{\sigma_{eq}}{E} + \varepsilon^p & \text{si } \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (5.18)$$

La figura 5.6 muestra gráficamente este modelo.

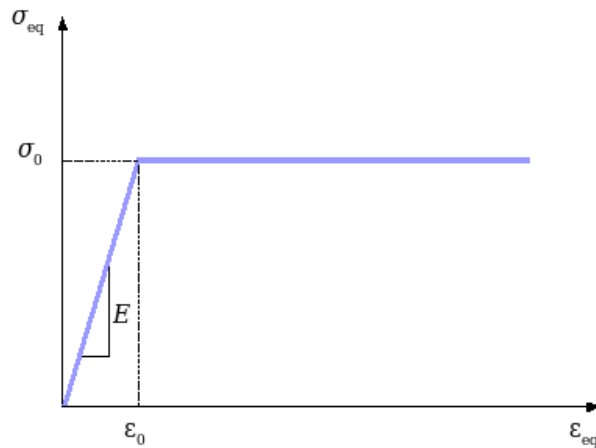


Figura 5.6: Esquema representativo del comportamiento del modelo elásto-plástico perfecto

Los valores de  $E_{eff}$  y  $\nu_{eff}$  se definen respectivamente de acuerdo a la ecuaciones 5.17 y 5.15 de la siguiente forma

$$E_{eff} = \begin{cases} E & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ \left( \frac{1}{E} + \frac{\varepsilon^p}{\sigma_0} \right)^{-1} & \text{si } \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (5.19)$$

$$\nu_{eff} = \begin{cases} \nu & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ E_{eff} \left( \frac{\nu}{E} + \frac{\varepsilon^p}{\sigma_0} \right) & \text{si } \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (5.20)$$

### 5.3.2. Modelo elásto-plástico con endurecimiento lineal

En este modelo se asume que la deformación plástica comienza cuando la tensión equivalente alcanza la tensión de fluencia del material  $\sigma_0$  considerando a su vez el efecto del endurecimiento por deformación. La curva *tensión-deformación* del material es idealizada por dos tramos lineales, el primero representa el comportamiento lineal dado por el módulo de elasticidad  $E$  mientras que el segundo define el endurecimiento por deformación con su pendiente  $E_t$ . La relación *tensión-deformación* para este modelo tiene la siguiente forma

$$\varepsilon_{eq} = \begin{cases} \frac{\sigma_{eq}}{E} & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ \frac{\sigma_{eq}}{E} + \frac{1}{E_t} (\sigma_{eq} - \sigma_0) & \text{si } \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (5.21)$$

La figura 5.7 muestra gráficamente este modelo.

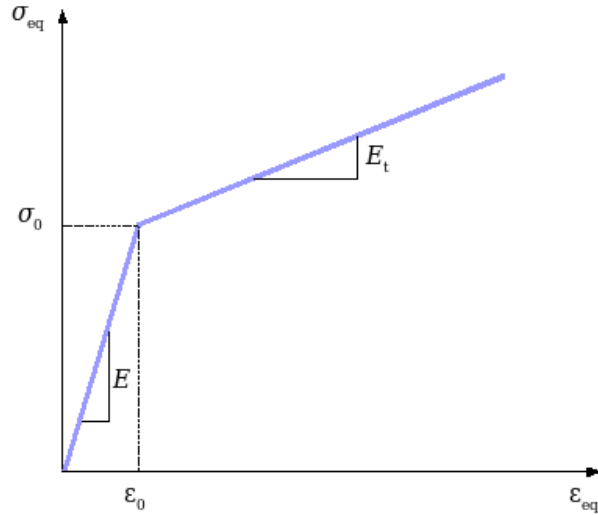


Figura 5.7: Esquema representativo del comportamiento del modelo elásto-plástico con endurecimiento lineal

Los valores de  $E_{\text{eff}}$  y  $\nu_{\text{eff}}$  se definen respectivamente de acuerdo a la ecuaciones 5.17 y 5.15 de la siguiente forma

$$E_{\text{eff}} = \begin{cases} E & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ \left( \frac{\sigma_0}{E\sigma_{eq}} + \frac{\sigma_{eq} - \sigma_0}{\sigma_{eq}E_t} \right)^{-1} & \text{si } \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\nu_{\text{eff}} = \begin{cases} \nu & \text{si } \sigma_{eq} < \sigma_0 \\ E_{\text{eff}} \left( \frac{\nu}{E} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{eq}}{2\sigma_0} \left( \frac{1}{E} - \frac{1}{E_t} \right) \right) & \text{si } \sigma_{eq} \geq \sigma_0 \end{cases} \quad (5.23)$$



### 5.3.3. Modelo de Ramberg-Osgood

Este modelo fue propuesto por (Ramberg & Osgood, 1943) y permite describir la relación no-lineal de *tensión-deformación*. Es especialmente útil en metales que experimentan endurecimiento por deformación plástica mostrando una suave transición elásto-plástica. Su forma general está dada por la ecuación

$$\frac{\varepsilon_{eq}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} + \alpha_{RO} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n_{RO}} \quad (5.24)$$

donde  $\varepsilon_0 = \sigma_0/E$  es la deformación correspondiente al inicio de la fluencia,  $\alpha_{RO}$  es un parámetro de ajuste y  $n_{RO}$  es el exponente de endurecimiento. Ambos parámetros  $\alpha_{RO}$  y  $n_{RO}$  son asignados antes del análisis. La figura 5.8 muestra gráficamente este modelo.

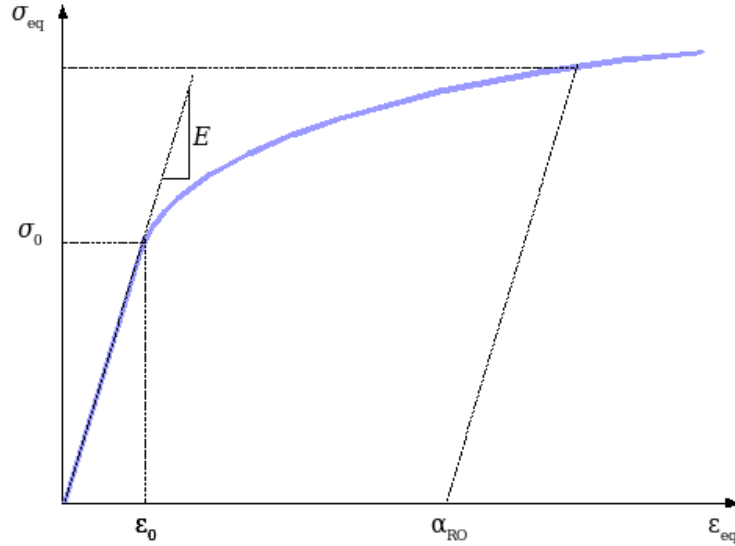


Figura 5.8: Esquema representativo del comportamiento del modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943)

La ecuación 5.24 puede reescribirse en base a la expresión 5.10 obteniéndose la parte elástica  $\varepsilon_{eq}^e$  y plástica  $\varepsilon_{eq}^p$  de la deformación total equivalente  $\varepsilon_{eq}$

$$\varepsilon_{eq} = \underbrace{\frac{\sigma_{eq}}{E}}_{\varepsilon_{eq}^e} + \underbrace{\frac{\sigma_0 \alpha_{RO}}{E} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n_{RO}}}_{\varepsilon_{eq}^p} \quad (5.25)$$

Los valores de  $E_{eff}$  y  $\nu_{eff}$  de acuerdo a la ecuaciones 5.17 y 5.15 respectivamente, pueden expresarse de la siguiente forma

$$E_{\text{eff}} = \left( \frac{1}{E} + \alpha_{\text{RO}} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n_{\text{RO}}-1} \right)^{-1} \quad (5.26)$$

$$\nu_{\text{eff}} = E_{\text{eff}} \left( \frac{\nu}{E} + \alpha_{\text{RO}} \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n_{\text{RO}}-1} \right) \quad (5.27)$$

El modelo de Ramberg-Osgood entrega una buena aproximación del comportamiento no-lineal de materiales, como por ejemplo, aceros inoxidable, aleaciones de aluminio, etc (Rasmussen, 2003; den Berg, 2000).

En esta tesis se utiliza el modelo de Ramberg-Osgood para definir la curva *tensión-deformación* del material, esto debido a su versatilidad y al gran número de materiales que esta ecuación puede ajustar y describir.

Por otro lado, la tensión equivalente  $\sigma_{eq_a}$  usado en la ecuación 5.17 y figura 5.5 se obtiene mediante el uso de un solver no-lineal basado en el método de Newton (Dai et al., 2005), ver apéndices A.4 y A.5.

## 5.4. Implementación numérica

A continuación se presenta el procedimiento para implementar numéricamente el MPF en un caso 2D de un sólido no-lineal mediante soluciones elásticas. Este mismo proceso puede ser aplicado tanto para un caso 1D como 3D con las características geométricas y físicas del problema en cuestión.

Considérese el sistema matricial de ecuaciones diferenciales definido en el sistema 4.4 que gobierna el comportamiento de un sólido, cuyas fuerzas de inercias son despreciables.

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma \\ \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{t}} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{aligned} \quad (5.28)$$

siendo  $\mathbf{L}$  un operador que define la ecuación diferencial,  $\mathbf{N}$  contiene los cosenos directores en la dirección normal exterior al contorno,  $\boldsymbol{\sigma}$  ( $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ) es el vector de tensiones,  $\mathbf{u}$  es el vector de desplazamientos,  $\rho \mathbf{b}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$  y  $\bar{\mathbf{u}}$  son las fuerzas de cuerpo, tracciones externas y desplazamientos prescritos respectivamente. Estas variables se definen a partir de

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &:= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, & \mathbf{N} &:= \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma} &:= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, & \mathbf{u} &:= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\ \rho \mathbf{b} &:= \begin{bmatrix} \rho b_x \\ \rho b_y \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{t}} &:= \begin{bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{u}} &:= \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Usando la relación *tensión - deformación* de la ecuación 5.13, la relación *deformación - desplazamiento* y siguiendo el mismo procedimiento presentado en el apartado 4.2, se obtiene un sistema equivalente en términos de los desplazamientos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}_{\text{eff}} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{L} \mathbf{u} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Reemplazando 5.29 en 5.28 y utilizando la regla de la cadena para las derivadas y la aproximación sin malla del MPF definida en 3.14 para los componentes  $u$  y  $v$  del vector de desplazamientos incógnitos  $\mathbf{u}$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} &\cong \hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_I^1(\mathbf{x}) & 0 & \cdots & \phi_I^n(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \phi_I^1(\mathbf{x}) & \cdots & 0 & \phi_I^n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^h \\ v_1^h \\ \vdots \\ u_n^h \\ v_n^h \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \Phi_I^1 & \Phi_I^2 & \cdots & \Phi_I^n \end{bmatrix} \mathbf{u}^h \quad \Phi_I^i \in Mat(2 \times 2), i = 1, \dots, n \\
&= \Phi \mathbf{u}^h
\end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema matricial de ecuaciones

$$[\mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \Phi + (\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}) \mathbf{L}^T \Phi] \mathbf{u}^h = -\rho \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma \quad (5.30a)$$

$$[\mathbf{N}^T \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (5.30b)$$

$$[\Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (5.30c)$$

Nótese que en un problema elástico lineal, el término  $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$  en la ecuación 5.30a se anula, debido a que  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$  (ecuación 5.16) corresponde simplemente a la matriz de constantes elásticas  $\mathbf{D}$  (ecuación 4.10), por tanto se recupera el sistema de ecuaciones 4.11 para un sólido elástico lineal.

### 5.4.1. Aproximación del término $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$

La ecuación de equilibrio de un sólido no-lineal, presente en el sistema 5.30a establece en su forma compacta

$$[\mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Phi} + (\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}) \mathbf{L}^T \boldsymbol{\Phi}] \mathbf{u}^h = -\rho \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma$$

Respecto a esta misma se ha señalado que en un problema elástico lineal, el término  $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$  en la ecuación 5.30a se anula, debido a que  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$  (ecuación 5.16) corresponde simplemente a la matriz de constantes elásticas  $\mathbf{D}$  (ecuación 4.10), por tanto se recupera el sistema de ecuaciones 4.11 para un sólido elástico lineal.

Sin embargo, en un caso no-lineal lo anterior no se cumple, básicamente porque el concepto de parámetros efectivos del material introducido en esta tesis, conlleva a que la matriz  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$  definida en la ecuación 5.16 adquiera un carácter variable respecto a las coordenadas espaciales.

Para aproximar el término  $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$ , presente en el sistema 5.30a, se recurre al uso del concepto mismo de la aproximación MPF, las *funciones de forma* y sus derivadas, ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.34 respectivamente, obteniéndose

$$\partial \mathbf{D}_{\text{eff}I} = (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\Phi}_I)^T \mathbf{D}_{\text{eff}I} \quad (5.31)$$

Los coeficiente de la matriz  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$  derivada se consiguen de acuerdo a

$$d_{(e,f)I,l} = \sum_{i=1}^n \phi_{I,i}^i d_{(e,f)I}^i \quad (5.32)$$

siendo  $(e, f)$  los subíndices del coeficiente de la matriz  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$ . El subíndice que sigue a la coma, representa la derivada respecto de la coordenada espacial  $l$  – *ésima*, es decir  $(\ )_{,l} = \partial(\ ) / \partial x^l$ .

Por tanto, una vez obtenidos los parámetros efectivos del material mediante los procedimientos descritos en el apartado 5.3, se evalúa en todos los puntos la matriz  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$  (ecuación 5.16) utilizándose posteriormente la ecuación 5.32 para obtener las derivadas de esta matriz, ver apéndice A.6.

### 5.4.2. Forma discreta de las ecuaciones de equilibrio no-lineal

Al introducir el término  $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$  en el sistema de ecuaciones 5.30a se consigue el sistema discreto ecuaciones de equilibrio no-lineal

$$\left[ \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \Phi + (\mathbf{L}^T \Phi)^T \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L}^T \Phi \right] \mathbf{u}^h = -\rho \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma \quad (5.33a)$$

$$[\mathbf{N}^T \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{t}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (5.33b)$$

$$[\Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (5.33c)$$

con su forma compacta (recordar ecuaciones 3.30 y 4.12)

$$\mathbf{G}_I \mathbf{u}^h = \mathbf{f}_I \quad I = 1, \dots, N \quad (5.34)$$

La matriz  $\mathbf{G}_I$  para cada punto  $I$  del dominio esta a su vez formada por  $n$  sub-matrices  $\mathbf{G}_I^i \in \text{Mat}(2 \times 2)$

$$\mathbf{G}_I = \left[ \mathbf{G}_I^1 \quad \mathbf{G}_I^2 \quad \mathbf{G}_I^3 \quad \dots \quad \mathbf{G}_I^{n-1} \quad \mathbf{G}_I^n \right]$$

donde el superíndice  $i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , identifica el nodo en la *nube* perteneciente al nodo estrella  $I$ .

Los coeficientes de cada sub-matriz  $\mathbf{G}_I^i$  y su correspondiente vector de fuerzas independientes  $\mathbf{f}_I \in \text{Vec}(2 \times 1)$  se obtienen mediante la técnica de *colocación puntual* de la siguiente forma

- si  $I \in \Omega - \Gamma$

$$\mathbf{G}_I^i \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{G}_I^i]_{11} = d_{11} \phi_{I,xx}^i + d_{33} \phi_{I,yy}^i + (d_{11,x} \phi_{I,x}^i + d_{33,y} \phi_{I,y}^i) \\ [\mathbf{G}_I^i]_{12} = \phi_{I,xy}^i (d_{12} + d_{33}) + (d_{12,x} \phi_{I,y}^i + d_{33,y} \phi_{I,x}^i) \\ [\mathbf{G}_I^i]_{21} = \phi_{I,xy}^i (d_{21} + d_{33}) + (d_{21,y} \phi_{I,x}^i + d_{33,x} \phi_{I,y}^i) \\ [\mathbf{G}_I^i]_{22} = d_{22} \phi_{I,yy}^i + d_{33} \phi_{I,xx}^i + (d_{22,y} \phi_{I,y}^i + d_{33,x} \phi_{I,x}^i) \end{array} \right. , \quad \mathbf{f}_I = -\rho \mathbf{b}$$

- si  $I \in \Gamma_t$

$$\mathbf{G}_I^i \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{G}_I^i]_{11} = d_{11} \phi_{I,x}^i n_x + d_{33} \phi_{I,y}^i n_y \\ [\mathbf{G}_I^i]_{12} = d_{12} \phi_{I,y}^i n_x + d_{33} \phi_{I,x}^i n_y \\ [\mathbf{G}_I^i]_{21} = d_{33} \phi_{I,y}^i n_x + d_{12} \phi_{I,x}^i n_y \\ [\mathbf{G}_I^i]_{22} = d_{33} \phi_{I,x}^i n_x + d_{22} \phi_{I,y}^i n_y \end{array} \right. , \quad \mathbf{f}_I = \bar{\mathbf{t}}$$

- si  $I \in \Gamma_u$

$$\mathbf{G}_I^i \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{G}_I^i]_{11} = \phi_I^i \\ [\mathbf{G}_I^i]_{12} = 0 \\ [\mathbf{G}_I^i]_{21} = 0 \\ [\mathbf{G}_I^i]_{22} = \phi_I^i \end{array} \right. , \quad \mathbf{f}_I = \bar{\mathbf{u}}$$

### 5.4.3. Criterio de convergencia

Para determinar el momento en que se debe detener el proceso iterativo no-lineal, se mide al final de cada iteración el error de la solución elástica y se compara con una tolerancia,  $tol$ , predefinida. Este proceso se repite hasta que el estado de *tensión-deformación* de cada punto coincida con la curva uniaxial de tensión del material. Algunas de estas estrategias se entregan a continuación.

En los trabajos de (Jahed et al., 1997; Desikan & Sethuraman, 2000; Sethuraman & Reddy, 2004) se han utilizado criterios basados en las tensiones y deformaciones equivalentes

$$\frac{|\sigma_{eq}^i - \sigma_{eq}^{i+1}|}{\sigma_{eq}^i} < tol \quad (5.35)$$

en términos de la ecuación 5.17 y la figura 5.5 esta expresión toma la forma

$$\frac{|\sigma_{eq_a} - \sigma_{eq_a'}|}{\sigma_{eq_a}} < tol \quad (5.36)$$

Por otro lado (Dai et al., 2005) proponen las siguientes expresiones para determinar la convergencia de la solución

$$\frac{|E_{\text{eff}}^i - E_{\text{eff}}^{i+1}|}{E_{\text{eff}}^i} < tol \quad (5.37)$$

$$\frac{|\nu_{\text{eff}}^i - \nu_{\text{eff}}^{i+1}|}{\nu_{\text{eff}}^i} < tol \quad (5.38)$$

observándose que estas dos ecuaciones son equivalentes y pueden satisfacerse simultáneamente debido a su relación lineal.

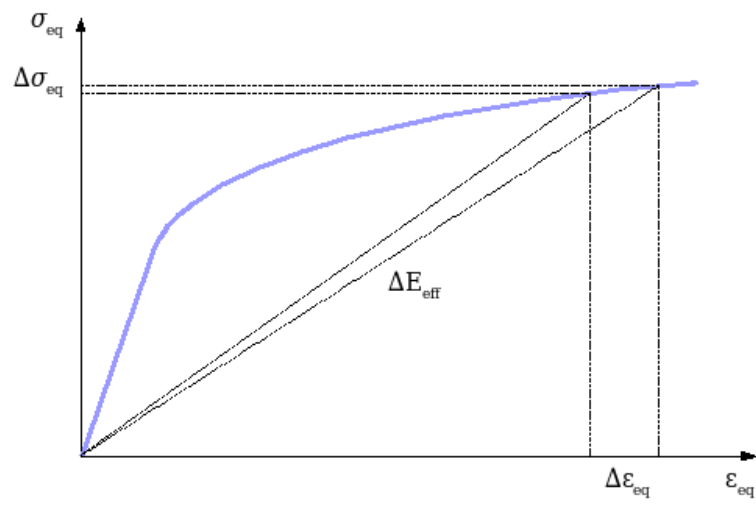
En (Gu et al., 2007) se define un criterio de convergencia dado por

$$\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^N (E_{\text{eff}j}^i - E_{\text{eff}j}^{i+1})^2}{\sum_{j=1}^N (E_{\text{eff}j}^i)^2}} < tol \quad (5.39)$$

En este trabajo se ha observado un comportamiento inadecuado de la solución al utilizar el criterio de convergencia dado por las ecuaciones 5.35 y 5.36. Esto se debe principalmente a que las variaciones de  $\sigma_{eq}$  no tienen proporción con las de  $\varepsilon_{eq}$ , especialmente en casos donde la curva de *tensión-deformación* del material presenta una pendiente que tiende a cero, lo anterior se ejemplifica en la figura 5.9.

En esta tesis se ha utilizado un criterio de convergencia dado por la ecuación 5.37, el cual no presenta los inconvenientes señalados anteriormente, ver figura 5.9, siendo más simple y directo que la expresión 5.39 con resultados equivalentes. Por otro lado el valor de tolerancia se ha fijado en  $tol = 0.001$ .

$$\frac{|E_{\text{eff}}^i - E_{\text{eff}}^{i+1}|}{E_{\text{eff}}^i} < 0.001 \quad (5.40)$$

Figura 5.9: Esquema de la variación de  $\sigma_{eq}$  y  $\varepsilon_{eq}$  entre iteraciones



#### 5.4.4. Estabilización de la aproximación

La técnica de estabilización basada en (FIC) Oñate (1996, 2004) descrita en el apartado 3.7 se aplica al sistema de ecuaciones 5.33 definiendo

$$\mathbf{r}_{\text{FIC}} = \left[ \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \Phi + (\mathbf{L}^T \Phi)^T \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L}^T \Phi \right] \quad (5.41)$$

obteniéndose

$$\left\{ \left[ \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \Phi + (\mathbf{L}^T \Phi)^T \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L}^T \Phi \right] - \frac{1}{2} \mathbf{h}^T \nabla \mathbf{r}_{\text{FIC}} \right\} \mathbf{u}^h = -\rho \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega - \Gamma \quad (5.42a)$$

$$\left\{ [\mathbf{N}^T \mathbf{D}_{\text{eff}} \mathbf{L} \Phi] - \frac{1}{2} h_n \mathbf{r}_{\text{FIC}} \right\} \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{t}} + \frac{1}{2} h_n \rho \mathbf{b} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (5.42b)$$

$$[\Phi] \mathbf{u}^h = \bar{\mathbf{u}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (5.42c)$$

siendo  $\nabla$  el operador gradiente,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{D}_{\text{eff}}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\Phi$ ,  $\rho \mathbf{b}$ ,  $\bar{\mathbf{t}}$  y  $\bar{\mathbf{u}}$  las matrices y vectores definidos en el apartado 5.4 y  $h_n$  la proyección del vector  $\mathbf{h}$  en la dirección de la normal exterior  $\hat{\mathbf{n}}$  del contorno, sección 3.7.

Se debe reiterar que si en el sistema de ecuaciones 5.42 el vector  $\mathbf{h}$  tiende a cero, es decir, cuando la longitud característica del dominio es infinitesimal, se recupera la forma original de las ecuaciones del problema, sistema 5.33.

Por último, cabe mencionar, que las modificaciones introducidas al sistema de ecuaciones 5.33 que gobierna el problema no-lineal, no alteran la naturaleza sin malla del *método de puntos finitos*.

## 5.5. Teoría de Deformación Total versus Plasticidad Clásica

Resultados experimentales indican que la deformación plástica no sólo depende del nivel de tensiones alcanzado sino también de su historia de carga.

Considérese un tubo delgado sujeto a una carga axial  $F$  y un torque  $T$ , los cuales son suficientes por sí mismos para alcanzar fluencia en el material. Si la carga axial es aplicada hasta un nivel de tensión superior al de fluencia y posteriormente se superpone el torque  $T$ , la deformación plástica resultante es diferente a la observada si el torque es aplicado antes que la carga axial.

Existe una tercera alternativa si la carga  $F$  y el torque  $T$  son incrementados proporcionalmente, es decir, mantener la relación  $F/T$  constante hasta que ambas cargas sean alcanzadas simultáneamente.

Estas secuencias de carga corresponden a variaciones en las tensiones principales como se muestra en la figura 5.10. Las flechas mostradas son los denominados caminos de carga, cuando uno de estos caminos forma una línea recta desde el origen, es designado como carga proporcional. La deformación plástica difiere a pesar de que el estado final de carga es el mismo, lo que implica una dependencia del camino de carga. Para analizar el comportamiento de esta dependencia se necesita la teoría de plasticidad clásica.

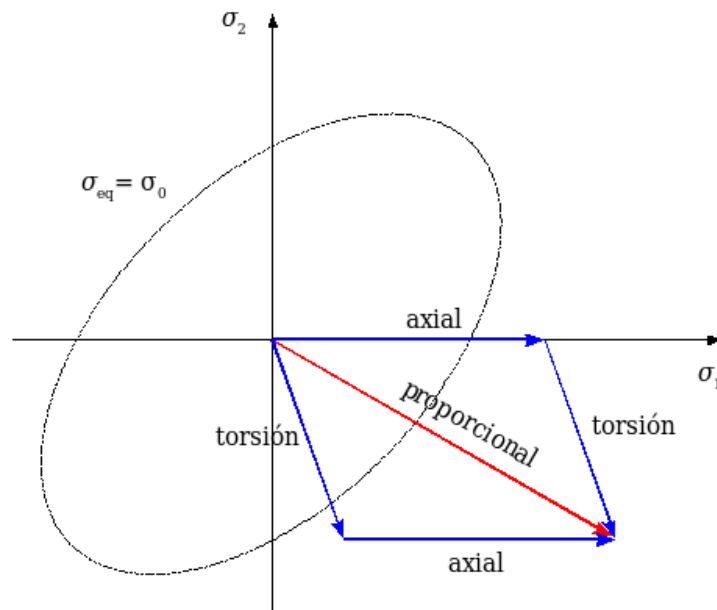


Figura 5.10: Posibles caminos de carga para las cargas combinadas en el tubo delgado

Las ecuaciones presentes en la teoría de plasticidad clásica son idénticas a las de deformación total, salvo que todas las deformaciones plásticas,  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $\varepsilon_{eq}^p$ , apartado 5.2, son reemplazadas por sus correspondientes cantidades diferenciales  $d\varepsilon_{ij}^p$ ,  $d\varepsilon_{eq}^p$ .

Sin embargo, si todas las cargas son aplicadas de manera que sus magnitudes sean proporcionales y sin que ocurra descarga, entonces la teoría de plasticidad clásica entrega los mismos resultados que la teoría de deformación total de *Hencky*. Lo anterior se comprueba a partir de la relación general de la

plasticidad clásica dada por

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (5.43)$$

donde  $\dot{\lambda}$  y el termino  $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$  corresponde al flujo potencial.

Por otro lado, si se cumple  $F = g^{\text{VonMises}}(\sigma)^6$ , entonces  $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \mathbf{s}$  y  $\dot{\lambda} = \dot{\psi}$ , por tanto, integrando en el tiempo se obtiene

$$\int_t \dot{\epsilon}^p dt = \int_t \dot{\psi} \mathbf{s} dt \quad (5.44)$$

$$\epsilon^p = \psi \mathbf{s} \quad (5.45)$$

expresión que coincide con la ecuación 5.6, por tanto la discusión anterior queda restringida a casos de carga proporcional monótona, dado que el flujo plástico es constante.

Por otro lado, el concepto de cargas proporcionales se define matemáticamente en un punto del sólido si las tensiones principales mantienen razones constantes conforme sus valores aumentan, es decir,

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = k_1, \quad \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = k_2 \quad (5.46)$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son constantes en cada punto del sólido en deformación, teniendo valores distintos entre ellos.

En la practica pueden ocurrir pequeñas variaciones en  $k_1$  y  $k_2$  sin generar problemas significantes en la teoría de deformación total. Además, si se mantiene la proporcionalidad y ocurre descarga, como en el caso de cargas cíclicas, esta teoría también puede ser aplicada sin inconvenientes (Downling, 1993). Sin embargo, en muchos casos prácticos envuelven cargas no proporcionales, por tanto se requiere el uso la teoría de plasticidad clásica. En (Owen & Hinton, 1980; Crisfield, 1991; Simo & Hughes, 1998; Belytschko et al., 2000; Zienkiewicz & Taylor, 2000) se entregan mas detalles acerca de la teoría de plasticidad clásica.

---

<sup>6</sup> $g^{\text{VonMises}}(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} \left( (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)^2 \right)} = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}$

## Capítulo 6

# Resultados numéricos

En este trabajo se ha desarrollado e implementado un código en lenguaje MATLAB (MATLAB, 2007) para la simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas y el *método de puntos finitos*, ver apéndice A. Además, dicho código ha sido integrado con el software comercial de pre y post proceso gráfico GiD (GiD-v8.0, 2007).

A continuación se presentan una serie de ejemplos numéricos que permiten evaluar el desempeño del *método de puntos finitos* utilizando la metodología propuesta en esta tesis. Estos problemas han sido extraídos de la literatura indicándose sus fuentes donde corresponda.

### 6.1. Placa rectangular sujeta a tensión constante

En este problema se aplica la metodología propuesta en esta tesis para el análisis de una placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c$ . Se ha considerado una condición de tensión plana, utilizándose un material no-lineal descrito por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943)

$$\varepsilon_{eq} = \underbrace{\frac{\sigma_{eq}}{E}}_{\varepsilon_{eq}^e} + \underbrace{\frac{\sigma_0 \alpha_{RO}}{E} \left( \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right)^{n_{RO}}}_{\varepsilon_{eq}^p} \quad (6.1)$$

para obtener los valores de la deformación equivalente  $\varepsilon_{eq}$  y deformación plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  correspondientes a la tensión prescrita  $\sigma_c$ .

Las magnitudes de  $\varepsilon_{eq}$  y  $\varepsilon_{eq}^p$  resultantes de la simulación mediante el MPF, se comparan con los valores obtenidos previamente usando la ecuación 6.1. Notése que producto de las condiciones de carga se cumple  $\sigma_{eq} = \sigma_c$ .

La geometría del dominio y condiciones de contorno se entregan en la figura 6.1. Sobre la parte superior de la placa se prescribe la tensión  $\sigma_c$ . Los parámetros del modelo de Ramberg-Osgood se muestran en

la tabla 6.1

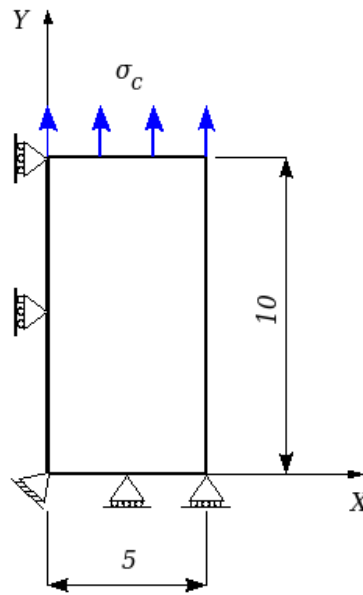


Figura 6.1: Geometría y condiciones de la placa rectangular sujeta a tensión constante.

Tabla 6.1: Parámetros del material, placa rectangular sujeta a tensión constante.

Módulo de elasticidad	$E$	$2 \cdot 10^5$ MPa
Relación de <i>Poisson</i>	$\nu$	0,3
Esfuerzo de fluencia	$\sigma_0$	200 MPa
Parametro de ajuste	$\alpha_{RO}$	$2 \cdot 10^{-6}$
Exponente de endurecimiento	$n_{RO}$	5

En la solución numérica mediante el *método de puntos finitos* se ha utilizado una *base de interpolación* cuadrática ( $m = 6$ ), ecuación 3.32, y *nubes* de 9 puntos. Los parámetros de la *función de ponderación* de *Gauss* corresponden a los señalados en el apartado 3.2. Por otro lado, la tolerancia de la aproximación se ha fijado en  $tol = 0.001$  de acuerdo a la ecuación 5.40. La discretización utilizada se compone de 36 puntos y se muestra en la figura 6.2.

La tabla 6.2 resume los principales resultados obtenidos en la resolución numérica mediante el MPF y la presente metodología. En esta tabla se ha incluido además el número de iteraciones  $N_{iter}$  empleadas en la resolución de cada caso estudiado. Las figuras 6.3 , 6.4 , 6.5 , 6.6 , 6.7 y 6.8 muestran gráficamente el funcionamiento de la técnica propuesta y del método de proyección, apartado 5.3. También es posible apreciar el número de iteraciones  $N_{iter}$ . En el apéndice B.1 se entregan resultados numéricos adicionales asociados a este problema.



Figura 6.2: Discretización de puntos del dominio,  $N = 36$ , placa rectangular sujeta a tensión constante.

Tabla 6.2: Principales resultados placa rectangular sujeta a tensión constante.

$\sigma_c$ <i>MPa</i>	$\varepsilon_{eq}$ (R-O)	$\varepsilon_{eq}^p$ (R-0)	$\varepsilon_{eq}$	$\varepsilon_{eq}^p$	$E_{eff}/E$	$\nu_{eff}/\nu$	$N_{iter}$ Iteraciones
50	0.000250	0	0.000250	0	1	1	1
100	0.000563	0.000063	0.000557	0.000057	0.897602	1.068266	3
150	0.001225	0.000475	0.001201	0.000451	0.624384	1.250411	7
200	0.003000	0.002000	0.002894	0.001894	0.345486	1.436342	11
250	0.007354	0.006104	0.007089	0.005839	0.176331	1.549113	15
300	0.016688	0.015188	0.015989	0.014489	0.093816	1.604123	17

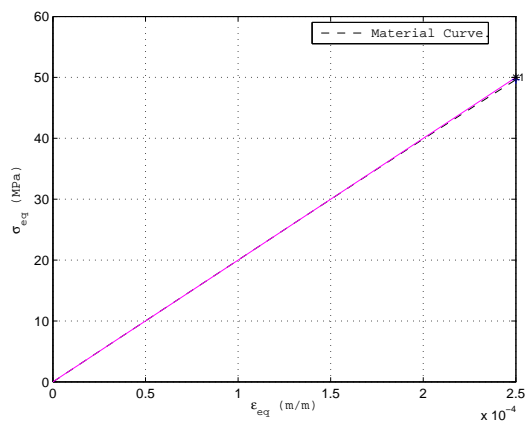


Figura 6.3: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico*, placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 50$  MPa.

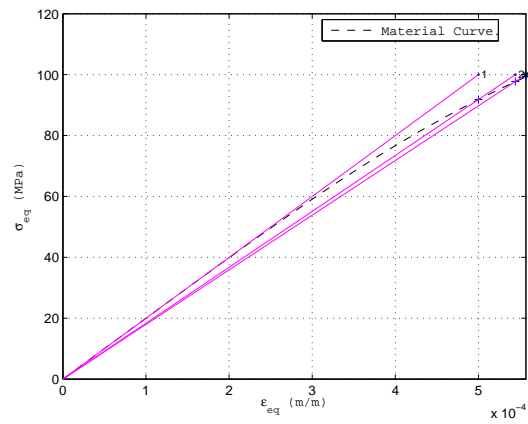


Figura 6.4: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico*, placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 100$  MPa.

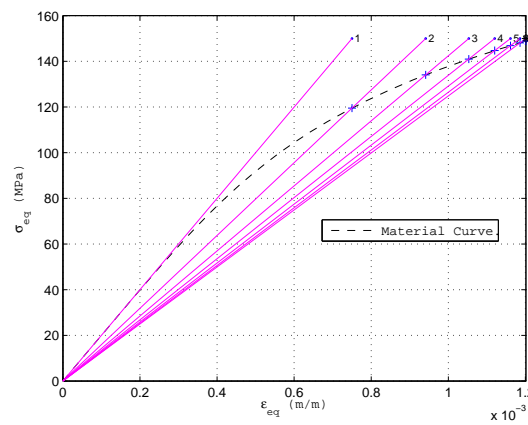


Figura 6.5: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico*, placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 150$  MPa.

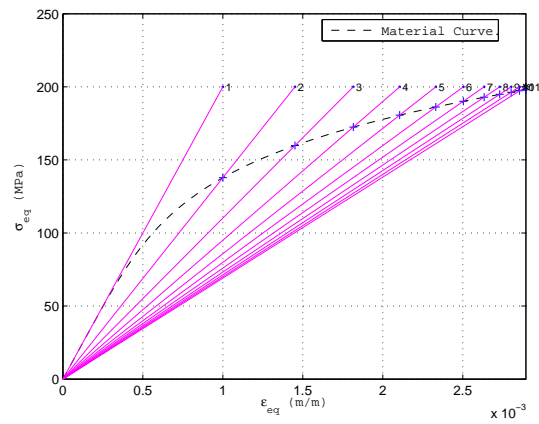


Figura 6.6: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico*, placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 200$  MPa.

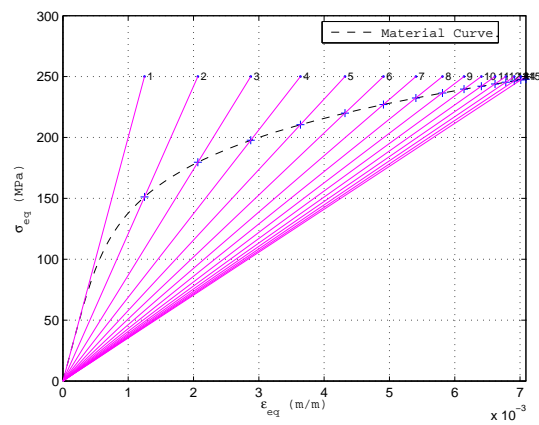


Figura 6.7: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico*, placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 250$  MPa.



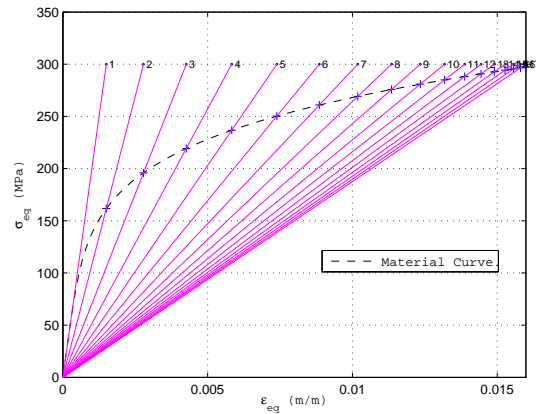


Figura 6.8: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico*, placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 300$  MPa.

### 6.1.1. Análisis

Este problema, permite comprobar y observar gráficamente el funcionamiento de la estrategia presentada en esta tesis.

A partir de la tabla 6.2 se concluye que esta técnica es capaz de reproducir el comportamiento de un material no-lineal descrito por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943) y en definitiva, cualquier material del cual se disponga su curva *tensión-deformación*.

Se observa en las figuras 6.3 a la 6.8 que el numero de iteraciones aumenta en forma proporcional a la tensión prescrita. Este comportamiento se debe a que son necesarias una mayor cantidad de correcciones para reproducir el fenómeno no-lineal. Nótese la diferencia de estados equivalentes de *tensión-deformación* entre la figura 6.3 y 6.8.

## 6.2. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna

En este problema se aplica la metodología presentada en esta tesis en el análisis no-lineal de un cilindro de pared gruesa de radio interior  $R_{int}$  y radio exterior  $R_{ext}$ , sujeto a una presión interna  $P_i$ . Este ejemplo ha sido ampliamente usado en el contexto de la simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales mediante el uso de soluciones elásticas, algunos de estos trabajos son, (Jahed et al., 1997; Desikan & Sethuraman, 2000; Sethuraman & Reddy, 2004; Dai et al., 2005; Gu et al., 2007).

Se ha considerada una condición de deformación plana y un material no-lineal dado por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943), cuyos parámetros se muestran en la tabla 6.3

Tabla 6.3: Parámetros del material, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna.

Módulo de elasticidad	$E$	$2 \cdot 10^5$ MPa
Relación de <i>Poisson</i>	$\nu$	0,3
Esfuerzo de fluencia	$\sigma_0$	200 MPa
Parametro de ajuste	$\alpha_{RO}$	3/7
Exponente de endurecimiento	$n_{RO}$	5

La geometría del dominio y las condiciones de contorno se muestran en la figura 6.9. Se considera  $R_{ext}/R_{int} = 5$ . Se han analizado tres casos de presión interna,  $P_i/\sigma_0 = 1, 1.5$  y 2.

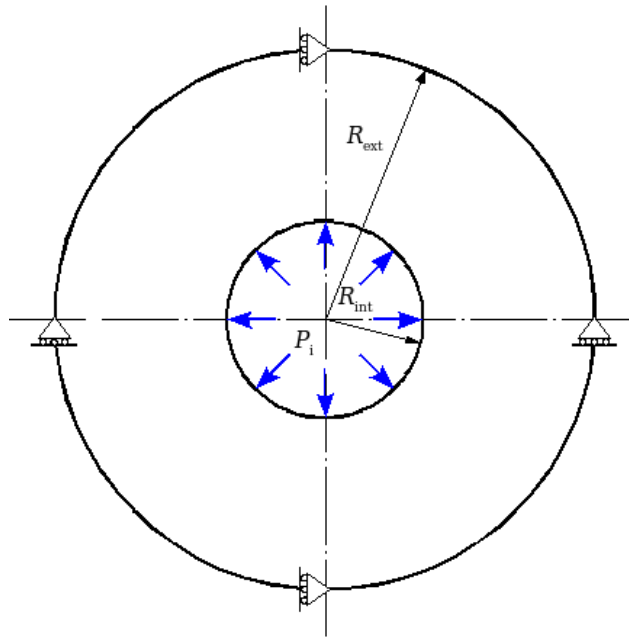


Figura 6.9: Geometría del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna.

En la solución numérica mediante el *método de puntos finitos* se ha utilizado una *base de interpolación cuadrática* ( $m = 6$ ), ecuación 3.32, y *nubes* de 9 puntos. Los parámetros de la *función de ponderación de Gauss* corresponden a los señalados en el apartado 3.2. Por otro lado, la tolerancia de la aproximación se ha fijado en  $tol = 0.001$  de acuerdo a la ecuación 5.40. La discretización utilizada se compone de

1056 puntos y se muestra en la figura 6.10

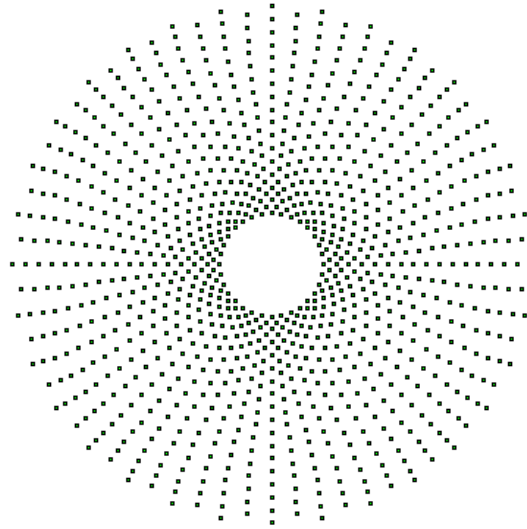


Figura 6.10: Discretización del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna,  $N = 1056$  puntos.

Los resultados obtenidos con la presente metodología se han comparado con los entregados por el software comercial de *elementos finitos* ADINA (ADINA, 2007).

### 6.2.1. Resultados numéricos para $P_i/\sigma_0 = 1$

En el apéndice B.2 se entregan resultados numéricos adicionales asociados a este problema y relación  $P_i/\sigma_0$ .

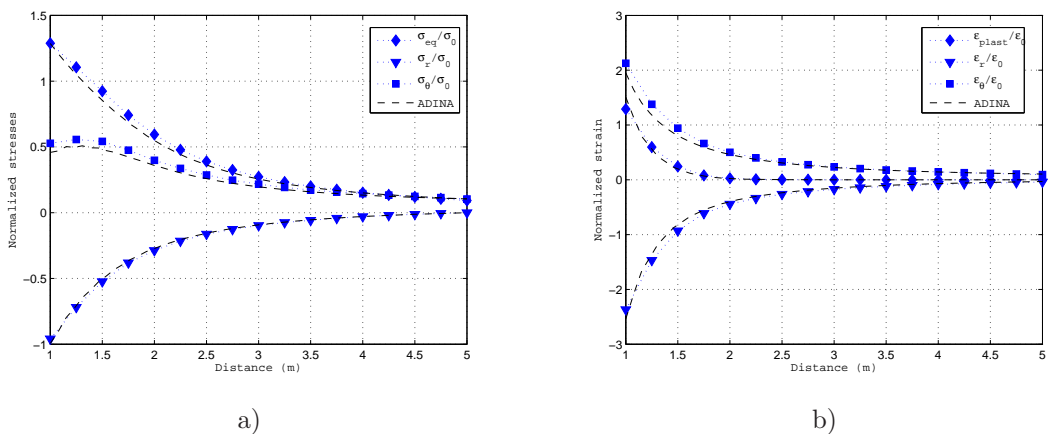


Figura 6.11: Distribución normalizada de a) tensiones , b) deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna,  $P_i/\sigma_0 = 1$ .

### 6.2.2. Resultados numéricos para $P_i/\sigma_0 = 1.5$

En el apéndice B.2 se entregan resultados numéricos adicionales asociados a este problema y relación  $P_i/\sigma_0$ .

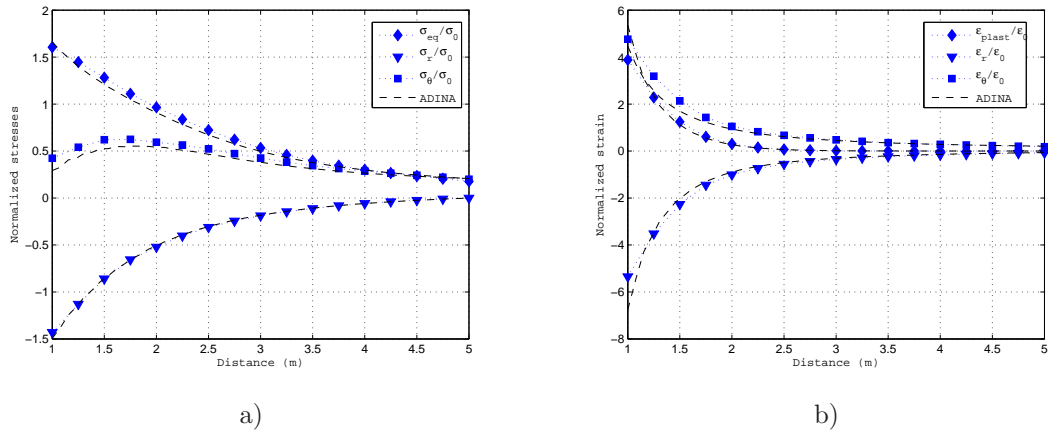


Figura 6.12: Distribución normalizada de a) tensiones , b) deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna,  $P_i/\sigma_0 = 1.5$ .

### 6.2.3. Resultados numéricos para $P_i/\sigma_0 = 2$

En el apéndice B.2 se entregan resultados numéricos adicionales asociados a este problema y relación  $P_i/\sigma_0$ .

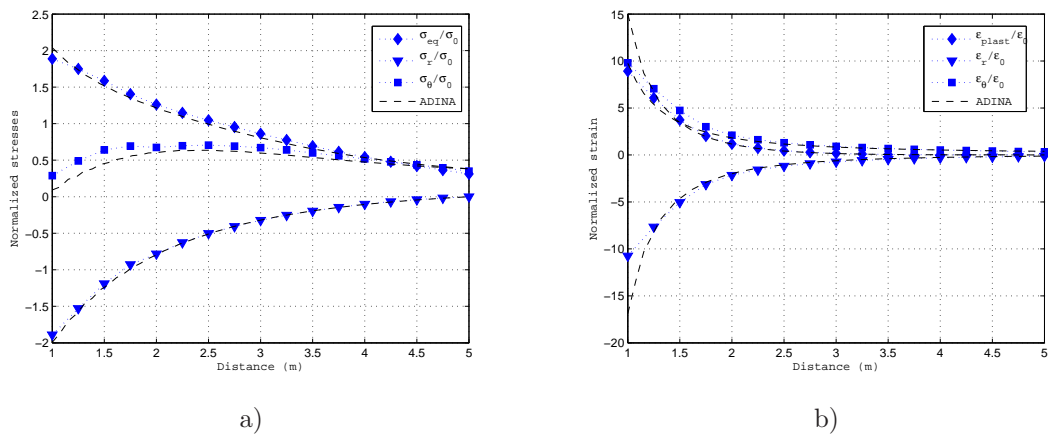


Figura 6.13: Distribución normalizada de a) tensiones , b) deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna,  $P_i/\sigma_0 = 2$ .

### 6.2.4. Análisis

Se observa en las figuras 6.11, 6.12 y 6.13 permiten observar el aumento de la zona plástica conforme se incrementa la relación  $P_0/\sigma_0$ , este comportamiento también puede observarse en la figura 6.14. Nótese como las variables efectivas normalizadas  $E_{\text{eff}}/E$  y  $\nu_{\text{eff}}/\nu$  permiten dimensionar en buena forma el avance del fenómeno no-lineal global.

Se observa en la figura 6.13 una leve diferencia en la distribución de deformaciones normalizadas, esto se debe al elevado nivel de carga, lo que implica un avanzado estado no-lineal, haciéndose mas difícil converger a la solución adecuada.

En general, los resultados numéricos obtenidos se ajustan en buena forma a los que entrega la modelación mediante el software comercial de *elementos finitos* ADINA (ADINA, 2007). Se concluye que esta técnica es capaz de reproducir el comportamiento de un material no-lineal descrito por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943).

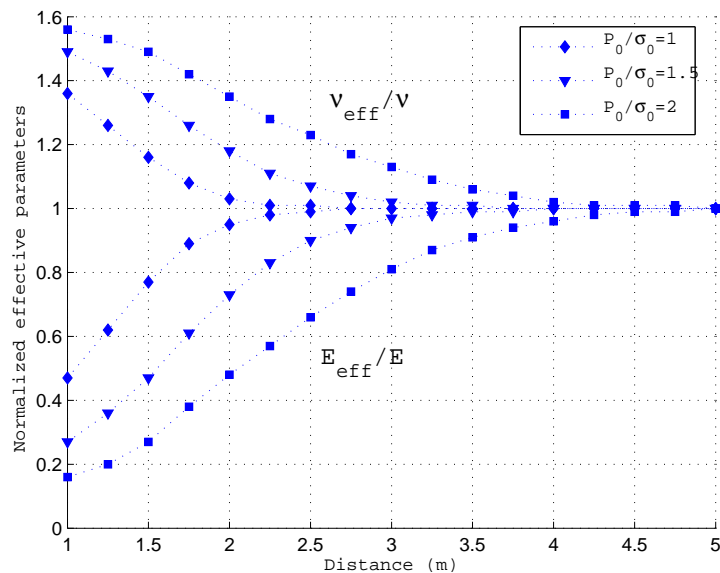


Figura 6.14: Distribución de los parámetros efectivos de material del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna.

### 6.3. Placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada

En este problema se utiliza la metodología propuesta en esta tesis en el análisis de placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada. El objetivo de este ejemplo es mostrar la efectividad y a la vez justificar el uso de la técnica de estabilización FIC Oñate (1996, 2004) indicada en el apartado 3.7 y 5.4.4. Se resuelve numéricamente el problema mediante el MPF sin estabilizar y el MPF estabilizado, comparándose posteriormente los resultados obtenidos en cada simulación.

Se considera una condición de tensión plana y un material no-lineal dado por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943), cuyos parámetros se muestran en la tabla 6.4

Tabla 6.4: Parámetros del material, Placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

Módulo de elasticidad	$E$	$2 \cdot 10^5$ MPa
Relación de <i>Poisson</i>	$\nu$	0,3
Esfuerzo de fluencia	$\sigma_0$	200 MPa
Parametro de ajuste	$\alpha_{RO}$	$2 \cdot 10^{-6}$
Exponente de endurecimiento	$n_{RO}$	5

La geometría del dominio y las condiciones de contorno se muestran en la figura 6.15, se considera  $w = 250 \text{ N/mm}^2$ .

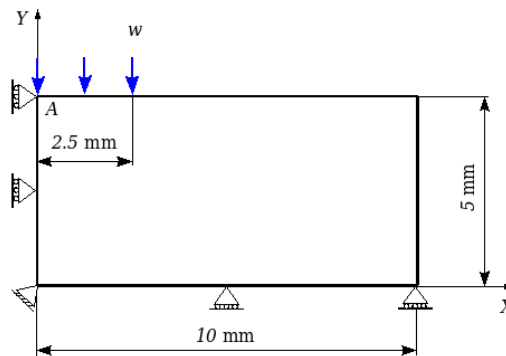


Figura 6.15: Geometría de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

En la solución numérica mediante el *método de puntos finitos* se ha utilizado una *base de interpolación cuadrática* ( $m = 6$ ), ecuación 3.32, y *nubes* de 9 puntos. Los parámetros de la *función de ponderación de Gauss* corresponden a los señalados en el apartado 3.2. Por otro lado, la tolerancia de la aproximación se ha fijado en  $tol = 0.001$  de acuerdo a la ecuación 5.40. La discretización utilizada se compone de 812 puntos y se muestra en la figura 6.16

La figura 6.17 muestra una comparación de la distribución normalizada de tensión equivalente  $\sigma_{eq}$  y deformación plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$ , de la parte superior de la placa, para la resolución numérica mediante MPF sin estabilizar y estabilizado. Por otro lado la figura 6.18 presenta los gráficos de convergencia de un punto *pseudo-elástico* ubicado en la esquina A de la figura 6.15 indicando a su vez el número de iteraciones *Niter*. En la figura 6.19 se muestra la comparación de las deformadas del contorno de desplazamiento total. En el apéndice B.3 se entregan resultados numéricos adicionales

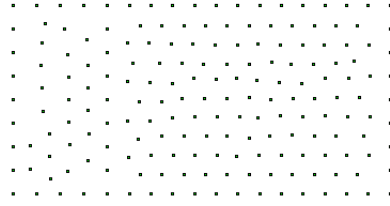


Figura 6.16: Discretización de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada,  $N = 183$  puntos.

asociados a este problema. Los resultados obtenidos con la presente metodología se han comparado con los entregados por el software comercial de *elementos finitos* ADINA (ADINA, 2007).

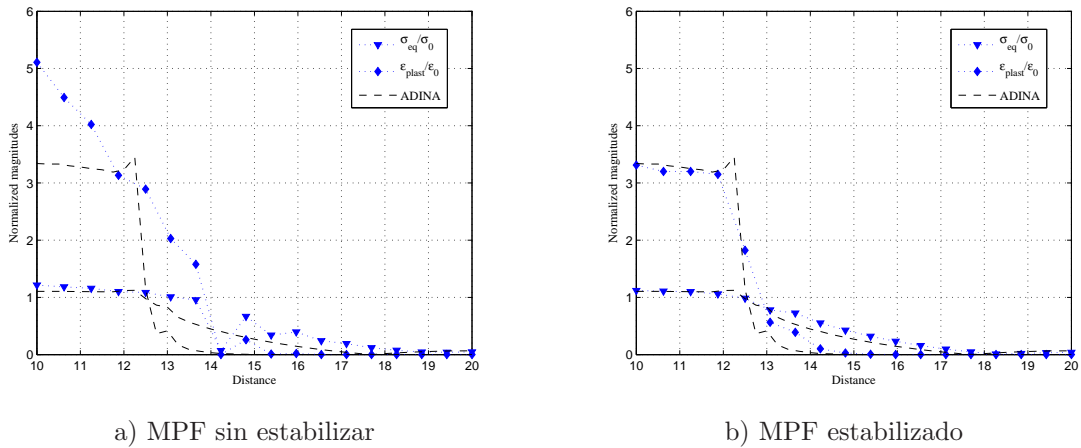


Figura 6.17: Comparación de distribución normalizada de tensión equivalente  $\sigma_{eq}$  y deformación plástica equivalente  $\epsilon_{eq}^p$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

### 6.3.1. Análisis

La figura 6.19 permite observar las inestabilidades que introduce la condición de *Neumann* en el procedimiento de colocación puntual, haciéndose toralmente necesario el uso de la técnica de estabilización FIC de la sección apartado 3.7.

Si bien es cierto, en el caso sin estabilizar se obtiene la convergencia deseada, figura 6.18, esto no asegura el correcto funcionamiento del MPF, quedando de manifiesto en la figura 6.19 y en las gráficas de apéndice B.3.

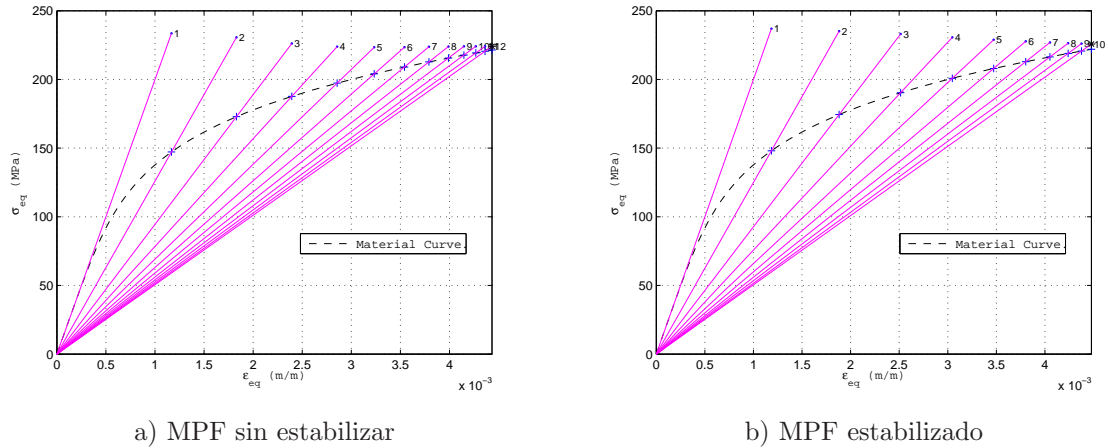


Figura 6.18: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico* ubicado en la esquina *A* (figura 6.15) de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

## 6.4. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante

En este problema se aplica la presente técnica al análisis no-lineal de un cilindro de pared gruesa de radio interior  $R_{int}$  y radio exterior  $R_{ext}$ , sujeto a una presión interna  $P_i$  y una tensión cortante  $\tau_i$ . Este ejemplo ha sido presentado en los trabajos de (Jahed et al., 1997) y (Sethuraman & Reddy, 2004) también en el contexto de la simulación numérica del comportamiento no-lineal de materiales empleando aproximaciones elásticas.

Se han considerado las condiciones de deformación plana y tensión plana en un material no-lineal dado por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943), cuyos parámetros se muestran en la tabla 6.5

Tabla 6.5: Parámetros del material, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

Módulo de elasticidad	$E$	$2 \cdot 10^5$ MPa
Relación de <i>Poisson</i>	$\nu$	0,3
Esfuerzo de fluencia	$\sigma_0$	200 MPa
Parametro de ajuste	$\alpha_{RO}$	$3/7$
Exponente de endurecimiento	$n_{RO}$	5

La geometría del dominio y las condiciones de contorno se muestran en la figura 6.20, se considera  $R_{ext}/R_{int} = 5$ . Los valores de la presión interna y tensión cortante están dados por  $\frac{P_i}{\sigma_0} = \frac{\tau_i}{\sigma_0} = 1$ .

En la solución numérica mediante el *método de puntos finitos* se ha utilizado una *base de interpolación* cuadrática ( $m = 6$ ), ecuación 3.32, y *nubes* de 9 puntos. Los parámetros de la *función de ponderación* de *Gauss* corresponden a los señalados en el apartado 3.2. Por otro lado, la tolerancia de la aproximación se ha fijado en  $tol = 0.001$  de acuerdo a la ecuación 5.40. La discretización utilizada se compone de 812 puntos y se muestra en la figura 6.21





MPF sin estabilizar



MPF estabilizado

Figura 6.19: Deformada del contorno de desplazamiento total (factor de escala = 100), placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

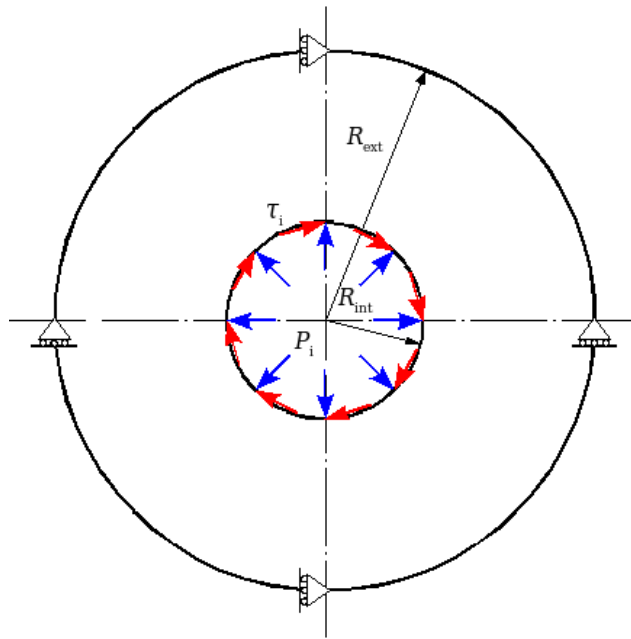


Figura 6.20: Geometría del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

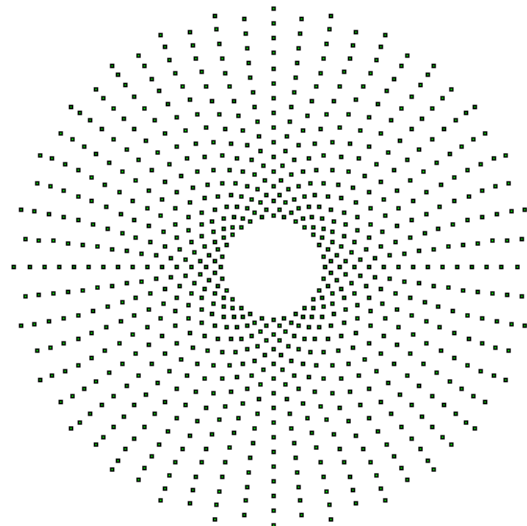


Figura 6.21: Discretización del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante,  $N = 812$  puntos.

Los resultados obtenidos con la presente metodología se han comparado con los entregados en el trabajo de (Sethuraman & Reddy, 2004). Las figuras 6.22 y 6.23 muestran respectivamente la distribución normalizada de tensiones y deformaciones para las dos condiciones estudiadas. Por otro lado la figura 6.24 presenta los gráficos de convergencia de un punto *pseudo-elástico* ubicado en la superficie interior del cilindro, indicando el número de iteraciones  $N_{iter}$ . Adicionalmente, la figura 6.25 muestra los contornos de deformación plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$ . En el apéndice B.4 se entregan resultados numéricos adicionales asociados a este problema.

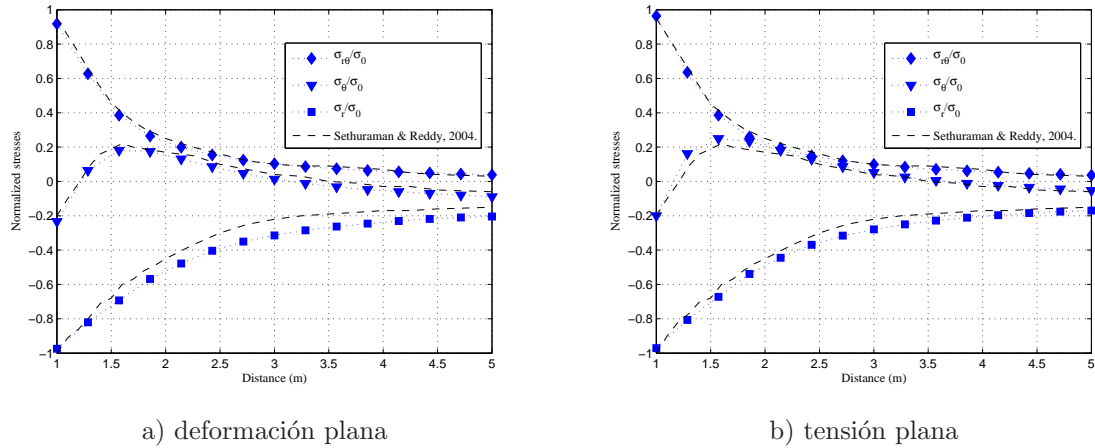


Figura 6.22: Distribución normalizada de tensiones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

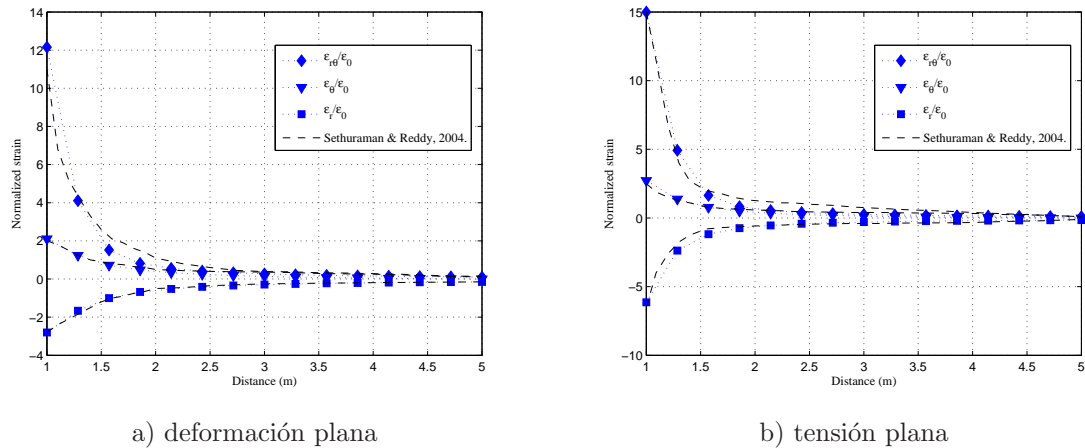


Figura 6.23: Distribución normalizada de deformaciones, cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

### 6.4.1. Análisis

El *método de puntos finitos* reproduce en buena forma el efecto combinado de la presión interna y tensión cortante, esto se observa en la figura 6.25 y en las gráficas del apéndice B.4. También en estas

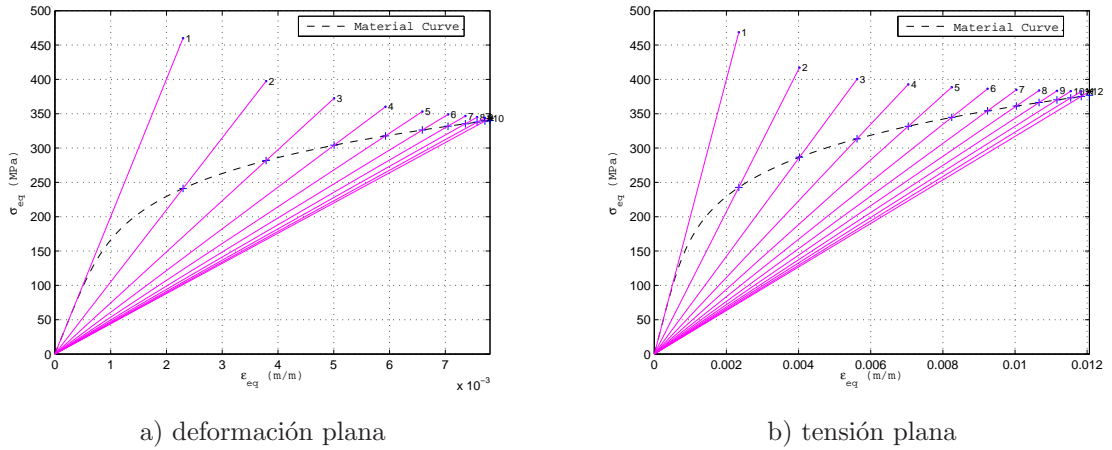


Figura 6.24: Gráfico de convergencia de un punto *pseudo-elástico* ubicado en la superficie interior del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

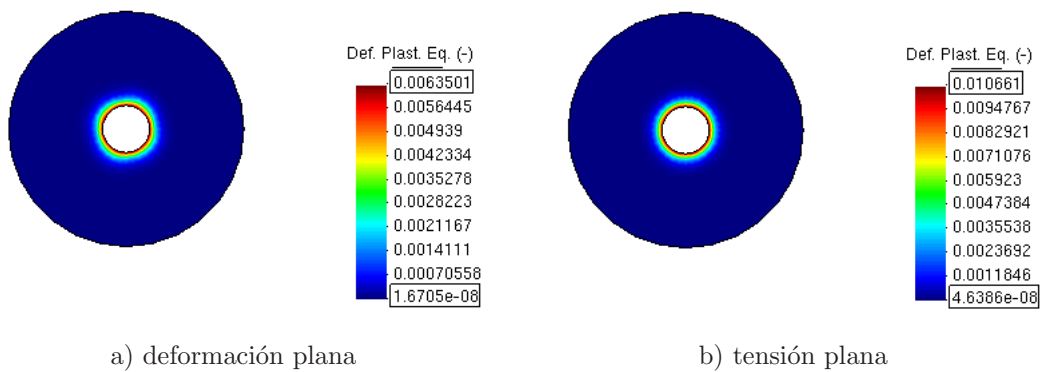


Figura 6.25: Contornos de deformación equivalente plástica  $\epsilon_{eq}^p$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

figuras, es posible es posible cuantificar el tamaño de la zona no-lineal.

Estos resultados permiten comprobar el correcto funcionamiento de la metodología propuesta y la estabilización FIC (apartado 3.7), en casos con configuraciones complejas de tensiones prescritas, superándose con éxito los inconvenientes de la condición de *Neumann* presentes en el procedimiento de colocación puntual.

Los resultados numéricos obtenidos mediante la presente técnica se ajustan en buena forma con los entregados en el trabajo de (Sethuraman & Reddy, 2004), observándose que esta técnica es capaz de reproducir el comportamiento de un material no-lineal descrito por el modelo de Ramberg-Osgood (Ramberg & Osgood, 1943).

# Capítulo 7

## Conclusiones

En esta tesis se ha desarrollado una metodología que utiliza el *método de puntos finitos*, como técnica totalmente libre de malla, para el trabajar con un modelo constitutivo basado en la teoría de *deformación total* de *Hencky* y un enfoque elástico para aproximar la distribución de tensiones y de deformaciones en el rango no-lineal de un material. Esta aproximación ha introducido el concepto de propiedades efectivas del material las cuales se obtienen en forma iterativa mediante un procedimiento de corrección aplicado sobre la curva experimental de *tensión-deformación* del material. Cabe mencionar, que debido a las características intrínsecas del MPF, esta técnica ha sido desarrollada mediante una formulación fuerte, forma no abordada en la literatura existente relativa al uso de este tipo de aproximación no-lineal.

Se han definido globalmente y con la idea de establecer conceptos, las características que debe poseer una técnica numérica para que sea considerada como *método sin malla*.

Se ha estudiado el *método de puntos finitos* y su aplicación a la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales, presentándose además, las principales expresiones de la técnica de interpolación por mínimos cuadrados utilizada por esta técnica.

Por otro lado, también se ha analizado el funcionamiento del MPF en la resolución de las ecuaciones de elasticidad lineal en sólidos, esto como base fundamental para la metodología no-lineal propuesta en esta tesis.

Para demostrar la validez de la metodología propuesta, se han resuelto ejemplos numéricos extraídos de la literatura relacionada y han sido comparados ya sea con los resultados publicados o con los obtenidos de la modelación de estos, mediante el software comercial de *elementos finitos* ADINA (ADINA, 2007). La implementación de estos ejemplos se ha realizado mediante un código programado en MATLAB (MATLAB, 2007). Además, este código ha sido integrado con el software comercial de pre y post proceso gráfico GiD (GiD-v8.0, 2007).

Respecto a la aplicación del *método de puntos finitos* para la simulación del comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas, la tesis desarrollada permite extraer las siguientes conclusiones:

- Es importante contar con un método eficiente para generar las *nubes* y que permita a su vez comprobar la calidad de estas.
- La utilización de una *base de interpolación* en coordenadas locales (centrada en el *nodo estrella*) y adimensionales, permite evitar un posible mal condicionamiento de la matriz de momentos  $A_I$ , presente en la ecuación 3.9, cuando las coordenadas globales del punto se alejan del origen del sistema de referencia.
- Se hace necesario contar con un procedimiento para comprobar la calidad de la *función de forma* que se obtiene y para formular el problema de interpolación en la nube en términos de las coordenadas locales adimensionales.
- Debido a que el vector de parámetros  $\alpha$ , ecuaciones 3.1 y 3.9, contiene términos constantes, la derivada parcial de la *función de forma* se obtiene derivando solamente los términos de la *base de interpolación*. Por tanto la resolución de ecuaciones diferenciales mediante MPF se torna especialmente simple.
- En el MPF las condiciones de contorno son impuestas de manera fácil y directa gracias al procedimiento de colocación puntual utilizado. La condición de *Dirichlet* no requiere un tratamiento adicional en el sistema de ecuaciones 3.29, a pesar de que esta se cumple en el sentido de los mínimos cuadrados, reproduce perfectamente la prescripción impuesta.
- El MPF resulta ser una técnica sin malla fácil de implementar, para la solución de las ecuaciones de la elasticidad lineal de sólidos, capítulo 4.
- El esquema de colocación puntual utilizado, permite satisfacer ecuaciones diferenciales en puntos del dominio de solución, sin tener que definir subdominios de integración como en el caso de las formulaciones débiles (por ejemplo FEM).
- El concepto de puntos *pseudo-elásticos* permite representar el estado de carga de un punto, representándolo en a una curva tensión-deformación. Esta noción es clave en la metodología propuesta.
- La teoría de la deformación total de *Hencky* establece una relación entre los tensores de deformación plástica y tensiones en forma similar a la ley de *Hooke*, razón por la cual resulta de fácil asimilación.
- La introducción del concepto de propiedades efectivas del material  $E_{\text{eff}}$  y  $\nu_{\text{eff}}$  permite entender en forma sencilla el comportamiento no-lineal de materiales utilizando la presente técnica.
- El MPF resulta ser una técnica sin malla fácil de implementar, para la el análisis del comportamiento no-lineal de materiales utilizando aproximaciones elásticas, capítulo 5.
- La correcta implementación del término  $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$  permite asegurar la convergencia de la solución entregada por la presente metodología.
- En esta tesis se recurre al uso del concepto mismo de la aproximación MPF para obtener el término  $\partial \mathbf{D}_{\text{eff}}$  ( presente en el sistema 5.30a), las *funciones de forma* y sus derivadas, ecuaciones 3.14, 3.15 y 3.34 respectivamente. Por tanto, no se requiere información y procedimientos adicionales para conseguir la aproximación de este término, apartado 5.4.1.

- El criterio de convergencia utilizado en esta tesis (5.37) demuestra ser simple, directo y de fácil implementación, además, es sensible a las variaciones en el estado de *tensión-deformación*, ver figura 5.9.
- El procedimiento de estabilización FIC (apartado 3.7), basado en el criterio de imponer las condiciones de equilibrio sobre un dominio de tamaño finito, permite superar los problemas que presenta la técnica de colocación puntual, tanto en la implementación lineal como la no-lineal. Cabe mencionar, que las modificaciones introducidas por esta estabilización, en los sistema de ecuaciones 4.14 y 5.42, no alteran la naturaleza sin malla del *método de puntos finitos*.
- Si todas las cargas son aplicadas de manera que sus magnitudes sean proporcionales y sin que ocurra descarga, entonces la teoría de deformación total de *Hencky* utilizada en esta tesis, resulta ser un enfoque más sencillo y fácil de implementar que la plasticidad clásica.
- Los ejemplos numéricos desarrollados, permiten demostrar la validez de la metodología propuesta, ajustándose en buena forma a los resultados entregados en la literatura o en la modelación mediante el software comercial de *elementos finitos* ADINA (ADINA, 2007). Estos han permitido comprobar y observar gráficamente el funcionamiento de la estrategia presentada, evaluar la evolución de las variables conforme aumenta el estado de carga dimensionando el avance del fenómeno no-lineal. Por otro lado han permitido justificar el uso de la técnica de estabilización FIC superando con éxito los inconvenientes de la condición de *Neumann* presentes en el procedimiento de colocación puntual.

## 7.1. Futuras líneas de investigación

A partir de la metodología presentada en esta tesis, se pueden formular diversas investigaciones dentro del ámbito de la simulación de comportamiento no-lineal de materiales.

- Estudio de la posibilidad de extender la presente técnica para modelar materiales heterogéneos o con muy diversas propiedades mecánicas.
- Estudio del funcionamiento de la estrategia propuesta en el análisis de tensiones residuales incluyendo el comportamiento de descarga y el efecto *Bauschinger*.
- Estudio del funcionamiento de la estrategia propuesta en el análisis de tensiones en cargas cíclicas.
- Evaluación del comportamiento de la metodología propuesta a problemas tridimensionales, estudio que además, debiera abarcar el desarrollo de un generador de puntos eficiente para estos casos.
- Extender el uso del MPF y la aplicación de aproximaciones lineales para simular fenómenos no-lineales a otras áreas de la ciencia e ingeniería.
- Implementación un modelo de daño continuo.
- Implementación de la teoría de plasticidad clásica.
- Simulación de problemas de fractura con control de disipación.



- Resolución del problema de objetividad en la solución, independizándola de la densidad de puntos de la *nube*.

Durante el desarrollo de esta tesis han surgido inquietudes relacionadas al MPF que merecen ser objeto de un análisis y desarrollo más profundo, entre estos se puede mencionar

- Estudio de métodos para generación directa de puntos poniendo especial énfasis en la posibilidad de utilizar técnicas adaptivas.
- Implementación de un procedimiento que permita generar las *nubes* en el dominio y el contorno de manera eficiente y, además, controlar la cantidad de puntos por *nube*, teniendo la posibilidad de incluir o sacar puntos para mejorar la calidad de esta.
- Evaluación de técnicas tipo quadtree-octree para la generación de grillas estructuradas.
- Evaluación de posibilidades de formular un problema único que determine tanto puntos como *nubes*.
- Implementación de un procedimiento adaptivo que permita variar el orden de la *base de interpolación*.
- Estudio de otras técnicas de estabilización.
- Mejorar el procedimiento de generación de las normales utilizadas por la condición de *Neumann*, obteniéndolas solo a partir de la información de las coordenadas de los puntos.

Este trabajo ha sido financiado por la Dirección General de Investigación y Postgrado de la Universidad Técnica Federico Santa María a través del proyecto de investigación USM-250521 y se ha desarrollado en el Aula UTFSM-CIMNE del Departamento de Mecánica, perteneciente a la Red de Aulas del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) de la Universidad Politécnica de Cataluña.

## Apéndice A

# Principales rutinas del código MATLAB

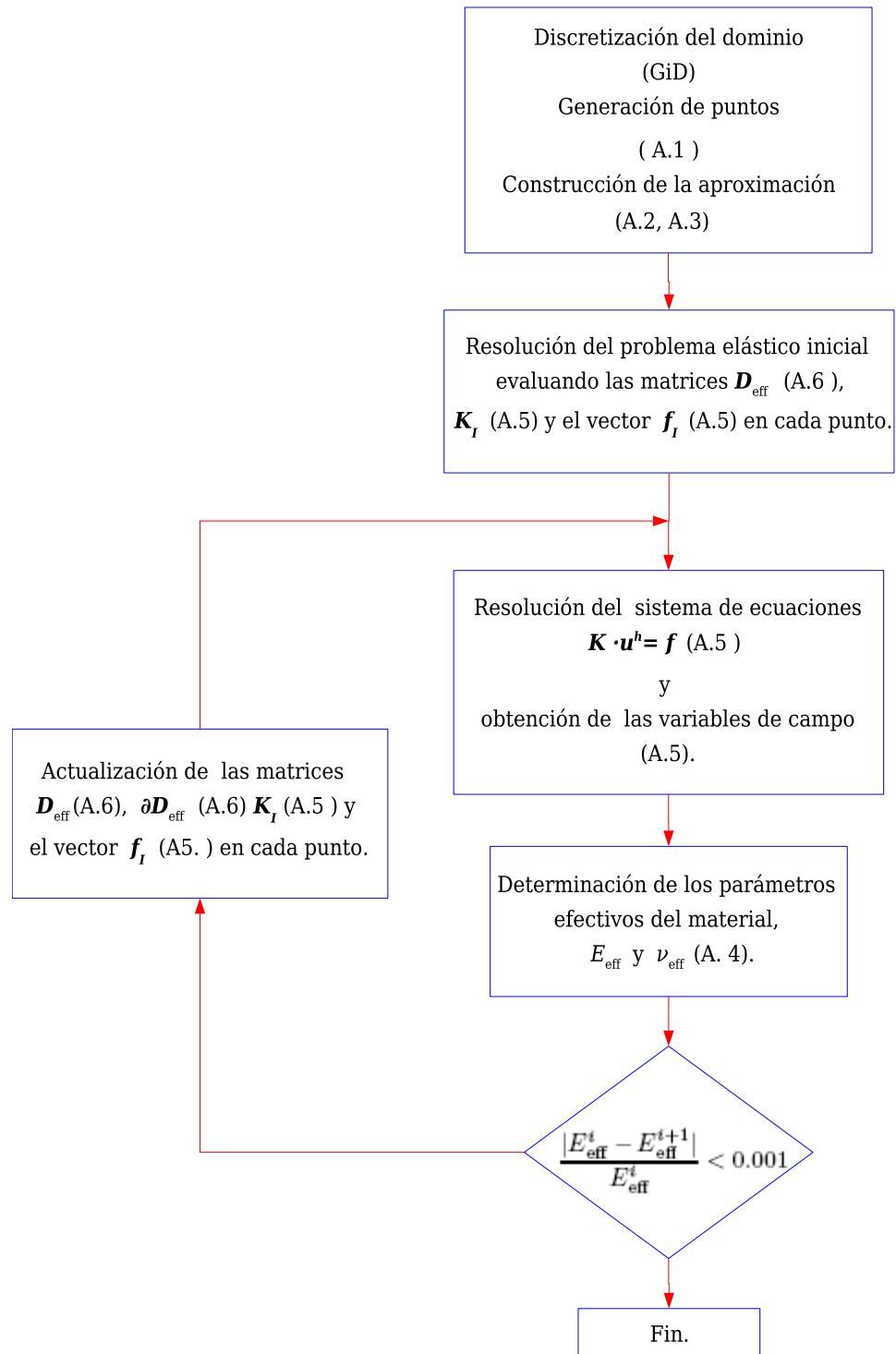


Figura A.1: Diagrama de flujo de la técnica propuesta en esta tesis. Se indican entre parentesis las rutinas correspondientes a cada paso

## A.1. Rutina polinomio *base de interpolación*

```
0001 function gen_poly2d=gen_poly2d(XI,YI,x,y,dxmax,dymax,idpol);
0002 if idpol==1 % Polinomio base
0003     gen_poly2d=[1 (XI-x)/dxmax (YI-y)/dymax ((XI-x)/dxmax)^2 ...
0004     (XI-x)*(YI-y)/(dxmax*dymax) ((YI-y)/dymax)^2]';
0005 end
0006 if idpol==2% dx Polinomio base
0007     gen_poly2d=[0 -1/dxmax 0 -2/dxmax^2*(XI-x) -1/(dxmax*dymax)*(YI-y) 0]';
0008 end
0009 if idpol==3% dy Polinomio base
0010     gen_poly2d=[0 0 -1/dymax 0 -1/(dxmax*dymax)*(XI-x) -2/dymax^2*(YI-y)]';
0011 end
0012 if idpol==4% dxx Polinomio base
0013     gen_poly2d=[0 0 0 2/dxmax^2 0 0]';
0014 end
0015 if idpol==5% dyy Polinomio base
0016     gen_poly2d=[0 0 0 0 0 2/dymax^2]';
0017 end
0018 if idpol==6% dxy Polinomio base
0019     gen_poly2d=[0 0 0 0 1/(dxmax*dymax) 0]';
0020 end
```



### A.3. Rutina *funciones de forma*

```

0001 function [BASES,BASESdx,BASESdy,BASESddx,..
BASESddy,BASESdxy,rcond_AI] = gen_bases(NODES,CLOUDS,DMAX,PROBLEM_DATA);
0002 [ptsglobales,ptsnube]=size(CLOUDS);
0003 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0004 % RUTINA PARA DETERMINAR dmax_a (ADIMENSIONALIZADO)
0005 dmax_a=zeros(ptsglobales,1);
0006 for i=1:ptsglobales
0007     cloudI=CLOUDS(i,:);
0008     dxmax=DMAX(i,2);
0009     dymax=DMAX(i,3);
0010     dxa=(NODES(cloudI,2)-NODES(cloudI(1),2))/dxmax;
0011     dya=(NODES(cloudI,3)-NODES(cloudI(1),3))/dymax;
0012     dmax_a(i)=max(sqrt(dxa.*dxa+dya.*dya));
0013 end
0014 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0015 BASES=[];% FUNCION DE FORMA
0016 BASESdx=[];% DERIVADA x DE LA FUNCION DE FORMA
0017 BASESdy=[];% DERIVADA y DE LA FUNCION DE FORMA
0018 BASESddx=[];% SEGUNDA DERIVADA x DE LA FUNCION DE FORMA
0019 BASESddy=[];% SEGUNDA DERIVADA y DE LA FUNCION DE FORMA
0020 BASESdxy=[];% DERIVADA CRUZADA DE LA FUNCION DE FORMA
0021 rcond_AI=[];% GUARDA rcond(AI)
0022 for i=1:ptsglobales
0023     P=[];
0024     w=[];
0025     WI=[];
0026     puntoXI=CLOUDS(i,1);% IDENTIFICA EL NODO ESTRELLA
0027     XI=NODES(puntoXI,2);% COORDENADA x DEL NODO ESTRELLA
0028     YI=NODES(puntoXI,3);% COORDENADA y DEL NODO ESTRELLA
0029     dmax=dmax_a(i);%DISTANCIA MAXIMA A-DIMENSIONALIZADA
0030     dxm=DMAX(i,2);
0031     dym=DMAX(i,3);
0032     p=gen_poly2d(XI,YI,XI,YI,dxm,dym,1);% POLINOMIO BASE PARA XI
0033     dxp=gen_poly2d(XI,YI,XI,YI,dxm,dym,2);% DERIVADA x POLINOMIO BASE PARA XI
0034     dyp=gen_poly2d(XI,YI,XI,YI,dxm,dym,3);% DERIVADA y POLINOMIO BASE PARA XI
0035     ddxp=gen_poly2d(XI,YI,XI,YI,dxm,dym,4);% SEGUNDA DERIVADA x POLINOMIO BASE PARA XI
0036     ddyp=gen_poly2d(XI,YI,XI,YI,dxm,dym,5);% SEGUNDA DERIVADA y POLINOMIO BASE PARA XI
0037     dxyp=gen_poly2d(XI,YI,XI,YI,dxm,dym,6);% DERIVADA CRUZADA POLINOMIO BASE PARA XI
0038     for j=1:ptsnube
0039         puntoj=CLOUDS(i,j);
0040         xj=NODES(puntoj,2);
0041         yj=NODES(puntoj,3);
0042         P=[P;gen_poly2d(XI,YI,xj,yj,dxm,dym,1)'];

```

```
0043     w=[w wgauss2d(XI,YI,xj,yj,dxm,dym,dmax,PROBLEM_DATA(4))];
0044     end
0045     WI=diag(w);
0046     AI=P'*WI*P;
0047     BI=P'*WI;
0048     CI_1=inv(AI)*BI;
0049     basei=p'*CI_1;
0050     dxbasei=dxp'*CI_1;
0051     dybasei=dyp'*CI_1;
0052     ddxbasei=ddxp'*CI_1;
0053     ddybasei=ddyp'*CI_1;
0054     dxybasei=dxyp'*CI_1;
0055     BASES=[BASES;basei];
0056     BASESdx=[BASESdx;dxbasei];
0057     BASESdy=[BASESdy;dybasei];
0058     BASESddx=[BASESddx;ddxbasei];
0059     BASESddy=[BASESddy;ddybasei];
0060     BASESdxy=[BASESdxy;dxybasei];
0061     rcond_AI=rcond(AI);
0062     rcond_AI=[rcond_AI;rcond_AIi];
0063     end
0064     return
```

## A.4. Rutina método de proyección vertical

```

0001 function [S_effc,E_effc,nu_effc,Epk,bres]=pseudo_elastic(MATERIAL_DATA,...
PROBLEM_DATA,Syk,S_eff,e_eff);
0002 idMat=MATERIAL_DATA(1);
0003 idCorr=PROBLEM_DATA(12);
0004 e_effc=zeros(length(e_eff),1);
0005 S_effc=zeros(length(e_eff),1);
0006 E_effc=zeros(length(e_eff),1);
0007 nu_effc=zeros(length(e_eff),1);
0008 if idMat==1 %Ramberg-Osgood
0009     EO=MATERIAL_DATA(2);
0010     nu=MATERIAL_DATA(3);
0011     Sy=MATERIAL_DATA(4);
0012     n_end=MATERIAL_DATA(5);
0013     eyy=MATERIAL_DATA(6);
0014     Epk=ones(length(e_eff),1);
0015     if idCorr==1
0016         for ki=1:length(e_eff);
0017             Sy=MATERIAL_DATA(4);
0018             [Sefk]= ramberg_osgood(EO,Sy,n_end,eyy,e_eff(ki),S_eff(ki));
0019             S_effc(ki)=Sefk;
0020             Et=(EO*Sy)/(Sy+eyy*n_end*EO*(Sefk/Sy)^(n_end-1));
0021             Epk(ki)=(1/Et-1/EO)^-1;
0022         end
0023         E_effc=S_effc./e_eff;
0024         a=0.5*(E_effc.^-1-EO^-1);
0025         b=(nu/EO+a);
0026         nu_effc=E_effc.*b;
0027         bres=S_eff-S_effc;
0028         correct='Projection';
0029     end
0030 end
0031 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0032 if idMat==2%Linearly_Work-Hardening
0033     EO=MATERIAL_DATA(2);
0034     nu=MATERIAL_DATA(3);
0035     Sy=MATERIAL_DATA(4);
0036     eyy=Sy/EO;
0037     EtEO=MATERIAL_DATA(5);
0038     gamma=MATERIAL_DATA(6);
0039     Et=EtEO*EO;
0040     Epk=(1/Et-1/EO)^-1*ones(length(e_eff),1);
0041     bres=zeros(length(e_eff),1);
0042     if idCorr==1

```







## A.6. Rutina para determinar los coeficientes de la matriz $D_{\text{eff}}$ y sus derivadas

```

0001 function [Dii]=gen_Dii(CLOUDS,BASESdx,BASESdy,E_eff,nu_eff,PROBLEM_DATA);
0002 caso=PROBLEM_DATA(1);% 1 - Tension Plana, 0 - Deformacion Plana
0003 [Nnodes,Nclouds]=size(CLOUDS);
0004 % Dii=[D1 D2 D3 D1x D1y D2x D2y D3x D3y];
0005 % D1=D11=D22 ; D2=D12=D21 ; D3=D33 ;
0006 Dii=[];
0007 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0008 for ki=1:Nnodes%CADA NODO
0009     E=E_eff(ki);
0010     nu=nu_eff(ki);
0011     if (caso==1)
0012         D1=E/(1-nu^2);
0013         D2=nu*D1;
0014         D3=E/(2*(1+nu));
0015     else
0016         E=E/(1-nu^2);
0017         nu=nu/(1-nu);
0018         D1=E/(1-nu^2);
0019         D2=nu*D1;
0020         D3=E/(2*(1+nu));
0021
0022     end
0023     Dii=[Dii;[D1 D2 D3]];
0024 end% FIN CADA NODO
0025 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0026 Dx=[];
0027 for ki=1:Nnodes%CADA NODO
0028     XI=CLOUDS(ki,1);% IDENTIFICA EL NODO ESTRELLA
0029     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0030     D1x=0;D1y=0;D2x=0;D2y=0;D3x=0;D3y=0;
0031     %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
0032     for kj=1:Nclouds
0033         xj=CLOUDS(XI,kj);% IDENTIFICA EL NODO EN LA NUBE
0034         D1x=D1x+BASESdx(ki,kj)*Dii(xj,1);
0035         D1y=D1y+BASESdy(ki,kj)*Dii(xj,1);
0036         D2x=D2x+BASESdx(ki,kj)*Dii(xj,2);
0037         D2y=D2y+BASESdy(ki,kj)*Dii(xj,2);
0038         D3x=D3x+BASESdx(ki,kj)*Dii(xj,3);
0039         D3y=D3y+BASESdy(ki,kj)*Dii(xj,3);
0040     end
0041     Dx=[Dx;[D1x D1y D2x D2y D3x D3y]];

```

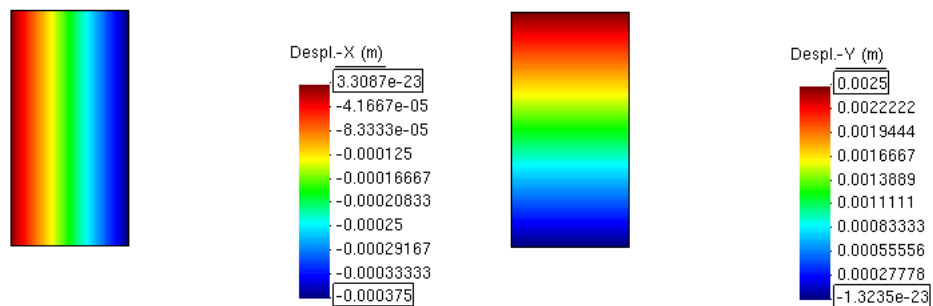
```
0042 end% FIN CADA NODO
0043 Dii=[Dii Dx];
0044 return
```

## Apéndice B

# Resultados numéricos adicionales

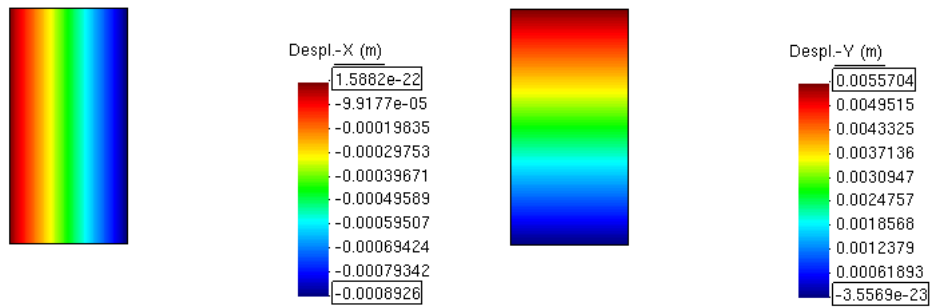
### B.1. Placa rectangular sujeta a tensión constante

En este apéndice se entregan resultados numéricos adicionales derivados del análisis de la placa rectangular sujeta a tensión constante presentada en el apartado 6.1.



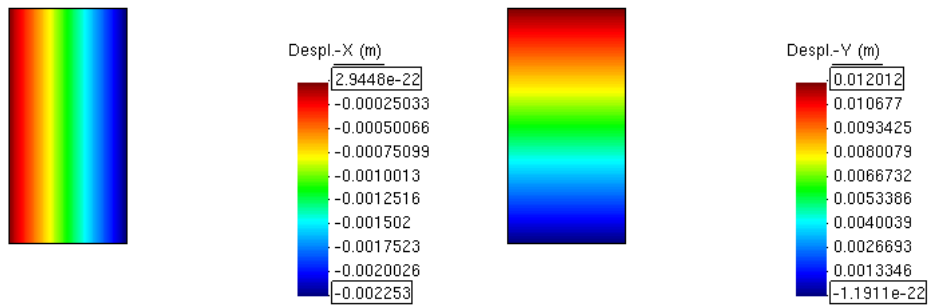
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura B.1: Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 50$  MPa.



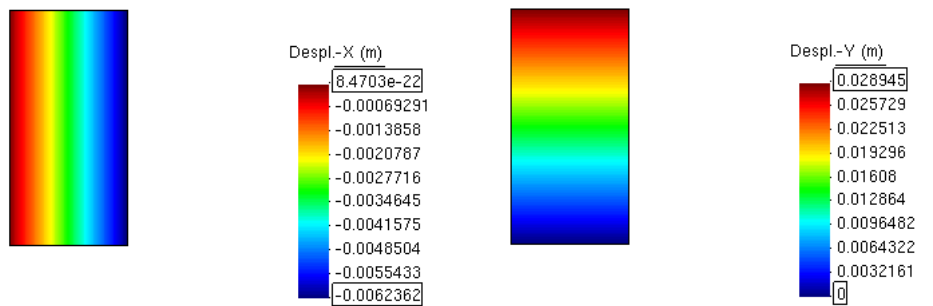
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura B.2: Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 100$  MPa.



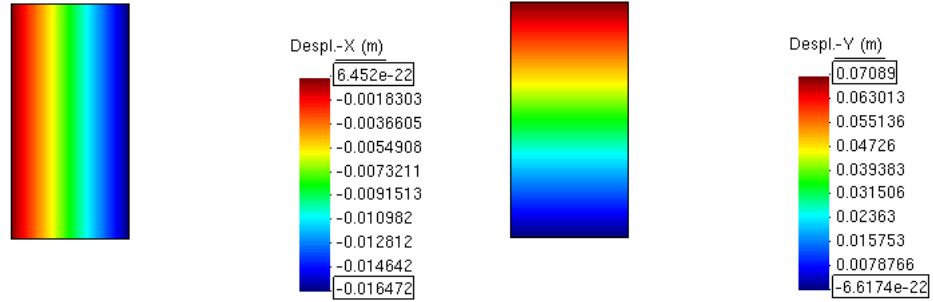
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura B.3: Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 150$  MPa.



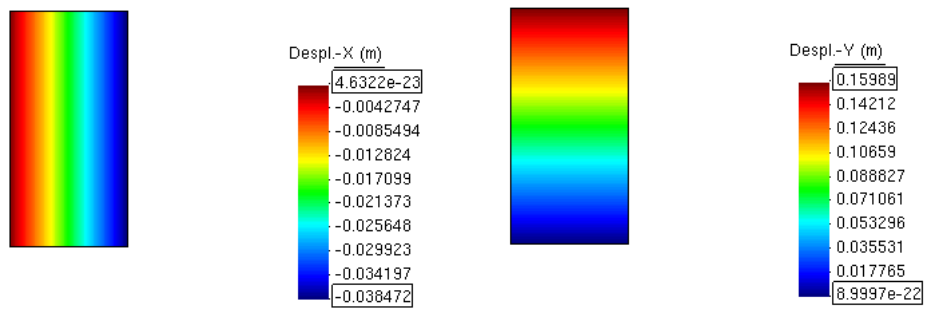
a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura B.4: Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 200$  MPa.



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura B.5: Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 250$  MPa.



a) Contorno de desplazamiento horizontal  $u$  b) Contorno de desplazamiento vertical  $v$

Figura B.6: Resultados numéricos placa rectangular sujeta a tensión constante  $\sigma_c = 300$  MPa.

## B.2. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna

En este apéndice se entregan resultados numéricos adicionales derivados del análisis del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna presentado en el apartado 6.2.

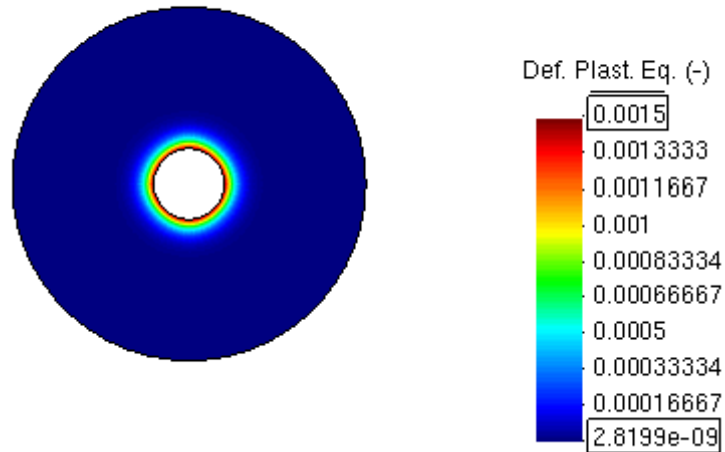


Figura B.7: Contorno de deformación plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  para el cilindro de pared gruesa,  $P_0/\sigma_0 = 1$ .

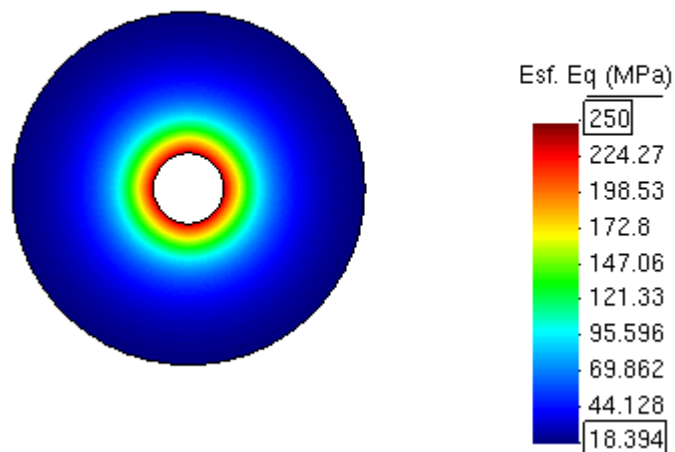


Figura B.8: Contorno de esfuerzo equivalente  $\sigma_{eq}$  para el cilindro de pared gruesa,  $P_0/\sigma_0 = 1$ .



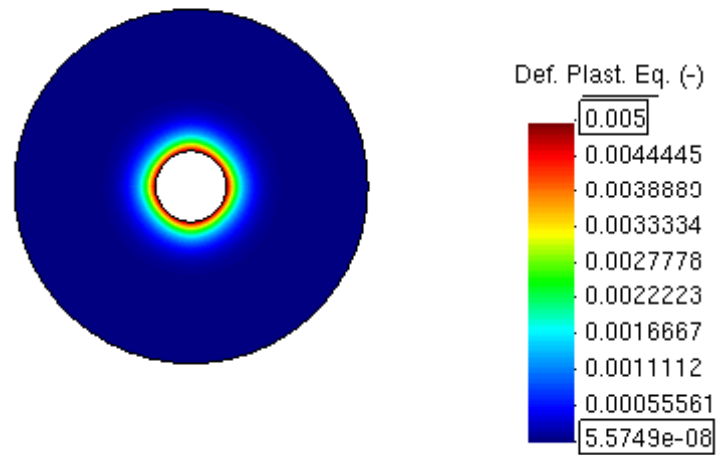


Figura B.9: Contorno de deformación plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  para el cilindro de pared gruesa,  $P_0/\sigma_0 = 1.5$ .

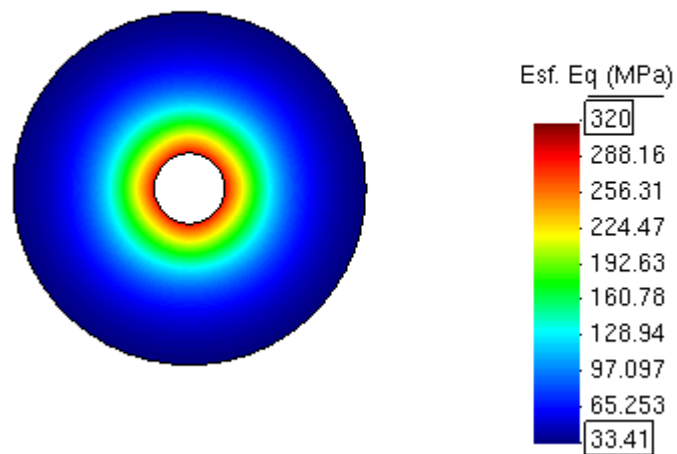


Figura B.10: Contorno de esfuerzo equivalente  $\sigma_{eq}$  para el cilindro de pared gruesa,  $P_0/\sigma_0 = 1.5$ .

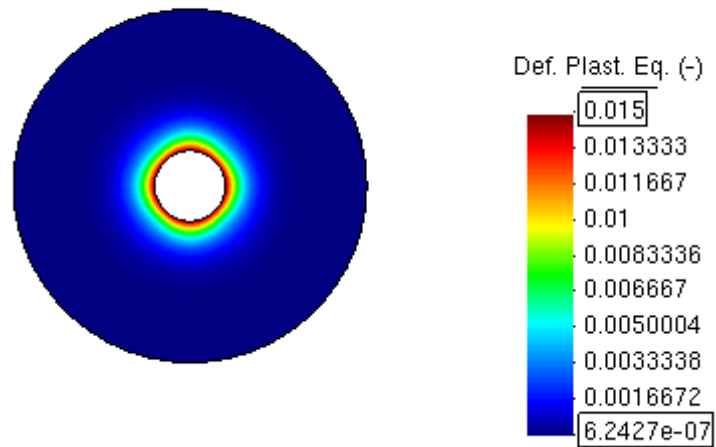


Figura B.11: Contorno de deformación plástica equivalente  $\varepsilon_{eq}^p$  para el cilindro de pared gruesa,  $P_0/\sigma_0 = 2$ .

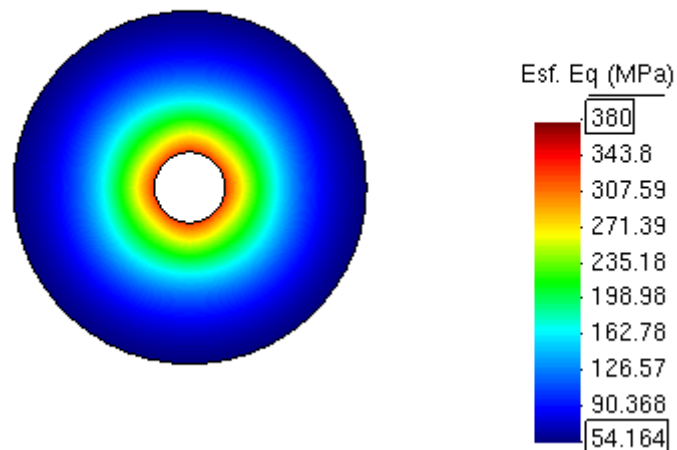


Figura B.12: Contorno de esfuerzo equivalente  $\sigma_{eq}$  para el cilindro de pared gruesa,  $P_0/\sigma_0 = 2$ .

### B.3. Placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada

En este apéndice se entregan resultados numéricos adicionales derivados del análisis de la placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada presentado en el apartado 6.3.

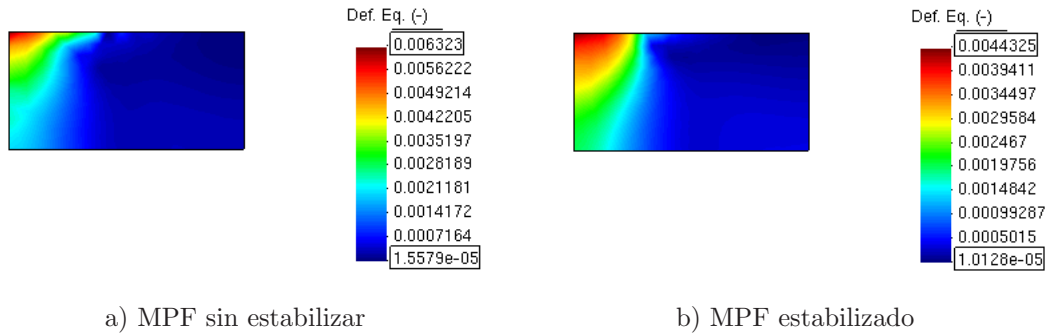


Figura B.13: Contornos de deformación equivalente  $\varepsilon_{eq}$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

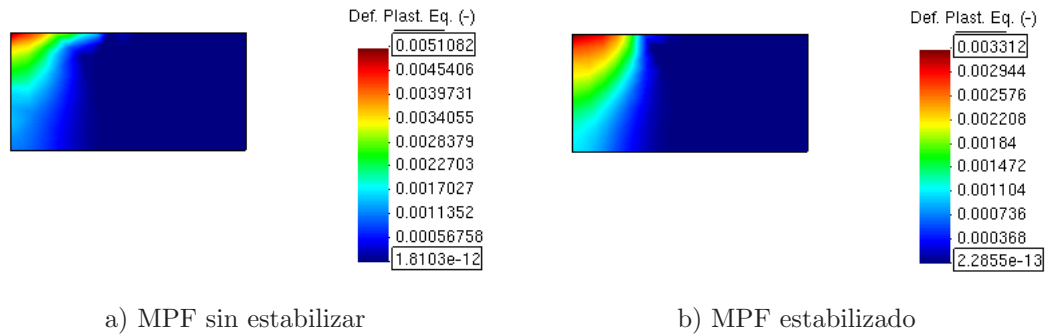


Figura B.14: Contornos de deformación equivalente plástica  $\varepsilon_{eq}^p$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

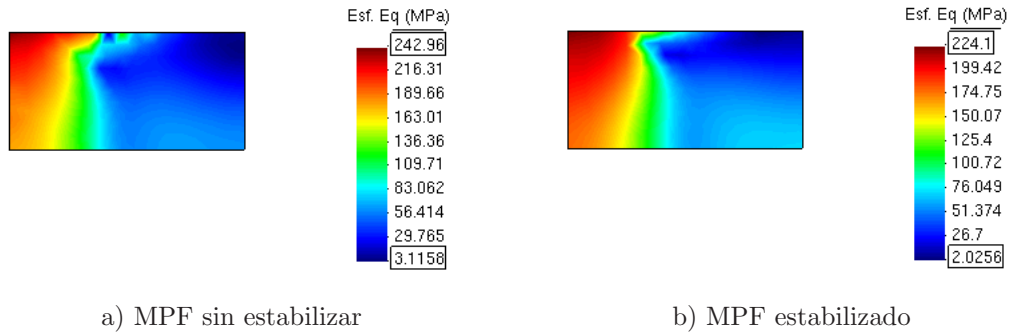


Figura B.15: Contornos de tensión equivalente  $\sigma_{eq}$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

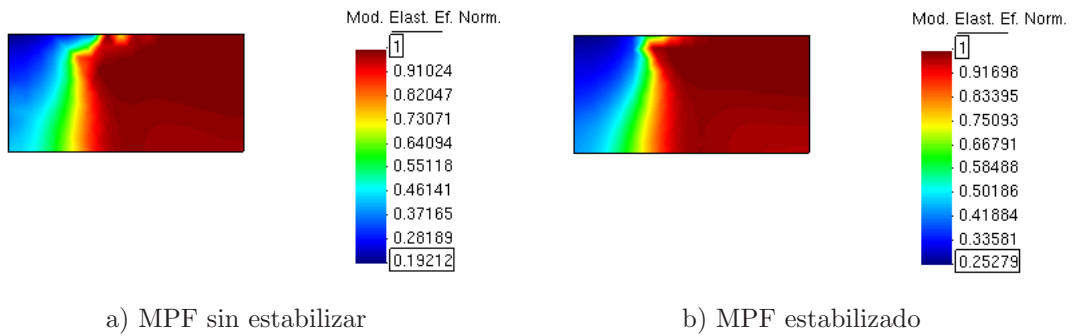


Figura B.16: Contornos de módulo de elasticidad efectivo normalizado  $E_{eff}/E$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

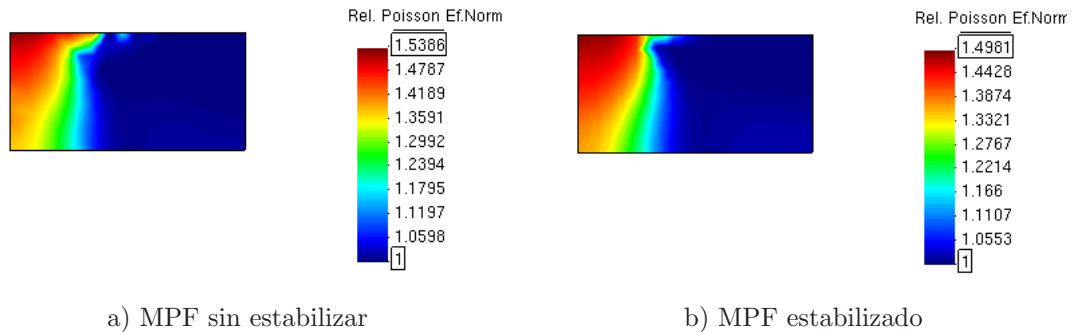


Figura B.17: Contornos de relación de *Poisson* efectiva normalizada  $\nu_{eff}/\nu$ , placa rectangular sujeta a una carga distribuida centrada.

## B.4. Cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante

En este apéndice se entregan resultados numéricos adicionales derivados del cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante presentado en el apartado 6.4.

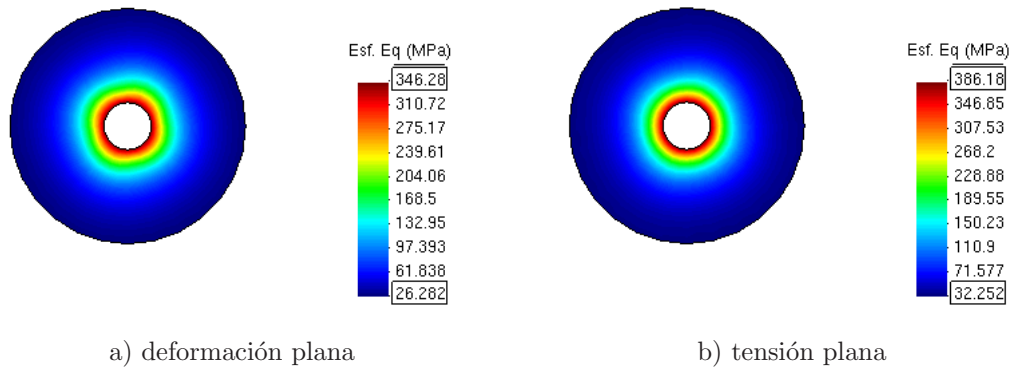


Figura B.18: Contornos de tensión equivalente  $\sigma_{eq}$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

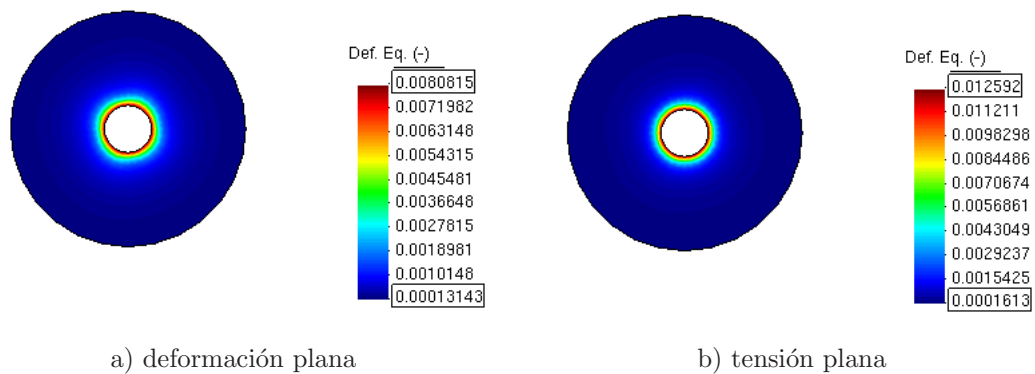


Figura B.19: Contornos de deformación equivalente  $\varepsilon_{eq}$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

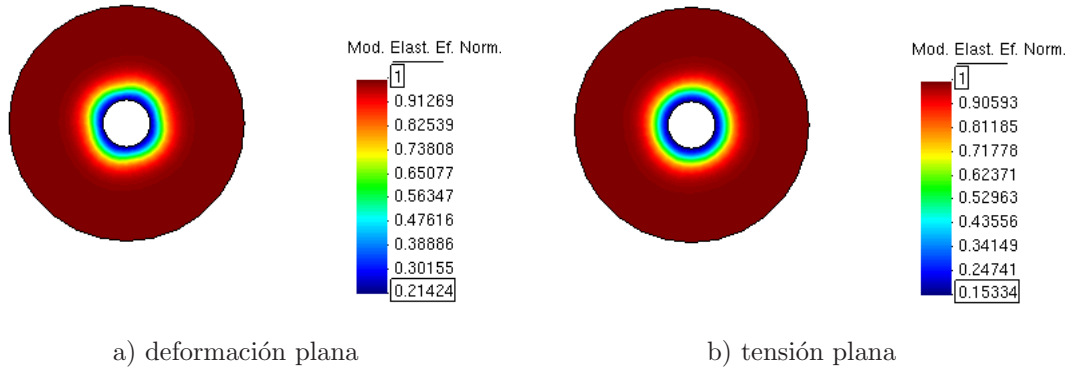


Figura B.20: Contornos de módulo de elasticidad efectivo normalizado  $E_{\text{eff}}/E$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

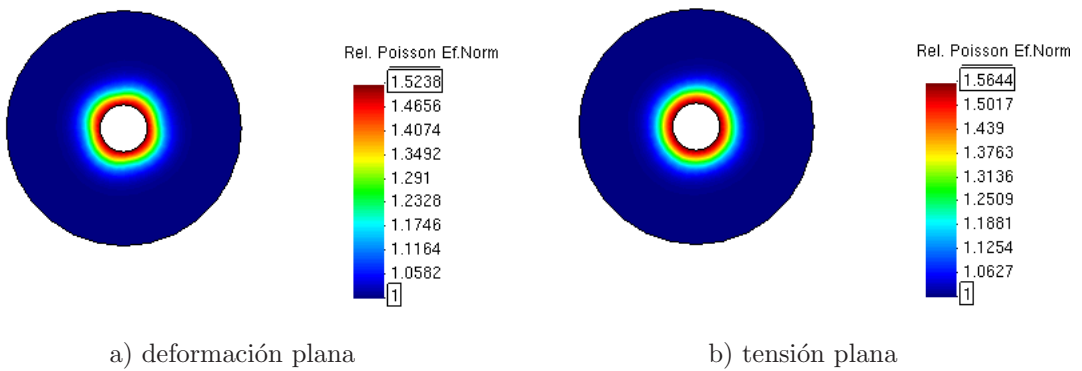


Figura B.21: Contornos de relación de *Poisson* efectiva normalizada  $\nu_{\text{eff}}/\nu$ , cilindro de pared gruesa sujeto a presión interna y tensión cortante.

# Bibliografía

- ADINA (2007). *ADINA - The Finite Element System for Structures, Heat Transfer and CFD*. ADINA R & D, Inc, Watertown-Massachusetts. <http://www.adina.com>.
- Aluru N. R. & Li G. (2001). Finite cloud method: a true meshless technique based on a fixed reproducing kernel approximation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:2373–2410.
- Angulo A. (2007). *Una estrategia de refinamiento adaptivo para el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María. Tesis Magister.
- Aranda J. (2007). *Desarrollo de un módulo de cálculo para el análisis lineal de geometrías 3D mediante un método sin malla*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile. Trabajo de Titulo.
- Atluri S. , Sladek J. , Sladek V. & Zhu T. (2000). The local boundary integral equation (lbie) and its meshless implementation for linear elasticity. *Computational Mechanics*, 25:180–198.
- Atluri S. & Zhu T. (1998). A new meshless local petrov-galerkin (mlpg) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22:117–127.
- Attaway S. , Heinstein M. & Swegle J. (1994). Coupling of smooth particle hydrodynamics with the finite element method. *Nuclear Engineering Design*, 150:199–205.
- Babu S. & Iyer P. (1998). Inelastic analysis of components using a modulus adjustment scheme. *Journal of Pressure Vessel Technology ASME*, 120:1–5.
- Babuska I. & Melenk J. (1995). *The partition of unity finite element method*. Institute for Physics, Science, and Technology, University of Maryland, Maryland. Technique Report.
- Babuska I. & Melenk J. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:289–314.
- Banerjee P. & Butterfield R. (1987). *Boundary Elements Methods in Engineering Sciences*. McGraw-Hill.
- Belytschko T. , Krongauz Y. , Organ D. , Fleming M. & Krysl P. (1996). Meshless methods: An overview and recent developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:3–47.
- Belytschko T. , Liu W. & Moran B. (2000). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Wiley.

- Belytschko T. , Lu Y. & Gu L. (1994). Element free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37:229–256.
- Belytschko T. , Lu Y. & Gu L. (1995a). Crack propagation by element free galerkin method. *Engineering Fracture Mechanics*, 51:295–315.
- Belytschko T. , Lu Y. , Gu L. & Tabbara M. (1995b). Element free galerkin method for static and dynamic fracture. *International Journal of Solids Structures*, 32:2547–2570.
- Belytschko T. , Organ D. & Krongauz Y. (1995c). A coupled finite element - free galerkin method. *Computational Mechanics*, 17:186–195.
- Chao M. (1997). *Introducción a los métodos numéricos sin malla: Fundamentación y desarrollo de formulaciones de mínimos cuadrados ponderados*. PhD thesis, España.
- Chen T. & Raju I. (2002). Coupling finite element method and meshless local petrov-galerkin methods for two-dimensional potential problems. *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, 1659.
- Chen Y. , Eskandarian A. , Oskard M. & Lee J. (2004). Meshless analysis of plasticity with application to crack growth problems. *Theoretical and applied fracture mechanics*, 41:83–94.
- Chen Y. , Lee J. & Eskandarian A. (2006). *Meshless methods in solids mechanics*. Springer, New York.
- Cheng R. & Cheng Y. (2007). Error estimates for the finite point method. *Applied Numerical Mathematics*, In Press.
- Crisfield M. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. John Wiley & Sons, Chichester.
- Dai K. , Liu G. , Han X. & Li Y. (2005). Inelastic analysis of 2d solids using a weak form rpim based on deformation theory. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 195:4179–4193.
- De S. & Bathe K. (2000). The method of finite spheres. *Computational Mechanics*, 25:329–345.
- den Berg G. V. (2000). The effect of the non-linear stress–strain behaviour of stainless steels on member capacity. *Journal of Constructional Steel Research*, 54:135–160.
- Desikan V. & Sethuraman R. (2000). Analysis of material nonlinear problems using pseudo-elastic finite element method. *Journal of Pressure Vessel Technology ASME*, 122:457–461.
- Dhalla A. & Jones G. (1986). Asme code classification of pipe stresses: a simplified procedure. *International Journal of Pressure Vessel Piping*, 26:145–166.
- Downing N. (1993). *Mechanical behavior of materials; engineering methods for deformation, fracture and fatigue*. Prentice Hall.
- Duarte C. (1995). *A review of some meshless methods to solve partial differential equations*. PhD thesis.
- Duarte C. & Oden J. (1996). An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:237–262.
- Fleming M. , Chu Y. , Moran B. & Belytschko T. (1997). Enriched element-free galerkin methods for crack tip fields. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 40:1483–1504.



- Frazer A. , Jones W. & Skan S. (1937). Approximation to functions and to the solutions of differential equations. *Great Britain Aeronautical Research Council, Reports and Memoranda*, 1799.
- GiD-v8.0 (2007). *GiD, personal pre and post processor*. CIMNE, Barcelona-España. <http://gid.cimne.upc.es>.
- Gingold R. & Monaghan J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. *Monthly Notices Royal Astr. Soc.*, 181:375–387.
- Gu Y. (2005). Meshfree methods and their comparisons. *International Journal of Computational Methods*, 2:477–515.
- Gu Y. & Liu G. (2002a). A boundary point interpolation method for stress analysis of solids. *Computational Mechanics*, 28:47–54.
- Gu Y. & Liu G. (2002b). A coupled element free galerkin / boundary element method for stress analysis of two-dimensional solids. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4405–4419.
- Gu Y. & Liu G. (2003). Hybrid boundary point interpolation methods and their coupling with the element free galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:905–917.
- Gu Y. , Wanga Q. , Lamc K. & Dai K. (2007). A pseudo-elastic local meshless method for analysis of material nonlinear problems in solids. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31:771–782.
- Guo Y. & Nakanishi K. (2003). A backward extrusion analysis by the rigid-plastic integralless-meshless method. *Journal of Material Processing Technology*, 140:19–24.
- Guo Y. , Nakanishi K. & Yokouchi Y. (2005). A nonlinear rigid-plastic analysis for metal forming problem using the rigid-plastic point collocation method. *Advances in Engineering Software*, 36:234–242.
- Hegen D. (1996). Element-free galerkin methods in combination with finite element method approaches. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (135):143–166.
- Hencky H. (1924). Zur theorie plastischer deformationen und der hierdurch im material hervorgerufenen nebenspannungen. *Proceedings of the First International Congress on Applied Mechanics, Delft*.
- Idelsohn S. R. , Oñate E. , Calvo N. & Pin. F. D. (2003). The meshless finite element method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, (58):893–912.
- Jahed H. , Sethuraman R. & Dubey R. (1997). A variable material property approach for solving elastic-plastic problems. *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, (71):285–291.
- Jensen P. (1972). Finite difference technique for variable grids. *Computers and Structures*, (2):17–29.
- Kansa E. (1990a). Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. i surface approximation and partial derivative estimates. *Computers and Mathematics with Applications*, (19):127–145.
- Kansa E. (1990b). Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics. ii solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, (19):147–161.

- Kargarnovin M. , Toussi H. & Fariborz S. (2004). Elasto-plastic element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, (33):206–214.
- Kothnur V. , Mukherjee S. & Mukherjee Y. (1999). Two-dimensional linear elasticity by the boundary node method. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, (36):1129–1147.
- Krysl P. & Belytschko T. (1996). Analysis of thin plates by element-free galerkin method. *Computational Mechanics*, (17):26–35.
- Lancaster P. & Salkauskas K. (1981). Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141–158.
- Li G. , Paulino G. & Aluru N. (2003). Coupling of the mesh-free finite cloud method with the boundary element method: a collocation approach. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:2355–2375.
- Li S. & Liu W. (2004). *Meshfree particle methods*. Springer, Berlin.
- Liszka T. & Orkisz J. (1980). The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics. *Computers and Structures*, 11:83–95.
- Liu G. (2002). *Mesh Free Methods: Moving Beyond the Finite Element Method*. CRC press, USA.
- Liu G. & Gu Y. (2001a). A local point interpolation method for stress analysis of two-dimensional solids. *Structural Engineering and Mechanics*, 2:221–236.
- Liu G. & Gu Y. (2001b). A local radial point interpolation method (lrpim) for free vibration analyses of 2-d solids. *Journal of Sound and Vibration*, 246:29–46.
- Liu G. & Gu Y. (2001c). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50:937–951.
- Liu G. & Gu Y. (2004). Boundary meshfree methods based on the boundary point interpolation methods. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 28:475–487.
- Liu G. , Kee B. & Chun L. (2006). A stabilized least-squares radial point collocation method (ls-rpcm) for adaptive analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4843–4861.
- Liu G. , Wu Y. & Ding H. (2004). Meshfree weak-strong (mws) form method and its application to incompressible flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46:1025–1047.
- Liu W. , Chen Y. , Jun S. , Chen J. , Belytschko T. , Pan C. , Uras R. & Chang C. (1996). Overview and applications of the reproducing kernel particle method. *Archives of Comput. Meth. in Engng.*, 3:3–80.
- Liu W. , Jun S. & Zhang Y. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, 20:1081–1106.
- Lu Y. , Belytschko T. & Gu L. (1994). A new implementation of the element free galerkin method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113:397–414.
- Lucy L. (1977). A numerical approach to testing the fission hypothesis. *Astron. Journal*, 82:1013–1024.

- Mackenzie D. & Boyle J. (1993). A method of estimating limit load by iterative elastic analysis i. *International Journal of Pressure Vessel and Piping*, 53:77–95.
- Malvern L. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall.
- Martin A. (2006). *Análisis y formulación de un estimador del error en el método sin malla de puntos finitos*. Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso Chile. Trabajo de Titulo.
- MATLAB (2007). *MATLAB®- The Language of Technical Computing*. MathWorks, Natick-Massachusetts. <http://www.mathworks.com>.
- Mitchell M. & Aluru N. (1999). Simulation of electroosmosis using a meshless finite point method. In *Technical Proceedings of the 1999 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems*, pages 522–525.
- NAFEMS (1987). *National Agency for Finite Element Methods and Standards; Linear statics benchmarks*, volume 1. October.
- Nayroles B. , Touzot G. & Villon P. (1992). Generalizing the fem: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, 10:307–318.
- Neuber H. (1961). Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary nonlinear stress-strain law. *ASME Applied Mechanics*, 28:554–560.
- Owen D. & Hinton E. (1980). *Finite Elements in Plasticity, Theory and Practice*. Pineridge Pres Limites.
- Oñate E. (1996). On the stabilization of numerical solution for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *CIMNE*, 81.
- Oñate E. (2004). Possibilities of finite calculus in computational mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60:255–281.
- Oñate E. & Idelsohn S. (1998). A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 21:283–292.
- Oñate E. , Idelsohn S. , Zienkiewics O. , Taylor R. & Sacco C. (1996a). A stabilized finite point method for analysis of fluid mechanics problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139:315–346.
- Oñate E. , Idelsohn S. , Zienkiewicz O. & Taylor R. (1996b). A finite point methods in computational mechanics, application to convective transport and fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:3839–3866.
- Oñate E. , Perazzo F. & J.Miquel (2001). A finite point method for elasticity problems. *Computer and Structures*, 79:2151–2163.
- Oñate E. , Sacco C. & Idelsohn S. (2000). A finite point method for incompressible flow problems. *Computer Visual Science*, 3:67–75.
- Pardo E. (2000). Meshless method for linear elastostatics based on a path integral formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:1463–1480.

- Perazzo F. (2002). *Una metodología numérica sin malla para la resolución de las ecuaciones de elasticidad mediante el método de puntos finitos*. Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona España. Tesis Doctoral.
- Perazzo F. , Lohner R. & Perez-Pozo L. (2007). Adaptive methodology for meshless finite point method. *Advances in Engineering Software*, 22:153–168.
- Perazzo F. , Miquel J. & Oñate E. (2004). El método de puntos finitos para problemas de la dinámica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 20:235–246.
- Perazzo F. , Oller S. , Miquel J. & Oñate E. (2006). Avances en el método de puntos finitos para la mecánica de sólidos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*, 22:153–168.
- Perrone N. & Kao R. (1975). A general finite difference method for arbitrary meshes. *Computer and Structures*, 5:45–58.
- Qian S. & Weiss J. (1993). Wavelet and the numerical solution of partial differential equations. *Journal Comput. Phys*, 106:155.
- Ramberg W. & Osgood W. (1943). Description on stress-strain curves by three parameters. *National Advisory Committee for Aeronautics (NACA)*.
- Rao B. & Rahman S. (2001). A coupled meshless-finite element method for fracture analysis of cracks. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 78:647–657.
- Rasmussen K. (2003). Full-range stress-strain curves for stainless steel. *Journal of Constructional Steel Research*, 59:47–61.
- Sadd M. (2005). *Elasticity; Theory, Applications and Numerics*. Elsevier.
- Seshadri R. (1991). The generalized local stress-strain (gloss) analysis theory and applications. *Journal of Pressure Vessel Technology ASME*, 113:219–227.
- Sethuraman R. & Reddy S. (2004). Pseudo-elastic analysis of material non-linear problems using element free galerkin method. *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 27:505–516.
- Simo J. & Hughes T. (1998). *Computational Inelasticity*. Springer.
- Slater J. (1934). Electronic energy bands in metals. *Physical Review*, 45:794–801.
- Strouboulis T. , Copps K. & Babuska I. (2001). The generalized finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190:4081–4193.
- Sukumar N. , Moes N. , Moran B. & Belytschko. T. (2000). Extended finite element method for three dimensional crack modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 58:1549–1570.
- Sukumar N. , Moran B. , Black T. & Belytschko T. (1997). An element free galerkin method for three dimensional fracture mechanics. *Computational Mechanics*, 20:170–175.
- Sulsky D. , Chen Z. & Schreyer H. (1992). The application of a material-spatial numerical method to penetration. *New methods in Transient Analysis, ASME New York*, 246:91–102.

- Taylor R. , Idelsohn S. , Zienkiewicz O. & Oñate E. (1995). Moving least square approximations for solution of differential equations. *CIMNE Research Report*, 74.
- Timoshenko S. & Goodier J. (1970). *Theory of Elasticity*. McGraw Hill, New York.
- Tongsuk P. & Kanok-Nukulchai W. (2004). Further investigation of element-free galerkin method using moving kriging interpolation. *International Journal of Computational Method*, 1:345–365.
- Vuyst T. D. , Vignjevic R. & Campbell J. (2005). Coupling between meshless and finite element methods. *International Journal of Impact Engineering*, 31:1054–1064.
- Wordelman C. , Aluru N. & Ravaioli U. (2000). A meshless method for the numerical solution of the 2- and 3-d semiconductor poisson equation. *Computer Modelling in Engineering and Sciences*, 1:121–126.
- Yeon J. & Youn S. (2000). Recent development of free mesh method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, (47):1419–1443.
- Yeon J. & Youn S. (2005). Meshfree analysis of softening elastoplastic solids using variational multiscale method. *International Journal of Solids and Structures*, (42):4030–4057.
- Yoon S. & Chen J. (2002). Accelerated meshfree method for metal forming simulation. *Finite Element in Analysis and Design*, (38):937–948.
- Zhang J. , Yao Z. & Li H. (2002). A hybrid boundary node method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 53:751–763.
- Zhang J. , Yao Z. & Tanaka M. (2003). The meshless regular hybrid boundary node method for 2d linear elasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27:259–268.
- Zhang L. , Rong Y. , Shen H. & Huang T. (2007). Solidification modeling in continuous casting by finite point method. *Journal of Materials Processing Technology*. In press.
- Zhang X. , Liu X. , Song K. & Lu M. (2001). Least-squares collocation meshless method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:1089–1100.
- Zhu T. , J J. Z. & Atluri S. (1998a). A local boundary integral equation (lbie) method in computational mechanics and a meshless discretization approach. *Computational Mechanics*, 21:223–235.
- Zhu T. , J J. Z. & Atluri S. (1998b). A meshless local boundary integral equation (lbie) method for solving nonlinear problems. *Computational Mechanics*, 22:174–186.
- Zienkiewicz O. & Taylor R. (2000). *El método de los elementos finitos*, volume 1. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Barcelona.