



Universitat Politècnica de Catalunya  
Escola Tècnica Superior d'Enginyers  
de Camins, Canals i Ports



Departament de Resistència de Materials i Estructures a  
l'Enginyeria

# SIMULACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS COMO REFUERZO EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

Tesis Doctoral

Presentada por:

Maritzabel Molina Herrera.

Dirigida por:

Sergio H. Oller Martínez.

Alex H. Barbat Barbat.

---

Barcelona, España/2011



ACTA DE CALIFICACIÓN DE LA TESIS DOCTORAL

Reunido el tribunal integrado por los abajo firmantes para juzgar la tesis doctoral:

Título de la tesis:  
Simulación de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado

Autor de la tesis: Maritzabel Molina Herrera.

Acuerda otorgar la calificación de:

- No apta
- Aprobada
- Notable
- Excelente
- Excelente Cum Laude

Barcelona, ..... de ..... de .....

El Presidente,

El Secretario,

.....  
(nombre y apellidos)

.....  
(nombre y apellidos)

El Vocal,

El Vocal,

.....  
(nombre y apellidos)

.....  
(nombre y apellidos)

El Vocal,

.....  
(nombre y apellidos)



A Dios,  
quien bendice cada paso de mi vida, y me  
enseña la belleza del mundo y su ciencia.

A mi mami, Luz Stella,  
amiga incondicional,  
que ha dado todo por sus hijos.

A mi hermano, Fernando,  
ejemplo de sensatez y constancia.

Y a Jair Antonio,  
cómplice y compañero, construyendo cada  
uno de nuestros sueños.



---

## Agradecimientos

---

Expreso mi gratitud a todas aquellas personas e instituciones que han contribuido, de una u otra forma, al desarrollo de esta tesis.

Agradezco muy especialmente a mis tutores, los profesores Sergio Oller y Alex Barbat, por sus sugerencias y comentarios guiando el desarrollo de la investigación. Su calidad humana y profesional, han sido el motor de motivación en la búsqueda de alternativas de solución para alcanzar cada una de los retos presentados en los temas estudiados.

Al profesor Juan Carlos Cante le agradezco sus valiosas explicaciones y recomendaciones dadas con respecto al comportamiento de los materiales en el campo de las grandes deformaciones. Doy gracias a Dr. Xavier Martínez, Dr. Eduardo Car y el Dr. Fernando Rastellini, por las recomendaciones y el soporte técnico dado, sus trabajos fueron un apoyo vital para el desarrollo de esta tesis.

Agradezco al personal del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería CIMNE y al personal del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería RMME, especialmente a Rosa María Olea por su permanente disposición y su capacidad resolutive.

Doy las gracias al profesor Lluís Gil, a Juan J. Cruz y al personal del Laboratorio de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Terrassa por la información suministrada de los ensayos de adherencia.

A la Universidad Nacional de Colombia y al programa “Alβan”, Programa de Becas de Alto Nivel de la Unión Europea para América Latina (beca N° E06D101053CO), agradezco su indispensable apoyo y financiación.

Quiero agradecer a mis profesores de la Universidad Nacional de Colombia, quienes infundieron el gusto por la investigación, especialmente a Gabriel Gómez, Gabriel Valencia, Gustavo Cifuentes, Jairo Uribe y Fernando Spinel. A mis colegas y grandes amigos de la Universidad, Caori Takeuchi, Juan Tamasco, y Julio Esteban Colmenares, les doy las gracias por su apoyo y cariño. Además doy las gracias al profesor Ricardo Naranjo (Q.E.P.D), quien siempre tuvo un correo con las palabras precisas para animarme en el trabajo y transmitir su alegría.

Agradezco a mis antiguos y nuevos amigos, Ana Pelinson, Christian Muñoz, Jaime Granados, Flavia Bastos, Flor Vargas, Juan M. Fonseca, Mailhyn Cafiero, Mauricio Tapias, Nubia González, Pablo Vargas, Rocío Segura, Elvira Moreno y Yineida Lozano, por todo lo compartido, su apoyo fue una gran motivación para

seguir trabajando en la tesis en momentos cruciales. Asimismo, doy las gracias a Alejandro Caicedo, Cesar Velázquez, Diego Mora, Ivo Dias, Gerardo Socorro, Gerardo Valdés, Jannette Zambrano, Jairo A. Paredes, Jairo A. Valcárcel, Javier Príncipe, Joaquín Hernández, Mabel Marulanda, Noel Hernández, Rubén Hernández, Randy Robles, Sergio Blanco y Xavier Hurtado, por su aprecio, sus sonrisas y la compañía brindada durante el doctorado. También agradezco a María Fernanda Lara y Dorian Linero, por el soporte que nos brindaron a mí y a mi familia.

Agradezco a toda mi familia por su cariño, en especial a mis tías, Leonor Herrera y Nelcy Herrera, y a mis primos Alejandra Camacho, Darío Camacho e Ingrid Gómez, con sus charlas sentía en Barcelona los grandes valores de mi tierra hermosa. Doy las gracias a Ceila Gutiérrez, Eunice Vaquero, Lucila Gómez y Teresa Rodríguez, por compartir su espíritu intrépido y sus oraciones.

Infinitas gracias doy a quienes dedico este trabajo. A Dios por todas sus bendiciones, rodeándome de gente maravillosa. Y a mis tres invaluable tesoros: A mi mami, Stella Herrera, por su templanza y apoyo incondicional. A Fernando Molina, por su sensatez y respaldo, siempre atento a escuchar. Y a Jair Cárdenas, por ser el artífice de que entre los dos materialicemos nuestros sueños y cumplamos nuestras metas. Ellos son la esencia de mi vida, ya que el amor que nos rodea no tiene límites de espacio y tiempo.



---

## Resumen

---

El refuerzo de estructuras de hormigón armado con materiales compuestos es una de las tecnologías más prometedoras, por las buenas características mecánicas de los compuestos reforzados con fibras y su facilidad de manipulación. Sin embargo, uno de los principales factores que restringe su uso como refuerzo a una mayor escala, es la dificultad que hay para definir el comportamiento mecánico de los materiales compuestos, y para establecer su influencia en el comportamiento global del elemento reforzado. El comportamiento complejo de los materiales compuestos surge por la alta no linealidad, la anisotropía, la heterogeneidad y los modos de fallo que se presentan en este tipo de materiales.

En esta tesis doctoral se muestra que la utilización de la teoría de mezclas en la simulación numérica por elementos finitos, es una herramienta útil que permite analizar estructuras reforzadas con materiales compuestos reforzados con fibras largas (FRP). Bajo este enfoque, se tratan y aplican las teorías de mezclas “clásica” y “serie/paralelo”, dado que como gestores de modelos constitutivos definen el comportamiento de los materiales compuestos por medio de la participación de los materiales simples que los componen, y de paso, permiten determinar su incidencia en el comportamiento global de los elementos estructurales reforzados

Por medio de la estrategia de la teoría de mezclas, en esta investigación se estudia el comportamiento no lineal de los compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado en tres escalas: (i) Una global, en la que se analiza el comportamiento de estructuras rehabilitada y/o reparadas con FRP. (ii) Una elemental, en la que se propone una estrategia para comprender la interacción del refuerzo con el hormigón y la influencia de los mecanismos de fallo generados por la pérdida de adherencia en la zona reforzada de elementos estructurales. (iii) Una microestructural, en la que se plantea un modelo constitutivo para considerar los mecanismos de fallo que inducen la pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz, en el análisis del comportamiento no lineal de los componentes del compuesto y su interacción. Asimismo, en la escala elemental, se propone un modelo constitutivo que extiende la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones, para aprovechar las ventajas que ofrece esta teoría en el análisis del comportamiento de los compuestos y sus componentes.

En este documento se muestra que el uso, las modificaciones y las mejoras en la estrategia de la teoría de mezclas, permiten comprender de una forma global el comportamiento de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado, y la interacción entre el refuerzo y el hormigón. Luego que desde un enfoque fenomenológico, se pueden estudiar los efectos de los mecanismos de fallo por pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz en el comportamiento de los materiales compuestos. Y por último, se proporciona una herramienta que permite analizar integralmente el comportamiento no lineal constitutivo y cinemático de los materiales compuestos reforzados con fibras.

---

## Abstract

---

The reinforced concrete structures with composites materials are one of the most promising technologies for the good mechanical properties of fiber reinforced composites, and their easy hand-work. However, one factor that restricts its use as a strengthening to a larger scale, is the difficulty to define the mechanical performance of composites, and to establish their influence on the overall behavior of the strengthened element. The complex behavior of composite materials happens by the high non-linearity, anisotropy, heterogeneity and failure modes that found in these materials.

This Ph.D. thesis shows that the mixing theory strategy in the numerical simulation is a useful tool to analyze concrete structures strengthened with long fiber reinforced composite (FRP). Under this approach, are treated and applied the mixing theories, classical and serial/parallel, given that as managers of constitutive models define the performance of the composites by coupling the constitutive performance of their constituents, and by the way, allow determining its influence on the overall behavior of strengthened structural elements.

Through the mixing theory strategy, this research studies the nonlinear performance of composites as strengthening in concrete structures at three levels: (i) A overall, which analyzes the behavior of structures rehabilitated and/or repaired with FRP. (ii) An elementary, which proposes a methodology for understanding the interaction of strengthening with the concrete and the influence of failure mechanisms caused by the loss of adherence in the reinforced structural elements. (iii) A microstructural, which set out a constitutive model to consider the failure mechanisms that induce loss of adherence between fibers and matrix in the analysis of nonlinear behavior of composite components and their interaction. Also at the elementary level, it is proposed a constitutive model that broadens the serial/parallel mixing theory to the large deformation field, for take the advantages offer by this theory for analysis the behavior of the composites and their constituents.

This paper shows that the use, modifications and improvements in the mixing theory strategy, allow a global understanding of the behavior of composites as strengthening in concrete structures, and the interaction between the composites laminated and concrete. After that, from a phenomenological approach, one can study the effects of failure mechanisms for loss of adhesion between the fibers and the matrix on the performance of composites. Finally, it provides a tool for analyzing nonlinear integral constitutive and kinematic behavior of fiber reinforced composites.

---

## Índice del contenido

---

<b>Capítulo 1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>	
	<b>1.1</b>	<b>Marco general</b>	<b>2</b>
	1.1.1	Clasificación de los materiales compuestos reforzados con fibras	2
	1.1.2	Análisis estructural de materiales compuestos reforzados con fibras	4
	<b>1.2</b>	<b>Motivación</b>	<b>6</b>
	<b>1.3</b>	<b>Objetivos de la tesis</b>	<b>9</b>
	<b>1.4</b>	<b>Síntesis del contenido</b>	<b>11</b>
	<b>1.5</b>	<b>Bibliografía del capítulo 1</b>	<b>17</b>
<b>Capítulo 2</b>	<b>Formulación del comportamiento de los materiales compuestos mediante las teorías de mezclas</b>	<b>19</b>	
	<b>2.1</b>	<b>Estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP</b>	<b>20</b>
	2.1.1	Materiales compuestos como materiales de refuerzo	20
	2.1.2	Refuerzo en vigas de hormigón armado	22
	2.1.3	Refuerzo en pilares de hormigón armado	23
	2.1.4	Refuerzo en uniones viga-pilar de hormigón armado	25
	<b>2.2</b>	<b>Estrategias de simulación numérica de materiales compuestos</b>	<b>28</b>
	2.2.1	Modelización a multiescala	28
	2.2.2	Homogenización	31
	2.2.3	Teoría de mezclas	34
	<b>2.3</b>	<b>Anisotropía en los materiales compuestos</b>	<b>35</b>
	2.3.1	Fundamentos del mapeo de espacios para materiales	

anisótropos	36
2.3.2 Análisis de materiales anisótropos en pequeñas deformaciones	37
<b>2.4 Teoría de mezclas clásica</b>	<b>38</b>
2.4.1 Fundamentos de la teoría de mezclas clásica	38
2.4.2 Formulación de la teoría de mezclas clásica	38
2.4.3 Algoritmo general de la teoría de mezclas clásica	40
2.4.4 Algoritmo de la teoría de mezclas clásica para compuestos anisótropos	40
<b>2.5 Teoría de mezclas serie/paralelo</b>	<b>41</b>
2.5.1 Fundamentos de la teoría de mezclas serie/paralelo	42
2.5.2 Formulación de la teoría de mezclas serie/paralelo	43
2.5.3 Algoritmo de la de la teoría de mezclas serie/paralelo	45
<b>2.6 Código del método de elementos finitos</b>	<b>47</b>
2.6.1 Proceso general del método de elementos finitos	47
2.6.2 Características principales del código	48
2.6.3 Algoritmo de construcción de estructuras por etapas	49
<b>2.7 Análisis de estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP</b>	<b>51</b>
2.7.1 Pórticos rehabilitados en 2 dimensiones (2D)	51
2.7.2 Pórticos rehabilitados y reparados en tres dimensiones (3D)	62
<b>2.8 Conclusiones del capítulo 2</b>	<b>78</b>
<b>2.9 Bibliografía del capítulo 2</b>	<b>80</b>
<b>Capítulo 3 Análisis del comportamiento de la interfaz entre el compuesto laminado y el hormigón</b>	<b>87</b>
<b>3.1 Modos de fallo por pérdida de adherencia en la zona reforzada</b>	<b>88</b>
<b>3.2 Pruebas experimentales de adherencia</b>	<b>91</b>
<b>3.3 Simulación numérica de la interfaz hormigón-epoxi-FRP</b>	<b>98</b>
3.3.1 Modelos de aproximación para la simulación de fisuras en la interfaz	98
3.3.2 Simulaciones de los ensayos de adherencia	102
<b>3.4 Factores que influyen en la interfaz hormigón-epoxi-FRP</b>	<b>106</b>
<b>3.5 Propuesta para la modelización de la interfaz hormigón-epoxi-FRP</b>	<b>109</b>

3.5.1 Aspectos generales de la estrategia propuesta	109
3.5.2 Formulación detallada de la teoría serie/paralelo	111
3.5.3 Aspectos generales del modelo de daño isótropo	116
<b>3.6 Análisis de la interfaz hormigón-epoxi-FRP en ensayos de adherencia a través de las teorías de mezclas</b>	<b>118</b>
3.6.1 Montajes de los ensayos de adherencia	119
3.6.2 Simulaciones de los ensayos de adherencia	120
3.6.3 Materiales utilizados en los ensayos de adherencia	121
3.6.4 Ensayo de corte doble CD-21-EX	122
3.6.5 Ensayo de corte doble CD-36-EX	131
3.6.6 Ensayo de corte doble CD-36-IN	141
3.6.7 Ensayo de flexión F-36-EX	151
3.6.8 Ensayos de adherencia simulados con la teoría de mezclas clásica	162
3.6.9 Influencia del espesor del epoxi en los ensayos de corte doble	167
<b>3.7 Conclusiones del capítulo 3</b>	<b>173</b>
<b>3.8 Bibliografía del capítulo 3</b>	<b>175</b>
<b>Capítulo 4 Tratamiento numérico del deslizamiento fibra-matriz en compuestos reforzados</b>	<b>181</b>
<b>4.1 Mecanismos de fallo microestructurales que producen el DFM</b>	<b>182</b>
<b>4.2 Transferencia de esfuerzos entre las fibras y la matriz ante el DFM</b>	<b>183</b>
<b>4.3 Metodologías de simulación del DFM</b>	<b>187</b>
4.3.1 Análisis de la interacción fibra-matriz basados en la micromecánica	188
4.3.2 Modelos constitutivos para el tratamiento del DFM	199
4.3.3 Análisis general de los modelos que involucran el DFM	214
<b>4.4 Modelo propuesto para introducir el DFM a las teorías de mezclas</b>	<b>216</b>
4.4.1 Adaptación de la teoría de mezclas clásica con DFM	217
4.4.2 Adaptación de la teoría de mezclas serie/paralelo con DFM	219
4.4.3 Determinación del factor de proporción por DFM	224
4.4.4 Algoritmos de las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo con DFM	226
4.4.5 Modificación de los modelos constitutivos considerando el DFM	227

4.4.6 Verificación del modelo propuesto en un elemento finito	233
<b>4.5 Estudio del DFM en micromodelos y en macromodelos a través de las teorías de mezclas</b>	<b>239</b>
4.5.1 Geometría de la probeta y descripción de las configuraciones	239
4.5.2 Descripción de los modelos constitutivos aplicados	241
4.5.3 Análisis con respecto al proceso de carga	241
4.5.4 Análisis con respecto a la descarga	248
4.5.5 Análisis con respecto a ciclos de carga y descarga	249
<b>4.6 Conclusiones del capítulo 4</b>	<b>252</b>
<b>4.7 Bibliografía del capítulo 4</b>	<b>255</b>
<b>Capítulo 5 Tratamiento numérico de grandes deformaciones en compuestos reforzados</b>	<b>259</b>
<b>5.1 Importancia de grandes deformaciones en los materiales compuestos</b>	<b>260</b>
<b>5.2 Parámetros generales en la configuración material y espacial</b>	<b>266</b>
<b>5.3 Modelos constitutivos de materiales compuestos en grandes deformaciones</b>	<b>269</b>
<b>5.4 Teoría de mapeo de espacios en grandes deformaciones</b>	<b>274</b>
<b>5.5 Teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones</b>	<b>276</b>
5.5.1 Formulación de la teoría de mezclas clásica en la configuración material	276
5.5.2 Formulación de la teoría de mezclas clásica en la configuración espacial	278
5.5.3 Factor de proporción volumétrica para la teoría de mezclas clásica	279
5.5.4 Algoritmo general de la teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones	279
5.5.5 Teoría de mezclas clásica y la anisotropía en grandes deformaciones	280
<b>5.6 Modelo propuesto para la extensión de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones</b>	<b>283</b>
5.6.1 Formulación de la teoría serie/paralelo en la configuración material	283
5.6.2 Formulación de la teoría serie/paralelo en la configuración espacial	288

---

5.6.3 Algoritmo de la teoría de mezclas serie/paralelo formulada en grandes deformaciones	292
5.6.4 Tensor gradiente de deformación	294
5.6.5 Factor de proporción volumétrica en la configuración espacial	296
5.6.6 Verificación del algoritmo propuesto en un elemento finito	297
<b>5.7 Simulaciones con la adaptación de la teoría serie/paralelo en grandes deformaciones</b>	<b>301</b>
5.7.1 Lámina solicitada a tracción	301
5.7.2 Lámina solicitada a flexo-compresión	312
<b>5.8 Conclusiones del capítulo 5</b>	<b>324</b>
<b>5.9 Bibliografía del capítulo 5</b>	<b>325</b>
<b>Capítulo 6 Conclusiones y futuras líneas de investigación</b>	<b>329</b>
<b>6.1 Conclusiones</b>	<b>329</b>
6.1.1 Conclusiones científicas	330
6.1.2 Conclusiones tecnológicas	332
<b>6.2 Futuras líneas de investigación</b>	<b>335</b>

---

## Índice de figuras

---

<i>Figura 1-1 Clasificación de FRP de acuerdo con la topología de las fibras.</i>	3
<i>Figura 1-2 Esquema de análisis de un compuesto laminado por FRP a través de las teorías de mezclas.</i>	5
<i>Figura 1-3 Síntesis del contenido de la tesis simulación de materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón.</i>	12
<i>Figura 2-1 Algunos fallos en las vigas reforzadas con FRP</i>	22
<i>Figura 2-2 Algunos fallos en los pilares reforzados con FRP</i>	24
<i>Figura 2-3 Algunos fallos en las uniones viga-pilar reforzadas con FRP</i>	26
<i>Figura 2-4 Esquema de modelización a multiescala en una estructura de un compuesto</i>	30
<i>Figura 2-5 Esquema de homogenización en una estructura de un compuesto</i>	33
<i>Figura 2-6 Esquema de la teoría de mezclas en una estructura de un compuesto</i>	35
<i>Figura 2-7 Relación entre los espacios isótropo ficticio y anisótropo real en pequeñas deformaciones</i>	36
<i>Figura 2-8 Esquema de solución de la teoría de mezclas clásica de un compuesto</i>	41
<i>Figura 2-9 Esquema de solución de la modificación de la teoría de mezclas en pequeñas deformaciones con materiales componentes anisótropos</i>	42
<i>Figura 2-10 Comportamiento esquemático serie/paralelo del compuesto</i>	43
<i>Figura 2-11 Esquema de solución de la teoría de mezclas serie/paralelo en pequeñas deformaciones para una capa <math>t</math> de un compuesto</i>	46
<i>Figura 2-12 Proceso de la construcción de estructuras por etapas de un modelo en MEF</i>	49
<i>Figura 2-13 Esquema de solución de la construcción por etapas de un modelo en MEF</i>	50
<i>Figura 2-14 Geometría tipo de las estructuras porticadas</i>	52
<i>Figura 2-15 Modelos de los pórticos con las configuraciones de refuerzo</i>	52
<i>Figura 2-16 Configuración de los materiales compuestos en los pórticos</i>	54
<i>Figura 2-17 Cortante en la base (P)- Desplazamiento horizontal (<math>\Delta</math>) para los pórticos de hormigón simple y de hormigón armado</i>	55
<i>Figura 2-18 Elementos en los que se miden las deformaciones y las tensiones</i>	57
<i>Figura 2-19 Tensión deformación a tracción en el hormigón.</i>	58



<i>Figura 2-20 Tensión deformación a tracción en la matriz del CFRP</i>	59
<i>Figura 2-21 Daño en los pórticos de hormigón sin armadura. Deformada 1:10</i>	60
<i>Figura 2-22 Daño en los pórticos de hormigón armado. Deformada 1:10</i>	61
<i>Figura 2-23 Cortante en la base (P)- Desplazamiento horizontal (<math>\Delta</math>) Comparación al considerar o no la plasticidad en el acero de la armadura.</i>	62
<i>Figura 2-24 Modelos de los pórticos con las configuraciones de refuerzo en 3D</i>	64
<i>Figura 2-25 Configuración de los materiales compuestos en los pórticos</i>	65
<i>Figura 2-26 Cortante en la base (P)- Desplazamiento horizontal (<math>\Delta</math>) en los pórticos rehabilitados.</i>	66
<i>Figura 2-27 Daño en el hormigón confinado de los pórticos 3D. Deformada 1:5</i>	68
<i>Figura 2-28 Daño en el hormigón de los pórticos en el plano medio. Deformada 1:5</i>	69
<i>Figura 2-29 Daño en el hormigón confinado de los pórticos AFV-3D y AFCV-3D</i>	69
<i>Figura 2-30 Daño en la matriz del FRP de los pórticos 3D. Deformada 1:5</i>	70
<i>Figura 2-31 Daño en la matriz del FRP en la unión de los pórticos 3D.</i>	71
<i>Figura 2-32 Cortante en la base (P)- Desplazamiento horizontal (<math>\Delta</math>) Comparación de pórticos rehabilitados entre análisis de 3D vs. análisis de 2D.</i>	71
<i>Figura 2-33 Cortante en la base (P) - Desplazamiento horizontal (<math>\Delta</math>) en los pórticos reparados.</i>	73
<i>Figura 2-34 Daño en el hormigón confinado de los pórticos reparados. Deformada 1:5</i>	74
<i>Figura 2-35 Plasticidad en la armadura de los pórticos reparados. Deformada 1:5</i>	75
<i>Figura 2-36 Cortante en la base (P)- Desplazamiento horizontal (<math>\Delta</math>) del pórtico sin refuerzo ASF-ASF, del pórtico reparado ASF-AFC y del pórtico rehabilitado AFC-AFC.</i>	76
<i>Figura 2-37 Daño en el hormigón de los pórticos ASF-ASF, ASF-AFC y AFC-AFC en el plano medio. Deformada 1:5</i>	77
<i>Figura 2-38 Plasticidad en la armadura de los pórticos ASF-ASF, ASF-AFC y AFC-AFC en el plano medio. Deformada 1:5</i>	77
<i>Figura 3-1 Modos de fallo de la adherencia en la interfaz hormigón-epoxi-FRP.</i>	88
<i>Figura 3-2 Modos de fallo con deslizamiento en vigas de hormigón reforzadas con FRP</i>	89
<i>Figura 3-3 Ensayos de adherencia para frp como refuerzo del hormigón</i>	91
<i>Figura 3-4 Fallos en los ensayos de adherencia por corte simple</i>	92
<i>Figura 3-5 Fallos en los ensayos de adherencia por corte doble</i>	93
<i>Figura 3-6 Fallos en los ensayos de adherencia por flexión</i>	95
<i>Figura 3-7 Modos de fractura considerados en los modelos fisuración para el análisis en la interfaz hormigón-epoxi-FRP</i>	101
<i>Figura 3-8 Representación de un material compuesto según la teoría serie /paralelo</i>	111
<i>Figura 3-9 Esquema representativo de la hipótesis tensión efectiva.</i>	117
<i>Figura 3-10 Montajes de ensayos de adherencia</i>	119
<i>Figura 3-11 Discretización en las probetas de los ensayos de adherencia</i>	120
<i>Figura 3-12 Configuración de los compuestos en los ensayos de adherencia</i>	121
<i>Figura 3-13 Geometría de la probeta de corte doble con <math>l_{db}</math> de 0.21m CD-21-EX</i>	122

<i>Figura 3-14</i>	<i>Mallado de CD-21-EX</i>	123
<i>Figura 3-15</i>	<i>Evolución de las deformaciones en el compuesto de CD-21-EX</i>	123
<i>Figura 3-16</i>	<i>Daño en CD-21-EX</i>	124
<i>Figura 3-17</i>	<i>Evolución del daño en CD-21-EX</i>	125
<i>Figura 3-18</i>	<i>Tensiones principales en CD-21-EX para una carga última de 29.60kN</i>	126
<i>Figura 3-19</i>	<i>Tensiones normales en el hormigón de CD-21-EX</i>	128
<i>Figura 3-20</i>	<i>Tensiones tangenciales en el hormigón de CD-21-EX</i>	128
<i>Figura 3-21</i>	<i>Tensiones normales en el adhesivo de CD-21-EX</i>	129
<i>Figura 3-22</i>	<i>Tensiones tangenciales en el adhesivo de CD-21-EX</i>	129
<i>Figura 3-23</i>	<i>Tensiones en el compuesto de CD-21-EX</i>	131
<i>Figura 3-24</i>	<i>Geometría de la probeta de corte doble con <math>l_{db}</math> de 0.36m CD-36-EX</i>	132
<i>Figura 3-25</i>	<i>Mallado de CD-36-EX</i>	132
<i>Figura 3-26</i>	<i>Evolución de las deformaciones en el compuesto de CD-36-EX</i>	133
<i>Figura 3-27</i>	<i>Daño en CD-36-EX</i>	134
<i>Figura 3-28</i>	<i>Evolución del daño en CD-36-EX</i>	135
<i>Figura 3-29</i>	<i>Tensiones principales en CD-36-EX para una carga última de 23.51kN</i>	136
<i>Figura 3-30</i>	<i>Tensiones normales en el hormigón de CD-36-EX</i>	137
<i>Figura 3-31</i>	<i>Tensiones tangenciales en el hormigón de CD-36-EX</i>	137
<i>Figura 3-32</i>	<i>Tensiones normales en el adhesivo de CD-36-EX</i>	138
<i>Figura 3-33</i>	<i>Tensiones tangenciales en el adhesivo de CD-36-EX</i>	138
<i>Figura 3-34</i>	<i>Tensiones en el compuesto de CD-36-EX</i>	140
<i>Figura 3-35</i>	<i>Geometría de la probeta de corte doble reforzada en una zona intermedia con <math>l_{db}</math> de 0.36m CD-36-IN</i>	141
<i>Figura 3-36</i>	<i>Mallado de CD-36-IN</i>	142
<i>Figura 3-37</i>	<i>Evolución de las deformaciones en el compuesto de CD-36-IN</i>	142
<i>Figura 3-38</i>	<i>Daño en CD-36-IN</i>	143
<i>Figura 3-39</i>	<i>Evolución del daño CD-36-IN</i>	145
<i>Figura 3-40</i>	<i>Tensiones principales en CD-36-IN para una carga última de 33.06kN</i>	146
<i>Figura 3-41</i>	<i>Tensiones normales en el hormigón de CD-36-IN</i>	147
<i>Figura 3-42</i>	<i>Tensiones tangenciales en el hormigón de CD-36-IN</i>	147
<i>Figura 3-43</i>	<i>Tensiones normales en el adhesivo de CD-36-IN</i>	149
<i>Figura 3-44</i>	<i>Tensiones tangenciales en el adhesivo de CD-36-IN</i>	149
<i>Figura 3-45</i>	<i>Tensiones en el compuesto de CD-36-IN</i>	150
<i>Figura 3-46</i>	<i>Geometría de la probeta de flexión con <math>l_{db}</math> de 0.36m F-36-EX</i>	152
<i>Figura 3-47</i>	<i>Mallado de F-36-EX</i>	152
<i>Figura 3-48</i>	<i>Evolución de las deformaciones en el compuesto de F-36-EX</i>	153
<i>Figura 3-49</i>	<i>Daño en F-36-EX</i>	154
<i>Figura 3-50</i>	<i>Evolución del daño en F-36-EX</i>	155
<i>Figura 3-51</i>	<i>Tensiones principales en F-36-EX para una carga última de 28.68kN</i>	156
<i>Figura 3-52</i>	<i>Tensiones normales en el hormigón de F-36-EX</i>	157
<i>Figura 3-53</i>	<i>Tensiones tangenciales en el hormigón de F-36-EX</i>	157

Índice de figuras

<i>Figura 3-54 Tensiones normales en el adhesivo de F-36-EX</i>	159
<i>Figura 3-55 Tensiones tangenciales en el adhesivo de F-36-EX</i>	159
<i>Figura 3-56 Tensiones en el compuesto de F-36-EX</i>	160
<i>Figura 3-57 Mallados de los ensayos de adherencia con <math>G_c</math> de <math>40\text{J/m}^2</math></i>	163
<i>Figura 3-58 Carga <math>P</math>- desplazamiento <math>\Delta x</math> de los ensayos de adherencia</i>	164
<i>Figura 3-59 Daño en los ensayos de adherencia</i>	166
<i>Figura 3-60 Carga <math>P</math>- desplazamiento <math>\Delta x</math> de los ensayos de corte doble con diferentes espesores de adhesivo</i>	168
<i>Figura 3- 61 Tensiones en el hormigón con diferentes espesores de adhesivo</i>	169
<i>Figura 3-62 Tensiones en el adhesivo con diferentes espesores</i>	171
<i>Figura 4-1 Mecanismos de fallo en los materiales compuestos que producen DFM</i>	183
<i>Figura 4-2 Esquema de las tensiones en la interfaz en diferentes etapas del DFM</i>	184
<i>Figura 4-3 Distribución de las tensiones en un ensayo simple pull-out</i>	185
<i>Figura 4-4 Fallos en ensayos de fragmentación</i>	186
<i>Figura 4-5 Fractura en la fibra con propagación de fisura en la interfaz</i>	186
<i>Figura 4-6 Fractura en la fibra con propagación de la fisura en la matriz</i>	186
<i>Figura 4-7 Mecanismo de fallo en un compuesto laminado con rotura fibrosa</i>	187
<i>Figura 4-8 Esquema del comportamiento fibra-matriz de los modelos “shear lag”</i>	191
<i>Figura 4-9 Esquema del comportamiento fibra-matriz con fractura en la matriz</i>	193
<i>Figura 4-10 Tension normal en el compuesto con respecto al DFM</i>	194
<i>Figura 4-11 Esquema de los estados de carga para los modelos ACK</i>	195
<i>Figura 4-12 Esquema de la celda elemental del compuesto en los modelos micromecánicos</i>	198
<i>Figura 4-13 Esquema representativo del modelo de Voyiadjis y Park</i>	206
<i>Figura 4-14 Esquema representativo del modelo de Barbero et al.</i>	208
<i>Figura 4-15 Relación entre los espacios isótropo ficticio y anisótropo real en pequeñas deformaciones para un <math>n</math>-ésimo componente</i>	210
<i>Figura 4-16 Esquema de solución de la modificación de la teoría de mezclas para un compuesto con DFM</i>	226
<i>Figura 4-17 Esquema de solución de la modificación de la teoría de mezclas serie/paralelo para una capa <math>t</math> de un compuesto con DFM</i>	227
<i>Figura 4-18 Esquema representativo para análisis del modelo en un elemento finito</i>	233
<i>Figura 4-19 Curvas carga-desplazamiento del elemento finito de verificación</i>	235
<i>Figura 4-20 Tensión deformación en la dirección de las fibras</i>	236
<i>Figura 4-21 Tensión deformación en la dirección transversal a las fibras</i>	237
<i>Figura 4-22 Dimensiones de la pieza de hormigón armado</i>	239
<i>Figura 4-23 Esquema representativo de los micromodelos</i>	240
<i>Figura 4-24 Esquema representativo del macromodelo de las teorías de mezclas</i>	240
<i>Figura 4-25 <math>P</math>-<math>\Delta</math> de los macromodelos y los micromodelos</i>	242
<i>Figura 4-26 Tensiones principales en la matriz</i>	243
<i>Figura 4-27 Tensiones principales en la fibra</i>	244

<i>Figura 4-28 Tensiones xx en la matriz para un <math>\Delta=1.25*10^{-5}m</math> Deformada 1:1000</i>	245
<i>Figura 4-29 Tensiones yy en la matriz para un <math>\Delta=1.25*10^{-5}m</math> Deformada 1:1000</i>	246
<i>Figura 4-30 Tensiones xy en la matriz para un <math>\Delta=1.25*10^{-5}m</math> Deformada 1:1000</i>	247
<i>Figura 4-31 Tensiones xx en las fibras para un <math>\Delta=1.25*10^{-5}m</math> Deformada 1:1000</i>	247
<i>Figura 4-32 Tensiones yy en las fibras a su eje para un <math>\Delta=1.25*10^{-5}m</math> Deformada 1:1000</i>	248
<i>Figura 4-33 P-<math>\Delta</math> de los macromodelos y los micromodelos con una descarga</i>	249
<i>Figura 4-34 P-<math>\Delta</math> de los macromodelos con cargas y descargas</i>	250
<i>Figura 4-35 Tensiones principales en la matriz</i>	251
<i>Figura 4-36 Tensiones principales en las fibras</i>	252
<i>Figura 5-1 Desalineación de las fibras y fallos</i>	261
<i>Figura 5-2 Modos de fallo en la base de los pilares</i>	262
<i>Figura 5-3 Modos de fallo en las uniones viga-columna reforzadas</i>	263
<i>Figura 5-4 Ensayos en un tejido para estudiar las grandes deformaciones cortantes</i>	264
<i>Figura 5-5 Daño en laminados de fibra de vidrio por impacto</i>	265
<i>Figura 5-6 Esquema de las configuraciones cinemáticas de un sólido en el espacio</i>	266
<i>Figura 5-7 Relación de las variables mecánicas entre las configuraciones</i>	267
<i>Figura 5-8 Relación entre los espacios isótropo ficticio y el anisótropo real en las configuraciones material y espacial para un n-ésimo componente.</i>	275
<i>Figura 5-9 Esquema general de solución de la teoría de mezclas clásica para un compuesto en el campo de grandes deformaciones.</i>	280
<i>Figura 5-10 Esquema 1-de solución de la modificación de la teoría de mezclas para un compuesto anisótropo en grandes deformaciones</i>	281
<i>Figura 5-11 Esquema 2-de solución de la modificación de la teoría de mezclas para un compuesto anisótropo en grandes deformaciones</i>	282
<i>Figura 5-12 Esquema de solución de la teoría de mezclas serie/paralelo en grandes deformaciones.</i>	293
<i>Figura 5-13 Esquema de solución del gradiente de deformación de los componentes de la capa t para la teoría de mezclas serie/paralelo en grandes deformaciones.</i>	296
<i>Figura 5-14 Esquema representativo para análisis del modelo en un elemento finito</i>	297
<i>Figura 5-15 Curvas carga-desplazamiento en el nodo 3 del elemento finito de verificación en grandes y pequeñas deformaciones (GD y PD)</i>	298
<i>Figura 5-16 Curvas carga-desplazamiento en el nodo 3 del elemento finito de verificación con diferentes orientaciones de la fibra</i>	299
<i>Figura 5-17 Curvas capacidad-desplazamiento u en el nodo 3 del elemento finito de verificación con diferentes orientaciones de la fibra</i>	301
<i>Figura 5-18 Esquema de la lámina solicitada a tracción</i>	302
<i>Figura 5-19 Mallados del micromodelo y de los macromodelos para el análisis de la lámina solicitada a tracción</i>	304
<i>Figura 5-20 Curvas carga Ry - desplazamiento Uy en la lámina solicitada a tracción</i>	305
<i>Figura 5-21 Curvas desplazamiento horizontal (Ux) -desplazamiento vertical (Uy)</i>	

<i>en la lámina solicitada a tracción</i>	305
<i>Figura 5-22 Distribución de tensiones principales en la matriz para un Uy en el nodo 1 de 0.06m. Deformada 1:1</i>	306
<i>Figura 5-23 Distribución de tensiones principales en las fibras para un Uy en el nodo 1 de 0.06m. Deformada 1:1</i>	307
<i>Figura 5-24 Contornos de desplazamiento vertical para un Uy en el nodo 1 de 0.10m</i>	307
<i>Figura 5-25 Curvas carga Ry - desplazamiento Uy en la lámina solicitada a tracción</i>	308
<i>Figura 5-26 Curvas desplazamiento horizontal (Ux) -desplazamiento vertical (Uy) en la lámina solicitada a tracción</i>	309
<i>Figura 5-27 Fallo en una lámina a tracción con un ángulo de desalineación de las fibras de 10°</i>	310
<i>Figura 5-28 Distribución de desplazamientos horizontales en la lámina solicitada a tracción para un Uy en el nodo 1 de 0.10m. Deformada 1:1</i>	311
<i>Figura 5-29 Esquema de la lámina solicitada a flexo-compresión</i>	313
<i>Figura 5-30 Esquema representativo de los micromodelos para el análisis de la lamina a flexo-compresión</i>	313
<i>Figura 5-31 Esquema representativo de los macromodelos para el análisis de la lamina a flexo-compresión</i>	314
<i>Figura 5-32 Curvas carga Px - desplazamiento Ux de la lámina solicitada a flexo-compresión</i>	316
<i>Figura 5-33 Curvas carga Py - desplazamiento Uy de la lámina solicitada a flexo-compresión</i>	317
<i>Figura 5-34 Distribución de tensiones principales en la matriz de la lámina solicitada a flexo-compresión para un Ux en el nodo 2 de 0.025m. Deformada 1:1</i>	318
<i>Figura 5-35 Distribución de tensiones principales en las fibras de la lámina solicitada a flexo-compresión para un Ux en el nodo 2 de 0.025m. Deformada 1:1</i>	319
<i>Figura 5-36 Distribución de desplazamientos horizontales en la lámina solicitada a flexo-compresión para un Ux en el nodo 2 de 0.05m. Deformada 1:1</i>	320
<i>Figura 5-37 Curvas carga Px - desplazamiento Ux de la lámina solicitada a flexo-compresión</i>	322
<i>Figura 5-38 Curvas carga Py - desplazamiento Uy de la lámina solicitada a flexo-compresión</i>	322
<i>Figura 5-39 Distribución del daño en la matriz de la lámina solicitada a flexo-compresión para un Ux en el nodo 2 de 0.05m. Deformada 1:1</i>	323
<i>Figura 5-40 Distribución del endurecimiento plástico en la matriz de la lámina solicitada a flexo-compresión para un Ux en el nodo 2 de 0.05m. Deformada 1:1</i>	323



---

## Índice de tablas

---

<i>Tabla 1-1 Tipos de materiales compuestos reforzados con fibras</i>	3
<i>Tabla 2-1 Nomenclatura de los modelos de los pórticos</i>	53
<i>Tabla 2-2 Propiedades mecánicas de los materiales componentes en los pórticos</i>	53
<i>Tabla 2-3 Porcentajes de los componentes en los compuestos de los pórticos</i>	54
<i>Tabla 2-4 Cortante máximo en la base y desplazamiento en los pórticos 2D</i>	56
<i>Tabla 2-5 Relación del cortante en la base para un desplazamiento de 0.0274m</i>	62
<i>Tabla 2-6 Nomenclatura de los modelos de los pórticos 3D bajo pushover</i>	63
<i>Tabla 2-7 Nomenclatura de los modelos de los pórticos 3D bajo un ciclo de carga- descarga-recarga</i>	63
<i>Tabla 2-8 Porcentajes de los componentes en los compuestos de los pórticos</i>	65
<i>Tabla 2-9 Propiedades mecánicas de los materiales componentes en los pórticos</i>	65
<i>Tabla 2-10 Cortante máximo en la base y desplazamiento horizontal en pórticos 3D</i>	67
<i>Tabla 2-11 Diferencia del cortante máximo en la base para pórticos rehabilitados</i>	72
<i>Tabla 2-12 Cortante máximo en la base y desplazamiento en los pórticos reparados</i>	73
<i>Tabla 3-1 Discretización de los modelos de los ensayos de adherencia</i>	120
<i>Tabla 3-2 Porcentajes de los componentes en los materiales compuestos</i>	121
<i>Tabla 3-3 Propiedades mecánicas de los materiales componentes</i>	122
<i>Tabla 3-4 Discretización de los modelos de los ensayos de adherencia</i>	164
<i>Tabla 3-5 Cargas máximas de los modelos de los ensayos de adherencia</i>	164
<i>Tabla 3-6 Nomenclatura de las configuraciones de los ensayos de corte doble con diferentes espesores</i>	167
<i>Tabla 3-7 cargas máximas de los ensayos de corte doble con diferentes espesores</i>	168
<i>Tabla 3-8 Diferencias entre las tensiones máximas en el hormigón</i>	170
<i>Tabla 3-9 Diferencias entre las tensiones máximas del adhesivo</i>	172

<i>Tabla 4-1 Nomenclatura de las configuraciones del elemento finito de verificación</i>	234
<i>Tabla 4-2 Propiedades mecánicas de los componentes del elemento finito de verificación</i>	234
<i>Tabla 4-3 Propiedades mecánicas de los materiales componentes</i>	239
<i>Tabla 4-4 Participación volumétrica de los componentes en los compuestos</i>	240
<i>Tabla 4-5 Coordenadas de los nodos de los micromodelos y macromodelos</i>	240
<i>Tabla 4-6 Nomenclatura de las configuraciones de los micromodelo</i>	241
<i>Tabla 4-7 Nomenclatura de las configuraciones de los macromodelos</i>	241
<i>Tabla 5-1 Propiedades mecánicas de los materiales componentes utilizados en el análisis del elemento finito de verificación</i>	297
<i>Tabla 5-2 Nomenclatura de las configuraciones del elemento finito de verificación</i>	298
<i>Tabla 5-3 Relación entre las reacciones obtenidas en los campos de grandes y de pequeñas deformaciones (GD y PD) del elemento finito de verificación</i>	299
<i>Tabla 5-4 Cargas máximas con diferentes orientaciones de la fibra</i>	300
<i>Tabla 5-5 Propiedades mecánicas de los materiales componentes utilizados para el análisis de la lámina solicitada a tracción</i>	303
<i>Tabla 5-6 Nomenclatura de las configuraciones con diferentes mallados para el análisis de la lámina solicitada a tracción</i>	303
<i>Tabla 5-7 Nomenclatura de las configuraciones con diferentes matrices para el análisis de la lámina solicitada a tracción</i>	304
<i>Tabla 5-8 Relaciones porcentuales entre los campos de grandes y de pequeñas deformaciones para un Uy de 0.10m en el nodo 1</i>	312
<i>Tabla 5-9 Propiedades mecánicas de los materiales simples utilizados en el análisis de una lámina solicitada a flexo-compresión</i>	314
<i>Tabla 5-10 Nomenclatura de las configuraciones de los micromodelos</i>	315
<i>Tabla 5-11 Nomenclatura de las configuraciones de los macromodelos analizados con la teoría de mezclas serie/paralelo</i>	315
<i>Tabla 5-12 Nomenclatura de las configuraciones de los macromodelos analizados con la teoría de mezclas clásica</i>	315



# Capítulo 1

---

## Introducción

---

El uso de los materiales compuestos reforzados con fibras como refuerzo de estructuras ya construidas es una de las tecnologías que está teniendo gran aplicación en la industria de la construcción debido a las ventajas que presentan. Entre estas ventajas están las altas relaciones resistencia-peso y rigidez-peso, las cuales mejoran el comportamiento de la estructura existente sin alterar su configuración geométrica. Asimismo, son materiales livianos y no demandan cambios en la distribución del sistema estructural o en la cimentación.

Frente al incremento del uso de los materiales compuestos conformados por polímeros reforzados con fibras largas, como una alternativa de refuerzo en las estructuras que requieren ser reforzadas, es importante buscar nuevas herramientas que permitan estudiar el comportamiento de los compuestos para optimizar su diseño tanto en elementos estructurales con cierto nivel de daño (reparación) como en elementos que requieren tener un mejor comportamiento dentro de la estructura (rehabilitación).

No obstante, para optimizar el diseño estructural de los materiales compuestos en las estructuras y garantizar un buen comportamiento de las mismas ante las diferentes sollicitaciones que pueden presentarse durante su vida útil, es necesario que en el análisis del comportamiento de los materiales compuestos, se identifique la forma de participación de los componentes del compuesto y su interacción con otros materiales, como el hormigón armado. De igual forma, se requiere que en el análisis del comportamiento global de la estructura, se establezca la incidencia de los materiales compuestos como parte integral de los elementos estructurales reforzados. Un procedimiento eficiente para realizar estos análisis es la simulación numérica con elementos finitos

Teniendo en cuenta que la simulación numérica en el análisis de los materiales compuestos es un campo que está en desarrollo, y que su uso en obras civiles es relativamente nuevo, continuando dentro de la línea de investigación de los Materiales Compuestos del Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña, en esta tesis se propone utilizar la simulación numérica en problemas mecánicos como una herramienta de apoyo del análisis estructural, con el propósito de analizar el

comportamiento de los compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado, específicamente de los polímeros reforzados con fibras largas (FRP).

## 1.1 Marco general

El refuerzo como técnica de reparación, corrige las deficiencias que originan la degradación de las propiedades mecánicas de los materiales estructurales, y que han conducido al deterioro de las estructuras. Asimismo el refuerzo como técnica de rehabilitación, actualiza las estructuras que no cumplen con los requisitos necesarios para garantizar un buen comportamiento [1; 2].

La rehabilitación y/o la reparación de las estructuras en hormigón armado se han realizado tradicionalmente con láminas de acero. No obstante, debido a la evidencia de la vulnerabilidad de las estructuras mostrada durante fuertes sismos de las dos décadas pasadas, se han realizado un gran número de investigaciones para mejorar las técnicas existentes y estudiar otros materiales como refuerzo, con el fin de garantizar un adecuado funcionamiento de las estructuras existentes sin causar sobrecostos [3; 4].

En el área de las estructuras reforzadas enfocada al estudio de los materiales compuestos, las investigaciones enfatizan que el uso de los materiales compuestos como refuerzo de estructuras es una buena técnica; sin embargo, advierten que se requieren adecuados conocimientos de diseño y de construcción para estandarizar metodologías que garanticen el apropiado uso de este tipo de materiales [5; 6].

En general se tiene que al reparar o rehabilitar en los elementos estructurales de hormigón armado con materiales compuestos reforzados con fibras se aumenta la resistencia global de la estructura. Sin embargo, uno de los principales factores que restringe el uso de materiales compuestos como refuerzo a mayor escala, es la dificultad que hay para definir el comportamiento mecánico de estos materiales, y para establecer su influencia en el comportamiento global del elemento reforzado. Esta dificultad surge por el comportamiento complejo que tienen los materiales compuestos, y que es de difícil medición experimental.

### 1.1.1 Clasificación de los materiales compuestos reforzados con fibras

En los materiales compuestos reforzados con fibras, las fibras se adicionan a un sustrato homogéneo denominado "matriz" siguiendo diferentes patrones. La clasificación de los materiales compuestos reforzados con fibras es hecha principalmente bajo dos criterios: el de los materiales componentes, y el de la topología de las fibras dentro del compuesto [7].

De acuerdo con su composición, los materiales compuestos se clasifican como se indica en la tabla 1-1, esta clasificación se basa en la descripción dada por Daniel y Ishai [8], y se complementa con lo indicado en Rössler et al. [7], Hull [9] y Kaw[10].

Compuestos	Fibras	Matriz	Tipo de matriz
Compuestos de matriz polimérica (Polymer matrix composites -PMCs)	Fibras de vidrio Tipo E Fibras de vidrio Tipo S Fibras de carbón(Grafito) Fibras de aramida (Klevar) Fibras de óxido de aluminio Fibras de carburo de silicio Fibras de borón	Matriz de polímeros termoestables - Resina epoxi - Resina poliimidas - Resina poliéster - Resinas viniléster Matriz de polímeros termoplásticos - Polipropileno (PP) - Polietileno (PE) - Policarbonato (PC) - PEEK, PET, e.t.c.	Orgánicas
	Compuestos de matriz metálica (Metal matrix composites - MMCs)	Fibras de carbón(Grafito) Fibras de carburo de silicio Fibras de óxido de aluminio Fibras de borón	
Compuestos de matriz cerámica (Ceramic matrix composites - CMCs)	Fibras de carburo de silicio Fibras de óxido de aluminio Fibras de nitruro de silicio Fibras de carbón(Grafito) Fibras de vidrio Fibras de borón	Carburo de silicio Alúmina Nitruro de silicio Vidrio cerámico	Inorgánicas

TABLA 1-1 TIPOS DE MATERIALES COMPUESTOS REFORZADOS CON FIBRAS

En lo que respecta a la topología de las fibras, la clasificación se hace por la distribución y la longitud de las fibras, como se señala en la figura 1-1.

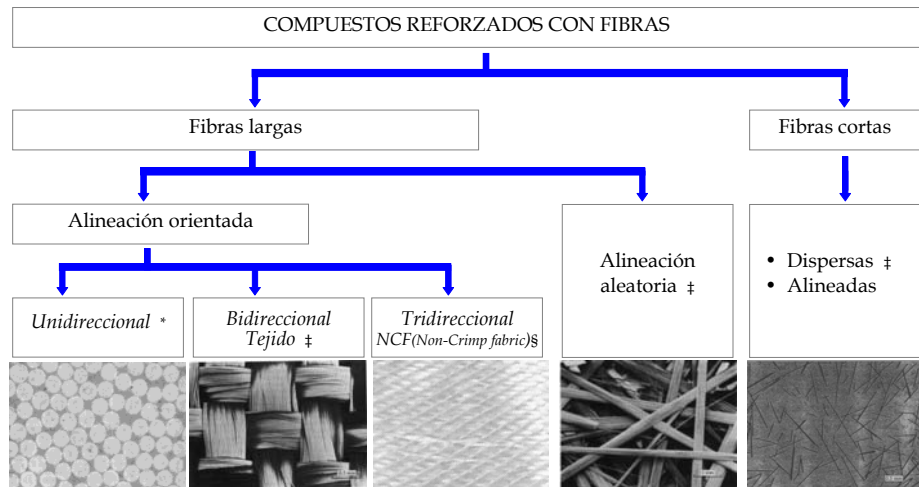


FIGURA 1-1 CLASIFICACIÓN DE FRP DE ACUERDO CON LA TOPOLOGÍA DE LAS FIBRAS. \* † ‡ §

Los compuestos reforzados fibras, poseen un comportamiento no lineal complejo, además de la alta anisotropía y de la heterogeneidad que tienen por su propia

\* Esquema adaptado de Matínez [21]

† Fotografía de Hyer[13]

‡ Fotografía de Hull [9]

§ Fotografía de Bank [12]

configuración, el comportamiento está influenciado por la no linealidad de la matriz y de las fibras, y por la presencia de diferentes fenómenos como la fisuración de la matriz, el pandeo de las fibras, el deslizamiento de las fibras con respecto a la matriz y la delaminación entre pliegues, entre otros [11]. Información detallada de la caracterización de los materiales compuestos y sus componentes se puede encontrar en Kaw[10], Bank [12], Hyer [13] y Barbero [14], entre otros libros especializados en materiales compuestos.

En lo que respecta al uso de materiales compuestos reforzados con fibras como refuerzo en estructuras de hormigón armado, básicamente se utilizan compuestos de fibras largas con alineación orientada, por ende, el desarrollo de esta investigación sólo se hace referencia a materiales compuestos reforzados con fibras largas (FRP).

#### 1.1.2 Análisis estructural de materiales compuestos reforzados con fibras

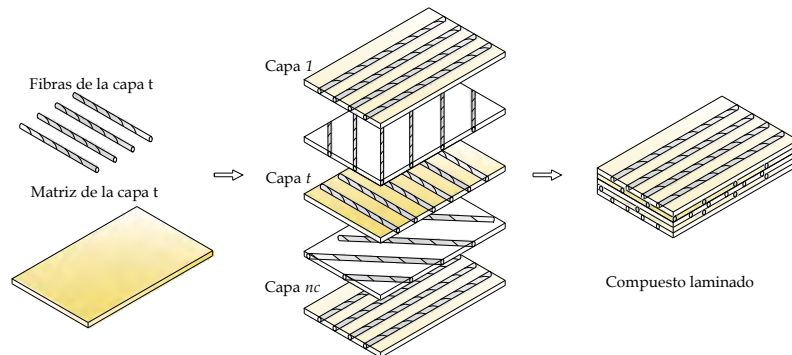
El comportamiento de las estructuras en hormigón armado reforzadas con materiales compuestos depende de múltiples parámetros, lo que dificulta que a través de la experimentación se puedan analizar todas las variables que inciden en los mecanismos de fallo que se generan. De otra parte, la heterogeneidad y la anisotropía propias de los compuestos han conllevado a que no hayan métodos de análisis sencillos y efectivos que permitan determinar de una forma aproximada su comportamiento en las estructuras [5].

En la actualidad el estudio del comportamiento de los materiales compuestos por medio del método de los elementos finitos presenta algunas restricciones, incluso en recientes simulaciones de elementos reforzados con FRP, se representa el comportamiento constitutivo del material compuesto como el de un material homogéneo, sin tener en cuenta el aporte de sus componentes. Uno de los principales retos que tiene la simulación numérica de estructuras reforzadas con FRP es introducir las relaciones entre los materiales componentes del compuesto en el análisis global de las estructuras. Básicamente existen tres estrategias para hacer la simulación numérica de estructuras reforzadas con materiales compuestos:

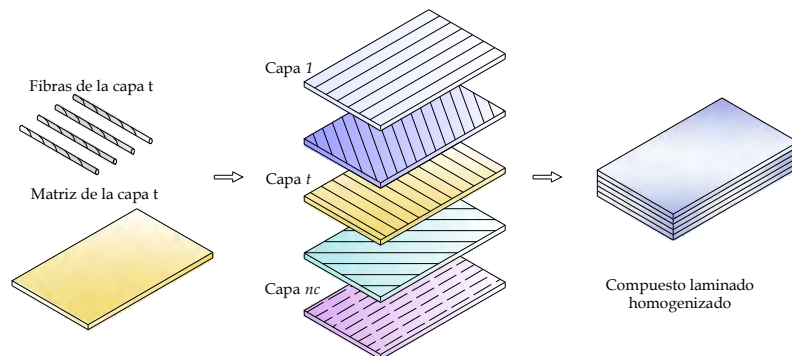
- **Multiescala:** Con esta estrategia el comportamiento del material compuesto es modelado en diferentes escalas, el de la microestructura (micromodelo) y el de la estructura (macromodelo) [15]. A través de esta técnica se integra los análisis de la microestructura del material compuesto al análisis de la estructura, sin que exista algún tipo de homogenización de los materiales compuestos.
- **Homogenización:** Dentro de la mecánica de medios continuos esta estrategia requiere del análisis desde dos escalas diferentes: una escala macroscópica (global) en la que se determina el comportamiento de la estructura, y una escala microscópica (local) en la que se obtiene el comportamiento del compuesto partiendo de la respuesta de sus componentes [16]. Con esta técnica en la escala macroscópica los materiales compuestos son homogeneizados, y en la microscópica se considera la microestructura de cada material compuesto.

- **Teoría de mezclas:** Con esta estrategia se considera que el comportamiento de cada componente define el comportamiento global del compuesto, sin considerar su microgeometría. Se basa en la mecánica del continuo local bajo el principio de interacción de las sustancias que componen el material, suponiendo que en un volumen infinitesimal del compuesto participan en conjunto todos sus componentes, asimismo que cada uno de ellos contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica [17].

Para determinar el comportamiento de los materiales compuestos como refuerzo de elementos estructurales rehabilitados o reparados, el entorno de este proyecto se desarrolla en la simulación numérica aplicando la estrategia de la teoría de mezclas, en la que se utilizan la **teoría de mezclas clásica** documentada entre otros por Oller et al. [18], Car et al. [19], y la **teoría de mezclas serie/paralelo** propuesta por Rastellini [20] y que ha sido estudiada por Martínez [21] y Molina [22].



(a) Compuesto laminado conformado por varias láminas o capas de FRP \*\*



(b) Compuesto laminado homogenizado a través de las teorías de mezclas

FIGURA 1-2 ESQUEMA DE ANÁLISIS DE UN COMPUESTO LAMINADO POR FRP A TRAVÉS DE LAS TEORÍAS DE MEZCLAS.

En la figura 1-2 se muestra en forma generalizada la estrategia de la teoría de

\*\* Figura adaptada de Jones [23]

mezclas para analizar un compuesto laminado. Como se indica en la figura 1-2 (a) para obtener un compuesto laminado por FRP se apilan diferentes láminas o capas, usualmente, la orientación de las fibras es distinta en cada lámina con el propósito de tener un laminado resistente en diversas direcciones [23], asimismo cada capa o lámina puede estar conformada por fibras orientadas en distintas direcciones. Con la estrategia de las teorías de mezclas este concepto se aplica como se muestra en la figura 1-2 (b), donde el laminado corresponde a un material homogenizado, en el que cada lámina o capa que lo compone, corresponde un material homogéneo compuesto, en el que se considera la proporción volumétrica de sus componentes junto con las orientaciones de los grupos de fibras que lo componen.

La simulación numérica de las estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP se puede realizar a través de los algoritmos de las teorías de mezclas de materiales compuestos. Estas teorías de mezclas, como gestores de modelos constitutivos, permiten representar el comportamiento de los materiales compuestos por medio de la participación de los materiales simples que los componen, y determinar su incidencia en el comportamiento global de los elementos estructurales reforzados.

## 1.2 Motivación

La necesidad de la industria de la construcción de dar solución a los problemas actuales con relación a la rehabilitación y reparación de estructuras existentes, ha conllevado a que haya un gran interés en los materiales compuestos como una alternativa de refuerzo. Por ello el optimizar el diseño de las estructuras en hormigón armado rehabilitadas o reforzadas con materiales compuestos, a partir de los análisis de la simulación numérica, es una herramienta versátil y de gran aplicación en el campo de la ingeniería civil.

La dificultad que hay para definir el comportamiento mecánico de estos materiales y sus mecanismos de fallo, condiciona el aumento de la utilización de materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado. El comportamiento complejo de los materiales compuestos a la vez, ha conllevado a que no hayan métodos de análisis sencillos y efectivos que permitan determinar de una forma aproximada su comportamiento en las estructuras que necesitan ser rehabilitadas y/o reparadas.

Consecuentemente con lo anterior, la optimización del uso del FRP en las estructuras se debe realizar de forma conjunta, entre el campo experimental y la simulación numérica con elementos finitos. Obviamente, es necesario el desarrollo de nuevas herramientas y mejorar las existentes, en busca de que la simulación numérica, tanto a nivel global, como local, represente de una forma más precisa el comportamiento real de las estructuras reforzadas con FRP, con el fin de obtener información que no se puede medir en los ensayos.

Reconociendo que las técnicas convencionales utilizadas en el análisis para

materiales simples no resultan adecuadas para el análisis de los materiales compuestos, en esta investigación se utilizan las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, como herramientas del análisis numérico para simular el comportamiento de los materiales compuestos.

No obstante, como es un campo que se encuentra en desarrollo, por la misma complejidad del comportamiento de los materiales compuestos, aún hay aspectos que no han sido suficientemente estudiados para su formulación constitutiva. Frente a estas falencias y en aras de lograr una mejor aproximación de la simulación numérica de los materiales aspectos, en este documento se abarcaron cuatro aspectos:

- *Análisis del comportamiento de los materiales compuestos FRP como refuerzo de estructuras de hormigón armado*

Desde el punto de vista estructural acorde con lo que se ha observado en los ensayos, se evidencia que para optimizar el uso de los materiales compuestos como refuerzo, es necesario identificar la forma de participación de los diferentes componentes del compuesto, su interacción con otros materiales de la estructura y los mecanismos de fallo que se pueden generar ante el refuerzo; asimismo, se ha percibido que se requiere que en el análisis del comportamiento global de la estructura, se establezca la incidencia de los materiales compuestos como parte integral de los elementos reforzados [24].

La estrategia de la teoría de mezclas en la simulación numérica es una herramienta que permite cubrir estos requisitos y que es capaz de predecir el comportamiento y los mecanismos de fallo de estructuras reforzadas con FRP. Sin embargo, es necesario hacer algunas modificaciones y mejoras para mostrar las ventajas que ofrece esta estrategia para el análisis y diseño de estructuras rehabilitadas o reparadas con materiales compuestos FRP.

- *Análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-adhesivo-FRP*

Las investigaciones hechas elementos reforzados sometidos a flexión y cortante, muestran que la eficiencia del refuerzo depende en gran medida de la integridad del sistema reforzado para poder garantizar la interacción entre el FRP y el hormigón [25; 26].

Diferentes estudios muestran que en los elementos reforzados con FRP, por lo general, el daño se concentra en los sectores donde termina el FRP y donde se presentan los mayores movimientos, esto implica que si no hay una adecuada adherencia entre el refuerzo y el hormigón, puede ocasionar la pérdida de adherencia entre el FRP y el hormigón, incluso ocasionar el fallo súbito, por el despegue del FRP, el desprendimiento del hormigón de recubrimiento y/o la rotura del FRP.

Debido a que la pérdida de adherencia entre laminado y el hormigón ocurre por sobrepasar la resistencia del hormigón, del epoxi, o de las interfaces hormigón-epoxi o epoxi-FRP, y que en ningún caso la resistencia del FRP es

superada, es evidente que la eficiencia del refuerzo con FRP no está siendo totalmente aprovechada como refuerzo en elementos de hormigón. Por la complejidad del fenómeno hay bastantes investigaciones, pero la mayoría están enfocadas a resultados experimentales y a formulaciones de modelos analíticos para el diseño, que si bien han mostrado aportes importantes, no contemplan dentro de su alcance el análisis detallado del comportamiento de los materiales en la zona interfacial.

Dadas las dificultades que implica el medir experimentalmente los mecanismos de fallo que inducen la pérdida de adherencia en la interfaz, se evidencia la necesidad de buscar nuevas herramientas que permitan complementar los análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, para establecer, de una forma más precisa su influencia en el comportamiento global de la estructura reforzada.

– *Análisis de la interacción fibra –matriz en materiales compuestos reforzados con fibras largas*

Bajo el lineamiento de introducir los mecanismos de fallo microestructurales de los materiales compuestos en la simulación numérica, se tiene que una de las limitaciones para representar de una forma más aproximada el comportamiento real de los materiales compuestos, está en que la mayoría de las técnicas desarrolladas hasta el momento parten de la hipótesis de adherencia perfecta. Es así como, hay fenómenos locales que no han sido aún contemplados en la formulación de las teorías de mezclas, y que directamente están relacionados con mecanismos de fallo que afectan el comportamiento de los compuestos, como la pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz.

Debido a la no linealidad de la matriz y de las fibras, el comportamiento de los compuestos está sujeto a la pérdida de adherencia de la interfaz fibra-matriz, la cual conduce al deslizamiento relativo entre sus componentes (DFM), denominado en inglés “debonding”.

Con la reducción de la interacción entre las fibras y la matriz, este fenómeno local conduce a que se degraden las propiedades mecánicas del compuesto, principalmente su rigidez y su resistencia, por lo tanto, el DFM puede afectar el comportamiento del compuesto como refuerzo. Esto implica que si se pretende tener precisión en la respuesta de las estructuras de compuestos y reforzadas con FRP, es necesario que en las teorías de mezclas se consideren los mecanismos de fallo que inducen el deslizamiento fibra-matriz, y sus efectos en el comportamiento de los materiales compuestos.

– *Análisis de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones*

El estudio de grandes deformaciones y grandes desplazamientos de los compuestos es importante para garantizar un óptimo diseño de la estructura rehabilitada o reforzada, ya que los compuestos al ser parte de los elementos estructurales frente a una sollicitación extrema de la estructura, pueden llegar a trabajar en este rango, además los compuestos también pueden estar sujetos a



no linealidades geométricas, especialmente por su esbeltez y por la tendencia de las fibras a alinearse en la dirección del mayor esfuerzo.

De acuerdo con lo anterior, se requiere que las teorías de mezclas, aparte de la no linealidad material, también consideren en su formulación la cinemática no lineal en grandes deformaciones de los materiales compuestos. La teoría de mezclas clásica ya ha sido implementada en campo de grandes deformaciones por Car [27]. No obstante, la teoría serie/paralelo aún no ha sido adaptada para el campo de grandes deformaciones, como tampoco, se ha aplicado a problemas de no linealidad por grandes desplazamientos.

En general, se tiene que la simulación numérica de los materiales compuestos es una herramienta complementaria en el análisis de las estructuras de hormigón reforzadas con FRP, pero es un campo que está en desarrollo, y aún hay aspectos de los materiales compuestos, que por su complejidad, no han sido suficientemente estudiados. Dentro de ellos están: el comportamiento no lineal del FRP como refuerzo de las estructuras, la pérdida de adherencia entre el FRP y el hormigón, y el comportamiento de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones, asimismo los mecanismos de fallo microestructurales en los compuestos, como la pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz. Aspectos que inciden en el comportamiento global de las estructuras reforzadas y que es importante considerarlos para mejorar el análisis y el diseño de los materiales compuestos como refuerzo.

### 1.3 Objetivos de la tesis

- *Objetivo general*

Analizar el comportamiento de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado a través del uso, mejoras y modificaciones de las teorías de mezclas. Todo esto, con el fin de mostrar que las teorías de mezclas en la simulación numérica, junto con todo su soporte teórico y matemático, es una herramienta para la optimización del análisis y diseño del refuerzo de las estructuras que requieren ser reparadas y/o rehabilitadas.

- *Objetivos específicos*

Bajo el enfoque de la simulación numérica los objetivos específicos enunciados a continuación, se agrupan acorde con los cuatro aspectos que fueron contemplados en el desarrollo de esta investigación para estudiar el comportamiento de los materiales compuestos como refuerzo de estructuras de hormigón armado.

- *Análisis del comportamiento de los materiales compuestos FRP como refuerzo de estructuras de hormigón armado*

En el entorno de la simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos, por medio de la complementación de algunos

algoritmos y la implementación de otros, se busca mostrar que el uso de las teorías de mezclas es una metodología eficiente de analizar diferentes alternativas de rehabilitación y/o reparación con materiales compuestos de una estructura de hormigón armado.

A través de esta metodología se pretende brindarle al diseñador estructural una herramienta que le permita establecer la capacidad de un refuerzo estructural y su aporte en el comportamiento global de la estructura, para así, seleccionar las configuraciones de refuerzo más convenientes en un determinado elemento de la estructura que necesita ser reparado o rehabilitado.

Mediante la modelización numérica se pretende que en una primera etapa, se pueda identificar los sectores que necesitan ser reforzados; luego en una segunda etapa, una vez se haya realizado el diseño del refuerzo, se simule la estructura reparada o rehabilitada para establecer de una forma objetiva la eficiencia de las configuraciones propuestas de refuerzo. Además, en el caso de analizar una estructura reparada, con la simulación numérica, se busca considerar las limitaciones que ocasionan el daño, la plasticidad y el estado de deformación existentes en la estructura antes de ser reparada.

– *Análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-adhesivo-FRP*

La evolución de la pérdida de la adherencia entre el refuerzo y el hormigón, en sí misma es un fenómeno complejo de caracterizar. Por ello, se propone plantear y validar una metodología de simulación de la zona interfacial, con base en los resultados experimentales de ensayos de adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP.

Con la metodología propuesta de simulación se propone estudiar el comportamiento de la zona interfacial de una forma integral, considerando a través del uso de las teorías de mezclas y de los modelos constitutivos, el comportamiento no lineal de todos los materiales que inciden en los mecanismos de fallo de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, y por ende, en la transmisión de esfuerzos de las zonas reforzadas.

Por medio de las simulaciones de los ensayos de adherencia se busca establecer las diferencias entre los ensayos de corte y de flexión, identificando sus ventajas y limitaciones. Con las simulaciones de los ensayos de adherencia, se pretende analizar los diversos modos de fallo que se pueden presentar en la interfaz, y que afectan la adherencia del refuerzo en los elementos de hormigón armado.

– *Análisis de la interacción fibra –matriz en materiales compuestos reforzados con fibras largas*

Dada la necesidad de considerar los mecanismos de fallo microestructurales que afectan el comportamiento de los materiales compuestos en las simulaciones numéricas, se pretende proponer un modelo constitutivo para

introducir el fenómeno del deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz (DFM) en la formulación de las teorías de mezclas de materiales compuestos reforzados con fibras largas.

En el modelo se busca tener en cuenta desde un enfoque fenomenológico, que el DFM condiciona el comportamiento de todos los materiales componentes, y que incide en la pérdida de transferencia de esfuerzos entre las fibras y la matriz, para representar la pérdida progresiva de capacidad de los materiales compuestos ante el desarrollo de este fenómeno microestructural.

Mediante el modelo constitutivo propuesto para introducir el DFM en las teorías de mezclas, se busca obtener una herramienta generalizada que permita estudiar el DFM en distintos tipos de compuestos reforzados con fibras largas. Asimismo, con el modelo propuesto se pretende analizar los diferentes mecanismos de fallo que inducen el deslizamiento entre las fibras y la matriz, y que afectan de paso, la resistencia y la rigidez de los materiales compuestos.

– *Análisis de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones*

Con el propósito de analizar el comportamiento no lineal geométrico y material de los compuestos e identificar su influencia en el comportamiento global de la estructura, se propone un modelo constitutivo de materiales compuestos en grandes deformaciones, para extender la formulación de la teoría de mezclas serie/paralelo al campo no lineal en grandes deformaciones.

Mostrar que la teoría de mezclas serie/paralelo formulada en grandes deformaciones es una alternativa para analizar problemas no lineales de materiales compuestos reforzados en deformaciones finitas. Asimismo se pretende establecer las ventajas y las limitaciones de la adaptación de la teoría serie /paralelo al campo de deformaciones finitas en el análisis del comportamiento de los compuestos reforzados con fibras largas.

Por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo se pretende analizar el comportamiento no lineal de materiales compuestos reforzados frente: al cambio drástico de una configuración geométrica de las estructuras que componen (comportamiento macroestructural), a la reorientación de las fibras en la dirección de los mayores esfuerzos (comportamiento microestructural) y al comportamiento mecánico no lineal de sus componentes.

#### 1.4 Síntesis del contenido

La simulación numérica es una herramienta útil y de gran aplicación en el análisis estructural de soluciones de refuerzo de estructuras de hormigón armado con materiales compuestos. En esta tesis se muestra que el uso del método de los elementos finitos junto con la estrategia de la teoría de mezclas, es una herramienta que permite analizar estructuras reforzadas con materiales compuestos reforzados con fibras largas (FRP).

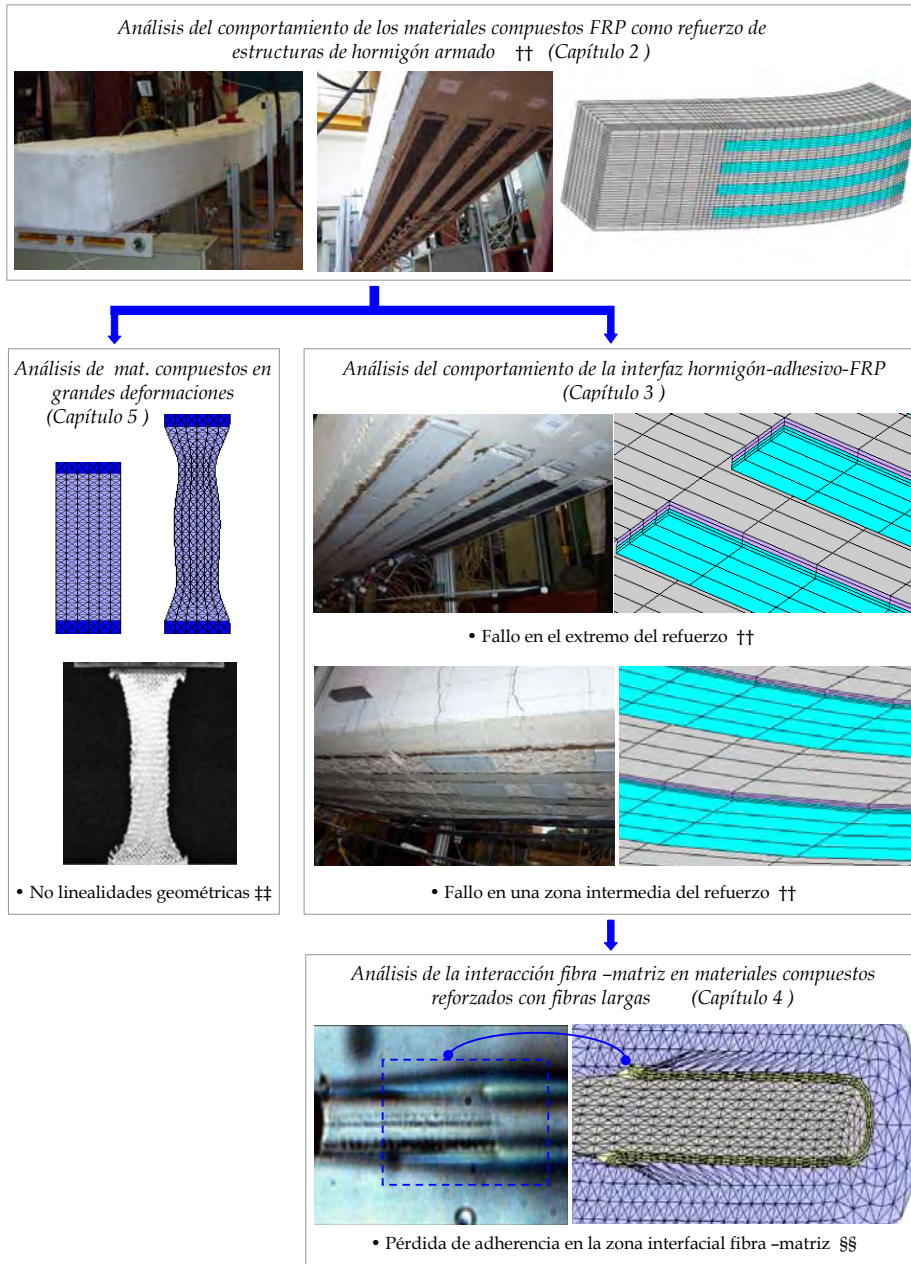


FIGURA 1-3 SÍNTESIS DEL CONTENIDO DE LA TESIS SIMULACIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS COMO REFUERZO EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN. †† †† §§

†† Fotografías tomadas en ensayos de vigas de hormigón reforzadas con FRP realizados por el grupo de investigación que dirige el profesor Lluís Gil en el Laboratorio de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Terrassa.

†† Fotografía del artículo de Zhu et al.[28]

§§ Fotografía del artículo de Feih e t al.[29]

La tesis desde un punto de vista general, permite comprender de una forma global el comportamiento de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado, y la interacción entre el refuerzo y el hormigón; luego desde el enfoque del material compuesto, trata a nivel microestructural el mecanismo de fallo por pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz, e incluye el análisis de su comportamiento no lineal en el campo de grandes deformaciones. En la figura 1-3 se presenta el esquema de la síntesis del contenido bajo los cuatro aspectos que fueron contemplados en el desarrollo de esta investigación.

Dado que estos aspectos son importantes para entender mejor el comportamiento de los materiales compuestos como refuerzo en las estructuras, tal y como lo evidencia la cantidad de literatura existente, se consideró conveniente dividir este documento en cuatro capítulos completamente independientes entre ellos. Cada capítulo ha sido escrito de una forma integral, donde cada uno tiene la suficiente información para definir en detalle el problema a ser resuelto, la propuesta para resolverlo, los ejemplos para validarla, y las conclusiones obtenidas del trabajo realizado. Esto permite que si hay mayor interés en un tema de este trabajo, se pueda leer el capítulo correspondiente sin necesidad de leer todo el documento.

Vista la tesis de una forma conjunta, estudia el comportamiento de los compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado en tres escalas: (i) Una global, en la que se analiza el comportamiento de estructuras rehabilitada y/o reparadas con FRP. (ii) Una elemental, donde se estudia la interacción del refuerzo con el hormigón y la influencia de los mecanismos de fallo generados por la pérdida de adherencia en la zona reforzada de elementos estructurales que se refuerzan a cortante y a flexión. (iii) Una microestructural, en la que se consideran el comportamiento no lineal de los componentes del compuesto, su interacción y los mecanismos de fallo que inducen la pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz. Asimismo, en la escala elemental y microestructural, se analiza el comportamiento de los materiales compuestos reforzados con fibras en el campo de grandes deformaciones.

A continuación se describe el contenido de los cuatro capítulos mencionados. Este documento finaliza con las conclusiones generales del trabajo realizado, y con la propuesta de las futuras líneas de investigación.

- **Capítulo 2 Formulación del comportamiento de los materiales compuestos mediante las teorías de mezclas**

Al inicio de este capítulo se plantean los aportes de las investigaciones realizadas a elementos estructurales rehabilitados, o, reparados con materiales compuestos reforzados con fibras largas (FRP) desde el campo experimental y numérico. Asimismo, se resaltan aspectos relevantes del refuerzo en el comportamiento de las estructuras de hormigón, que han sido considerados en las guías de diseño y construcción del FRP como refuerzo.

Luego, se muestran las estrategias de simulación numérica de materiales

compuestos que consideran su configuración interna: modelización multiescala, homogenización y teoría de mezclas.

Bajo el enfoque de la estrategia de la teoría de mezclas, se presentan las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo como herramientas del análisis numérico para simular los materiales compuestos en estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP. Estas teorías son gestores de modelos constitutivos que definen el comportamiento de los materiales compuestos por medio de la participación de los materiales simples que los componen, y de paso, permiten determinar su incidencia en el comportamiento global de los elementos estructurales reforzados. Además, como herramienta complementaria a las teorías de mezclas, se describe el modelo de mapeo de espacios propuesto por Oller et al. [18], el cual permite simular el comportamiento complejo de los materiales anisótropos a través de las formulaciones clásicas isotrópicas.

Finalmente, con el propósito de destacar las ventajas que tienen las teorías de mezclas en el análisis y diseño estructural de estructuras reforzadas con FRP, se simula como ejemplo un conjunto de pórticos rehabilitados con diferentes configuraciones del refuerzo en dos y en tres dimensiones, en los que se hizo un análisis no lineal incremental (pushover analysis). Asimismo para evidenciar las ventajas de la reparación y la rehabilitación de las estructuras de hormigón armado con FRP, bajo un ciclo carga-descarga-recarga, se analiza el comportamiento de un pórtico sin refuerzo, de dos pórticos reparados, y, de otro rehabilitado.

- **Capítulo 3 Análisis del comportamiento de la interfaz entre el compuesto laminado y el hormigón**

Inicialmente, en este capítulo se señalan los modos de fallo por la pérdida de adherencia en la zona interfacial. Luego, se hace referencia a las pruebas de adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, indicando los aportes de las diferentes investigaciones experimentales. También se detallan las diferentes metodologías de simulación numérica que han sido realizadas en los ensayos de adherencia para estudiar el comportamiento de la interfaz, además se indican las ventajas y limitaciones de cada una, así como sus contribuciones. Bajo los dos anteriores enfoques se hace un análisis de los factores que inciden en el comportamiento de la interfaz de la zona reforzada.

Después, se presenta la estrategia planteada para analizar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, utilizando las teorías de mezclas en la simulación numérica de los ensayos de adherencia. En la que además se considera el comportamiento no lineal de todos los materiales que componen la interfaz a través de los modelos constitutivos.

La validación de la estrategia se hace mediante la simulación numérica en tres dimensiones de cuatro ensayos de adherencia, en los que se analiza el comportamiento no lineal de la zona interfacial. En particular, se muestran las

ventajas que ofrece la teoría de mezclas serie/paralelo, como una herramienta del análisis numérico del comportamiento de los materiales compuestos y su influencia en el comportamiento de la interfaz de la zona reforzada.

- **Capítulo 4 Tratamiento numérico del deslizamiento fibra-matriz en compuestos reforzados**

Dado que el deslizamiento relativo fibra-matriz (DFM) es un fenómeno microestructural de los compuestos reforzados con fibras, en la parte inicial del capítulo se hace una descripción de los mecanismos de fallo que producen DFM, y de su influencia en la transferencia de esfuerzos entre las fibras y la matriz. Luego, se trataron las diferentes metodologías de simulación numérica propuestas para el análisis del DFM, en la que se mostraron los diferentes enfoques de la micromecánica y su aplicación a la estrategia de homogenización, así como se indicaron los modelos constitutivos propuestos que consideran el DFM en el análisis de materiales compuestos específicos.

Posteriormente, se planteo el modelo constitutivo propuesto con el fin de introducir el mecanismo de DFM a la formulación de las teorías de mezclas de materiales compuesto. Se muestra que el modelo corresponde a una herramienta generalizada que permite estudiar el DFM en distintos tipos de compuestos reforzados con fibras largas. Además, se indica la adaptación de los modelos constitutivos para definir el comportamiento de cada material componente limitando su capacidad acorde con el avance progresivo del DFM.

Por último, se muestra un ejemplo de un laminado en hormigón armado solicitado a tracción, en el que se aplica el modelo propuesto a cuatro macromodelos, para considerar el fenómeno de DFM ante diferentes tipos de comportamiento de las fibras, la matriz y la interfaz fibra-matriz. Asimismo, como medio de validación se compara el comportamiento obtenido en los macromodelos con los correspondientes micromodelos.

- **Capítulo 5 Tratamiento numérico de grandes deformaciones en compuestos reforzados**

Teniendo en cuenta que desde un punto de vista mecánico-numérico, se presentan tres tipos de no linealidades: constitutiva, por grandes deformaciones y/o por grandes desplazamientos [30], inicialmente se muestra la importancia de analizar los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones, así como su incidencia en el comportamiento de las estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP.

Después, se hace una breve reseña de los parámetros generales de la configuración material y espacial, para identificar la nomenclatura que se utilizará en las formulaciones del capítulo. Además, se indican diferentes modelos constitutivos que han sido formulados para materiales compuestos específicos en el campo de grandes deformaciones, identificando sus ventajas y

limitaciones.

Asimismo, se describen los aspectos relevantes del modelo de extensión de la teoría clásica al campo de grandes deformaciones propuesto por Car et al. [31], por ser la base del desarrollo del modelo que se propone para extender la formulación de la teoría serie/paralelo a las deformaciones finitas. También se muestra la generalización de teoría de mapeo de espacios al campo de grandes deformaciones planteada por Car et al. [11], ya que es una herramienta complementaria de las teorías de mezclas para considerar la anisotropía de los materiales componentes del compuesto en los cambios cinemáticos.

Debido a las ventajas que presenta la teoría serie/paralelo, se propone un modelo para adaptar su formulación al campo de grandes deformaciones. Se muestra que la adaptación es una herramienta más generalizada para analizar problemas no lineales en deformaciones finitas de los materiales compuestos reforzados con fibras largas. Asimismo, se señala que la extensión de la teoría en deformaciones finitas, permite estudiar estructuras en las que su configuración geométrica cambia drásticamente considerando la no linealidad cinemática y constitutiva de cada material componente del compuesto, y que además, intrínsecamente considera el fenómeno de reorientación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones.

Finalmente, se muestran dos ejemplos: uno en el que se analiza el comportamiento de una probeta solicitada a tracción para analizar el comportamiento del compuesto frente al proceso de alineación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones; y otro, en el que se analiza una probeta a flexo-compresión para mostrar el comportamiento no lineal cinemático y constitutivo de un material compuesto frente al cambio drástico de una configuración geométrica. Además, como medio de validación se contrastan los resultados de las simulaciones de los macromodelos con los obtenidos con los micromodelos respectivos.

Lo planteado en este documento se estudia sólo desde el enfoque del comportamiento mecánico de las estructuras y de los materiales compuestos, ya que lo correspondiente al comportamiento térmico se sale de los alcances del proyecto. Las simulaciones realizadas en los diferentes ejemplos de los capítulos fueron realizadas con el programa de elementos finitos PLCD [32]<sup>\*\*\*</sup>, en el cual se han implementado la teoría de mezclas clásica, la teoría de mezclas serie/paralelo y la teoría del mapeo de espacios para el estudio de los materiales compuestos reforzados con fibras. Como parte del desarrollo de esta tesis, fue necesario mejorar algunos los algoritmos de PLCD, e implementar las formulaciones propuestas, para lograr una mayor precisión en las simulaciones numérica de los materiales compuestos como refuerzo de las estructuras.

Se espera que las formulaciones y las estrategias propuestas en este documento, en

---

<sup>\*\*\*</sup> Programa de elementos finitos para el estudio de materiales compuestos del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería-CIMNE de la Universidad Politécnica de Cataluña.



su conjunto, sean una herramienta para la simulación numérica que permita optimizar el análisis integral de los materiales compuestos, y que a la vez sea un soporte en el diseño de los materiales compuestos para la rehabilitación y reparación de las estructuras.

Estas metodologías y formulaciones tienen la posibilidad de extenderse a otros tipos de materiales compuestos diferentes del hormigón armado y al FRP, previa validación y adaptación, pueden aplicarse a construcciones históricas o edificaciones que fueron construidas con otro tipo de materiales que se consideren materiales compuestos como la madera o la guadua, asimismo, pueden introducirse al campo de las estructuras construidas con nuevos materiales, ya que en la ingeniería estructural, al igual que en otros campos, se está investigando el comportamiento de nuevos materiales para construir estructuras más livianas y resistentes. Esto es apenas una muestra de que los materiales compuestos en las estructuras es un campo con gran proyección, por lo tanto, es un reto permanente el optimizar las estrategias simulación numérica.

## 1.5 Bibliografía del capítulo 1

- [1] S.S. Pendhari, T. Kant, M.Y. Desai. Application of polymer composites in civil construction: A general review. *Composite Structures* 84 (2) (2007) 114-124.
- [2] L.C. Hollaway. A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil infrastructure with reference to their important in-service properties. *Construction and Building Materials* 24 (12) (2010) 2419-2445.
- [3] M. Molina. Ductilidad en uniones de concreto reforzadas externamente con láminas de acero. Master en Estructuras. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. (2000).
- [4] C. Gomez, S. Oller, A. Barbat. Evaluación del daño sísmico de puentes de hormigón armado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 18 (2) (2002) 309-329
- [5] V.M. Karbhari. Building materials for the renewal of civil infrastructure. *Reinforced Plastics* 49 (1) (2005) 14-25.
- [6] L.V.D. Eindea, L. Zhao, F. Seible. Use of FRP composites in civil structural applications. *Construction and Building Materials* 17 (6-7) (2003) 389-403.
- [7] J. Rösler, H. Harders, M. Bäker. *Mechanical behaviour of engineering materials : metals, ceramics, polymers, and composites*. Springer N.Y. , USA, 2007.
- [8] I. M. Daniel, O. Ishai. *Engineering mechanics of composites materials*. Oxford University Press N.Y. , USA, 1994.
- [9] D. Hull, *An Introduction on Composite Materials*, Oxford Press, London, England, 1996
- [10] A. K. Kaw. *Mechanics of composite materials*. Taylor & Francis Group. 2nd ed. Boca Raton, USA, 2006.
- [11] E. Car, S. Oller, E. Oñate. *Tratamiento Numérico de Materiales Compuestos*. Monografía CIMNE No.57. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería - CIMNE, Barcelona, España, 2000.
- [12] L.C. Bank, *Composites for construction: structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons, N.J., USA, 2006.
- [13] M.W. Hyer. *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. Contributions on fibers, matrices, interfaces, and manufacturing by S.R. White. DEStech Publications, Inc. PA, USA, 2009.
- [14] E. J. Barbero *Introduction to composite materials design*. Taylor & Francis Group. 2nd

ed. Boca Raton, USA, 2011.

- [15] L. Mishnaevsky. Computational mesomechanics of composites : numerical analysis of the effect of microstructures of composites on their strength and damage resistance. John Wiley & sons. Chichester, UK, 2007.
- [16] S. Oller, J. Miquel, F. Zalamea. Composite material behaviour using a homogenization double scale method. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 131 (1) (2005) 65-79.
- [17] E. Car, F. Zalamea, S. Oller, J. Miquel, E. Oñate. Numerical simulation of fiber reinforced composites-Two procedures. *International Journal of Solids and Structures* 39 (7) (2002) 1967-1986.
- [18] S. Oller, S. Botello, J. Miquel, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations* 12 (3) (1995) 245-262.
- [19] E. Car, S. Oller, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185 (2-4) (2000) 245- 277
- [20] F. Rastellini. Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. (2006).
- [21] X. Martínez. Micro-mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Director: S. Oller (2008).
- [22] M. Molina. Estudio numérico de la adherencia de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado. Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Director: S. Oller y A. Barbat (2009).
- [23] R. Jones. *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis Group. 2nd ed. PA, USA, 1998.
- [24] M. Molina, S. Oller, A.H. Barbat, X. Martínez. Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 26 (2) (2010) 135-155.
- [25] V.M. Karbhari. Materials considerations in FRP rehabilitation of concrete structures. *Journal of Materials in Civil Engineering ASCE* 13 (2) (2001) 90-97.
- [26] L.C. Hollaway. A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil infrastructure with reference to their important in-service properties. *Construction and Building Materials* 24 (12) (2010) 2419-2445.
- [27] E. Car. Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Directores: S. Oller y E. Oñate (2000).
- [28] B. Zhu, T.X. Yu, X.M. Tao. Large deformation and slippage mechanism of plain woven composite in bias extension. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38 (8) (2007) 1821-1828.
- [29] S. Feih, K. Wonsyld, D. Minzari, P. Westermann, H. Lilholt. Testing procedure for the single fiberfragmentation test. Risø National Laboratory. Roskilde, Denmark, 2004.
- [30] S. Oller. *Dinámica No Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Ediciones UPC. Barcelona España. 2001.
- [31] E. Car, S. Oller, E. Oñate. A large strain plasticity for anisotropic materials-composite material application. *International Journal of Plasticity* 17 (11) (2001) 1437-1463.
- [32] CIMNE, "PLCD Manual: Código termomecánico no lineal de elementos finitos dirigido a estudiantes de Ph.D.", Universidad Politecnica de Cataluña, Barcelona, España, (1991-2011).

# Capítulo 2

---

## Formulación del comportamiento de los materiales compuestos mediante las teorías de mezclas

---

El comportamiento de las estructuras en hormigón armado reforzadas con polímeros reforzados con fibras largas (FRP) depende de múltiples parámetros, el grado de influencia de muchos de ellos no ha sido aún determinado, además esto dificulta que en la experimentación no se puedan medir todos estos parámetros de forma conjunta. De otra parte, la heterogeneidad y la anisotropía propias de los compuestos han conllevado a que no hayan métodos de análisis sencillos y efectivos que permitan determinar de una forma aproximada su comportamiento en las estructuras [1].

Como consecuencia, la optimización del uso del FRP en las estructuras se debe realizar de forma conjunta entre el campo experimental y el de la simulación numérica con elementos finitos. Obviamente, es necesario el desarrollo de nuevas herramientas y mejorar las existentes, en busca de que la simulación numérica tanto a nivel global como local represente de una forma más precisa el comportamiento real de las estructuras reforzadas con FRP, con la finalidad obtener información que no se puede medir en los ensayos.

Teniendo en cuenta que la simulación numérica de los materiales compuestos es un campo que esta en desarrollo, y que el uso de estos materiales en obras civiles es relativamente reciente, aún hay aspectos de los materiales compuestos, que por su complejidad, no han sido suficientemente estudiados para su diseño como refuerzo en estructuras de hormigón armado. En este capítulo se presentan las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo como herramientas del análisis numérico para simular los materiales compuestos en estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP, ya que como gestores de modelos constitutivos permiten representar el comportamiento de los materiales compuestos por medio de la participación de los materiales simples que los componen, y de paso, permiten determinar su incidencia en el comportamiento global de los elementos estructurales reforzados. Con el propósito de destacar las ventajas que tienen estas teorías en el análisis estructural de estructuras reforzadas con FRP, se simula como

ejemplo un conjunto de pórticos con diferentes configuraciones del refuerzo.

## 2.1 Estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP

El refuerzo como técnica de reparación corrige las deficiencias que originan la degradación de las propiedades mecánicas de los materiales estructurales, y que han conducido al deterioro de las estructuras incluso en algunos casos hasta la reducción de su funcionalidad. Asimismo el refuerzo como técnica de rehabilitación actualiza las estructuras que no cumplen con los requisitos necesarios para garantizar un buen comportamiento, bien sea por diseños inadecuados, por el cambio en las condiciones de servicio (tipo de uso o aumento de capacidad), por habilitar las estructuras a nuevas solicitaciones de carga (cargas de impacto, de viento, o sísmicas), o por la necesidad de adaptar las estructuras a los requerimientos de los códigos de diseño actuales [2; 3].

La rehabilitación y/o la reparación de las estructuras en hormigón armado se han realizado tradicionalmente con láminas de acero. No obstante, debido a la evidencia de la vulnerabilidad de las estructuras mostrada durante los sismos de Loma Prieta (1989), de Northridge (1994) y de Kobe (1995), se realizaron un gran número de investigaciones para mejorar las técnicas existentes y estudiar otros materiales como refuerzo con el fin de garantizar un adecuado funcionamiento de las estructuras existentes sin causar sobrecostos [4; 5].

En el área de las estructuras reforzadas enfocada al estudio de los materiales compuestos, se han realizado ensayos estáticos y dinámicos a diferentes escalas de vigas, pilares, uniones viga-pilar, muros y losas de entrepiso. Las investigaciones enfatizan que el uso de los materiales compuestos como refuerzo de estructuras es una buena técnica; sin embargo, advierten que se requieren adecuados conocimientos de diseño y de construcción para estandarizar metodologías que garanticen el apropiado uso de este tipo de materiales [1; 6].

### 2.1.1 Materiales compuestos como materiales de refuerzo

El uso de los materiales compuestos como materiales de refuerzo para estructuras existentes es una de las tecnologías que están teniendo mayor aplicación en la industria de la construcción debido a ventajas como las altas relaciones resistencia-peso y rigidez-peso, las cuales mejoran el comportamiento de la estructura sin que se altere su configuración geométrica. Asimismo, los materiales compuestos son livianos y no demandan cambios en la distribución del sistema estructural o en la cimentación. Además, en el caso de construcciones sometidas a ambientes especiales, presentan alta resistencia a la corrosión.

Los materiales compuestos más utilizados como refuerzo son los polímeros reforzados con fibras largas (FRP), predominando el uso de la fibra de vidrio (GFRP) y la fibra de carbono (CFRP); en menor proporción han sido utilizados los materiales compuestos con fibra de aramida (AFRP). En los FRP, las fibras largas

soportan las acciones mecánicas en una dirección predeterminada y la matriz actúa como medio para transferir las tensiones entre las fibras cercanas garantizando de paso la uniformidad de las deformaciones de las mismas [7].

Los compuestos FRP como refuerzo de las estructuras de hormigón armado comenzaron a utilizarse en la década de los 80 aproximadamente al mismo tiempo en Europa (particularmente en Suiza) y en Japón, siguiéndoles posteriormente Estados Unidos y Canadá [8]. Inicialmente se enfocaron en investigar el refuerzo a flexión en vigas, luego se orientaron hacia el refuerzo en pilares con tejidos y láminas de FRP, y, posteriormente las investigaciones del refuerzo con FRP se extendieron a otros tipos de elementos estructurales, como losas, muros y uniones viga-pilar.

Debido al creciente uso del FRP en la rehabilitación y reparación de estructuras de hormigón, en algunos países se han desarrollado guías de diseño y construcción del FRP como refuerzo para edificios y puentes (ACI440.2R-08 [9] en Estados Unidos, JSCE-1997 [10] en Japón, Standard S806-02 [11] y CAN/CSA-S6-00 [12] en Canadá, FPI-CEB-2001 [13] en la Unión Europea y CNR DT 200/2004 [14] en Italia). Sin embargo, frente a la mayor incertidumbre del comportamiento de los sistemas reforzados mediante FRP con respecto al comportamiento de los sistemas reforzados con láminas acero, las guías de diseño, además de los factores de reducción de resistencia, aplican otros factores de reducción a la contribución del FRP dependiendo de la sollicitación [15].

A pesar de que los compuestos tienen una resistencia más alta que la resistencia el acero, y que están conformados por fibras, que como las de carbono, tienen un módulo de elasticidad similar o superior al del acero, su uso está limitado por la tecnología del anclaje y la adherencia, debido a que antes que el FRP alcancen su límite elástico, se produce la delaminación y/o la pérdida de adherencia con el hormigón [16]. Por ello, generalmente el FRP en las estructuras de hormigón presenta un comportamiento elástico [17]. Esta limitación ha conducido a que las diferentes guías de diseño para el refuerzo de elementos de hormigón armado con FRP adopten distintas hipótesis, por ejemplo, no se considera la contribución del FRP ante cargas de compresión para evitar problemas de pandeo en las fibras [18], mientras que a flexión y a cortante se limita el nivel de deformaciones en el FRP para prevenir su delaminación o despegue [19].

Es evidente que para mejorar el uso de los materiales compuestos conformados por polímeros reforzados con fibras largas (FRP), como una alternativa de refuerzo en las estructuras que requieren ser reforzadas, es importante buscar nuevas herramientas que permitan estudiar el comportamiento de los materiales compuestos para optimizar su diseño tanto en elementos estructurales con cierto nivel de daño (reparación) como en elementos que requieren tener un mejor comportamiento dentro de la estructura (rehabilitación). A continuación se hace una breve reseña de las investigaciones realizadas desde el campo experimental y la simulación numérica de elementos estructurales en hormigón armado reforzados externamente con FRP.

### 2.1.2 Refuerzo en vigas de hormigón armado

Tanto en edificios como en puentes, las vigas se han reparado con FRP, debido a su degradación por la corrosión de la armadura y/o la fisuración del hormigón. En otros casos, ha sido necesario rehabilitar las vigas con el fin de incrementar su capacidad tanto a flexión como a cortante.

Como resultado del gran número de investigaciones experimentales realizadas, las vigas son los elementos en los que más se ha utilizado el FRP como refuerzo. Las investigaciones han mostrado que el comportamiento de las vigas reforzadas con FRP depende de varios factores, entre ellos pueden señalarse: las propiedades mecánicas del hormigón, del acero y del FRP, la configuración geométrica del FRP (ancho, longitud, número de capas y dirección de la fibra), la configuración de la armadura en la viga, las condiciones de carga y el nivel de daño [2].

Los diferentes test de laboratorio realizados en vigas de hormigón reforzadas con FRP han evidenciado que se dificulta desarrollar completamente la resistencia del refuerzo por el fallo prematuro de las vigas debido al despegue del laminado y/o la delaminación [20; 21]. De igual forma, se ha encontrado que aunque el FRP como refuerzo aumenta la capacidad de carga última de las vigas, generalmente se reduce su ductilidad, porque el fallo está gobernado por la pérdida de adherencia entre el laminado y el hormigón, o por la rotura del refuerzo [3]. En la figura 2-1, se muestran distintos tipos de fallo presentados en las vigas reforzadas con FRP.

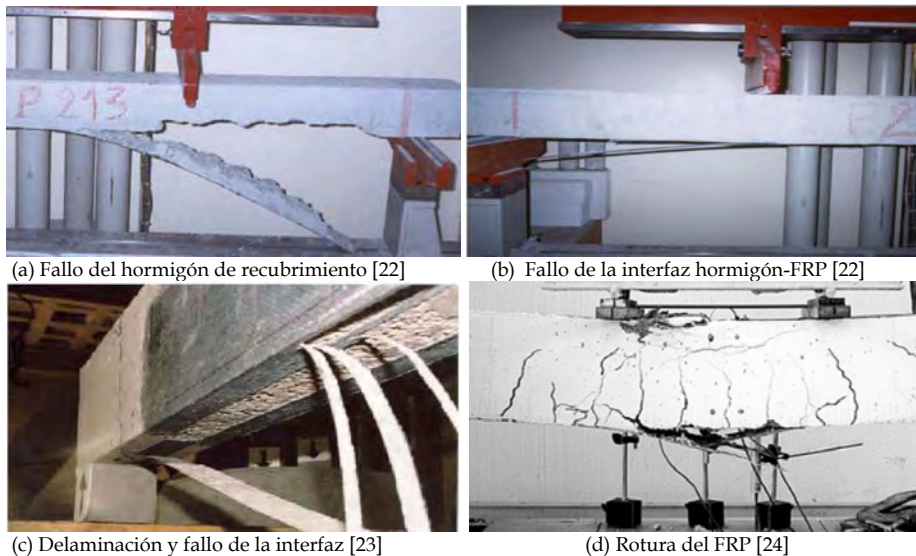


FIGURA 2-1 ALGUNOS FALLOS EN LAS VIGAS REFORZADAS CON FRP

En las investigaciones se muestra que la eficiencia del refuerzo en los elementos sometidos a flexión y cortante depende en gran medida de la integridad del sistema reforzado para que se garantice la interacción entre el FRP y el hormigón;

por lo tanto, la eficiencia del refuerzo esta directamente relacionada con la adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP [25; 26].

Yang et al. [27], Li et al. [28], Niu y Wu [29], Lu et al. [30], Camata et al. [31], y Kotynia et al. [23] forman parte del grupo de investigadores que además de estudiar experimentalmente el comportamiento de las vigas reforzadas sometidas a flexión y a cortante, han utilizado la simulación numérica como medio de complemento para estudiar el comportamiento complejo de los compuestos y su interacción con el hormigón. La mayoría de estos estudios se han enfocado en los mecanismos de fallo en la interfaz hormigón-laminado.

El refuerzo con FRP ha mostrado que es una buena alternativa para aumentar la capacidad a flexión y a cortante de las vigas, sin incrementar su rigidez y su peso. Sin embargo, al estar el fallo de las vigas reforzadas con FRP influenciado por fenómenos como la delaminación y la pérdida de adherencia en la interfaz hormigón-epoxi-FRP, aún se requiere mayor investigación para garantizar que se desarrolle la máxima capacidad de los sistemas reforzados.

### 2.1.3 Refuerzo en pilares de hormigón armado

El FRP se aplica como refuerzo a pilares con deficiencias en la ductilidad a flexión y/o con insuficiente capacidad a cortante. En estos casos el FRP induce tensiones de confinamiento que restringen la dilatación del hormigón para aumentar la capacidad de carga y de deformación del elemento, además de generar un mecanismo que mejore la resistencia a cortante [26]. El incremento del uso del encamisado de los pilares con FRP en lugar del encamisado con acero se debe a que su colocación es más rápida, es liviano y es adaptable a cualquier geometría que tenga el pilar; además, su alta resistencia a la corrosión reduce el mantenimiento y fomenta la durabilidad del hormigón.

El comportamiento de los pilares reforzados con FRP, depende de múltiples factores entre ellos pueden enumerarse: la configuración del pilar (geometría y armado), la configuración del encamisado (espesor, orientación de la fibra, número de capas y tipo de encamisado), las propiedades mecánicas de los materiales (acero, hormigón y FRP) y el estado de daño del hormigón y del acero.

Es importante considerar los siguientes aspectos del confinamiento lateral dado por el FRP [32]:(i) El encamisado por su esbeltez, no aumenta la rigidez lateral del pilar; el confinamiento del hormigón dado por el FRP sólo mitiga los fallos locales prematuros y aumenta su capacidad a soportar mayores deformaciones. (ii) El FRP es susceptible a la rotura en los puntos localizados donde hay alta demanda de deformación; por ello, el encamisado con FRP no evita el pandeo de la armadura longitudinal, pero disminuye la probabilidad de que suceda. (iii) El encamisado reduce la fisuración del hormigón por corte en la zona donde se forman las rótulas plásticas, conduciendo a que las fisuras ocurran por flexión cerca a la base; no obstante, al incrementarse la demanda, el pilar puede colapsar si su armadura longitudinal no cuenta con la suficiente longitud de anclaje o si presenta pandeo.

En la figura 2-2 se muestran algunos fallos en pilares reforzados con FRP.

Se han hecho diversos ensayos experimentales, en los que se han estudiado diferentes parámetros que influyen en el comportamiento de pilares reforzados con FRP, tales como: la resistencia y el módulo de elasticidad del hormigón confinado bajo cargas axiales [33], la resistencia y la ductilidad de los pilares reforzados con FRP cargas excéntricas [34], el número de capas de FRP y su influencia en la ductilidad y resistencia en pilares reforzados con FRP [35], el uso de fibras diferentes a las tradicionales [36], entre otros. Todos los casos indican que el FRP incrementa la resistencia y la ductilidad de los pilares y que el fallo del hormigón confinado depende de la rotura del FRP.

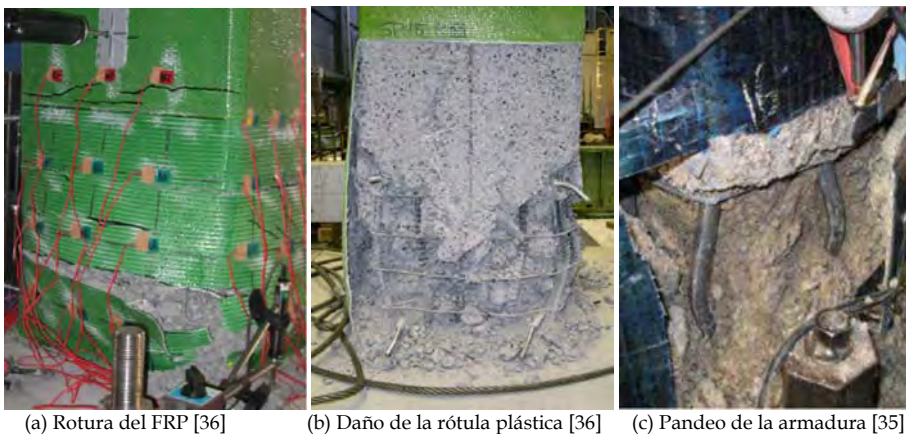


FIGURA 2-2 ALGUNOS FALLOS EN LOS PILARES REFORZADOS CON FRP

Los ensayos sobre pilares reforzados con diferentes tipos de FRP han mostrado que la forma de la sección transversal de los pilares incide en el grado de confinamiento producido por el refuerzo, es así como señalan que el confinamiento es alto en secciones circulares, mientras que es menor en secciones rectangulares o cuadradas [37; 38]; asimismo se tiene que el confinamiento dado por el FRP en las esquinas de este tipo de pilares induce el incremento de ductilidad [39; 40]. Recientemente se ha estudiado el comportamiento de pilares huecos reparados [41] y rehabilitados [42] con FRP, en los cuales también ha sido observado un incremento de ductilidad y resistencia; sin embargo, aún no se ha evaluado la eficiencia del confinamiento para este tipo de secciones.

Algunos de los ensayos de laboratorio se han correlacionado con simulaciones numéricas. Por ejemplo: Parvin y Wang [34; 43], estudiaron respectivamente, pilares rectangulares y circulares reforzados con FRP bajo carga axial y lateral, considerando en el análisis numérico la no linealidad material y geométrica para simular la degradación de la rigidez; sus resultados indican que con el refuerzo en la base de los pilares mejora la resistencia y la ductilidad, además que se retrasa la pérdida de la rigidez de los pilares. Asimismo, Parvin y Jamwal [44], mostraron que el espesor del refuerzo y su orientación con respecto a la carga axial inciden en el incremento de la resistencia a la compresión y de la ductilidad de los pilares.



Una de las dificultades en la simulación numérica para el análisis de los pilares reforzados está en simular el confinamiento dado por el acero transversal y por el FRP. Por ello, en algunas investigaciones se han propuesto modelos constitutivos o elementos no lineales para simular el hormigón confinado mediante los elementos finitos; es así como se han formulado modelos de plasticidad no asociada tipo Drucker-Prager para simular el hormigón confinado por FRP, entre ellos Mirmiran et al. [45] logran aproximar la respuesta axial del hormigón confinado hasta alcanzar la resistencia máxima; asimismo, Karabinis et al. [46] se centran en estudiar la contribución de los laminados para prevenir el pandeo elástico de las barras de acero cuando el espaciamiento entre flejes es inadecuado. Sin embargo, en estas investigaciones, no se puede representar la degradación de rigidez y la pérdida de resistencia del elemento reforzado ya que no involucran una regla de ablandamiento que dependa de la presión de confinamiento, asimismo, modelizan el FRP como un material homogéneo y elástico, sin tener en cuenta que el refuerzo puede estar sujeto a fenómenos locales como la rotura de las fibras, y que los efectos del fallo en el hormigón y/o en el acero inciden en el comportamiento mecánico del FRP. Esto muestra que pese a que los estudios realizados se han hecho aportes importantes, en la simulación numérica aún se deben desarrollar nuevas herramientas para simular de una forma más precisa el comportamiento de los pilares reforzados con FRP.

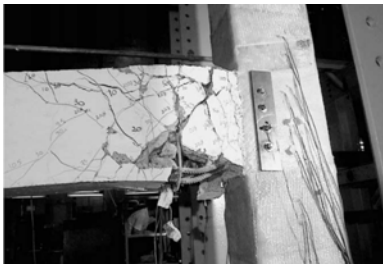
#### 2.1.4 Refuerzo en uniones viga-pilar de hormigón armado

El comportamiento de las uniones viga-pilar en una estructura tipo pórtico es un factor importante que influye en la capacidad de resistir cargas sísmicas y otras cargas laterales. En los diferentes sismos se ha identificado que el colapso de estructuras de hormigón armado y de acero se ha debido principalmente a los fallos en las uniones, en particular, en estructuras construidas antes de que se incluyeran los requisitos de diseño sísmico dentro de las normas de diseño. Estas estructuras tienen una baja capacidad de resistencia lateral, debido a que carecen de detalles que desarrollen ductilidad; por ejemplo, tienen uniones sin o con escasa armadura transversal, insuficiente longitud de anclaje de la armadura de las vigas y sistemas de viga fuerte-pilar débil, factores que generan en las uniones o cerca de ellas, inapropiados mecanismos de fallo [4].

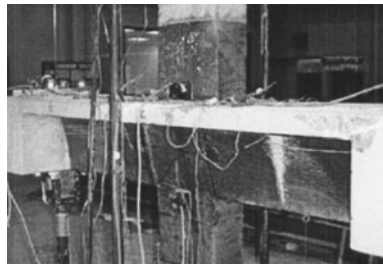
En las uniones viga-pilar deterioradas o con deficiencias de diseño han sido aplicadas varias técnicas de rehabilitación utilizando láminas de acero y FRP; sin embargo, la dificultad del refuerzo está en proveer un confinamiento efectivo teniendo en cuenta la complejidad del comportamiento de las uniones [2]. Dentro de los principales problemas que se presentan en el refuerzo con FRP está la pérdida de adherencia entre el refuerzo y el hormigón, y la concentración de tensiones en las esquinas de las uniones donde se integran las vigas con el pilar ya que pueden formarse rótulas plásticas que generen el fallo súbito de la unión. En la figura 2-3 se muestran algunos tipos de fallos que se presentan en las uniones viga-pilar reforzadas.

La selección de una alternativa de refuerzo se debe hacer acorde con el aumento de capacidad que se requiera en la unión, donde es imprescindible revisar la resistencia de las vigas y pilares adyacentes frente a este incremento; asimismo, es necesario tomar las medidas de refuerzo necesarias para evitar tanto el fallo frágil como la formación de rótulas plásticas prematuras. Todo ello, permite garantizar la efectividad del refuerzo y mejorar comportamiento global de la estructura.

Dependiendo del comportamiento esperado de las estructuras existentes y del objetivo de la rehabilitación y/o reparación en las uniones, pueden utilizarse diferentes configuraciones de refuerzo. Entre ellas están: el refuerzo a cortante en la unión [47; 48; 49; 50; 51]; el refuerzo en las esquinas de la unión colocando el laminado en la cara superior y/o inferior de las vigas y en el lado adyacente de la pilar [52; 53; 54]; el encamisado con FRP en la unión y en el pilar [47; 48; 50; 55; 56]; asimismo, cuando es necesario, en la zona adyacente a las uniones, las vigas se refuerzan a flexión [50; 53; 56; 57] y a cortante [49; 51; 56; 58; 59; 60], incluso en otros casos las encamisán [50; 61; 62; 63;64] para mejorar su comportamiento ante cargas cíclicas. Según la configuración del refuerzo es posible incrementar la capacidad a cortante y/o a flexión de la unión, aumentar su resistencia al giro con el fin de reducir la probabilidad de deslizamiento de la armadura de las vigas, evitar o retrasar el fallo por cortante, confinar el hormigón para mejorar la capacidad a soportar grandes deformaciones, e incrementar la ductilidad.



(a) Rótula plástica en el extremo de la viga [47]



(b) Rotura del FRP [51]



(c) Rótula plástica en el extremo donde finaliza el refuerzo en la viga [64]

FIGURA 2-3 ALGUNOS FALLOS EN LAS UNIONES VIGA-PILAR REFORZADAS CON FRP

Las uniones reforzadas con FRP han sido estudiadas en menor medida que las vigas y los pilares. La mayoría de los estudios han sido enfocados en las uniones externas, tal vez por ser éste el tipo de unión en el que han ocurrido más fallos. Además la rehabilitación y la reparación en las uniones se han investigado más a

nivel experimental, mientras que en el campo de la simulación numérica sólo ha sido considerado la rehabilitación.

El comportamiento a cortante de las uniones viga-pilar reforzadas con FRP se ha estudiado con mayor interés debido a que el fallo por cortante en las uniones durante los sismos ha sido una de las principales causas del colapso de las estructuras porticadas. Los estudios existentes que examinan el efecto del cortante en las uniones exteriores señalan que el FRP mejora su capacidad a cortante, hay mejor control en el daño estructural y concluyen que la adherencia entre el laminado y el hormigón es un factor importante para garantizar la efectividad del refuerzo [47; 48; 56; 58; 61; 64]. Aunque en menor proporción, también se ha estudiado el comportamiento a cortante de las uniones internas reforzadas con FRP [51; 54; 55; 60; 63], donde el refuerzo aumenta la capacidad y la ductilidad de la unión. De acuerdo con estas investigaciones, también en las uniones, la eficiencia del refuerzo con FRP depende de la adherencia entre el FRP y el hormigón, incluso en algunas de ellas [49; 51; 55; 58] recomiendan mejorar la adherencia con anclajes mecánicos para evitar el deslizamiento del FRP con el hormigón.

Otras investigaciones han estudiado la flexión en las uniones reforzadas con FRP. Entre ellas para uniones externas puede destacarse: la de Granata y Parvin [52] que muestra que el FRP mejora la capacidad a flexión, también identificaron que se debe prestar especial atención a la relación de espesor del encamisado con respecto al hormigón de recubrimiento para evitar su fallo; el estudio de Ghorabah y El-Amoury [53] donde recomiendan que al reforzar las uniones con FRP además de evitar el fallo frágil por corte en la unión, se debe garantizar la integridad del hormigón en las vigas para evitar un fallo prematuro. De igual modo para uniones internas puede señalarse la de Pantelides et al. [59] que indica que el FRP reduce la propagación del daño y la pérdida de rigidez, además advierte que con el refuerzo se retrasa el deslizamiento de la armadura pero no se evita.

Hay pocos estudios en los que se han realizado simulaciones numéricas de uniones reforzadas con FRP; uno de ellos es el de Parvin y de Granata [65] donde se muestra que las tensiones de despegue del lamido son altas en las esquinas donde se intersectan la viga con el pilar, por ello recomiendan en la zona reforzada recubrir con tejidos los extremos tanto del pilar como de la viga para evitar el despegue del laminado. Otro es el de Parvin y Wu [61], en el cual se estableció que el incremento de la resistencia lateral en las uniones depende de la dirección en la que se coloque cada una de las capas del refuerzo, lo que concuerda con los estudios experimentales [58; 63].

En general se tiene que al reparar o rehabilitar en los elementos estructurales de hormigón armado con FRP se aumenta la resistencia y la ductilidad global de la estructura, no obstante, en la reparación es necesario considerar las limitaciones que puede ocasionar el daño preexistente en el hormigón y en el acero. Se evidencia que para optimizar el diseño estructural de los materiales compuestos como refuerzo, en el análisis del comportamiento de estos materiales, es necesario identificar la forma de participación de los diferentes componentes del compuesto

y su interacción con los otros materiales de la estructura como el hormigón armado; de igual forma, se requiere el análisis del comportamiento global de la estructura, en el que se establezca la incidencia de los materiales compuestos como parte integral de los elementos reforzados [66]. Un procedimiento eficiente para realizar estos análisis es a través de la simulación numérica con elementos finitos.

## 2.2 Estrategias de simulación numérica de materiales compuestos

Los materiales compuestos están conformados por diferentes tipos de sustancias inorgánicas u orgánicas, cada uno de estos materiales componentes con su ley constitutiva condiciona el comportamiento del conjunto en función de la proporción volumétrica y de la distribución morfológica que tengan dentro del compuesto [67].

En la actualidad gran parte de las investigaciones acerca del comportamiento de estos materiales corresponden al campo experimental, sin embargo, su estudio por medio de los elementos finitos esta en desarrollo y presenta algunas restricciones, incluso en recientes simulaciones de elementos reforzados con FRP, se representa el comportamiento constitutivo del material compuesto como el de un material homogéneo, sin tener en cuenta el aporte de sus componentes.

Uno de los principales retos que tiene la simulación numérica es introducir las relaciones entre los materiales componentes del compuesto en el análisis de una estructura, pero puede requerir grandes recursos computacionales al integrar la geometría y las condiciones de borde de la estructura dada en una macroescala con el comportamiento de los componentes definido a una microescala. Con el objetivo de solucionar esta limitación se han propuesto diferentes estrategias para simular el comportamiento de los materiales compuestos, teniendo en cuenta su configuración interna, entre ellas las más relevantes son: la modelización a multiescala, la homogenización y la teoría de mezclas.

### 2.2.1 Modelización a multiescala

El comportamiento del material es modelado en diferentes escalas, el de la microestructura (micromodelo) y el de la estructura (macromodelo), con la técnica de multiescala se integran los análisis de la microestructura del material compuesto con los de la estructura [68].

Bajo la teoría de la multiescala existen diferentes técnicas para relacionar los micromodelos con los macromodelos con el fin de analizar el comportamiento de materiales compuestos con microestructuras sencillas (dos escalas) y con microestructuras complejas de varios niveles (múltiples escalas). Las técnicas más simples relacionan unilateralmente las escalas y las más sofisticadas plantean el análisis simultáneo entre varios niveles de escala, dentro de estas técnicas están:

- **Técnica de la submodelación** [68]: Es la técnica más simple para analizar un

compuesto con dos o más escalas. Se toma una región como un submodelo del dominio considerado y se analiza teniendo en cuenta las características de la microestructura dada por los materiales componentes. Las condiciones homogéneas de frontera del submodelo son determinadas con base en el análisis de los elementos finitos que simulan la estructura (macromodelo). La técnica de los subdominios utiliza relaciones unilaterales entre la escala superior y la inferior, es decir, que las escalas no están acopladas. Es así como el macromodelo determina las condiciones de frontera del micromodelo, mientras que las condiciones del micromodelo no influyen en el macromodelo; alternativamente el micromodelo establece la ley constitutiva para el macromodelo, sin estar condicionado por la respuesta del macromodelo.

Zohdi y Powell [69] utilizan esta técnica para analizar los tejidos tomando tres escalas, la de la fibra, la del hilo y la del tejido compuesto por los hilos organizados en dos direcciones; un aspecto importante de esta metodología es que al conocer las propiedades del menor subdominio en este caso la fibra, las propiedades de los subdominios de las escalas superiores pueden determinarse sin introducir parámetros fenomenológicos.

- **Técnica de descomposición del dominio:** En esta técnica el macromodelo es descompuesto en varios subdominios conectados entre sí por elementos de interfaz, donde los subdominios están desacoplados permitiendo que se puedan resolver de forma independiente y simultáneamente. Esto conlleva a que la técnica de descomposición utilice el cálculo en paralelo para resolver eficientemente una estructura compuesta, siempre que se establezcan en forma apropiada las condiciones de las interfaces entre los subdominios [70].

Las técnicas de descomposición han sido aplicadas y mejoradas por diferentes investigadores, dentro de las más recientes están la de Lloberas-Valls et al. [71] quienes adaptan la estrategia de seleccionar los subdominios no lineales y reducir el número de operaciones en los subdominios que permanecen en el rango elástico para hacer más eficiente el cálculo computacional.

- **Técnica de superposición:** En esta técnica por superposición de los subdominios logran incorporar mallados locales en las regiones de altos gradientes del mallado global (macromodelo) que representa la estructura. El punto crítico de esta técnica es la selección de la interfaz global local entre los mallados. La técnica depende de la descomposición jerárquica del espacio de solución que separa los efectos locales de los globales, y, de la aplicación de las condiciones de compatibilidad dadas por las condiciones homogéneas de borde prescritas en la interfaz global local [72].

Dentro de este grupo están los métodos adaptativos, que son estrategias que mejoran la calidad de la solución incorporando mallados locales específicos en el mallado global, entre ellos se encuentran [67; 68]: los *s-methods* que aumentan la aproximación de la resolución mediante la superposición de mallados locales con elementos de orden jerárquico superior al de los

elementos del mallado global, los *h-methods* que mejoran la convergencia incorporando en el mallado global mallados locales refinados, los *p-methods* que aceleran la convergencia por el incremento del grado polinomial en las funciones de aproximación, y, los *r-methods* que mejoran la aproximación relocalizando de los nodos del mallado.

Otra técnica de superposición es el método de mallado compuesto (the composite grid method) formulado para analizar el comportamiento de compuestos laminados. Este método descompone un sistema híbrido en un problema jerárquico global local, que esta conformado por un problema global y por un sistema local indefinido. Por ejemplo, Fish et al. [73] utilizan en la modelización elementos sólidos 3D para las zonas en que se requiere detallar la resolución local mientras que en el resto de regiones aplican elementos tipo shell para analizar laminados y cascarones

Los métodos multi-grid también están dentro de las técnicas de superposición, con estos métodos se busca aproximar la solución del problema o acelerar su convergencia mediante la solución iterativa de la estructura discretizada en diferentes escalas [67].

En la figura 2-4 se muestra un esquema de la modelización a multiescala, en la que hay análisis iterativos entre dos escalas consecutivas para la resolución de una estructura conformada por materiales compuestos:

- El análisis de la estructura (macroescala): la estructura se analiza acorde con las condiciones del problema a estudiar, donde el comportamiento mecánico del compuesto es determinado por las características de la micromecánica incorporadas en el micromodelo.
- El análisis de la microestructura (microescala): El modelo de escala inferior esta sujeto a las condiciones de borde impuestas por el macromodelo, en el se considera la microestructura con las correspondientes propiedades mecánicas de los materiales componentes del material compuesto.

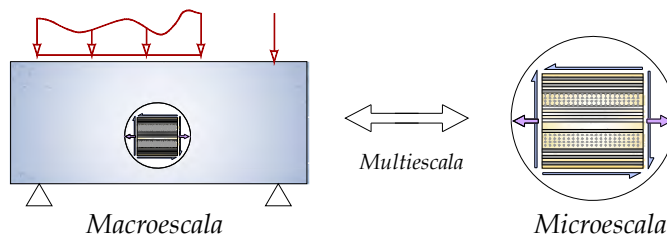


FIGURA 2-4 ESQUEMA DE MODELIZACIÓN A MULTIESCALA EN UNA ESTRUCTURA DE UN COMPUESTO

Los métodos de multiescala han sido aplicados para analizar el comportamiento de estructuras de materiales compuestos, principalmente laminados y tejidos, pero se han usado poco en el estudio de estructuras reforzadas. Una de las investigaciones que han aplicado la multiescala es la de Ash et al. [74], donde utilizan un modelo no lineal de elementos finitos "*p-methods*" para analizar el comportamiento de vigas y losas de hormigón armado reforzadas con láminas de FRP o acero, y

obtienen una buena aproximación con respecto al comportamiento experimental.

### 2.2.2 Homogenización

Dentro de la mecánica de medios continuos esta estrategia requiere del análisis desde dos escalas diferentes: una escala macroscópica (global) en la que se determina el comportamiento de la estructura y una escala microscópica (local) en la que se obtiene el comportamiento del compuesto partiendo de la respuesta de sus componentes [75].

La teoría de la homogenización surgió por la dificultad que hay de determinar las propiedades efectivas de los compuestos. Su desarrollo matemático permite definir las propiedades del material homogenizado directamente de las propiedades de sus componentes y de su microestructura [76]. Es así como el material compuesto a una macroescala es considerado como un medio homogéneo equivalente y sus propiedades efectivas son definidas con base en el análisis de la microestructura y las propiedades mecánicas de los materiales componentes [68].

Bajo estos conceptos se encuentran diferentes formulaciones de esta teoría. Teniendo en cuenta que la teoría de homogenización supone una configuración periódica del material compuesto para relacionar las dos escalas, de acuerdo con Hori y Nemat-Nasser [77] hay dos estrategias numéricas para homogenizar:

- **Métodos del campo promedio** (Métodos de los promedios): En este caso los métodos de homogenización aplican el método de promedios planteado por Hill [78] y Mandel [79]. Partiendo del hecho que las propiedades mecánicas medidas en experimentos son relaciones promedio de muestras microscópicas heterogéneas o microcampos, en la modelización estos métodos proponen definir macrocampos como volúmenes promedio de los correspondientes microcampos donde sus propiedades efectivas son determinadas como relaciones promediadas entre los microcampos [77].

De acuerdo con lo anterior, los métodos de campo promedio deben definir elementos de volumen que sean estadísticamente representativos para las microestructuras del material compuesto, denominados RVE (Representative volumen elements), donde su dimensión debe ser tal que: (i) sea considerado como un punto en el material equivalente homogéneo, (ii) contemple un número suficiente de micro-homogeneidades del material compuesto, y, (iii) permita que el análisis micromecánico sea computacionalmente viable [68].

Una de las limitaciones de esta estrategia esta en que una vez la relación tensión deformación en el RVE no es estable, el macromodelo no queda planteado adecuadamente, debido a que no se cumplen la leyes constitutivas que lo rigen [80]. Por ello algunos investigadores han propuesto introducir herramientas complementarias como las teorías del gradiente de deformación, el concepto de los Eigen-deformaciones, y otros han planteado diferentes alternativas como la de Gosh et al. [81] en la que proponen adicionar un nivel

de análisis definido desde la micromecánica que represente la microestructura del compuesto utilizando una celda finita de Vornoi (VCFEM), incluso para introducir el deslizamiento fibra-matriz Gosh et al. [82] representan en forma explícita la microestructura local de la fibra y la matriz en el VCFEM; o la de Song y Belytschko [80] donde plantean agregar discontinuidades a los RVE de la escala más pequeña para evitar inestabilidades en los modelos de escalas superiores.

Este tipo de metodología ha sido aplicada al análisis de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por algunos investigadores, entre ellos Avril et al. [83], evalúan el comportamiento de una viga reparada con FRP a partir de los cálculos numéricos aplicados a los RVE, los cuales introducen la apertura de las grietas, el deslizamiento de las barras de acero y la pérdida de adherencia entre el laminado y el hormigón en el macromodelo.

- **Métodos de homogenización asintótica:** Estos métodos establecen relaciones matemáticas entre el material homogéneo equivalente y las microestructuras, donde las propiedades efectivas del material homogéneo equivalente resultan de estas relaciones, sin depender de mediciones físicas específicas. Con este tipo de métodos se debe definir la unidad estructural de la microescala denominada celda unitaria o célula, a través de la cual se modelizan geometrías microestructurales de los compuestos con sus correspondientes componentes para predecir su respuesta.

El modelo de homogenización lineal de los materiales compuestos fue desarrollado por Sánchez [84] y por Bensoussan et al. [85]. Posteriormente Suquet [86] extiende el concepto de homogenización al campo no lineal, generalizando el método de promedios y formulando un método de convergencia para materiales periódicos [7]. La principal dificultad de esta técnica en el campo no lineal está en el acoplamiento de las relaciones constitutivas de las macro y micro escalas. Desde un punto de vista práctico resulta poco viable que por cada incremento de carga, a cada punto de integración de la estructura le corresponda resolver un problema de una celda bajo un estado promedio que es impuesto por el campo macroscópico [87].

Con el propósito de resolver esta dificultad para desacoplar las variables globales de las locales se han presentado diferentes aportaciones, dentro de ellas se pueden destacar: Drovack [88] propone la transformación del campo de análisis (TFA Transformation Field Analysis) para reducir el número de variables internas globales asumiendo que los campos microscópicos de las variables internas corresponden a segmentos uniformes; Fish et al. [87] utilizan expansiones asintóticas en el que partiendo del TFA derivan un esquema de aproximación para dos fases, la del refuerzo (fibras) y la de la matriz, aunque presenta buenos resultados, en simulaciones no lineales con altos gradientes requiere la división de cada fase en varios subdominios para obtener una aproximación satisfactoria del comportamiento del compuesto, lo que conlleva a que el número de variables internas sea prohibitivamente alto [76]. Michel y



Suquet [76] adaptaron el TFA proponiendo la transformación no uniforme de las deformaciones para evitar la división de las fases en subdominios.

En el contexto de la mecánica de medios continuos, considerando los conceptos de la periodicidad de la microestructura, algunos investigadores han combinado la homogenización con el cálculo en paralelo para analizar la microestructura del compuesto en la malla de la estructura a través de los puntos de Gauss (PG), entre estos esta Zalamea [89], quien define los tensores de tensiones y deformaciones homogenizados del compuesto en las celdas unitarias, posteriormente, con base en esta propuesta, Oller et al. [75] plantean una metodología para resolver un problema acoplado de dos escalas, en el que la ecuación constitutiva del material compuesto es la solución para definir las condiciones de contorno en cada celda unitaria; Chaboche y Feyel [90] bajo el concepto de localización periódica definen las condiciones de contorno de cada celda unitaria con el tensor de deformaciones del PG correspondiente del macromodelo, y determinan el tensor de tensiones del PG como el promedio de los tensores de la celda unitaria. Este tipo de metodología ha sido aplicado en investigaciones a estructuras de materiales compuestos y de mampostería.

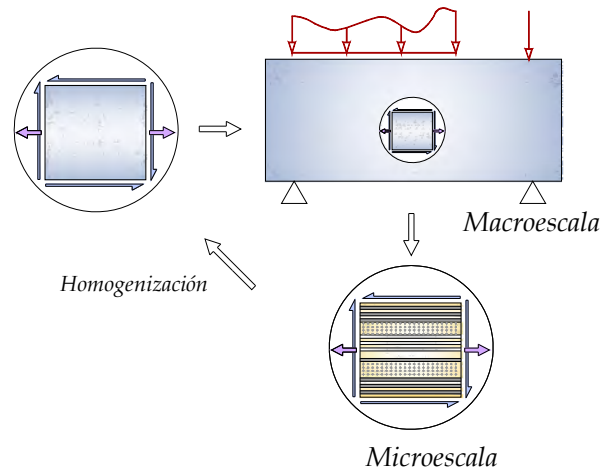


FIGURA 2-5 ESQUEMA DE HOMOGENIZACIÓN EN UNA ESTRUCTURA DE UN COMPUESTO

En la figura 2-5 se muestra un esquema de la teoría de homogenización para estudiar el comportamiento de las estructuras conformadas por materiales compuestos, que básicamente consiste en cuatro etapas iterativas hasta que se alcanza el acoplamiento de las variables internas en las dos escalas:

- El análisis de la estructura (macroescala): la estructura se analiza acorde con las condiciones de borde que le han sido impuestas asumiendo que esta compuesta por un material homogéneo equivalente, cuyas propiedades son definidas en la homogenización.
- Localización (transición de la macroescala a la microescala): Las condiciones de borde de la microestructura son determinadas con base en el tensor de deformación macroscópico, teniendo en cuenta la geometría, las leyes

- constitutivas globales, entre otros [68].
- El análisis de la microestructura (microescala): se debe analizar la celda unitaria, o, el volumen del elemento representativo RVE, de acuerdo con las condiciones de borde impuestas en la microescala por el macromodelo.
  - Homogenización (transición de la microescala a la macroescala): las variables internas macroscópicas son determinadas con base en el análisis de microscópico de la celda unitaria o del RVE.

La homogenización tiene la ventaja que permiten modelar la microestructura de los materiales compuestos de elevada complejidad, sin embargo esto conduce a elevar el costo computacional, tanto en procesamiento de cálculo como en manejo de información [67].

### 2.2.3 Teoría de mezclas

Con esta técnica se considera que el comportamiento de cada componente define el comportamiento global del compuesto. Se basa en la mecánica del continuo local bajo el principio de interacción de las sustancias que componen el material, suponiendo que en el volumen infinitesimal del compuesto participan en conjunto todos sus componentes, asimismo que cada uno de ellos contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica [91].

Debido a las diferencias en el comportamiento entre los componentes, a su interacción y a la forma en como están distribuidos en el compuesto, los materiales compuestos tienen un comportamiento no lineal aún para bajas tensiones, además tienen una elevada anisotropía, esto conduce a que su modelización numérica sea compleja [67]. No obstante, a través de las teorías de mezclas de los materiales compuestos se logra involucrar el comportamiento de cada uno de los componentes del compuesto en el análisis de una estructura.

En la figura 2-6 se muestra un esquema de la teoría de mezclas aplicada a los elementos finitos para el análisis de estructuras conformadas por compuestos:

- El análisis de la estructura (macroescala): la estructura se analiza acorde con las condiciones de borde que le han sido impuestas asumiendo que esta compuesta por un material homogéneo, cuya respuesta es definida por el análisis realizado con la teoría de mezclas.
- El análisis de la microescala: Se analizan cada uno de los *nc* materiales componentes bajo las condiciones de borde dadas por el macromodelo.
- Teoría de mezclas (transición de la microescala a la macroescala): De acuerdo con las condiciones de compatibilidad y equilibrio impuestas por la teoría de mezclas aplicada se determina la respuesta del compuesto considerando el aporte de cada componente.

Cabe anotar que con la estrategia de teoría de mezclas en el análisis a microescala se considera la composición del material compuesto, pero no la microgeometría con la que están dispuestos sus componentes. Esto conlleva a que se defina el

comportamiento de cada material componente de una forma fenomenológica, pero con costos computacionales bastante menores a los de las otras dos estrategias.

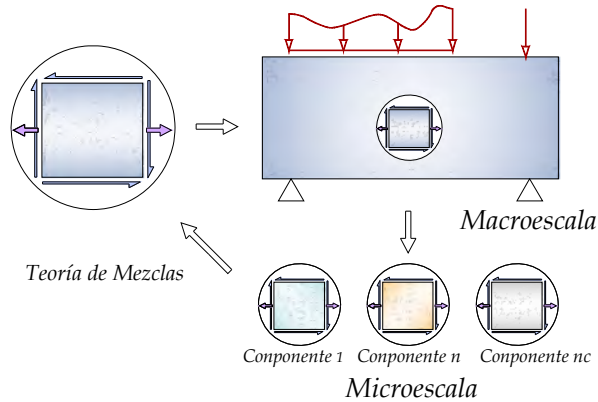


FIGURA 2-6 ESQUEMA DE LA TEORÍA DE MEZCLAS EN UNA ESTRUCTURA DE UN COMPUESTO

La teoría de mezclas inicialmente fue estudiada por Trusdell y Topin [92] en 1960, sus estudios establecieron las bases de trabajos posteriores como Green y Naghdi [93], Ortiz y Popov [94], Oller et al. [95], Car et al. [96] y Rastellini et al. [97].

Dados los avances que se tienen en computación actualmente, la resolución de problemas en estructuras conformadas por materiales compuestos a través de las teorías de simulación numérica es un camino que se está explorando por sus evidentes potencialidades. En el campo de la ingeniería estructural, el analizar estructuras conformadas o reforzadas por materiales compuestos, teniendo en cuenta las propiedades de sus materiales componentes motiva el permanente desarrollo que se está llevando a cabo en la simulación numérica con los métodos multiescala, la homogenización y las teorías de mezclas, siendo asimismo, un reto en el campo numérico para mejorar sus herramientas.

Este estudio se enfoca en el lineamiento de la Teoría de Mezclas dando continuidad a la línea de investigación dirigida por el profesor Sergio Oller, en la que ha participado E. Car [98], F. Rastellini [99] y X. Martínez [100]. Los análisis y desarrollos se hacen bajo los conceptos de la teoría de mezclas clásica y de la teoría de mezclas serie/paralelo recientemente propuesta por Rastellini [99].

### 2.3 Anisotropía en los materiales compuestos

Debido a las diferencias en el comportamiento entre los componentes y a la forma en la que están distribuidas las fibras y la matriz, los materiales compuestos tienen una elevada anisotropía, además de un comportamiento no lineal [67]. La elevada anisotropía también conduce a que su simulación por el método de los elementos finitos sea compleja. No obstante, a través de las teorías de mezclas complementadas con el modelo de mapeo de espacios propuesto por Oller et al.

[95] y su generalización para el campo de grandes deformaciones planteada por Car et al. [7], se logra involucrar cada uno de los componentes del compuesto en el análisis de una estructura, donde la anisotropía del compuesto es el resultado de la participación de cada uno de los materiales que lo componen con su respectivo comportamiento (isótropo, ortótropo o anisótropo). Para mayor detalle de la teoría del mapeo de espacios se puede consultar Oller et al. [95], Car et al. [7], Oller et al. [101], y Oller [67].

### 2.3.1 Fundamentos del mapeo de espacios para materiales anisótropos

Oller et al. [95] propusieron la teoría de mapeo de espacios para simular el comportamiento complejo de los materiales anisótropos, se basan en el concepto de mapeo de los tensores de tensiones y de deformaciones desde un espacio anisótropo real  $\Omega$  a un espacio ficticio isótropo  $\bar{\Omega}$ , donde se establece una relación biunívoca entre el comportamiento del material anisótropo real y el comportamiento de un material isótropo ficticio cualquiera.

Con la teoría de mapeo de espacios, como se muestra en la figura 2-7, el comportamiento de un material anisótropo es expresado en términos de los espacios ficticios isótropos de tensiones  $\bar{\sigma}$  y deformaciones  $\bar{\epsilon}$ , que son transformaciones lineales de los espacios reales anisótropos de tensiones  $\sigma$  y deformaciones  $\epsilon$  [91]. La relación entre los espacios se aplica a través de dos tensores simétricos de cuarto orden ( $\mathbb{A}^\sigma, \mathbb{A}^\epsilon$ ), en los cuales se encuentra la información de la anisotropía del material [101].

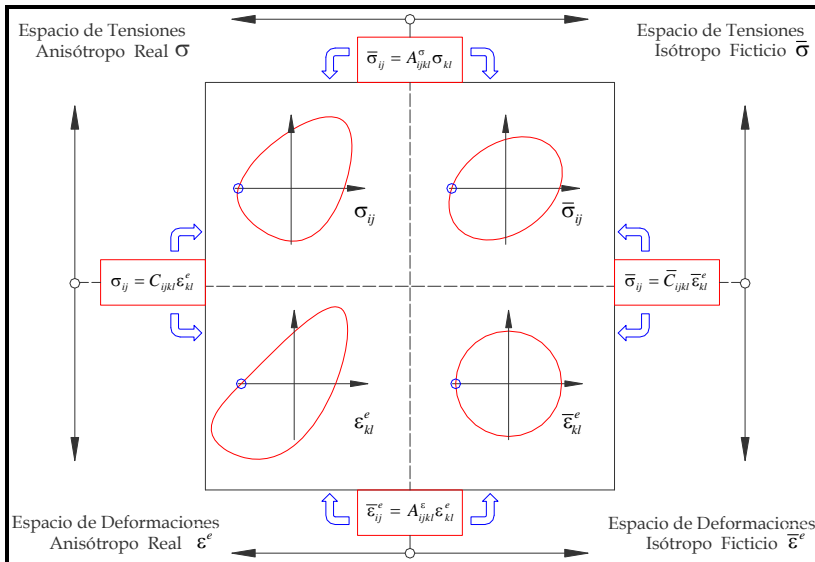


FIGURA 2-7 RELACIÓN ENTRE LOS ESPACIOS ISÓTROPICO FICTICIO Y ANISÓTROPICO REAL EN PEQUEÑAS DEFORMACIONES [101]

Esta formulación se basó en las ideas propuestas por Betten [102; 103] y utiliza el

concepto de *tensor de tensiones mapeado* que permite el transporte en forma lineal del tensor de tensiones de un espacio real a un espacio ficticio. Cabe anotar que al hacer la transformación lineal se garantiza convexidad de la función de fluencia y del potencial plástico, cumpliéndose con ello la segunda ley de la termodinámica, sin embargo, la propuesta de solo hacer el mapeo de tensiones parte de la hipótesis, que las deformaciones elásticas son idénticas en ambos espacios, excluyendo el análisis del comportamiento materiales no proporcionales como los materiales compuestos [7]. Por ello, Oller et al. [95] para evitar esta limitación, con la teoría del mapeo de espacios aparte del transporte en el espacio de tensiones, proponen el transporte en el espacio de deformaciones.

La teoría de mapeo de espacios es una herramienta numérica consistente que permite establecer el comportamiento de materiales anisótropos a través de las formulaciones clásicas isótropas [101]. Básicamente, el análisis sobre cada punto de Gauss consiste en transportar el tensor predictor de tensión y el tensor de deformación de un material anisótropo de un espacio real anisótropo a un espacio ficticio isótropo; luego, en el espacio ficticio isótropo se realiza la integración de la ecuación constitutiva isótropa para obtener el nuevo estado tensional y el tensor constitutivo tangente correspondiente; una vez calculados los tensores resultantes, los tensores de tensión, de deformación y constitutivo tangente, se transportan al espacio real anisótropo [98]. Es así como la utilización de esta teoría de transformación de espacios permite obtener una metodología para la definición de modelos anisótropos de carácter generalizado [7].

### 2.3.2 Análisis de materiales anisótropos en pequeñas deformaciones

En la teoría de mapeo de espacios se pueden aplicar las siguientes transformaciones entre el espacio anisótropo real  $\Omega$  y el espacio isótropo ficticio  $\bar{\Omega}$ :

- *Definición del tensor de transformación del espacio de tensiones*

La transformación biunívoca del tensor de tensiones de un espacio anisótropo real a un espacio isótropo ficticio y viceversa se hace a través de una transformación lineal de las tensiones utilizando el tensor de transformación de cuarto orden  $\mathbb{A}^\sigma$  [104].

$$(2:1) \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \mathbb{A}^\sigma : \boldsymbol{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \bar{\sigma}_{ij} = A_{ijkl}^\sigma \sigma_{kl}$$

El operador tensorial al tener que conservar la simetría del tensor de Cauchy en los espacios anisótropo real y ficticio isótropo  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  respectivamente, debe cumplir con las siguientes simetrías

$$A_{ijkl}^\sigma = A_{jikl}^\sigma = A_{jilk}^\sigma = A_{klji}^\sigma$$

- *Tensor de transformación del espacio de deformaciones*

La transformación del tensor de deformación del espacio anisótropo real  $\boldsymbol{\varepsilon}$  a un tensor de deformación de un espacio isótropo ficticio  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  y viceversa se hace a través del tensor de transformación de deformaciones  $\mathbb{A}^\varepsilon$  [101].

$$(2:2) \quad \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \equiv \mathbb{A}^\varepsilon : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = A_{ijkl}^\varepsilon \varepsilon_{kl}$$

- *Transformación del tensor constitutivo*

Las relación entre el tensor constitutivo del material anisótropo real  $\mathbb{C}$  y el tensor constitutivo del material isótropo ficticio  $\bar{\mathbb{C}}$  queda expresado como [95]:

$$(2.3) \quad \mathbb{C} = (\mathbb{A}^\sigma)^{-1} : \bar{\mathbb{C}} : \mathbb{A}^\varepsilon \Rightarrow C_{ijkl} = (A_{mnij}^\sigma)^{-1} \bar{C}_{mhrs} A_{rskl}^\varepsilon$$

Con las teorías de mezclas, la anisotropía del compuesto se define de forma intrínseca, al involucrar cada componente con su respectivo comportamiento (anisótropo, ortótropo, o isótropo) y al controlar la interacción entre ellos con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad. El mapeo de espacios es una herramienta complementaria para las teorías de mezclas, ya que permite analizar el comportamiento de cada material componente anisótropo del compuesto utilizando las formulaciones clásicas para materiales isótropos [107].

## 2.4 Teoría de mezclas clásica

La teoría de mezclas clásica surgió como una solución a la limitación que presentaban los modelos constitutivos inicialmente en el estudio de los materiales compuestos, por considerarlos desde un punto de vista macroscópico como un material homogéneo, sin tener en cuenta el aporte de sus componentes [67]. A continuación se explica la teoría de mezclas clásica con el fin que su formulación no sea ajena en el desarrollo de los capítulos posteriores. La teoría de mezclas clásica se encuentra documentada en Oller et al. [105], Car et al. [7] y Oller [67].

### 2.4.1 Fundamentos de la teoría de mezclas clásica

La teoría de mezclas clásica inicialmente estudiada por Trusdell y Topin [92], se basa en la mecánica del continuo local bajo el principio de interacción de las sustancias que componen el material, suponiendo las siguientes hipótesis [105]:

- En cada volumen infinitesimal del compuesto participan en conjunto todos sus componentes
- Cada material componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica.
- Todos los componentes poseen la misma deformación (condición de isodeformación).
- El volumen ocupado de cada material componente es inferior al volumen total del compuesto.

### 2.4.2 Formulación de la teoría de mezclas clásica

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones*

La condición de isodeformación establece que en ausencia de difusión atómica se cumple con la siguiente condición de compatibilidad en el compuesto y sus materiales componentes bajo el campo de pequeñas deformaciones [7]:

$$(2.4) \quad {}^c \varepsilon_{ij} \equiv {}^1 \varepsilon_{ij} = \dots = {}^n \varepsilon_{ij} = \dots = {}^{nc} \varepsilon_{ij}$$

donde  $\varepsilon$  es el tensor de deformación,  $c$ ,  $n$  y  $nc$  representan el compuesto, el  $n$ -ésimo componente, y el último componente del compuesto.

- *Función de energía libre*

Con base en el planteamiento de Oller et al. [105], la energía libre de Helmholtz  $\Psi$  por unidad de volumen del compuesto se puede plantear como:

$$(2:5) \quad {}^c m^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}^e, \theta, {}^c \alpha, {}^c \beta) = {}^c m^c \Psi(\underbrace{{}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^c \alpha, {}^c \beta}_{c\xi}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n \Psi(\underbrace{{}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^n \varepsilon_{ij}^p, {}^n \alpha, {}^n \beta}_{n\xi})$$

en la cual  $c$ ,  $n$  y  $nc$  representan el compuesto, el  $n$ -ésimo componente, y el número de componentes del compuesto;  $\varepsilon^e$ ,  $\varepsilon^p$ ,  $m$  y  $\theta$  corresponden a los tensores de deformación elástica e inelástica, a la masa y a la temperatura;  $\alpha$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\beta$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\xi$  es el grupo total de variables internas. Los grupos de variables son aplicables de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente del compuesto.

La contribución de cada  $n$ -ésimo componente se tiene en cuenta a través del factor de participación volumétrica  ${}^n k$ , el cual relaciona los volúmenes infinitesimales del  $n$ -ésimo componente  $d^n V$  y del compuesto  $d^c V$ . Además para garantizar el principio de conservación de masa, se debe cumplir que [96]:

$$(2:6) \quad {}^n k = \frac{d^n V}{d^c V} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{nc} {}^n k = 1$$

Para un problema isotérmico se tiene que la energía libre de Helmholtz  $\Psi$  es

$$(2:7) \quad {}^c m^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}^e, {}^c \alpha, {}^c \beta) = {}^c m^c \Psi(\underbrace{{}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \alpha, {}^c \beta}_{c\xi}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n \Psi(\underbrace{{}^c \varepsilon_{ij}, {}^n \varepsilon_{ij}^p, {}^n \alpha, {}^n \beta}_{n\xi})$$

La disipación de energía  $\Xi$  por unidad de volumen [106]

$$(2:8) \quad \Xi = \underbrace{{}^c \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}}_{\Xi_m} - {}^c \dot{\Psi} \geq 0$$

siendo  $\Xi_m$  la disipación mecánica y  $\sigma$  el tensor de tensiones. Substituyendo la variación de la energía libre  $\dot{\Psi}$  en la expresión de disipación mecánica  $\Xi_m$ :

$$(2:9) \quad \Xi_m = \left( {}^c \sigma_{ij} - {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) {}^c \dot{\varepsilon}_{ij} - {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi}{\partial \xi} {}^c \dot{\xi} \geq 0$$

$\dot{\varepsilon}$  y  $\dot{\xi}$  corresponden respectivamente a la variación temporal de las deformaciones y del grupo de variables internas.

Al aplicar el método de Coleman a la desigualdad de Clasius-Duhem, se deduce que el estado de tensiones del compuesto corresponde a la sumatoria de la contribución proporcional del tensor de tensiones de cada componente [67]:

$$(2:10) \quad {}^c \sigma_{ij} = {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \sigma_{ij}$$

donde las tensiones de cada componente se obtienen de las ecuaciones constitutivas correspondientes.

De acuerdo con Oller et al. [105], considerando la expresión ( 2:10) en ( 2:9), la disipación mecánica  $\Xi_m$  queda expresada como:

$$(2:11) \quad \Xi_m = {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi}{\partial \xi} {}^c \dot{\xi} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial \xi} {}^n \dot{\xi} \leq 0$$

- *Ecuación constitutiva*

A través de la expresión ( 2:10) se obtiene la ecuación constitutiva secante [7]:

$$(2:12) \quad {}^c \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^n \varepsilon_{kl}^e = {}^c C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl}^e$$

El tensor constitutivo tangente corresponde a:

$$(2:13) \quad {}^c C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = {}^c m \frac{\partial^2 \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^c \xi)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl}$$

Por ejemplo, en un problema de elasto-plasticidad con la condición de compatibilidad ( 2:4) se tiene que la deformación en cada componente esta dada por:

$$(2:14) \quad {}^c \varepsilon_{ij} = {}^n \varepsilon_{ij} = {}^n \varepsilon_{ij}^e + {}^n \varepsilon_{ij}^p \quad \Rightarrow \quad {}^n \varepsilon_{ij}^e = {}^c \varepsilon_{ij} - {}^n \varepsilon_{ij}^p \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

donde  ${}^n \varepsilon^e$ ,  ${}^n \varepsilon^p$  es el tensor de deformación elástica y plástica de cada componente. Introduciendo esta expresión en ( 2:12) se obtiene que la deformación plástica del compuesto equivale a:

$$(2:15) \quad {}^c C_{ijkl} ({}^c \varepsilon_{kl} - {}^c \varepsilon_{kl}^p) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} ({}^c \varepsilon_{kl} - {}^n \varepsilon_{kl}^p) \quad \Rightarrow \quad {}^c \varepsilon_{ij}^p = ({}^c C_{ijkl})^{-1} \left[ \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^n \varepsilon_{kl}^p \right]$$

### 2.4.3 Algoritmo general de la teoría de mezclas clásica

En la figura 2-8 se indica el proceso del análisis numérico de un punto de Gauss para determinar el tensor de tensiones de cada componente y del compuesto.

La teoría de mezclas clásica presenta una restricción para su uso en los diferentes tipos materiales compuestos ya que parte de la hipótesis que los componentes que están en paralelo y que coexisten en un punto tienen la misma deformación, por lo tanto se puede utilizar en el campo lineal, y con algunas adaptaciones se puede aplicar en casos no lineales, siempre que no se consideren significativos los movimientos relativos entre los componentes del compuesto [67].

### 2.4.4 Algoritmo de la teoría de mezclas clásica para compuestos anisótropos

Oller et al. [104] y Car et al. [96] por la versatilidad del concepto de mapeo de espacios lo introdujeron en la teoría mezclas clásica para modelar el comportamiento anisótropo de los compuestos como resultado de la combinación



de cada uno de los comportamientos de sus componentes, donde cada material que conforma el compuesto conserva su ley constitutiva isotropa o anisótropa y condiciona el comportamiento global del compuesto. En la figura 2-9 se presenta el esquema de modificación de la teoría de mezclas clásica introduciendo la el mapeo de espacios para el análisis de un compuesto.

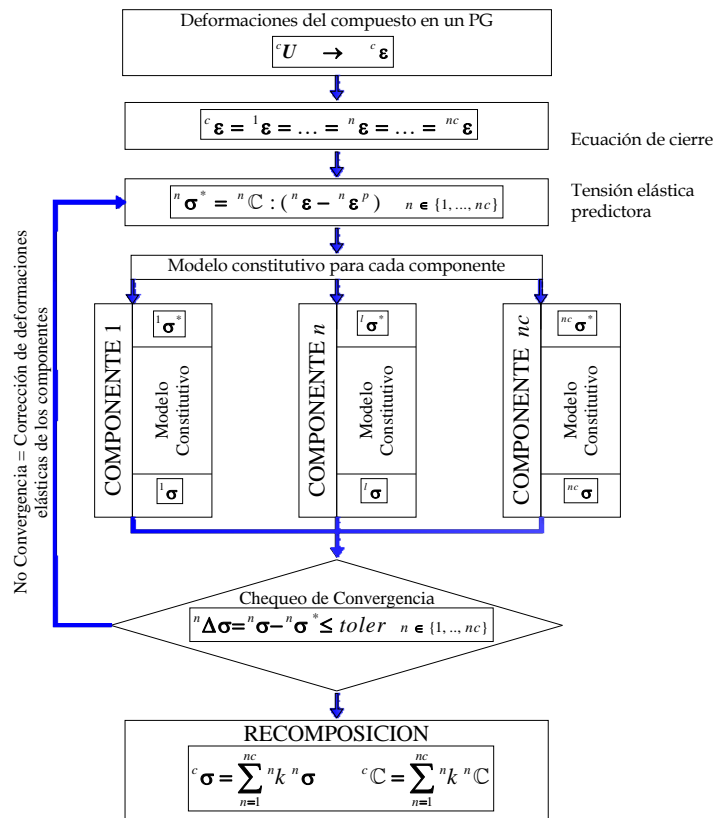


FIGURA 2-8 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS CLÁSICA DE UN COMPUESTO [107]

### 2.5 Teoría de mezclas serie/paralelo

La teoría serie/paralelo como gestor de modelos constitutivos permite que se analicen los materiales componentes que presenten cualquier tipo de no linealidad como el daño y la plasticidad. Esta formulación plantea combinar el comportamiento de los materiales componentes con el fin de obtener la respuesta del material compuesto, por ello la anisotropía global de los materiales compuestos se considera como el resultado de la interacción de los componentes. Adicionalmente, al igual que la teoría de mezclas clásica, el mapeo de espacios se aplica como complemento en la teoría serie/paralelo, para considerar la anisotropía propia de cada componente utilizando en el cálculo computacional los modelos constitutivos planteados para materiales isotropos.

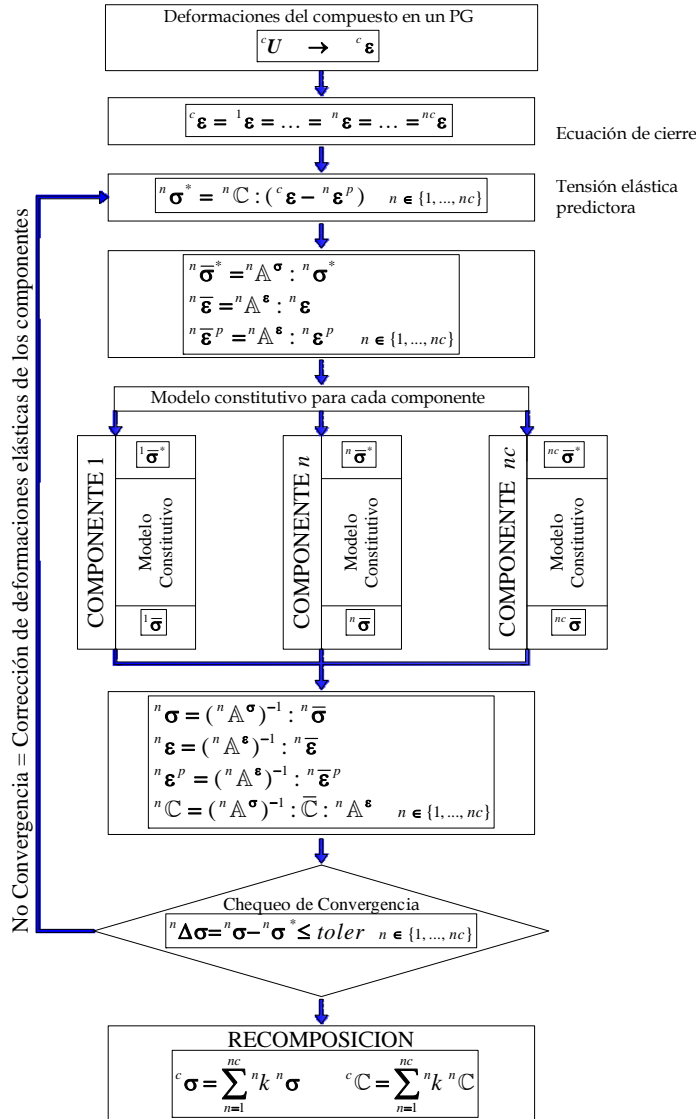


FIGURA 2-9 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA MODIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS EN PEQUEÑAS DEFORMACIONES CON MATERIALES COMPONENTES ANISÓTROPAS [107]

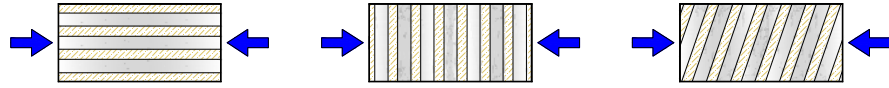
La teoría de mezclas serie/paralelo se encuentra documentada en Rastellini [99], Rastellini et al. [97] y Martínez et al. [108]

### 2.5.1 Fundamentos de la teoría de mezclas serie/paralelo

En la teoría serie/paralelo propuesta por Rastellini se considera que en una dirección particular los componentes se comportan en paralelo y en las otras direcciones en serie. En el caso de los polímeros reforzados externamente con

fibras (FRP) la dirección en paralelo corresponde a la dirección de la fibra y en el caso del hormigón armado a la dirección de la armadura. La teoría se basa en las siguientes hipótesis [99]:

- En cada volumen infinitesimal del compuesto participan en conjunto todos sus componentes, es decir que la distribución de los componentes es homogénea.
- Los componentes tienen una misma deformación en la dirección en paralelo (condición de isodeformación). Los componentes tienen una misma tensión en la dirección en serie (condición de isotensión).
- La adherencia entre los componentes es perfecta.
- La contribución de los componentes en la respuesta del compuesto es proporcional a su participación volumétrica de cada material componente.
- El volumen ocupado de cada material componente es inferior al volumen total del compuesto.



( a ) Distribución en paralelo      ( b ) Distribución en serie      ( c ) Distribución serie/paralelo

FIGURA 2-10 COMPORTAMIENTO ESQUEMÁTICO SERIE/PARALELO DEL COMPUESTO [ 108]

### 2.5.2 Formulación de la teoría de mezclas serie/paralelo

- *Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores deformación y de tensión*

El tensor deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se descompone una parte en serie  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  y otra en paralelo  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$  por medio de los tensores de proyección ( $\mathbb{P}_P, \mathbb{P}_S$ ) de cuarto orden en paralelo y en serie respectivamente [97]:

$$(2:16) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_S$$

$$(2:17) \quad \boldsymbol{\varepsilon}_P = \mathbb{P}_P : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_S = \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\varepsilon}$$

El tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  también se separa en sus componentes en serie  $\boldsymbol{\sigma}_S$  y en paralelo  $\boldsymbol{\sigma}_P$ :

$$(2:18) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \boldsymbol{\sigma}_S$$

$$(2:19) \quad \boldsymbol{\sigma}_P = \mathbb{P}_P : \boldsymbol{\sigma} \quad \boldsymbol{\sigma}_S = \mathbb{P}_S : \boldsymbol{\sigma}$$

Donde los tensores de proyección de cuarto orden se hallan a través del tensor de proyección paralelo de segundo orden  $N_P$ ,

$$(2:20) \quad \mathbb{P}_P = N_P \otimes N_P \quad \mathbb{P}_S = \mathbb{I} - \mathbb{P}_P$$

Teniendo que  $N_P$  es función del vector unidad  $e_1$  que indica la dirección del comportamiento en paralelo es decir la dirección de las fibras:

$$(2:21) \quad N_P = e_1 \otimes e_1$$

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto*

Con el fin de minimizar el costo computacional, al tener el compuesto constituido por varios componentes, la implementación numérica de la teoría fue desarrollada para descomponer el compuesto  $c$  en un determinado número de capas  $ncap$ , tal que cada capa  $t$  este conformada por una matriz  $m$  y las fibras  $f$ .

En lo referente a la ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto, existe una condición de isodeformación entre las capas y el compuesto. Se parte de la hipótesis que las capas que coexisten en un punto están en paralelo y tienen la misma deformación; por tanto, el tensor de deformación total del compuesto  ${}^c\boldsymbol{\varepsilon}$  es equivalente a los tensores de deformación total de las capas que lo componen [109].

$$(2:22) \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon} \equiv {}^c_1\boldsymbol{\varepsilon} = \dots = {}^c_j\boldsymbol{\varepsilon} = \dots = {}^c_{ncap}\boldsymbol{\varepsilon}$$

- *Ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad en las capas del compuesto*

Consecuentemente con las hipótesis enunciadas, en cada capa del compuesto  $t$  se plantean las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones [110]:

- Comportamiento en paralelo

$$(2:23) \quad {}^c_t\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^m_t\boldsymbol{\varepsilon}_p = {}^f_t\boldsymbol{\varepsilon}_p$$

$$(2:24) \quad {}^c_t\boldsymbol{\sigma}_p = {}^m_t k {}^m_t\boldsymbol{\sigma}_p + {}^f_t k {}^f_t\boldsymbol{\sigma}_p$$

- Comportamiento en serie

$$(2:25) \quad {}^c_t\boldsymbol{\sigma}_s = {}^m_t\boldsymbol{\sigma}_s = {}^f_t\boldsymbol{\sigma}_s$$

$$(2:26) \quad {}^c_t\boldsymbol{\varepsilon}_s = {}^m_t k {}^m_t\boldsymbol{\varepsilon}_s + {}^f_t k {}^f_t\boldsymbol{\varepsilon}_s$$

Para garantizar el principio de conservación de masa en cada capa, los porcentajes de participación volumétrica de la matriz y las fibras ( ${}^m_t k$ ,  ${}^f_t k$ ) deben cumplir que:

$$(2:27) \quad {}^n_t k = \frac{d^n_t V}{d^c_t V} \quad n = \{m, f\} \quad \Rightarrow \quad {}^m_t k + {}^f_t k = 1$$

${}^n_t k$  relaciona el volumen infinitesimal componente de la capa  $t$   $d^n_t V$  con el volumen infinitesimal de la capa  $t$  material compuesto  $d^c_t V$ .

- *Ecuación constitutiva de los materiales de las capas del compuesto*

Como la implementación de la teoría serie/paralelo se realiza a nivel constitutivo a partir del estado de deformación en un punto de Gauss, una vez que se obtiene la deformación del compuesto  ${}^c\boldsymbol{\varepsilon}$ , se calcula el estado tenso-deformacional de cada componente cumpliendo con las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad, para luego hallar el estado de tensiones del compuesto.

El estado de tensiones de cada componente se determina mediante la ecuación constitutiva que rige su comportamiento de cada uno, por ejemplo, si un componente tiene comportamiento elasto-plástico, la ecuación corresponde a:

$$(2:28) \quad {}^n_t\boldsymbol{\sigma} = {}^n_t\mathbb{C} : {}^n_t\boldsymbol{\varepsilon}^e = {}^n_t\mathbb{C} : ({}^n_t\boldsymbol{\varepsilon} - {}^n_t\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad n = \{m, f\}$$

${}^n_t\mathbb{C}$  es el tensor constitutivo de cada componente,  $n$  es la matriz  $m$  o a las fibras  $f$  de

la capa  $t$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  son los tensores de deformación total, elástico y plástico.

La descomposición del operador tangente inducida por la separación del comportamiento en serie y paralelo de cada componente es establecida como [108]:

$$(2:29) \quad \begin{aligned} {}^n\mathbb{C} &= \begin{bmatrix} {}^n\mathbb{C}_{PP} & {}^n\mathbb{C}_{PS} \\ {}^n\mathbb{C}_{SP} & {}^n\mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix} & n = \{m, f\} \\ {}^n\mathbb{C}_{PP} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_P}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \mathbb{P}_P : {}^n\mathbb{C} : \mathbb{P}_P & {}^n\mathbb{C}_{PS} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_P}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S} = \mathbb{P}_P : {}^n\mathbb{C} : \mathbb{P}_S \\ {}^n\mathbb{C}_{SP} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_S}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \mathbb{P}_S : {}^n\mathbb{C} : \mathbb{P}_P & {}^n\mathbb{C}_{SS} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_S}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S} = \mathbb{P}_S : {}^n\mathbb{C} : \mathbb{P}_S \end{aligned}$$

- *Ecuación de equilibrio en la capa del compuesto*

La ecuación ( 2:25) de equilibrio de tensiones, se verifica calculando la tensión residual de la capa  ${}^c\Delta\boldsymbol{\sigma}_S$  y revisando que sea menor a una tolerancia *Toler* como se muestra en la ecuación ( 2:30), cuando la tensión residual es mayor, la predicción de la deformación de la matriz se corrige en forma iterativa [100].

$$(2:30) \quad {}^c\Delta\boldsymbol{\sigma}_S = {}^m\boldsymbol{\sigma}_S - {}^f\boldsymbol{\sigma}_S \leq Toler$$

Una vez se tiene que la tensión residual es menor a la tolerancia, se hace la recomposición de los tensores de tensiones en paralelo y en serie de la capa  $t$  acorde con las ecuaciones ( 2:24) y ( 2:25) respectivamente, para posteriormente calcular el tensor de tensiones de la capa  $t$  con la ecuación ( 2:18).

- *Ecuación de equilibrio en el compuesto*

Hecho el análisis de cada capa, se tiene que el tensor de tensión del compuesto  ${}^c\boldsymbol{\sigma}$  corresponde a la suma de los tensores de tensiones de las capas del compuesto  ${}^{ncap}$  acorde con el porcentaje de participación volumétrica de cada capa  ${}^c k$  [66].

$$(2:31) \quad {}^c\boldsymbol{\sigma} = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k {}^t\boldsymbol{\sigma} = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k ({}^t\boldsymbol{\sigma}_P + {}^t\boldsymbol{\sigma}_S)$$

El principio de conservación de masa en el compuesto se garantiza haciendo que:

$$(2:32) \quad {}^c k = \frac{d {}^c V}{d {}^c V} \quad \Rightarrow \quad \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k = 1$$

${}^c k$  relaciona los volúmenes infinitesimales de la capa  $t$   $d {}^c V$  y del compuesto  $d {}^c V$ .

### 2.5.3 Algoritmo de la de la teoría de mezclas serie/paralelo

En la figura 2-11 se observa el algoritmo de desarrollo de esta teoría, donde una vez se determina el tensor deformación del compuesto, en cada capa  $t$  se descompone el tensor de deformación en sus partes en serie y en paralelo, con el fin de calcular las correspondientes deformaciones en la matriz y en las fibras.

Según la teoría serie/paralelo, la deformación en paralelo de los componentes es la

misma, mientras que la deformación en serie es diferente para cada componente; por ello, en el análisis de la parte en serie se requiere una primera aproximación de la deformación en serie de alguno de los componentes. En este caso, en la implementación se tomó como predictor el tensor de deformación en serie de la matriz del compuesto para determinar el tensor de deformación en serie de las fibras con base en la ecuación( 2:26) [100].

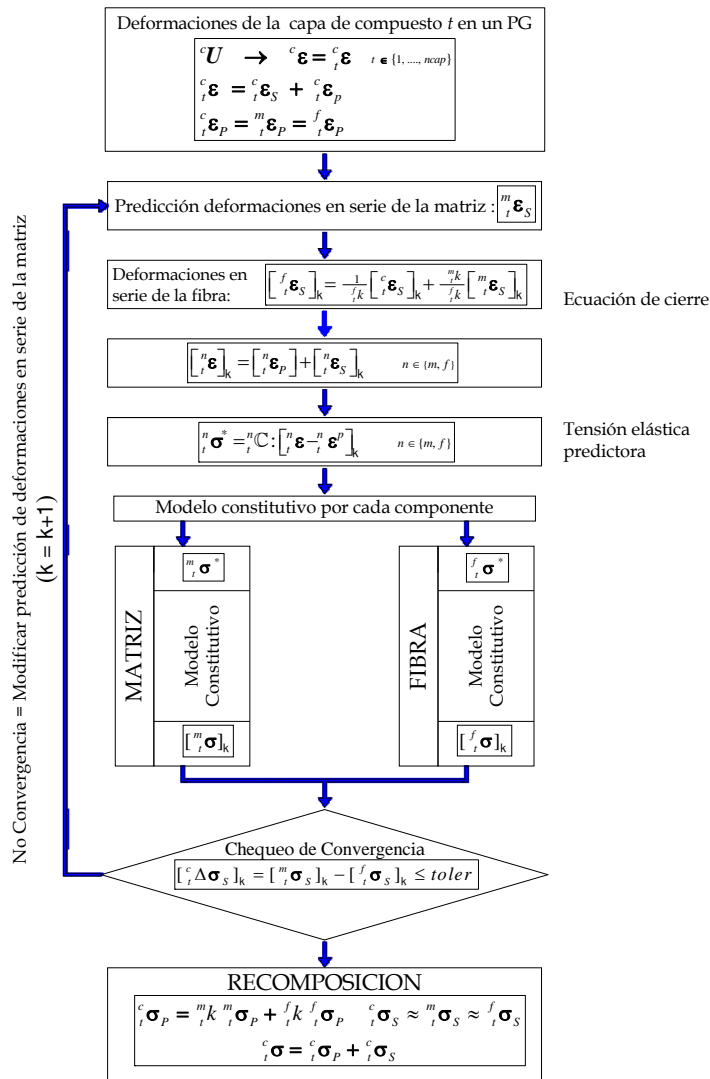


FIGURA 2-11 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS SERIE/PARALELO EN PEQUEÑAS DEFORMACIONES PARA UNA CAPA  $t$  DE UN COMPUESTO [107]

El predictor del tensor de deformación para el paso de carga  $i+1$  en la iteración  $k$  parte de los valores convergidos del paso anterior  $i$  y la predicción del incremento del tensor de deformación en la iteración  $k$  [108].

$$(2:33) \quad \left[ {}^m \boldsymbol{\epsilon}_S^{i+1} \right]_k = \left[ {}^m \boldsymbol{\epsilon}_S^i \right] + \left[ {}^m \Delta \boldsymbol{\epsilon}_S \right]_k$$

Para la primera predicción Rastellini propone la ecuación (2:34) [99], donde se considera que las componentes en serie y paralelo son distribuidas de acuerdo con los tensores constitutivos determinados en el paso anterior convergido  $i$ .

$$(2:34) \quad \left[ {}^m \Delta \boldsymbol{\epsilon}_S \right]_0 = {}^c \nabla : \left[ {}^f \mathbb{C}_{SS} : {}^c \Delta \boldsymbol{\epsilon}_S + {}^f k ({}^f \mathbb{C}_{SP} - {}^m \mathbb{C}_{SP}) : {}^c \Delta \boldsymbol{\epsilon}_P \right]$$

$${}^c \nabla = \left( {}^f k {}^f \mathbb{C}_{SS} + {}^m k {}^m \mathbb{C}_{SS} \right)^{-1} \quad {}^c \Delta \boldsymbol{\epsilon}_S = \left[ {}^c \boldsymbol{\epsilon}_S^{i+1} \right] - \left[ {}^c \boldsymbol{\epsilon}_S^i \right]$$

La teoría de mezclas serie paralelo se presenta como una excelente alternativa para la simulación de materiales compuestos, recientemente validada a través de diferentes pruebas experimentales [16; 97; 108]. No obstante, al partir de la hipótesis que la adherencia es perfecta entre los componentes, en la teoría serie/paralelo no se tienen en cuenta las inestabilidades que pueden existir en las interfaces de los componentes, esto conlleva a que se deban hacer algunas modificaciones y adicionar nuevos algoritmos para involucrar en la teoría fenómenos locales como el deslizamiento entre las fibras y la matriz “debonding”. De otra parte, se requiere estudiar la teoría serie/paralelo en el campo de grandes deformaciones para extender su uso a problemas que impliquen grandes cambios de configuración geométrica de las estructuras, garantizando que sus ecuaciones evolucionen con la cinemática del problema.

## 2.6 Código del método de elementos finitos

En la actualidad los análisis de estructuras conformadas por materiales compuestos se realizan utilizando principalmente el método de los elementos finitos (MEF). Para el estudio de materiales compuestos, en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería de la Universidad Politécnica de Cataluña se han implementado los algoritmos de la teoría de mezclas clásica, la teoría de mezclas serie/paralelo y la teoría del mapeo de espacios en el programa de elementos finitos PLCD [111]. Este es un código termomecánico no lineal de elementos finitos usado para geometrías de sólidos en dos y tres dimensiones [110], con el cual, se puede analizar la cinemática y la no linealidad de los materiales en el estudio del comportamiento de estructuras. Todos los ejemplos desarrollados en la presente tesis fueron analizados a través de PLCD.

### 2.6.1 Proceso general del método de elementos finitos

El método de elementos finitos (MEF) es una técnica de aproximación numérica que proporciona la solución a las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de un dominio continuo. Con esta técnica, se obtiene una solución aproximada del sistema discreto generado.

En la mecánica estructural, el MEF se plantea desde uno de los principios de energía, como el principio del trabajo virtual o el principio de energía potencial

total y puede aplicarse a través de un tratamiento variacional o residual (Método de los residuos ponderados). En forma general, el método de elementos finitos basado en la integración numérica de la ecuación del principio del trabajo virtual, resuelve el sistema de ecuaciones dado como:

$$(2:35) \quad \mathbb{K} U = R$$

siendo  $\mathbb{K}$  la matriz de rigidez global de la malla de elementos finitos que representa la estructura,  $R$  el vector de cargas sobre los nodos del mallado y  $U$  es el vector de desplazamientos nodales a determinar.

Luego en todos los  $ne$  elementos del mallado de la estructura se establecen los desplazamientos nodales  ${}^e U$  para calcular el vector de sus deformaciones  ${}^e \varepsilon$  a través de la matriz de deformación del elemento  ${}^e \mathbb{B}$ .

$$(2:36) \quad {}^e \varepsilon = {}^e \mathbb{B} {}^e U \quad e \in \{1, \dots, ne\}$$

finalmente, se determina el vector de tensiones  ${}^e \sigma$  por medio de la matriz constitutiva del elemento  ${}^e \mathbb{C}$

$$(2:37) \quad {}^e \sigma = {}^e \mathbb{C} {}^e \varepsilon$$

Estas expresiones corresponden a un comportamiento elástico lineal en pequeñas deformaciones, para un comportamiento no lineal la ecuación consta de términos adicionales. Una descripción completa de este método se encuentra en Zienkiewicz y Taylor [112], Oñate [113], Bathe [114] y Belytschko et al. [115].

## 2.6.2 Características principales del código

PLCD es un código que permite el uso de varios modelos constitutivos para predecir el comportamiento del material: elástico, visco-elástico, plástico, daño, daño-plástico etc. [96; 116; 117], los cuales pueden utilizar diferentes superficies de plastificación para controlar su evolución: Von-Mises, Mohr-Coulomb, Mohr-Coulomb mejorado, Drucker Prager, entre otros. Asimismo, puede realizar análisis dinámicos de diferentes estructuras por medio del método de Newmark [118; 119]. Las principales características del código para simular el comportamiento de los materiales compuestos son [66]:

- Relaciona el comportamiento de los materiales componentes del compuesto a través de la teoría de mezclas clásica [96] y la teoría de mezclas serie/paralelo [110].
- Involucra la anisotropía de los materiales por medio de la teoría de mapeo de espacios [96; 104;].
- Introduce en la teoría clásica los efectos del deslizamiento de la fibra-matriz para materiales elasto-plásticos [96]. Considera el pandeo de las fibras y la delaminación en las teorías de mezclas [100], fenómenos que reducen la resistencia de los materiales compuestos.
- Incluye en el análisis con diferentes casos de carga la activación de nuevos elementos dentro de la estructura para considerar las etapas constructivas en una estructura [108].



### 2.6.3 Algoritmo de construcción de estructuras por etapas

Es probable que se deba hacer la rehabilitación de una estructura manteniendo un determinado estado de carga, así como identificar los efectos del daño previo en una estructura reparada. En la figura 2-12 se muestra un ejemplo del proceso de adición de nuevos elementos en la simulación de una estructura, considerando los estados de carga anteriores al refuerzo de la estructura.

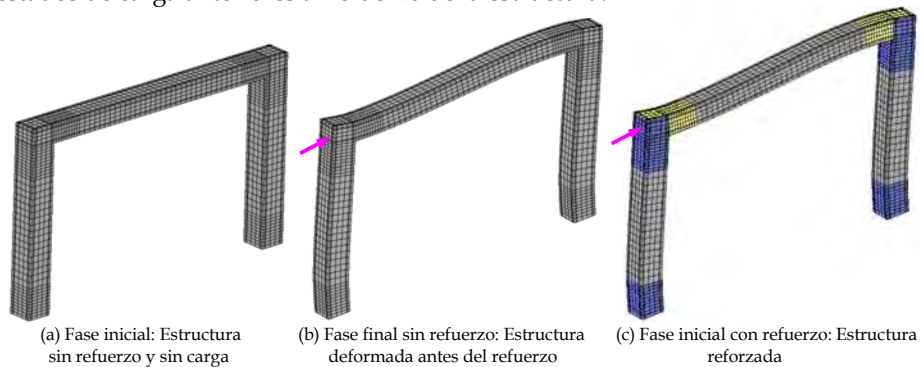


FIGURA 2-12 PROCESO DE LA CONSTRUCCIÓN DE ESTRUCTURAS POR ETAPAS DE UN MODELO EN MEF

Con el objetivo de considerar un estado de carga antes de la rehabilitación o un estado de daño previo a la reparación, Martínez [100] propuso un algoritmo para adicionar o remover elementos en la modelización de la estructura sin detener el proceso de cálculo. Este algoritmo fue implementado en PLCD [111] y validado por Martínez et al. [108], donde analizaron dos ejemplos de reparación en viga de hormigón armado con los que se obtuvieron resultados satisfactorios.

La propuesta de Martínez [100] es una herramienta versátil para el análisis de estructuras reforzadas, se considera pertinente presentar en forma breve su desarrollo, dado que se utilizará posteriormente; no obstante, por facilidad, el procedimiento se explica desde un enfoque lineal elástico.

Considerando  $nl$  casos de carga analizados durante las etapas de construcción (reparación y/o rehabilitación) en el proceso de calculo de una estructura, las ecuaciones ( 2:36) y ( 2:37) quedan dadas como:

$$(2:38) \quad \begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{ld} + \dots + \epsilon_{nl} \\ \sigma &= \sigma_1 + \dots + \sigma_{ld} + \dots + \sigma_{nl} \end{aligned}$$

Los elementos adicionados en un caso de carga  $ld$  deben adaptarse a la deformación global de la estructura producida por los  $nl$  casos de carga analizados, considerando que estos elementos deben ser libres de tensiones para los casos de carga previos a  $ld$ , tal que :

$$(2:39) \quad \sigma_{lc} = 0 \quad lc \in \{1, \dots, ld - 1\}$$

Para ello Martínez [100] considera desde la fase inicial todos los elementos estructurales en todas las fases de construcción, y propone separar el vector de

deformaciones en dos componentes, uno activo  ${}^e \varepsilon_A$  y otro no activo  ${}^e \varepsilon_{NA}$ , de tal forma que:

$$(2:40) \quad {}^e \varepsilon = {}^e \varepsilon_A + {}^e \varepsilon_{NA}$$

cuando el elemento no esta presente en un caso de carga, se tiene que todas las deformaciones son introducidas en el vector no activo

$$(2:41) \quad {}^e \varepsilon = {}^e \varepsilon_{NA} = {}^e \mathbb{B} {}^e U \quad {}^e \varepsilon_A = 0$$

y si elemento es activado se tiene que:

$$(2:42) \quad {}^e \varepsilon = {}^e \mathbb{B} {}^e U \quad {}^e \varepsilon_A = {}^e \varepsilon - {}^e \varepsilon_{NA}$$

donde las tensiones son producidas únicamente por la componente activa de las deformaciones de cada elemento

$$(2:43) \quad {}^e \sigma = {}^e \mathbb{C} {}^e \varepsilon_A$$

Con este procedimiento, las deformaciones que producen tensiones en un elemento corresponden a las deformaciones adicionales presentadas durante los estados constructivos de carga desde que el elemento es activado, de igual forma, si el elemento no esta activado sus tensiones son nulas.

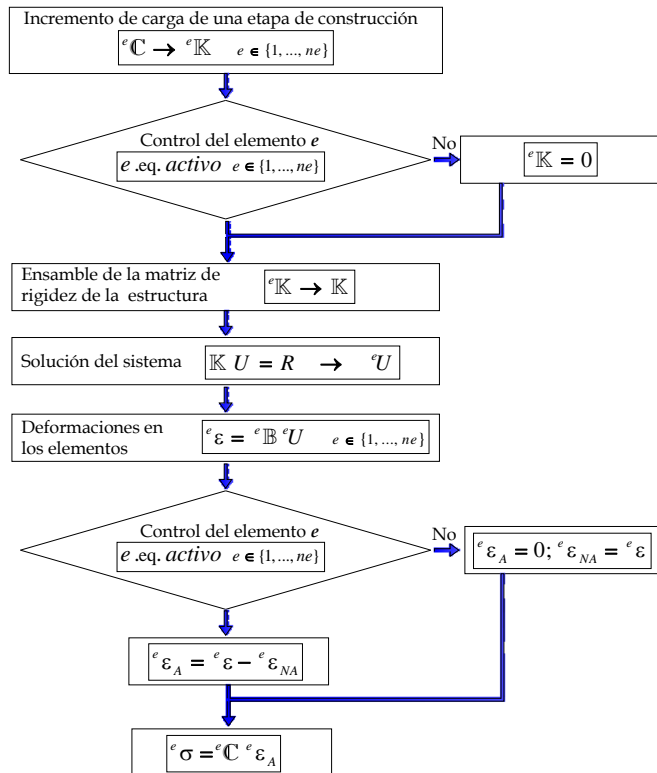


FIGURA 2-13 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA CONSTRUCCIÓN POR ETAPAS DE UN MODELO EN MEF

Además se debe tener en cuenta que si el elemento no esta activo en una determinada etapa de construcción, la matriz de rigidez de este elemento debe

anularse  $\mathbb{K} = 0$  para garantizar que la rigidez de los elementos no activos no se involucre en el ensamblaje de la matriz de rigidez global del sistema  $\mathbb{K}$  [108]. Esto implica que los elementos no deben tener restricciones de apoyo o de carga en la etapa de construcción en que no estén activados para evitar inconsistencias numéricas.

En la figura 2-13 se indica el esquema de solución de la construcción de una estructura por etapas propuesto por Martínez [100]. Este procedimiento permite el análisis con diferentes casos de carga, realizando la simulación numérica únicamente con los elementos que estén activados para una determinada etapa de construcción [108]. El algoritmo de construcción de una estructura por etapas hace posible que se adicionen nuevos elementos o se remuevan los activados para un caso de carga dado, sin interrumpir el proceso de cálculo, conduciendo a que en el análisis de las estructuras reforzadas se tengan en cuenta los efectos de los anteriores estados de carga a la colocación del refuerzo.

## 2.7 Análisis de estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP

El estudio de los efectos que han producido los grandes sismos en estructuras tipo pórtico pone en evidencia que las zonas más susceptibles a daño son las uniones viga-pilar y los extremos de los pilares [4]. Por ello, con el propósito de garantizar la estabilidad de las estructuras durante un evento extremo, en muchos estudios se hace énfasis en la necesidad de la rehabilitación y reparación de las estructuras antiguas o de las estructuras construidas antes de las actuales normas de diseño, siendo una de las alternativas de refuerzo el uso los polímeros reforzados con fibras largas (FRP) [1; 6; 15; 17; 18; 26].

Por medio del uso de las teorías de mezclas en la simulación numérica de las estructuras reforzadas con FRP, se pretende que en una primera etapa, se identifiquen los sectores que necesitan ser reforzados; luego en una segunda etapa, una vez se haya realizado el diseño del refuerzo, se simule la estructura reforzada para que se establezca el nivel de eficiencia del refuerzo propuesto. Con el fin de destacar las ventajas que tiene la estrategia de la teoría de mezclas en el análisis y diseño estructural de estructuras reforzadas con polímeros reforzados con fibras largas (FRP), en este apartado se muestra un estudio de estructuras porticadas reforzadas con fibras de carbono CFRP analizadas con la teoría serie/paralelo.

### 2.7.1 Pórticos rehabilitados en 2 dimensiones (2D)

En diez estructuras planas se realizó un análisis no lineal estático incremental (pushover analysis). Cinco de ellas son de hormigón simple y las otras son de hormigón armado. En cada grupo 4 pórticos fueron reforzados con diferentes configuraciones de polímeros reforzados CFRP y se dejó uno sin refuerzo, con el fin de analizar los efectos en el comportamiento de los elementos reforzados.

Aunque los FRP se utilizan como refuerzo en estructuras de hormigón armado o

de acero, se estudió también el comportamiento de las estructuras de hormigón simple reforzadas, con el propósito de analizar únicamente la influencia del refuerzo de FRP sobre las estructuras sin armadura [107].

2.7.1.1 Descripción de los modelos estudiados bajo el estado de tensiones planas

- Geometría y configuraciones de refuerzo

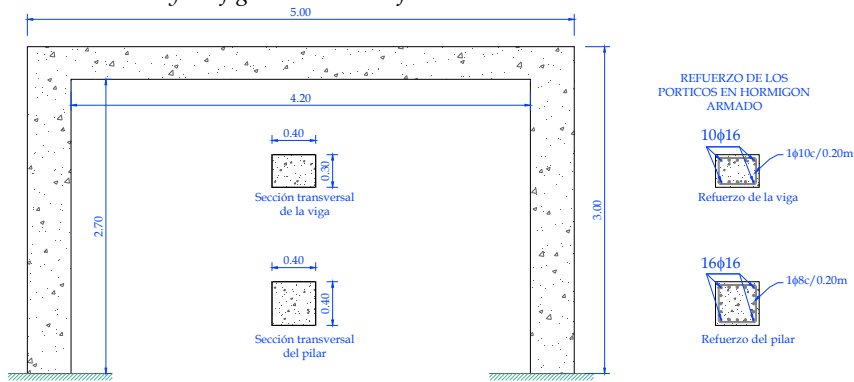


FIGURA 2-14 GEOMETRÍA TIPO DE LAS ESTRUCTURAS PORTICADAS [100]

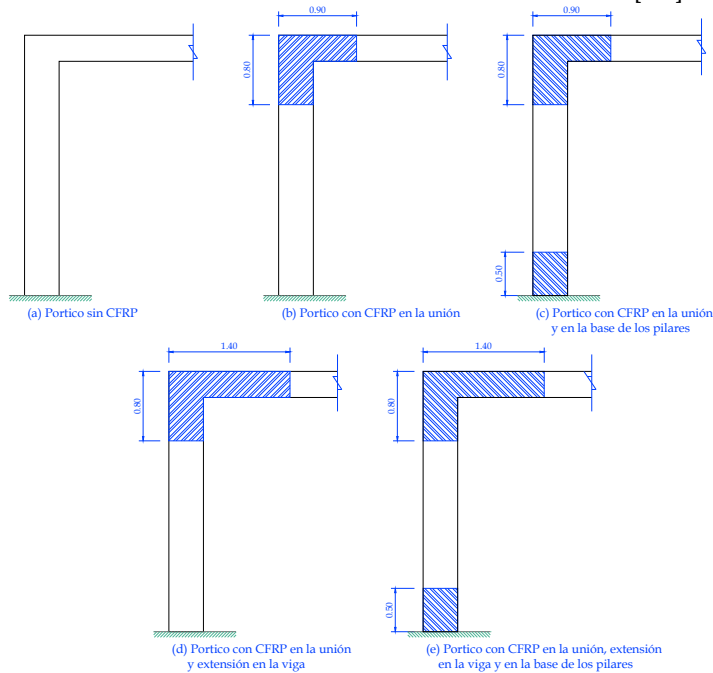


FIGURA 2-15 MODELOS DE LOS PÓRTICOS CON LAS CONFIGURACIONES DE REFUERZO [107]

En la figura 2-14 se indica la geometría de los diez modelos junto con las armaduras de la viga y de los pilares para los pórticos en hormigón armado. En la figura 2-15 se presentan las configuraciones del refuerzo con CFRP, y en la tabla 2-1 se indica la nomenclatura utilizada para identificar los modelos. Cabe anotar

que algunos detalles de la geometría propuesta se han fijado con base en las observaciones realizadas en algunas investigaciones experimentales.

El refuerzo en los pilares de estos modelos corresponde a dos capas orientadas a 0 y a 90 grados para tener en cuenta que la eficiencia del encamisado del pilar depende de las direcciones en que se coloque las fibras [44]. Cuatro de los diez pórticos analizados tienen CFRP en la base de los pilares dado que según los resultados experimentales [35; 43] su nivel de influencia es notorio en la capacidad y en la ductilidad.

Igualmente, con el fin de tener un mejor comportamiento de la viga ante un desplazamiento lateral, en los modelos con refuerzo se encamisó la viga en las zonas cercanas a las uniones viga-pilar de acuerdo con los estudios experimentales [61; 62]. Se seleccionaron dos longitudes de refuerzo en la viga para hacer una comparación del comportamiento cuando el refuerzo se extiende desde el borde de la unión dos y cuatro veces la altura efectiva de la viga.

Tipo de pórtico	Tipo de hormigón	Sin armadura de acero	Con armadura de acero
Pórtico sin CFRP (FIGURA 2-15(a))		SASF	ASF
Pórtico con CFRP en la unión (FIGURA 2-15(b))		SAF	AF
Pórtico con CFRP en la unión y en la base del pilar (FIGURA 2-15 (c))		SAFC	AFC
Pórtico con CFRP en la unión y extensión en la viga (FIGURA 2-15 (d))		SAFV	AFV
Pórtico con CFRP en la unión, extensión en la viga y en la base del pilar (FIGURA 2-15 (e))		SAFCV	AFCV

TABLA 2-1 NOMENCLATURA DE LOS MODELOS DE LOS PÓRTICOS

En la figura 2-16 se indican los materiales compuestos asignados a los elementos estructurales de los modelos, dependiendo de si tienen o no armadura. Los porcentajes volumétricos en los que participan los componentes en cada material compuesto se señalan en la tabla 2-3, donde se especifica la dirección de las fibras del compuesto considerada como parte de la anisotropía del compuesto. Las propiedades de los materiales simples se muestran en la tabla 2-2, donde  $E_x$ ,  $E_y$  y  $\nu$  son los módulos de elasticidad en las direcciones "x", e, "y",  $\nu$  es el módulo de Poisson,  $\sigma_c$  y  $\sigma_t$  son las tensiones máximas resistentes de compresión y de tracción,  $G_c$  y  $G_t$  son las energías de aplastamiento y de fractura.

Material	Criterio de fluencia	$E_x=E_y$ MPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$\sigma_t$ MPa	$G_c$ J/m <sup>2</sup>	$G_t$ J/m <sup>2</sup>
Hormigón	Mohr-Coulomb	2.5 · 10 <sup>4</sup>	0.20	30.0	3.0	50.0	5.0
Acero	Von Mises	2.1 · 10 <sup>5</sup>	0.00	270.0	270.0	2000.0	2000.0
Matriz polimérica	Mohr-Coulomb	1.2 · 10 <sup>4</sup>	0.20	87.5	29.2	36.0	3.0
Fibra de carbono	Von Mises	1.5 · 10 <sup>5</sup>	0.00	2300.0	2300.0	2000.0	2000.0

TABLA 2-2 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES COMPONENTES EN LOS PÓRTICOS

SIMULACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS COMO REFUERZO EN ESTRUCTURAS DE HORMIGÓN ARMADO

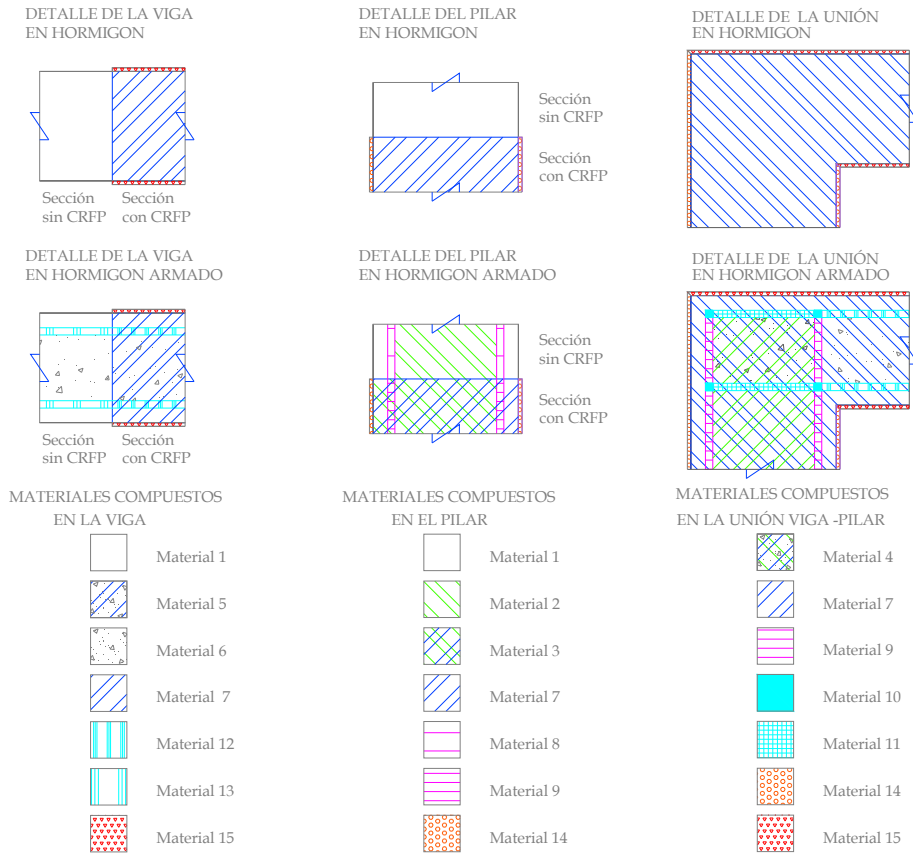


FIGURA 2-16 CONFIGURACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS EN LOS PÓRTICOS [107]

Material compuesto	Matriz de Hormigón	Acero longitudinal	Acero Vertical	Cercos Horizontales	Cercos Verticales	Matriz Polimérica	CFRP 0° Horizontal	CFRP 90° vertical
1	100							
2	98.70		1.10	0.20				
3	97.53		1.10	0.17		0.40	0.40	0.40
4	97.71		1.09			0.40	0.40	0.40
5	98.70				0.10	0.40	0.40	0.40
6	99.90				0.10			
7	98.80					0.40	0.40	0.40
8	87.13		12.67	0.20				
9	86.04		12.59	0.17		0.40	0.40	0.40
10	81.51	4.84	12.45			0.40	0.40	0.40
11	92.87	4.84	1.09			0.40	0.40	0.40
12	93.86	4.87			0.07	0.40	0.40	0.40
13	95.00	4.90			0.10			
14						34.00	66.00	
15						34.00		66.00

TABLA 2-3 PORCENTAJES DE LOS COMPONENTES EN LOS COMPUESTOS DE LOS PÓRTICOS [107]

- Descripción de los modelos constitutivos considerados para los materiales

En estos ejemplos, para la teoría serie/paralelo, las matrices de los compuestos son

el hormigón y la resina polimérica, mientras que el acero y la fibra de carbono constituyen el refuerzo. En lo que respecta al análisis del comportamiento de los materiales simples, para determinar el daño en el hormigón y la matriz polimérica del compuesto, se aplicó el modelo de daño isótropo; para el acero se utilizó el modelo elasto-plástico, mientras que la fibra de carbono se analizó como un material elástico y lineal.

Los modelos analizados por control de desplazamientos tienen una malla de elementos finitos rectangulares de 4 nodos. En todos los casos se parte de la hipótesis que no hay daño inicial en el pórtico, y los análisis se realizan con las estructuras ya reforzadas por lo tanto estos ejemplos corresponden al caso de rehabilitación con FRP. Además, se supuso que la adherencia inicial entre el refuerzo y el hormigón es perfecta. Por otra parte, al ser modelos bidimensionales no se tiene en cuenta el confinamiento en el hormigón producido por los cercos.

2.7.1.2 Análisis de los pórticos de hormigón simple y de hormigón armado bajo el estado de tensión plana

- Resistencia y rigidez

En la figura 2-17 se muestra el cortante en la base del pórtico con respecto al desplazamiento horizontal aplicado en la mitad de la luz de la viga. En esta figura se observa que los diferentes modelos tienen una rigidez inicial similar y que su comportamiento se conserva lineal aproximadamente hasta los 0.0015m; luego, según la configuración del refuerzo del sistema, la pérdida rigidez varía de acuerdo con el desarrollo del daño y de plasticidad. Dado que no existen ensayos experimentales con las configuraciones analizadas, los resultados obtenidos de las simulaciones se han contrastado con las conclusiones de otras investigaciones.

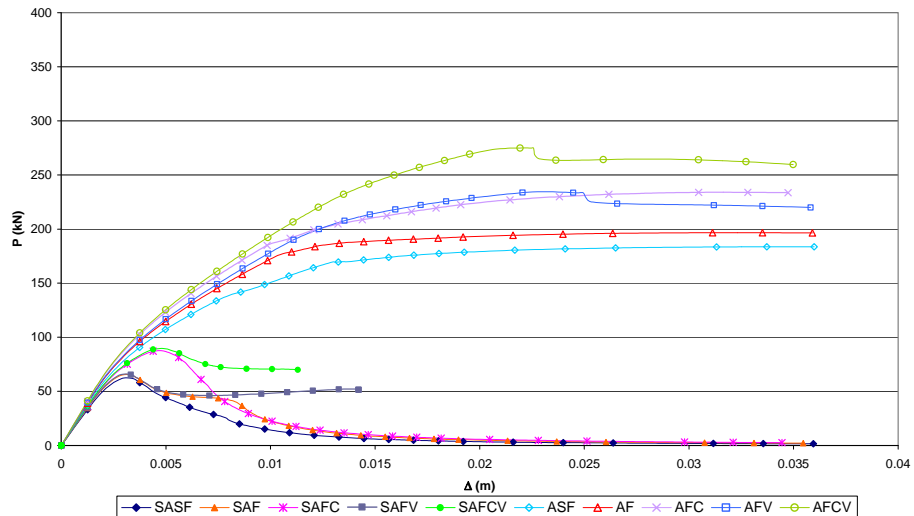


FIGURA 2-17 CORTANTE EN LA BASE (P)- DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL (Δ) PARA LOS PÓRTICOS DE HORMIGÓN SIMPLE Y DE HORMIGÓN ARMADO

En la figura 2-17 se observa que los modelos con refuerzo adicional en la viga (SAFV y SAFVC) muestran un comportamiento dúctil después de alcanzar su capacidad máxima, sin embargo el incremento de capacidad en SAFV es bajo; asimismo se aprecia como el modelo SAFC tiene una tendencia de pérdida de resistencia similar al modelo SAF. Por lo tanto, para las estructuras de hormigón simple el refuerzo adicional en las vigas aumenta la ductilidad pero influye muy poco en la resistencia, en cambio, el refuerzo en los pilares incrementa la resistencia del sistema pero no incide en su ductilidad. A diferencia de los modelos de hormigón simple, en todos los casos con armadura hay ductilidad independientemente del refuerzo. En los pórticos de hormigón armado, el FRP como refuerzo aumenta la capacidad de la estructura, dado que al disminuir el nivel de daño en el hormigón, se posterga la plastificación del acero [66].

Hormigón sin armadura	SASF	SAF	SAFC	SAFV*	SAFCV*
Cortante en la base máximo $P_{max}$ (kN)	62.36	65.48	87.65	66.06	89.73
Desplazamiento por cortante máximo $\Delta P_{max}$ (m)	0.0030	0.0030	0.0048	0.0031	0.0048
$P_{max}$ .vs. $P_{max}$ - SASF (%)	-	5.0	40.5	5.9	43.9
Hormigón con armadura	ASF	AF	AFC	AFV	AFCV
Cortante en la base máximo $P_{max}$ (kN)	183.62	196.54	233.98	234.49	274.96
Desplazamiento por cortante máximo $\Delta P_{max}$ (m)	0.0354	0.0318	0.0312	0.0233	0.0222
$P_{max}$ .vs. $P_{max}$ - ASF (%)	-	7.0	27.4	27.70	49.7

\* Modelo con pérdida convergencia

TABLA 2-4 CORTANTE MÁXIMO EN LA BASE Y DESPLAZAMIENTO EN LOS PÓRTICOS 2D.

La resistencia máxima y el porcentaje del aumento de resistencia por el refuerzo en los pórticos se indican en la tabla 2-4. En lo que respecta a las estructuras de hormigón simple, si se refuerza con CFRP sólo en la unión (SAF) el aumento de la resistencia del sistema es pequeño, apenas un 5%; en cambio si se coloca CFRP en la base de los pilares la resistencia del sistema aumenta en casi un 40%. En los pórticos de hormigón armado, al reforzarse sólo la unión (AF) hay un pequeño incremento en la resistencia del orden de 7%, mientras que al reforzarse la unión, la base de los pilares, y la viga (AFCV), la resistencia se incrementa un 50%.

Es relevante notar que el refuerzo no aumenta la rigidez lateral de los pórticos, lo que coincide con la observación de Tastani y Pantazopoulou [32]. Cuando la estructura se refuerza se produce un incremento de la resistencia a cortante y a flexión [34; 35; 47; 48; 52]; no obstante, el nivel del incremento de resistencia depende de la configuración del refuerzo que se seleccione y de la armadura de los pórticos. En lo que respecta a la ductilidad, cabe anotar que su aumento depende de la distribución de la armadura; si la armadura es insuficiente, el refuerzo con FRP incrementa considerablemente la ductilidad del sistema; pero si la armadura aporta por sí misma ductilidad al sistema, al reforzarlo el incremento de su ductilidad es imperceptible [120].

- *Tensiones y deformaciones en los componentes de los materiales compuestos*

Una de las ventajas de la teoría de mezclas es que permite identificar durante el proceso de carga, el estado de tensiones y de deformaciones tanto del compuesto como de sus componentes. Para observar la evolución de las tensiones en los



diferentes materiales, se tomaron dos puntos de referencia que se indican en la figura 2-18: uno de ellos, en la esquina izquierda interna, donde se analiza las deformaciones y tensiones en  $x$ ; y el otro, en la base del pilar izquierdo, para el análisis de las deformaciones y tensiones en  $y$ .

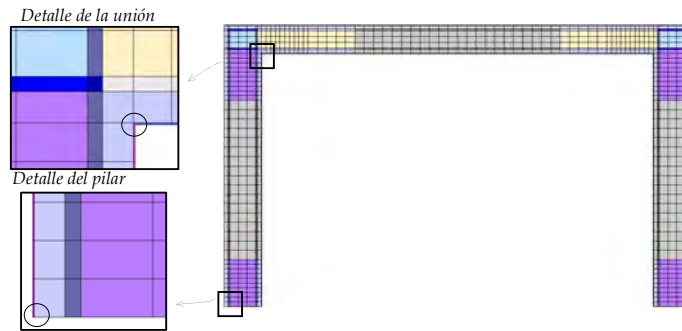


FIGURA 2-18 ELEMENTOS EN LOS QUE SE MIDEN LAS DEFORMACIONES Y LAS TENSIONES

En la figura 2-19(a) se muestran las tensiones en la dirección  $x$  del hormigón. Se aprecia que en los modelos SASF y ASF se tiene una pérdida de resistencia inicial similar, con la diferencia que en el caso SASF, debido a la mayor degradación del hormigón, hay una descarga total, mientras que en el modelo ASF, el elemento pierde resistencia sin presentar descarga. Los modelos de hormigón sin armadura (SAF, SAFV, SAFC y SAFCV) tienen una pérdida de resistencia inicial semejante; los modelos SAF y SAFC presentan descarga total, posiblemente por la pérdida de resistencia del sistema; entretanto, los casos SAFV y SAFCV no evidencian descarga, aunque cabe anotar que estos modelos perdieron convergencia antes de aplicar el 40% del desplazamiento total. En lo que respecta a los pórticos de hormigón armado con refuerzo, los modelos tienen una curva de pérdida de resistencia similar. La diferencia consiste en que los casos AF y AFC muestran una descarga parcial equivalente a un 28% de la deformación máxima cuando se refuerza la viga (AFV y AFCV).

Referente a las tensiones en la dirección  $y$  en el hormigón indicadas en la figura 2-19(b), los modelos de hormigón simple muestran un comportamiento lineal, excepto los reforzados en la base del pilar (SAFC y SAFCV), los cuales presentan pérdida de resistencia; en todos los casos hay una descarga total. Los modelos de hormigón con armadura sin refuerzo en la base del pilar (AF y AFV) muestran una pérdida de resistencia similar, alcanzando un 75%; asimismo, el comportamiento de los casos AFC y AFCV es semejante, con un 15% de pérdida de resistencia.

En la figura 2-20 se observa el comportamiento de la matriz del CFRP. En la dirección  $x$ , en la esquina de la unión, pese a que la fibra de carbono se mantiene en el rango lineal elástico y que sólo se ha alcanzado un 30% de la resistencia a tracción de la matriz (figura 2-20(a)), su comportamiento se ve afectado por el daño y la pérdida de resistencia del hormigón. El comportamiento no lineal de la matriz en la dirección  $x$  se debe a que, con el daño del hormigón, en esta zona hay grandes desplazamientos a nivel local. En los pórticos de hormigón simple, conforme a lo

que sucede en el hormigón, la matriz del CFRP se descarga totalmente en los casos SAF y SAFC, mientras que sólo presenta pérdida de resistencia en los modelos SAFV y SAFV. La pérdida de resistencia inicial en los casos SAFC y SAFCV es similar a la que se produce en los modelos de hormigón armado hasta alcanzar un 50% de la deformación máxima correspondiente a los modelos AFV y AFCV. En los pórticos con hormigón armado, los modelos AF y AFC se descargaron parcialmente con un 80% de la deformación máxima de los casos AFV y AFCV.

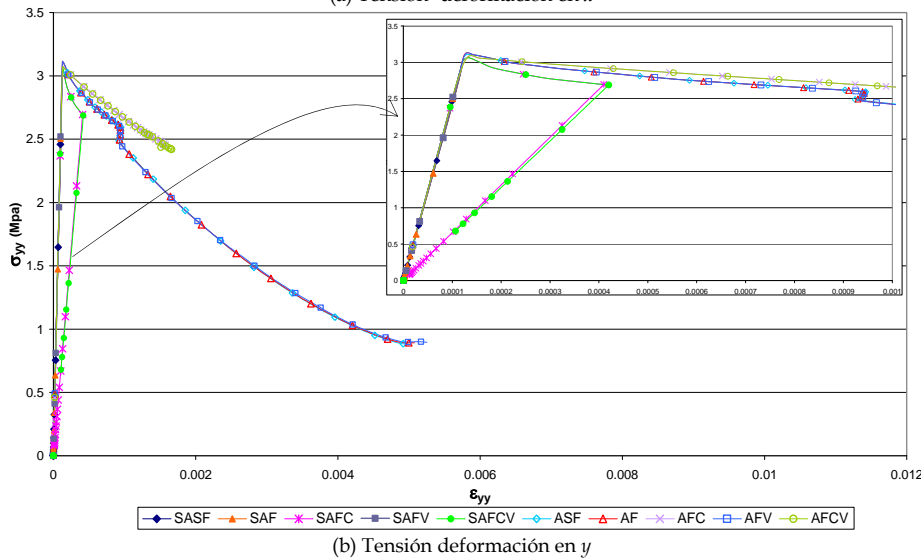
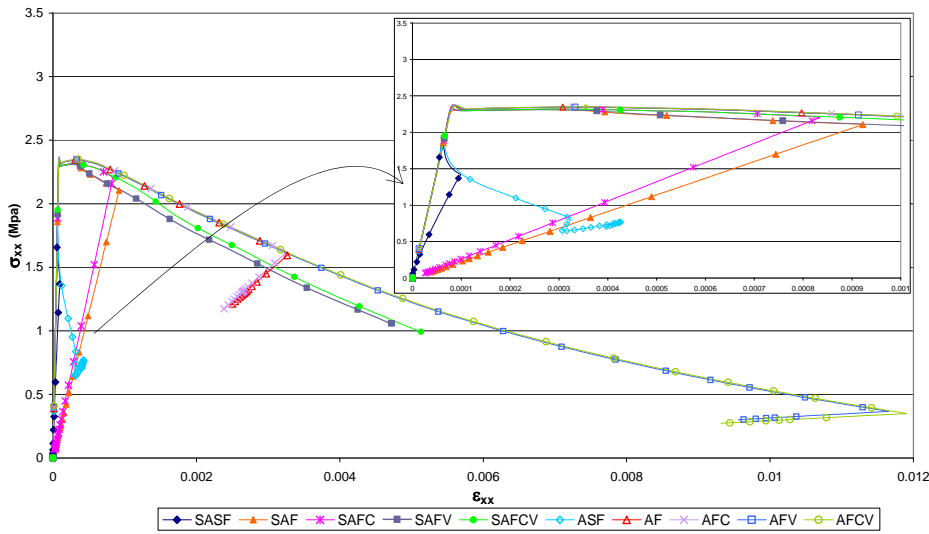
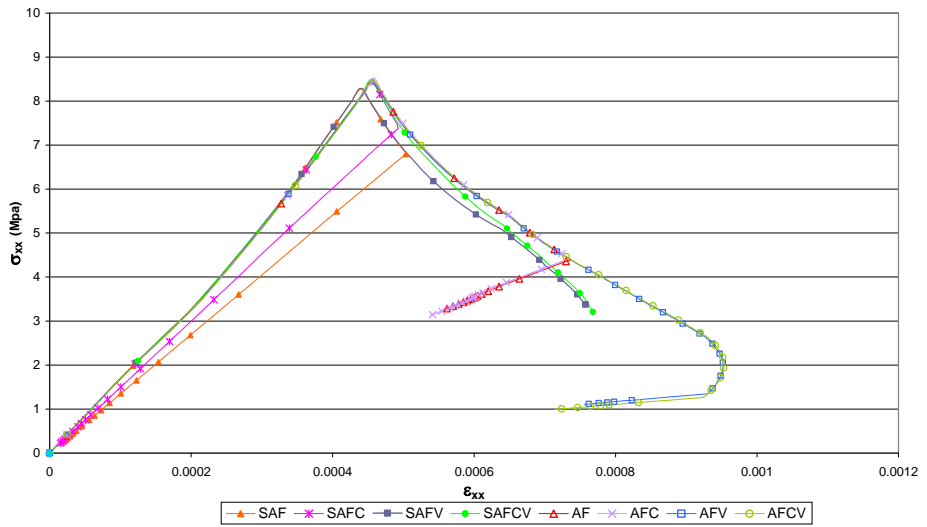


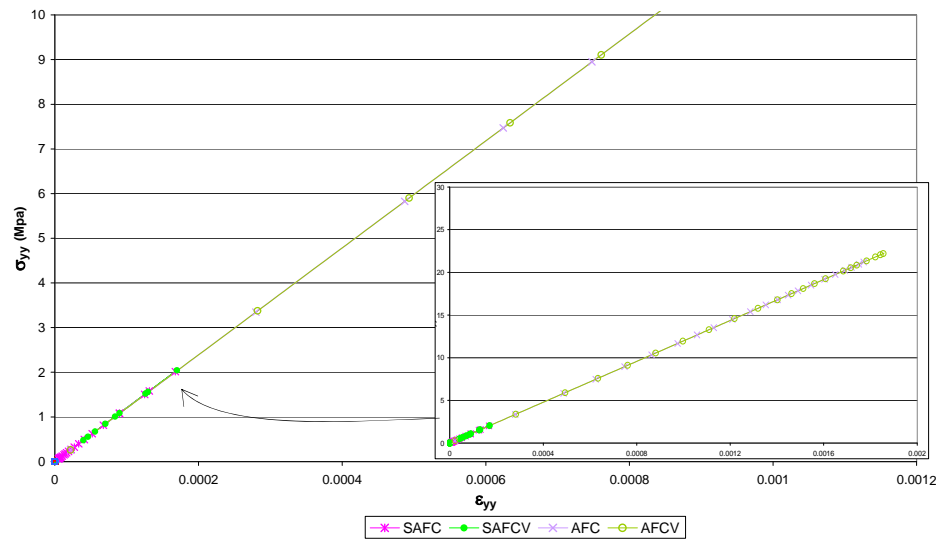
FIGURA 2-19 TENSIÓN DEFORMACIÓN A TRACCIÓN EN EL HORMIGÓN.

Por el contrario, en la dirección  $y$  de la base del pilar, como se ve en la figura 2-20(b), aunque hay daño y pérdida de resistencia en el hormigón, el

comportamiento de la matriz polimérica es lineal y elástico en todos los casos. Esto se debe a que, en esta zona, no hay efectos locales que afecten el comportamiento lineal de la matriz. Los pórticos de hormigón simple, por su baja capacidad carga lateral, tienen una tensión máxima alrededor del 10% de la resistencia a tracción de la matriz, mientras que los pórticos de hormigón armado alcanzan un 80%.



(a) Tensión deformación en x



(b) Tensión deformación en y

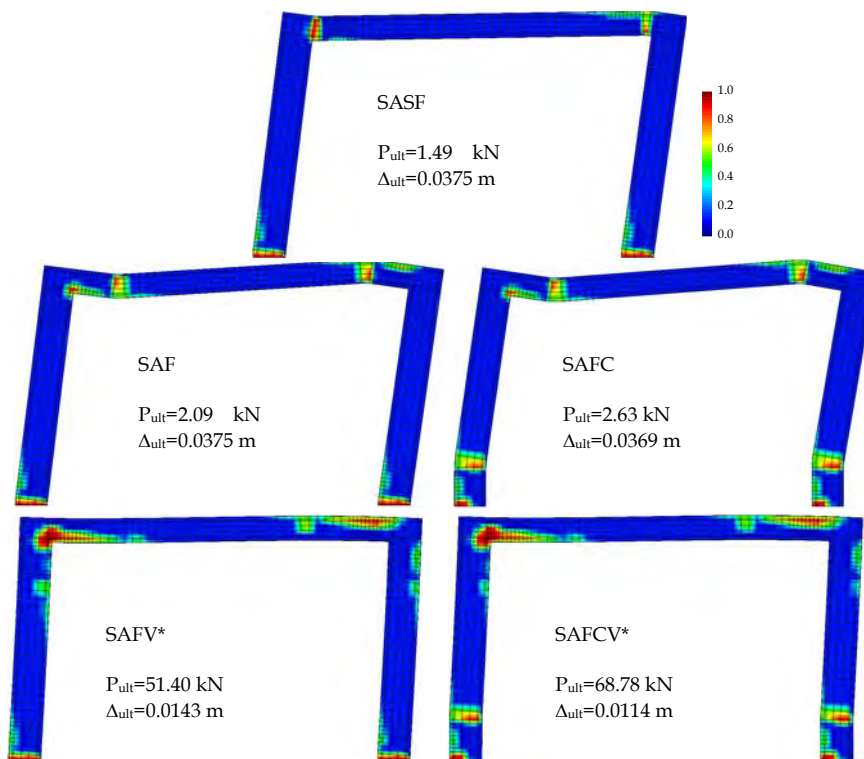
FIGURA 2-20 TENSIÓN DEFORMACIÓN A TRACCIÓN EN LA MATRIZ DEL CFRP.

- *Daño*

Otra de las ventajas que tiene el uso de las teorías de mezclas es que, al asignar un modelo constitutivo a cada material componente, permite observar la evolución de las variables internas tales como el daño o el endurecimiento plástico en el

compuesto y en los componentes. En la figura 2-21 y en la figura 2-22 se muestran las distribuciones de daño en los pórticos de hormigón simple y de hormigón armado para el estado de carga último ( $P_{ult}$ ), indicando además su correspondiente desplazamiento ( $\Delta_{ult}$ ).

En las estructuras de hormigón simple, el daño es localizado y la pérdida de capacidad es considerable, mientras que en las estructuras de hormigón armado el daño se distribuye a lo largo de los elementos y la pérdida de capacidad del sistema es pequeña.



\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-21 DAÑO EN LOS PÓRTICOS DE HORMIGÓN SIN ARMADURA. DEFORMADA 1:10

Dependiendo del daño que se produce en los diferentes casos, se aprecia que en los pilares y en las vigas es necesario que la longitud del refuerzo externo sea suficiente, para prevenir el fallo prematuro del sistema, evitando el daño localizado en el hormigón y retrasando la plastificación del acero. Como por ejemplo, en las estructuras de hormigón reforzado, al comparar los modelos AFV con AF y AFCV con AFC, se observa que los pórticos con mayor longitud de refuerzo en las vigas tienen menor pérdida de rigidez, aunque presentan mayor daño en la unión y tienen una resistencia lateral un 12% mayor. Asimismo, al contrastar los casos AF con AFC o SAF con SAFC, se observa que, al colocar el refuerzo en la base de los pilares, la zona con daño en toda la sección transversal ya

no se presenta en el apoyo del pilar, sino en el borde donde termina el FRP, con lo cual, el refuerzo aumenta la resistencia del sistema.

Se corrobora que al reforzar las estructuras con CFRP, se aumenta la ductilidad y se reduce la pérdida de resistencia del sistema estructural. Sin embargo, el nivel de eficiencia del refuerzo depende tanto de la configuración del refuerzo que se seleccione, como del estado y de la configuración de la estructura original [66].

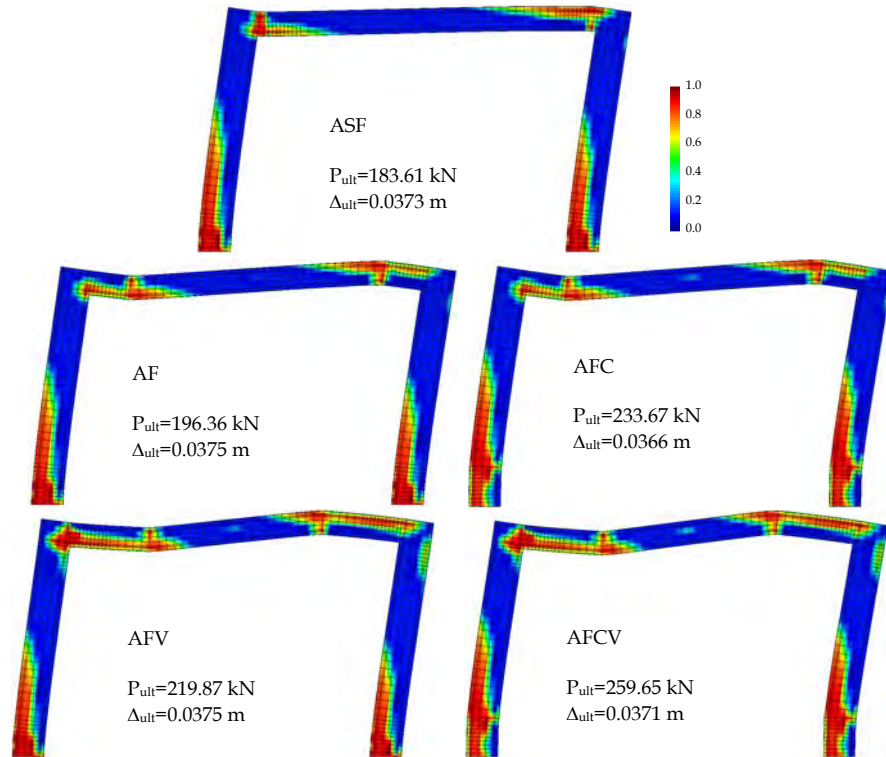


FIGURA 2-22 DAÑO EN LOS PÓRTICOS DE HORMIGÓN ARMADO. DEFORMADA 1:10

### 2.7.1.3 Efecto del comportamiento del acero bajo el estado de tensiones planas

Aprovechando que la teoría de mezclas permite asignar un modelo constitutivo a cada componente del compuesto, se hace una comparación del comportamiento de los pórticos de hormigón armado, cuando el acero se analiza como un material elástico (EL) y cuando se considera elasto-plástico.

En la figura 2-23 se muestra la relación carga-desplazamiento de los pórticos de hormigón armado, con los dos tipos de comportamiento del acero. Se observa el aumento de resistencia del sistema de acuerdo con la configuración del refuerzo. En los modelos con elasticidad se observa la similitud de la rigidez inicial con los modelos con plasticidad del acero, donde además se identifica la pérdida inicial de rigidez cuando solo influye el daño en el hormigón. Asimismo, se evidencia la

incidencia de la plastificación del acero.

En la tabla 2-5 se muestra la relación del cortante en la base entre los modelos con elasticidad  $P_{EL}$  y con plasticidad  $P_{PL}$ , para un desplazamiento horizontal de 0.0274m en la viga. En esta comparación se observa que, al considerar la plasticidad, los cortantes en la base son menores a los cortantes de los modelos elásticos. Esto implica que, en los modelos con elasticidad en el acero, aunque se considere el daño en el hormigón, la capacidad de la estructura se sobreestima entre un 25% y un 40% debido a que en los casos elásticos no se tiene en cuenta el efecto de plasticidad del refuerzo [120].

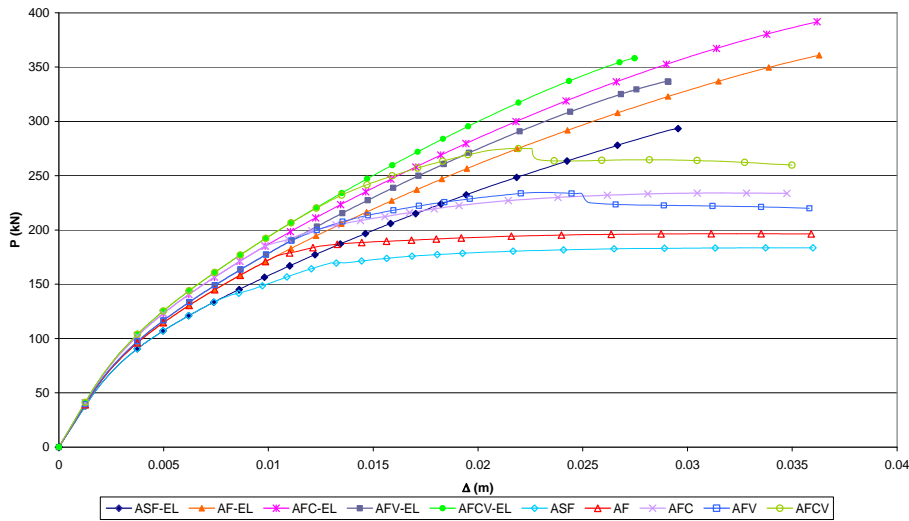


FIGURA 2-23 CORTANTE EN LA BASE (P)- DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL ( $\Delta$ ) COMPARACIÓN AL CONSIDERAR O NO LA PLASTICIDAD EN EL ACERO DE LA ARMADURA.

Relación	Pórtico	ASF-EL	AF-EL	AFC -EL	AFV -EL	AFCV-EL
		.vs. ASF	.vs. AF	.vs. AFC	.vs. AFV	.vs. AFCV
$P_{EL}$ .vs. $P_{PL}$ (%)		35.3	37.3	32.0	32.2	26.1

TABLA 2-5 RELACIÓN DEL CORTANTE EN LA BASE PARA UN DESPLAZAMIENTO DE 0.0274M

De acuerdo con lo observado, en los modelos con elasticidad en el acero, la no linealidad del comportamiento se debe únicamente al daño en el hormigón. Por el contrario, en los modelos con plasticidad, la no linealidad esta gobernada por el daño en el hormigón y su interacción con la plasticidad presentada en el acero.

### 2.7.2 Pórticos rehabilitados y reparados en tres dimensiones (3D)

Con el objetivo de analizar las estructuras reforzadas con FRP de una forma integral en tres dimensiones, se hizo un análisis no lineal incremental (pushover analysis) a cinco estructuras aperticadas con configuraciones de refuerzo similares a las estructuras de hormigón armado analizadas en el estado plano.

Adicionalmente para evidenciar las ventajas de la reparación con FRP se simula un pórtico en hormigón armado sin refuerzo al que se le aplica un ciclo de carga y descarga con un desplazamiento horizontal, luego se vuelve a cargar bajo dos panoramas, uno en el que el pórtico no se repara y otro en que el pórtico es reparado con dos configuraciones de FRP: una en la que se repara la unión y la base de los pilares, y otra, en la que además se refuerza una extensión adicional de la viga. También se analiza bajo el mismo ciclo de carga-descarga-recarga un pórtico rehabilitado en la unión y la base de los pilares.

Con estas simulaciones numéricas se muestra que en el caso de analizar estructuras reparadas, a través del algoritmo de construcción por etapas, se puede considerar las limitaciones que ocasiona el estado de daño y de plasticidad preexistente en los elementos estructurales.

2.7.2.1 Descripción de los modelos estudiados en tres dimensiones

- *Geometría y configuraciones de refuerzo*

En la figura 2-14 se muestra la geometría de los modelos junto con las armaduras de la viga y de los pilares para los pórticos en hormigón armado. En la figura 2-24 se presentan las configuraciones del refuerzo con CFRP, las dimensiones de estas configuraciones se muestran en figura 2-15.

Tipo de pórtico	Nomenclatura
Pórtico sin CFRP (FIGURA 2-24(a))	ASF-3D
Pórtico rehabilitado con CFRP en la unión (FIGURA 2-24 (b))	AF-3D
Pórtico rehabilitado con CFRP en la unión y en la base del pilar (FIGURA 2-24 (c))	AFC-3D
Pórtico rehabilitado con CFRP en la unión y extensión en la viga (FIGURA 2-24 (d))	AFV-3D
Pórtico rehabilitado con CFRP en la unión, extensión en la viga y en la base del pilar (FIGURA 2-24 (e))	AFCV-3D

TABLA 2-6 NOMENCLATURA DE LOS MODELOS DE LOS PÓRTICOS 3D BAJO PUSHOVER

Tipo de pórtico	Nomenclatura
Pórtico sin reparación	ASF- ASF
Pórtico rehabilitado con CFRP en la unión y en la base del pilar (FIGURA 2-24 (c))	AFC - AFC
Pórtico reparado con CFRP en la unión y en la base del pilar (FIGURA 2-24 (c))	ASF- AFC
Pórtico reparado con CFRP en la unión, extensión en la viga y en la base del pilar (FIGURA 2-24 (e))	ASF- AFCV

TABLA 2-7 NOMENCLATURA DE LOS MODELOS DE LOS PÓRTICOS 3D BAJO UN CICLO DE CARGA-DESCARGA-RECARGA

En la tabla 2-6 se indica la nomenclatura utilizada para los modelos de los pórticos rehabilitados y el modelo sin refuerzo que sirve de parámetro para observar las

ventajas de colocar el refuerzo. En la tabla 2-7 se señala la nomenclatura de los modelos que se le aplica un ciclo de carga, descarga y recarga.

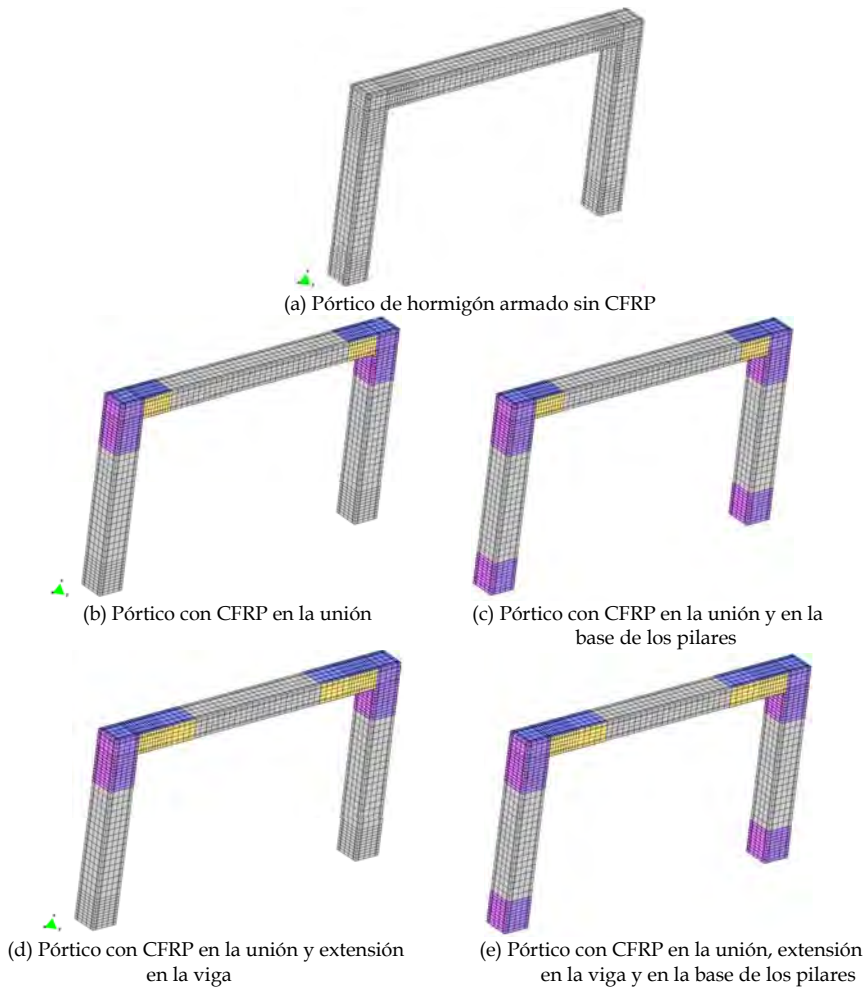


FIGURA 2-24 MODELOS DE LOS PÓRTICOS CON LAS CONFIGURACIONES DE REFUERZO EN 3D

En la figura 2-25 se indican los materiales compuestos que conforman los pórticos de acuerdo con su configuración, en la parte (a) se señalan los materiales correspondientes al refuerzo con CFRP y en la parte (b) se identifican los materiales compuestos asignados a la estructura de hormigón armado.

Los porcentajes volumétricos en los que participan los componentes en cada material compuesto se señalan en la tabla 2-8, donde se especifica la dirección de las fibras del compuesto considerada como parte de la anisotropía del compuesto. Las propiedades de los materiales simples se muestran en la tabla 2-9.



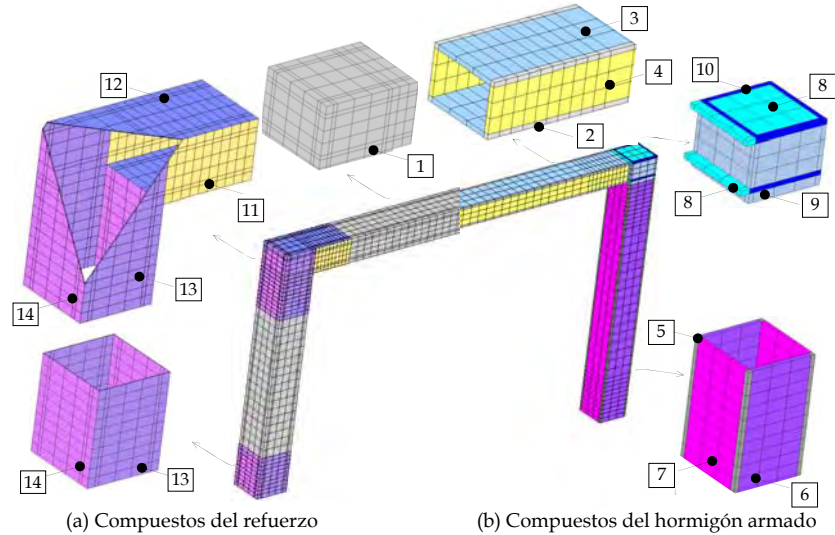


FIGURA 2-25 CONFIGURACIÓN DE LOS MATERIALES COMPUESTOS EN LOS PÓRTICOS

Material compuesto	Matriz Hormigón	Acero Longitud	Acero Vertical	Cerco xx	Cerco yy	Cerco zz	Matriz Polimérica.	CFRP xx	CFRP yy	CFRP zz
1	100.00									
2	91.33	6.09			1.29	1.29				
3	92.60	6.10			1.30					
4	98.70					1.30				
5	82.31		13.40	2.01	2.28					
6	84.60		13.40	2.00						
7	84.60		13.40		2.00					
8	93.90	6.10								
9	86.60		13.40							
10	80.50	6.10	13.40							
11							34.00	33.00		33.00
12							34.00	33.00	33.00	
13							34.00	33.00		33.00
14							34.00		33.00	33.00

TABLA 2-8 PORCENTAJES DE LOS COMPONENTES EN LOS COMPUESTOS DE LOS PÓRTICOS

Material	Criterio de fluencia	$E_x=E_y=E_z$ MPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$\sigma_t$ MPa	$G_c$ J/m <sup>2</sup>	$G_t$ J/m <sup>2</sup>
Hormigón	Mohr-Coulomb	$2.5 \cdot 10^4$	0.20	30.0	3.0	50.0	5.0
Acero	Von Mises	$2.1 \cdot 10^5$	0.00	270.0	270.0	2000.0	2000.0
Matriz polimérica	Mohr-Coulomb	$1.2 \cdot 10^4$	0.20	87.5	29.2	36.0	3.0
Fibra de carbono	Von Mises	$1.5 \cdot 10^5$	0.00	2300.0	2300.0	2000.0	2000.0

TABLA 2-9 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES COMPONENTES EN LOS PÓRTICOS

- Descripción de los modelos constitutivos considerados para los materiales

Los modelos analizados por control de desplazamientos tienen una malla de elementos finitos hexaédricos. En lo que respecta al análisis del comportamiento de los materiales simples, para determinar el daño en el hormigón y la matriz

polimérica del compuesto, se aplicó el modelo de daño isótropo; para el acero se utilizó el modelo elasto-plástico, mientras que la fibra de carbono se analizó como un material elástico y lineal. En todos los casos se ha partido de la hipótesis que no hay daño inicial en el pórtico.

De otra parte, es importante recalcar que con el mallado en 3D aplicando la teoría de mezclas se consideran los efectos del confinamiento en el hormigón producido por los cercos sin requerirse modelos constitutivos específicos que consideren el hormigón confinado. En los análisis de reparación de las estructuras de hormigón reforzado se aplicó el algoritmo de construcción de estructuras por etapas propuesto por Martínez [100].

### 2.7.2.2 Análisis del comportamiento de los pórticos rehabilitados

- *Resistencia y rigidez en pórticos rehabilitados en 3D*

En la figura 2-32 se muestra el cortante en la base del pórtico con respecto al desplazamiento horizontal aplicado en la mitad de la luz de la viga. En esta figura se observa que los diferentes modelos tienen una rigidez inicial similar y que su comportamiento se conserva lineal aproximadamente hasta los 0.0015m, luego, según la configuración del refuerzo del sistema, la pérdida rigidez varía de acuerdo con el desarrollo del daño y de plasticidad. En esta figura se aprecia que el FRP como refuerzo aumenta la capacidad de las estructuras, reduciendo de paso la pérdida de rigidez de los sistemas, no obstante, también se muestra que el refuerzo no aumenta la rigidez lateral de los pórticos, como lo indica Tastani y Pantazopoulou [32] en su investigación experimental.

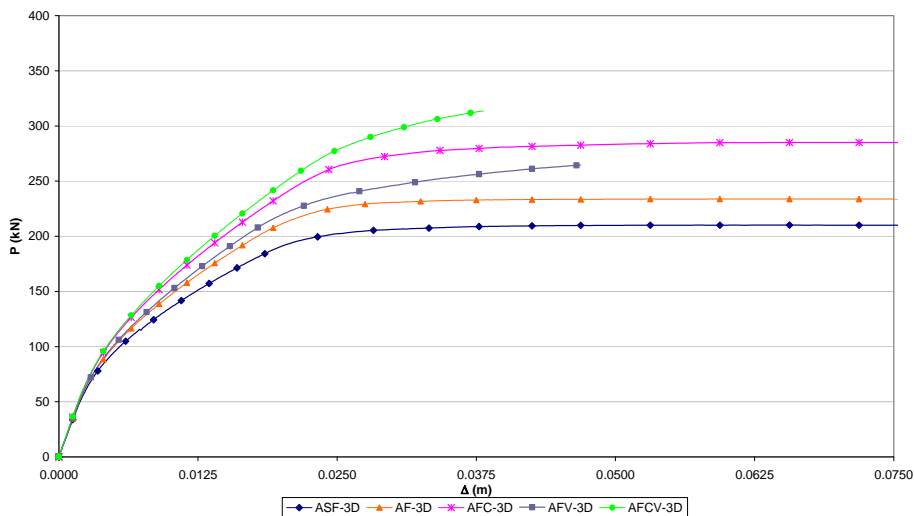


FIGURA 2-26 CORTANTE EN LA BASE (P)- DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL ( $\Delta$ ) EN LOS PÓRTICOS REHABILITADOS.

En la tabla 2-10 se indican la resistencia máxima de cada configuración y el porcentaje del aumento de resistencia por el refuerzo en los pórticos. De acuerdo

con lo visto en la figura 2-32 se tiene que los pórticos que tienen menor pérdida de rigidez y presentan una mayor capacidad son los que están reforzados en los pilares (AFC-3D y AFCV-3D); asimismo se aprecia que el menor porcentaje de aumento de resistencia corresponde al caso en que solo se refuerza la unión AF-3D. Al comparar los modelos AFV-3D con AF-3D y AFCV-3D con AFC-3D, se identifica que los pórticos con mayor longitud de refuerzo en las vigas tienen menor pérdida de rigidez; sin embargo se tiene que las configuraciones AFV-3D y AFCV-3D perdieron convergencia. Aunque las curvas de AFV-3D y AFCV-3D muestran la tendencia de capacidad mayor; la pérdida de convergencia no permite definir si al menos estos pórticos tienen una ductilidad similar a la de ASF-3D.

Variable	Pórticos				
	ASF-3D	AF-3D	AFC-3D	AFV-3D*	AFCV-3D*
Cortante en la base máximo $P_{max}$ (kN)	210.05	233.76	284.98	264.43	313.48
Desplazamiento por cortante máximo $\Delta_{Pmax}$ (m)	0.0575	0.075	0.0575	0.0469	0.0380
$P_{max-3D}$ .vs. $P_{max-ASF-3D}$ (%)	-	11.3	35.6	25.9	49.2

\* Modelo con pérdida convergencia

TABLA 2-10 CORTANTE MÁXIMO EN LA BASE Y DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL EN PÓRTICOS 3D.

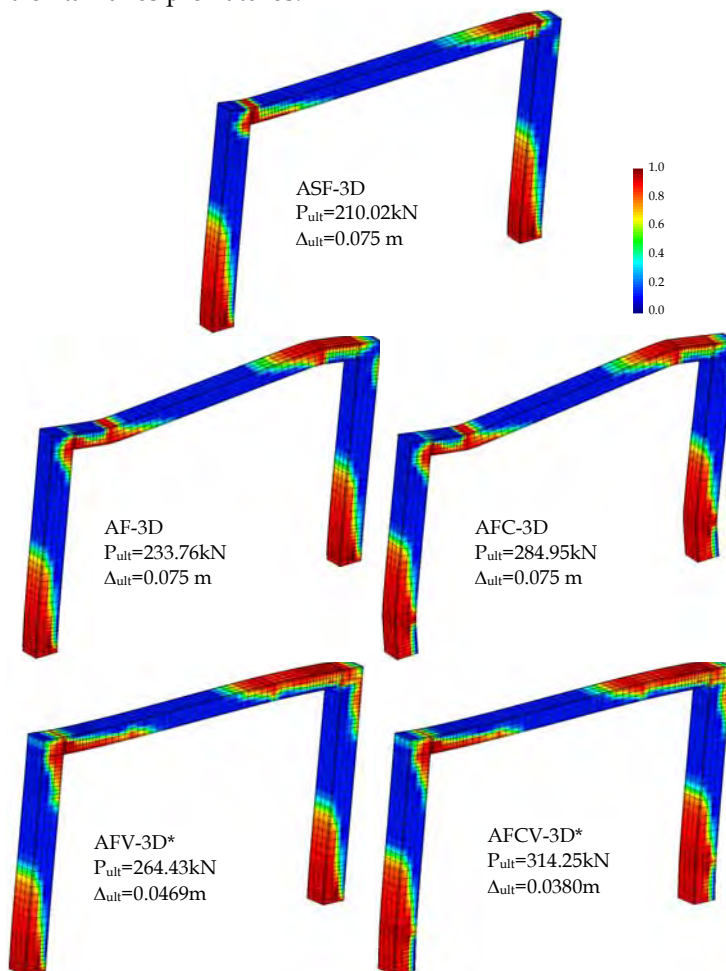
- *Daño en los pórticos rehabilitados*

En la figura 2-27 se muestra la distribución de daño en el hormigón confinado de los pórticos para el estado de carga último ( $P_{ult}$ ), indicando además el correspondiente desplazamiento ( $\Delta_{ult}$ ). En la figura 2-28 se señala la distribución de daño en el hormigón del plano medio de los pórticos, donde se observa que en el núcleo de hormigón el daño es menor que en la superficie de la zona confinada.

En las dos figuras se aprecia que dependiendo del refuerzo se presenta diferentes niveles de daño en los elementos estructurales, no obstante, los elementos más afectados son los pilares, incluso hay sectores con daño en gran parte de su sección transversal. En las zonas reforzadas de los pórticos, el daño en el hormigón de recubrimiento se reduce más de un 50% con respecto al daño presentado en el pórtico sin refuerzo ASF-3D (ver figura 2-28). En cambio, en el hormigón de confinamiento el daño se distribuye en una mayor área, particularmente se localiza hacia los extremos del refuerzo, lo que indica que en todos los pórticos con refuerzo hay un control del daño para que la estructura no falle cerca a las uniones, asimismo, en AFC-3D y AFCV-3D, se controla el daño para prevenir el fallo en la base de los pilares. El control del daño en las zonas reforzadas es fundamental, dado que conduce a que los sistemas reforzados soporten mayores cargas, tal y como se ha visto en los diferentes ensayos experimentales [47; 48; 56; 58; 61].

Comparando en las dos figuras los casos AF-3D con AFC-3D y AFV-3D con AFCV-3, se observa que, al colocar el refuerzo en la base de los pilares, el daño en la base se reduce un 20%, esto permite que se pueda prevenir el fallo por corte en esta zona. En todas las configuraciones de refuerzo, el daño en el extremo de las vigas se reduce, con lo cual se garantiza que no se formen rótulas plásticas en la unión o en una zona muy cercana como sucede en ASF-3D. Sin embargo, se observa que ante el aumento de capacidad a la flexión de la zona reforzada, los pórticos AF-3D y AFC-3D presentan mayores giros en las zonas donde termina el refuerzo, lo que

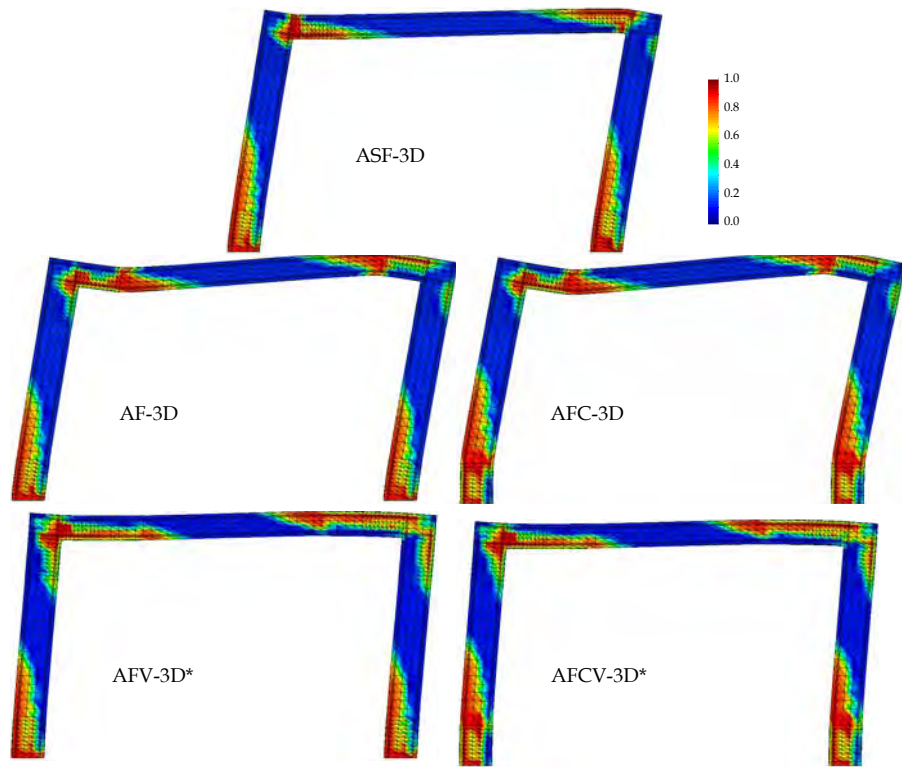
conduce a que estos sectores sean susceptibles a la formación de rótulas plásticas si la armadura es apropiada, o a la fractura si la armadura a cortante es insuficiente, como lo muestran de Alsayed et al. [49; 50] y Karayinis y Sirkelis [64] en sus ensayos. Esto constata la recomendación de Ghobarah y El-Amoury [53], en lo que respecta a que debe garantizarse la integridad del hormigón y la resistencia en las vigas para evitar fallos prematuros.



\* Modelo con pérdida convergencia

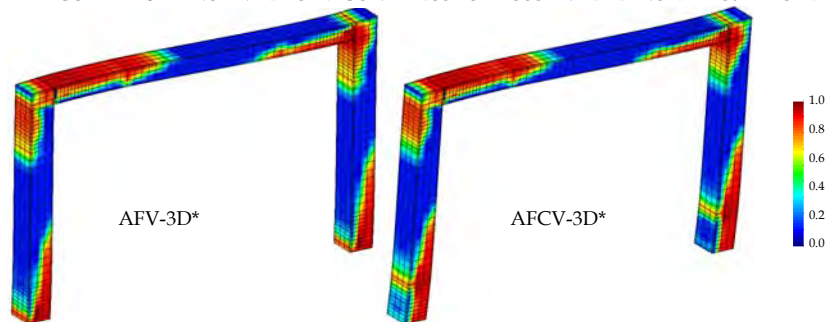
FIGURA 2-27 DAÑO EN EL HORMIGÓN CONFINADO DE LOS PÓRTICOS 3D. DEFORMADA 1:5

En la figura 2-28 se observa que en todos los pórticos con refuerzo el daño se concentra en los sectores donde termina el FRP, si no hay una adecuada adherencia entre el refuerzo y el hormigón, puede ocasionar su deslizamiento, incluso el despegue del FRP y/ o el desprendimiento del hormigón de recubrimiento. Asimismo debe tenerse especial cuidado en el diseño con el incremento de las rotaciones para evitar el fallo local del refuerzo (despegue, rotura, o delaminación), como se ha presentado en diferentes ensayos [53; 57; 58; 59].



\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-28 DAÑO EN EL HORMIGÓN DE LOS PÓRTICOS EN EL PLANO MEDIO. DEFORMADA 1:5



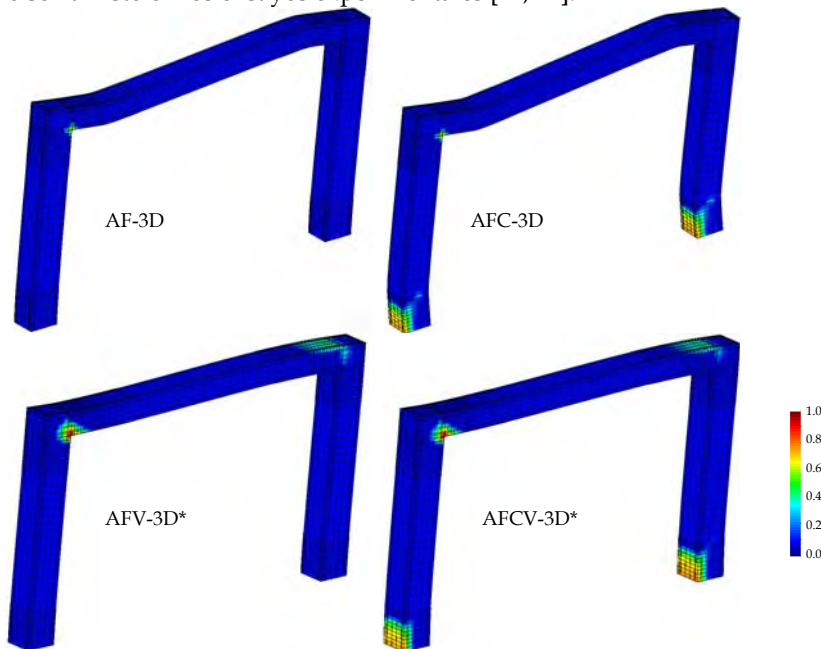
\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-29 DAÑO EN EL HORMIGÓN CONFINADO DE LOS PÓRTICOS AFV-3D Y AFCV-3D

De otra parte, en la figura 2-28 se aprecia que a diferencia de los otros casos, los pórticos AFV-3D y AFCV-3D presentan daño por corte en el núcleo de hormigón de la unión de la esquina que tiende a cerrarse, a pesar que el desplazamiento horizontal aplicado corresponda a un 62.5% y un 50.6% del máximo impuesto en los otros pórticos. En la figura 2-29 se muestra el daño en el otro lado de estos pórticos, donde se ve el daño de la unión en mención, probablemente esto conlleva a que se pierda la convergencia con desplazamientos mayores.

Si bien el refuerzo en AFV-3D y AFCV-3D aumenta la capacidad de carga, para la estructura de hormigón armado analizada el refuerzo adicional en la viga puede conducir un fallo frágil, debido a que produce daño por corte en una unión que no cuenta con cercos que lo mitiguen. Esto evidencia que es necesario tener en cuenta que el refuerzo puede cambiar el modo de fallo de los elementos estructurales [51], lo esencial es garantizar que la estructura de hormigón armado pueda resistir las tensiones que origina la configuración de refuerzo que se seleccione.

En la figura 2-30 se muestra el daño en la matriz del refuerzo de los diferentes pórticos para el estado de carga último, lo que evidencia que no se puede considerar el FRP como un material elástico y lineal, el comportamiento del FRP se ve influenciado por el daño y la pérdida de resistencia del hormigón, y la plasticidad en la armadura. En los pórticos en que se refuerza la viga una longitud adicional AFV-3D y AFCV-3D se presenta daño en la matriz del FRP hacia el extremo de la viga en la esquina del pórtico que tiende a cerrarse, lo que indica que en esta zona el refuerzo es susceptible al despegue o a la delaminación. En la base de los pilares reforzados (AFC-3D y AFCV-3D) también hay daño en la matriz del FRP, incluso el daño en la matriz del FRP puede inducir a la rotura del refuerzo como se ha visto en los ensayos experimentales [41; 42].



\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-30 DAÑO EN LA MATRIZ DEL FRP DE LOS PÓRTICOS 3D. DEFORMADA 1:5

En todos los pórticos reforzados hay daño en la matriz del FRP en la esquina interna en que se intersecta la viga con la columna y que tiende a abrirse, siendo mayor el daño en los pórticos que tienen refuerzo adicional en la viga AFV-3D y AFCV-3D, un detalle del daño se ve en la figura 2-31. Dado el daño que se presenta

en las esquinas de las uniones algunos investigadores recomiendan colocar un mayor refuerzo en esta zona o combinar el FRP con otra técnica de refuerzo complementaria [49; 52; 51; 61].

Se corrobora que al reforzar las estructuras con CFRP, se aumenta la capacidad de los elementos estructurales y se reduce la pérdida de rigidez del sistema estructural, debido a que con el refuerzo en las zonas solicitadas a altas tensiones se disminuye el nivel de daño. No obstante, el grado de eficiencia del refuerzo depende de la configuración del refuerzo que se seleccione y de la configuración de la estructura original.

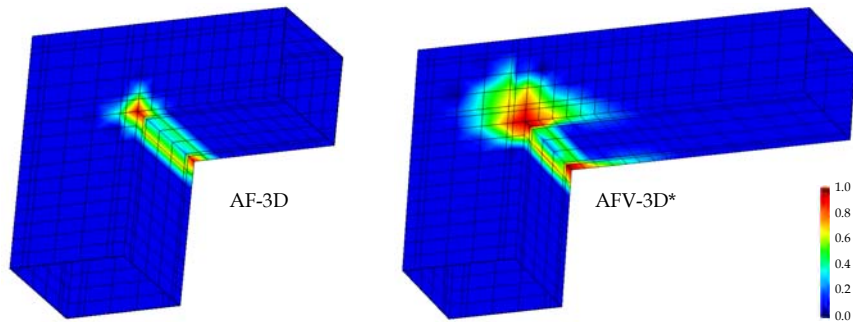


FIGURA 2-31 DAÑO EN LA MATRIZ DEL FRP EN LA UNIÓN DE LOS PÓRTICOS 3D.

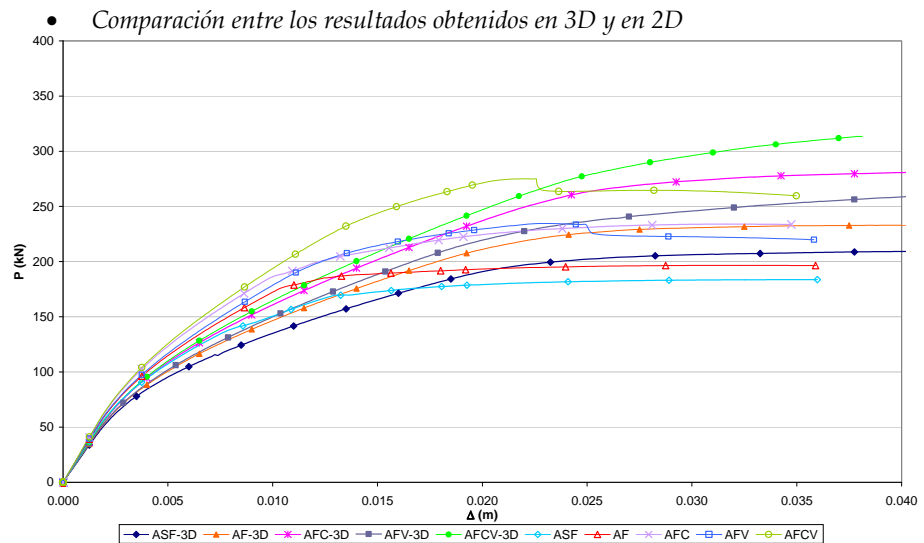


FIGURA 2-32 CORTANTE EN LA BASE (P)- DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL ( $\Delta$ ) COMPARACIÓN DE PÓRTICOS REHABILITADOS ENTRE ANÁLISIS DE 3D VS. ANÁLISIS DE 2D.

En la figura 2-32 se comparan las curvas obtenidas de las 5 configuraciones analizadas en 2D y 3D. Se muestra que en los dos tipos de análisis la rigidez inicial es la misma y que el refuerzo no aumenta la rigidez lateral de los pórticos. Las

diferencias entre los dos análisis se presentan en el campo no lineal, es así como los pórticos analizados en 2D presentan una menor pérdida de rigidez que los analizados en 3D, pero en 2D las cargas máximas son menores. En los dos análisis coinciden en mostrar que el incremento de la capacidad es mayor cuando se refuerza la unión, la base del pilar y la viga (AFCV y AFCV-3D) y que el menor incremento se da cuando se refuerza únicamente la unión (AF y AF-3D). Con las otras dos configuraciones los análisis difieren, en 2D, AFC y AFV presentan un comportamiento parecido, mientras que en 3D, AFC-3D tiene una capacidad de carga mayor a la de AFV-3D.

En la tabla 2-11 se muestra la diferencia porcentual de la capacidad de carga obtenida entre los dos análisis, donde las diferencias están entre un 12.8% y un 21.8%. Con estas diferencias se hace evidente que al hacer el análisis en 3D intrínsecamente con la teoría de mezclas se considera el confinamiento del hormigón sin requerirse modelos constitutivos específicos que involucren el confinamiento, pero en los análisis en 2D es conveniente aplicar al hormigón confinado uno de estos modelos para tener una mejor aproximación, no obstante los análisis en 2D muestran las tendencias del comportamiento de las estructuras reforzadas con la evolución de los fenómenos que en ellas se presentan.

Pórticos	ASF-3D .vs. ASF	AF-3D .vs. AF	AFC-3D .vs. AFC	AFV-3D vs. AFV	AFCV-3D vs. AFCV
Variable					
$P_{\max-3D}$ .vs. $P_{\max-2D}$ (%)	14.4	19.0	21.8	12.8	14.3

TABLA 2-11 DIFERENCIA DEL CORTANTE MÁXIMO EN LA BASE PARA PÓRTICOS REHABILITADOS.

Al comparar la distribución del daño en el hormigón de la figura 2-22 con la figura 2-28 se tiene que los pórticos en 2D y en los pórticos en 3D reflejan una misma tendencia, asimismo en los dos análisis se evidencia que el mayor daño se presenta en las zonas donde termina el refuerzo.

### 2.7.2.3 Análisis del comportamiento de los pórticos reparados

En diferentes situaciones existen estructuras con daño que requieren ser reparadas. El daño en la estructura puede ser causado por varias razones, como la colisión [121], un sismo [4; 5], o cuando se aplica una carga en la estructura que excede la capacidad para la cual fue diseñada.

A continuación se estudian dos casos de reparación, es necesario aclarar que en este apartado al hacer referencia a la reparación, sólo se esta involucrando en el análisis numérico la adición del refuerzo, no se considera que la reparación de las fisuras disminuya el nivel de daño alcanzado en la estructura por solicitaciones previas al refuerzo. Por lo tanto, al tener en cuenta el estado de carga previo a la colocación del refuerzo en las simulaciones también se está incluyendo el estado de daño y de plasticidad de la estructura, así como su deformación.

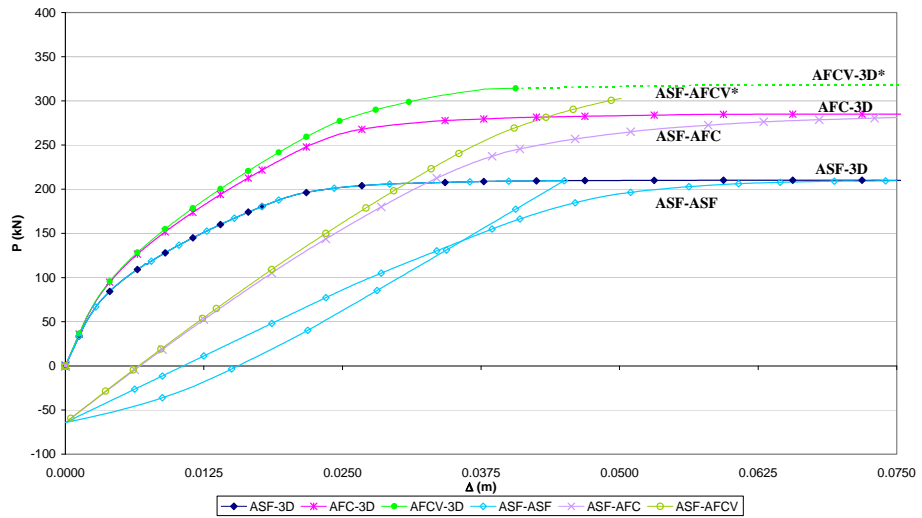
- *Resistencia y rigidez en 3D de pórticos reparados con FRP*

Como se observa en la figura 2-33, el pórtico sin refuerzo ASF-3D se desplazó horizontalmente hasta alcanzar 0.045m y se regresó a su posición inicial, con el



propósito de considerar la alineación de la estructura como parte del proceso de reparación. Para el nuevo proceso de carga se consideraron tres opciones, el pórtico sin refuerzo (ASF-ASF), el pórtico reparado con la configuración AFC-3D (ASF-AFC) y el pórtico reparado con la configuración AFCV-3D(ASF-AFCV).

Se aprecia el pórtico ASF-3D para la descarga presenta un desplazamiento permanente de 0.015m, lo que implica que aparte de daño en el hormigón también hay plasticidad en el acero. Para dejarlo en su posición inicial se le aplica una carga en la dirección opuesta que muestra un comportamiento no lineal de la estructura. Para el nuevo fase de carga se tiene que en los pórticos reparados se aumenta la rigidez con respecto a ASF-ASF, aunque es menor que la rigidez inicial. Esto implica que si bien en el pórtico rehabilitado no hay cambio en la rigidez inicial, en una estructura con daño al reforzarse se logra aumentar su rigidez.



\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-33 CORTANTE EN LA BASE (P) - DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL (Δ) EN LOS PÓRTICOS REPARADOS.

En la figura 2-33 se ve que en la reparación también incrementa la capacidad de carga, las cargas máximas de ASF-AFC y ASF-AFCV se aproximan a las cargas máximas de los pórticos rehabilitados AFC-3D y AFCV-3D respectivamente, aunque son menores. Al igual como paso con la configuración rehabilitada AFCV-3D, en el análisis de ASF-AFCV se perdió la convergencia.

Variable	Pórticos		
	ASF- ASF	ASF-AFC	ASF-AFCV*
Cortante en la base máximo $P_{max}$ (kN)	209.66	281.19	302.76
Desplazamiento por cortante máximo $\Delta_{Pmax}$ (m)	0.0450	0.0750	0.0501*
$P_{max-C} / P_{max-ASF-ASF}$	-	34.1%	44.4%

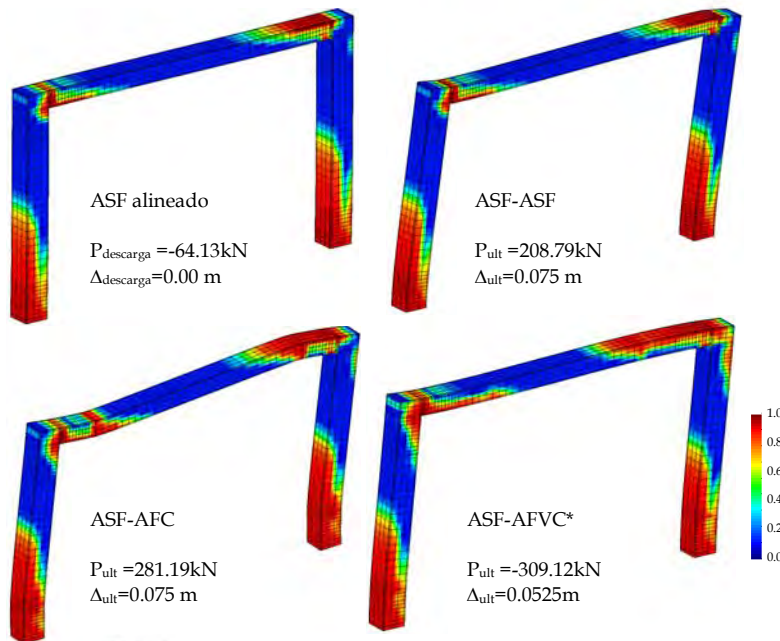
\* Modelo con pérdida convergencia

TABLA 2-12 CORTANTE MÁXIMO EN LA BASE Y DESPLAZAMIENTO EN LOS PÓRTICOS REPARADOS.

En la tabla 2-12 se indican las cargas máximas obtenidas en cada caso y el porcentaje de incremento de capacidad. Al compararse con la tabla 2-10 se tiene que el porcentaje de incremento de la capacidad es menor en las estructuras reparadas, esto se debe básicamente a que hay daño y plasticidad previo a colocar el refuerzo en las estructuras reparadas.

- *Daño en pórticos reparados en 3D*

En la figura 2-34 se muestra la distribución de daño inicial en el hormigón confinado antes de colocar el refuerzo y la distribución de daño de los pórticos en el estado de carga último.



\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-34 DAÑO EN EL HORMIGÓN CONFINADO DE LOS PÓRTICOS REPARADOS. DEFORMADA 1:5

En ASF-AFC se tiene que el daño inicial no se incrementa en las zonas reparadas, lo que contribuye a que se aumente la capacidad a flexión y a cortante de la estructura. En la estructura reparada ASF-AFCV se tiene que el daño inicial en la base los pilares y en la unión de la esquina que tiende a abrirse no se incrementa, pero en la unión de la esquina que tiende a cerrarse el daño aumenta y se prolonga a la cara exterior de la columna; el daño en la unión es por corte, de igual forma como sucede en AFCV-3D. Para las dos estructuras reparadas, el daño se incrementa en las zonas de las vigas donde termina el refuerzo, por ello se debe garantizar que en estas zonas, las vigas cuenten con la armadura suficiente para que se desarrollen rótulas plásticas, en lugar de que fallen por corte.

Comparando el daño entre ASF-ASF con el de las estructuras reparadas, se tiene que sin refuerzo, el daño en los extremos de la viga es total ( $d \approx 1$ ), mientras que en

las estructuras reparadas el daño en los extremos de la viga corresponde al daño previo al colocar el refuerzo. De otra parte se tiene que para ASF-ASF el daño en la base de los pilares no aumenta, pero se debe tener en cuenta que tampoco hay un incremento en la sollicitación a cortante, durante la recarga el cortante en la base es menor al cortante máximo alcanzado en la fase de carga.

- *Plasticidad en pórticos reparados en 3D*

En la figura 2-35 se muestra para el estado de carga último la distribución del factor de endurecimiento como un parámetro de medida de la plasticidad en la armadura de los pórticos analizados. Se tiene que el pórtico ASF-3D alineado presenta plasticidad en los extremos de la viga y en la base de los pilares, al recargarse sin colocar refuerzo ASF-ASF la plasticidad se incrementa más de 70%, en cambio si se refuerza la plasticidad en estos sectores no se incrementa. Lo que muestra que la reparación retrasa la plastificación de la armadura tal y como lo menciona Tastani y Pantazopoulou [32].

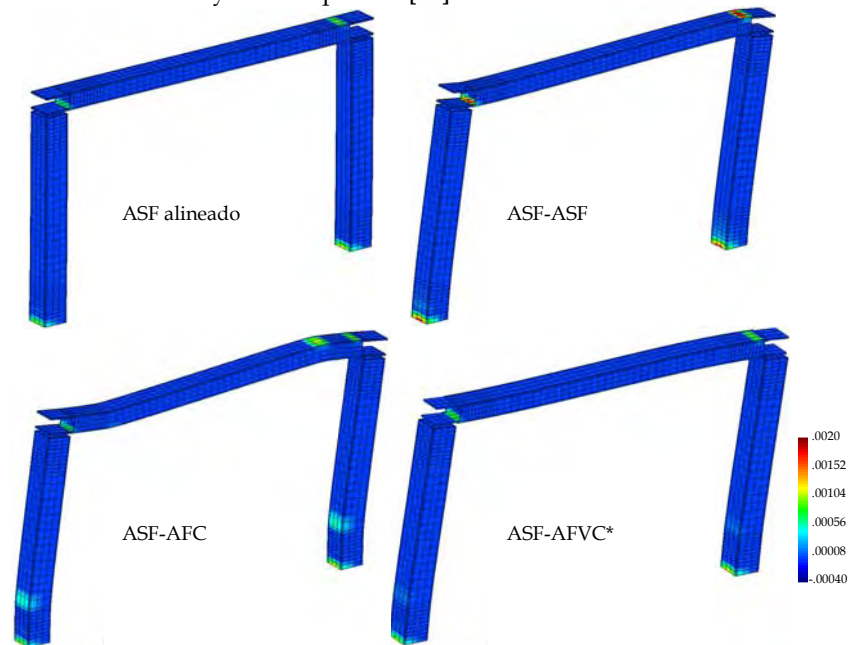


FIGURA 2-35 PLASTICIDAD EN LA ARMADURA DE LOS PÓRTICOS REPARADOS. DEFORMADA 1:5

El desarrollo de la plasticidad en la armadura de ASF-ASF se debe al incremento del desplazamiento, que conlleva a una mayor flexión en la estructura, pero como se mencionó anteriormente, no hay aumento del cortante en la base. En cambio en el pórtico ASF-FC se aprecia que el incremento de cortante en la base no afecta la base de los pilares, pero el aumento de flexión en el pórtico incide en que la armadura comience a plastificar en las zonas donde termina el refuerzo tanto en la viga como en los pilares, esto evidencia el desarrollo de un mecanismo de fallo dúctil siempre que no falle el refuerzo.

- *Comparación de pórticos reparados y rehabilitados en 3D*

Con el propósito de hacer una comparación objetiva del comportamiento entre las estructuras reparadas y reforzadas, paralelamente se analiza bajo el mismo ciclo de carga-descarga-recarga un pórtico rehabilitado en la unión y la base de los pilares.

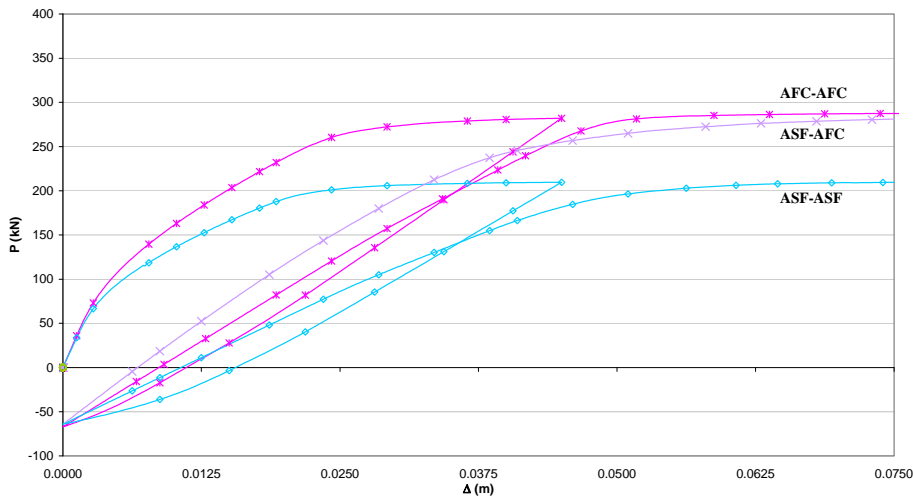


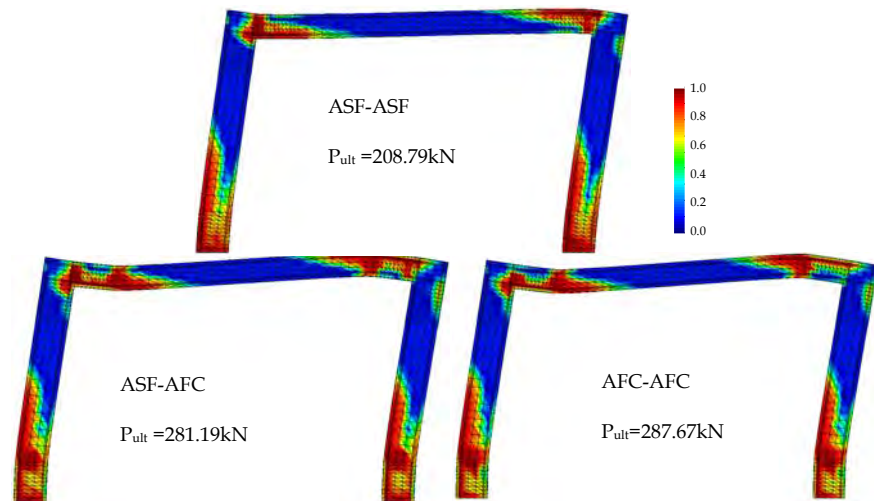
FIGURA 2-36 CORTANTE EN LA BASE (P)- DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL ( $\Delta$ ) DEL PÓRTICO SIN REFUERZO ASF-ASF, DEL PÓRTICO REPARADO ASF-AFC Y DEL PÓRTICO REHABILITADO AFC-AFC.

Comparando el comportamiento del pórtico rehabilitado AFC-AFC con el pórtico reparado ASF-FC y el pórtico sin refuerzo ASF-ASF, se tiene que en la figura 2-36 se observa que en la recarga, la estructura reparada ASF-FC presenta mayor rigidez que la estructura rehabilitada AFC-AFC. Tanto AFC-AFC como ASF-FC presentan mayor rigidez en la fase de recarga que el pórtico sin refuerzo. AFC-AFC y ASF-FC alcanzan un cortante en la base aproximado, sin embargo AFC-AFC es mayor un 2%; en sus ensayos Alsayed et al. [49; 50] también encontraron que los pórticos reparados alcanzaron una capacidad de carga similar a la de los pórticos rehabilitados, pese al daño inicial de la estructura reparada.

La pequeña diferencia en la capacidad de carga puede atribuirse al daño y a la plasticidad de la estructura ASF-FC previo a la reparación. En la recarga, la mayor rigidez del pórtico reparado se debe a que el FRP inicia la fase sin daño, mientras que el refuerzo AFC-AFC comienza la fase con daño en la esquina interna de la unión que tiende a abrirse y en la base de los pilares.

En la figura 2-37 se muestra el daño en las tres estructuras en el plano medio para el estado de carga último. Se aprecia en la base de los pilares el mayor daño se presenta en el pórtico sin refuerzo ASF-ASF, mientras que el daño AFC-AFC es levemente menor al del pórtico reparado. En los dos extremos de la viga hay daño total en ASF-ASF, en ASF-AFC el daño en los extremos es parcial acorde con el daño de la estructura antes de ser reparada, en cambio en AFC-AFC el daño es mayor en el extremo de la esquina del pórtico que tiende a abrirse, en el otro

extremo el daño se presenta alrededor de la armadura superior. La distribución de daño es similar en los extremos donde termina el refuerzo tanto en los pilares como en las vigas para las dos estructuras reforzadas, lo que indica que la armadura bajo cualquiera de los dos panoramas debe tener la armadura suficiente para prevenir un fallo por corte en estas zonas.



\* Modelo con pérdida convergencia

FIGURA 2-37 DAÑO EN EL HORMIGÓN DE LOS PÓRTICOS ASF-ASF, ASF-AFC Y AFC-AFC EN EL PLANO MEDIO. DEFORMADA 1:5

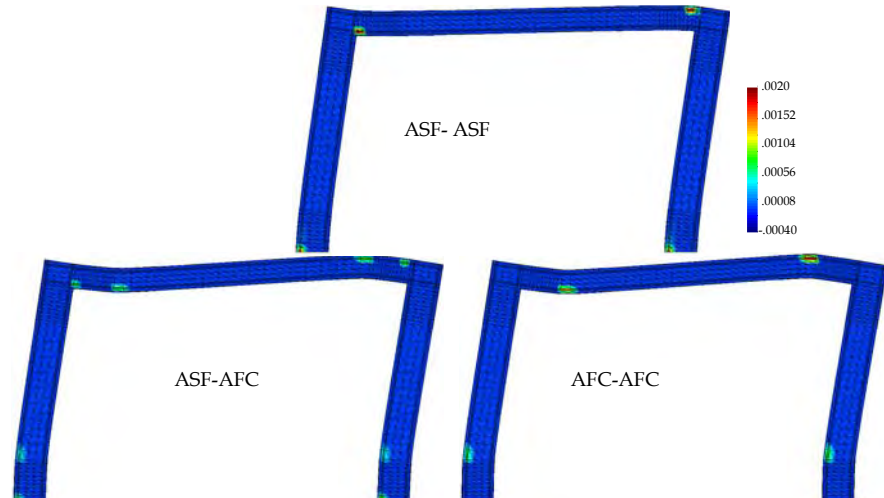


FIGURA 2-38 PLASTICIDAD EN LA ARMADURA DE LOS PÓRTICOS ASF-ASF, ASF-AFC Y AFC-AFC EN EL PLANO MEDIO. DEFORMADA 1:5

En la figura 2-38 se indica la plasticidad de las tres estructuras para el estado de carga último. ASF-ASF presenta mayor plasticidad que las estructuras reforzadas, de otra parte muestra la formación de rótulas plásticas en los extremos de la viga, rótulas que son mecanismos inapropiados de fallo porque pueden generar el fallo

súbito en la unión. La armadura de ASF-AFC presenta una baja plasticidad en los extremos de la viga y en la base de los pilares acorde con el estado de la estructura antes de ser reparada, con el FRP se detiene el aumento de la plasticidad en estos sectores, pero las barras de acero comienzan a plastificar donde termina el refuerzo en la viga y en los pilares. La armadura AFC-AFC sólo muestra plasticidad en los sectores donde termina el refuerzo en los pilares y en la viga. Comparando la estructura reparada con la rehabilitada, se tiene que aunque el pórtico reparado presenta mas sectores con plasticidad, en la estructura rehabilitada la plasticidad en el acero de la viga es mayor mas de un 60% que la de la estructura reparada, esto se debe a que la viga de AFC-AFC con la carga-descarga ya presentaba plasticidad donde termina el FRP y con la recarga se incrementó, mientras que en ASF-AFC con la recarga la armadura comenzó a plastificar en este sector.

Con el desarrollo de los anteriores ejemplos se muestra que con el uso de las teorías de mezclas en las simulaciones numéricas se analiza de una forma eficiente el comportamiento de los materiales compuestos, identificando la forma de participación de sus componentes y su interacción, de igual forma, permite el análisis del comportamiento global de las estructuras, estableciendo además la incidencia de los materiales compuestos como parte integral de los elementos estructurales reforzados, bien sea si son rehabilitados o si son reparados.

## 2.8 Conclusiones del capítulo 2

El comportamiento de las estructuras en hormigón armado reforzadas con FRP depende de múltiples parámetros, lo que dificulta que en la experimentación se puedan analizar todas las variables que inciden en los mecanismos de fallo que se generan en las estructuras reforzadas y en el refuerzo. Lo anterior conduce a que sea necesario el trabajo conjunto entre la experimentación y la simulación numérica con elementos finitos, como una estrategia para investigar de una forma detallada el comportamiento de los compuestos conformados por polímeros reforzados con fibras largas (FRP), como una alternativa de refuerzo en las estructuras que requieran ser reforzadas.

Para el campo de la simulación numérica es importante buscar nuevas herramientas y mejorar las existentes para tener una aproximación más precisa del comportamiento real de las estructuras reforzadas con materiales compuestos, con el propósito de mejorar los análisis y optimizar los diseños tanto en elementos estructurales con cierto nivel de daño (reparación) como en elementos que requieren tener un mejor comportamiento dentro de la estructura (rehabilitación). Teniendo en cuenta que la simulación numérica en el análisis de los materiales compuestos es un campo que esta en desarrollo, hay aspectos de los FRP como material de refuerzo en estructuras de hormigón armado, que por su complejidad aún no han sido suficientemente estudiados para su formulación en el diseño, dentro de ellos la pérdida de adherencia entre el FRP y el hormigón.

La simulación numérica es una herramienta útil y de gran aplicación en el diseño

de soluciones de refuerzo de estructuras de hormigón armado con materiales compuestos. El uso del método de los elementos finitos junto con la estrategia de la teoría de mezclas, permite analizar estructuras con diferentes alternativas de refuerzo, considerando los modelos constitutivos de los componentes de los materiales compuestos; asimismo, permite que se seleccionen las configuraciones más eficientes y se determine la capacidad de resistencia del sistema estructural reforzado, identificando el nivel de daño que se puede alcanzar. Esta aplicación es posible a dos escalas: una local, en donde se estudian los elementos estructurales, en la que los materiales compuestos se utilizan como refuerzo a cortante, a flexión y/o a compresión; y una escala global, en la que se analiza el comportamiento del sistema estructural al reforzar los elementos que lo requieran.

La estrategia de la teoría de mezclas es una herramienta versátil para analizar el comportamiento de las estructuras de materiales compuestos y de sus componentes. Por una parte permite que cada componente del compuesto se analice utilizando la ecuación constitutiva más conveniente para predecir su comportamiento (elasticidad, plasticidad, daño etc.) y, por otra, al obtener el comportamiento del material compuesto en cada punto de Gauss, lo acopla al resto de la estructura definiendo el comportamiento global de la misma. Por tanto, esta herramienta numérica conlleva a un mejor análisis de las estructuras de materiales compuestos ya que permite considerar en la simulación diferentes tipos de no linealidades. Al mismo tiempo, los costos computacionales son reducidos al utilizar un solo mallado continuo para el análisis de la estructura, de los materiales compuestos y de sus componentes.

La teoría serie/paralelo propuesta por Rastellini [99] tiene gran potencial de uso como gestor de modelos constitutivos, se puede utilizar en el análisis no lineal de estructuras de materiales compuestos que estén sujetas al campo de pequeñas deformaciones. No obstante, al partir de la hipótesis que la adherencia es perfecta entre los componentes, no tiene en cuenta las inestabilidades locales que pueden existir en la interfaz fibra/matriz. Frente a esta restricción Martínez [100] introdujo en la formulación de la teoría, la delaminación y el pandeo de la fibra, pero aún no se ha incluido en la teoría serie/paralelo el deslizamiento relativo entre los componentes, como tampoco se ha extendido su formulación al campo de grandes deformaciones de los materiales compuestos. Por lo tanto se requiere mayor investigación, para adaptar la teoría serie/paralelo e introducir nuevos algoritmos que permitan considerar estos fenómenos en el análisis de los compuestos.

El refuerzo con FRP en los pórticos de hormigón armado y simple es una técnica viable que incrementa la capacidad de la estructura, siempre que se configure adecuadamente el refuerzo en los elementos para controlar la evolución del daño. Según los resultados obtenidos en los análisis realizados, tanto para los modelos de hormigón simple, como para los de hormigón armado, el aumento de la capacidad a flexión y a cortante del sistema estructural y la reducción de la pérdida de rigidez depende tanto de la configuración de refuerzo de FRP que se seleccione, como del estado y de la configuración de la estructura original. Por ello, es necesario que a través de la simulación numérica con las teorías de mezclas, se optimicen los

análisis de las estructuras con materiales compuestos para mejorar el diseño del refuerzo de los edificios y de los puentes que necesitan rehabilitación o reparación.

Al no tenerse en cuenta la plasticidad del acero en una estructura de hormigón armado, no se está considerando su influencia en la resistencia y en la pérdida de rigidez del sistema. De igual forma, al considerar el FRP como un material elástico y lineal, no se está considerando que el comportamiento del FRP se ve afectado por el daño en el hormigón y la plasticidad en la armadura. En estos casos se sobreestima la capacidad estructural, con lo que es posible que se diseñe un refuerzo exterior para unas sollicitaciones que no se desarrollarán en la estructura por superar su capacidad real. Por otra parte, considerar únicamente el fenómeno de daño tiene su aplicación en el análisis de estructuras construidas únicamente con materiales frágiles, como es el caso del hormigón simple, de la mampostería o de la piedra, entre otros. Esto permite estudiar el comportamiento de las estructuras frágiles y su mejora al ser reforzadas con FRP, para aplicarlo en la reparación y rehabilitación de algunas estructuras antiguas.

En los análisis experimentales referenciados y las simulaciones realizadas en este capítulo se observa que el daño se concentra en los sectores donde termina el FRP y donde se presentan los mayores giros para los diferentes elementos estructurales, esto implica que si no hay una adecuada adherencia entre el refuerzo y el hormigón, puede ocasionar su deslizamiento, incluso el despegue del FRP y/ o el desprendimiento del hormigón de recubrimiento. Es importante que se plantee una metodología de análisis por medio de la simulación numérica para estudiar el fenómeno de deslizamiento del refuerzo, con el fin de garantizar el uso eficiente del FRP como refuerzo en estructuras de hormigón.

En general se tiene que al reparar o rehabilitar en los elementos estructurales de hormigón armado con FRP se aumenta la resistencia y la ductilidad global de la estructura, no obstante, en la reparación es necesario considerar las limitaciones que puede ocasionar el estado de daño y plasticidad preexistente en el hormigón y en el acero. En lo que respecta a la ductilidad, cabe anotar que su aumento depende de la distribución de la armadura; si la armadura es insuficiente, el refuerzo con FRP incrementa considerablemente la ductilidad del sistema; pero si la armadura aporta por sí misma ductilidad al sistema, al reforzarlo el incremento de su ductilidad es imperceptible. De otra parte, es necesario tener en cuenta que el refuerzo puede cambiar el modo de fallo de los elementos estructurales, lo fundamental es garantizar que la estructura de hormigón armado pueda resistir las tensiones que origina la configuración de refuerzo que se seleccione.

## 2.9 Bibliografía del capítulo 2

- [1] V.M. Karbhari. Building materials for the renewal of civil infrastructure. Reinforced Plastics 49 (1) (2005) 14–25.
- [2] S.S. Pendhari, T. Kant, M.Y. Desai. Application of polymer composites in civil construction: A general review. Composite Structures 84 (2) (2007) 114–124.



- [3] L.C. Hollaway. A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil infrastructure with reference to their important in-service properties. *Construction and Building Materials* 24 (12) (2010) 2419-2445.
- [4] M. Molina. Ductilidad en uniones de concreto reforzadas externamente con láminas de acero. Master en Estructuras. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá, Colombia. (2000).
- [5] C. Gomez, S. Oller, A. Barbat. Evaluación del daño sísmico de puentes de hormigón armado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 18 (2) (2002) 309-329
- [6] L.V.D. Eindea, L. Zhao, F. Seible. Use of FRP composites in civil structural applications. *Construction and Building Materials* 17 (6-7) (2003) 389-403.
- [7] E. Car, S. Oller, E. Oñate. Tratamiento Numérico de Materiales Compuestos Monografía CIMNE No.57. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería - CIMNE, Barcelona, España, 2000.
- [8] L.C. Bank, *Composites for construction: structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons, N.J., USA, 2006.
- [9] ACI Committee 440. ACI 440.2R-08. Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Concrete Structures. American Concrete Institute. MI, USA (2008).
- [10] JSCE. Recommendation for Design and Construction of Concrete Structures Using Continuous Fiber Reinforcing Materials. Research Committee on Continuous Fiber Reinforcing Materials. Japan Society of Civil Engineers. Tokio, JAPAN (1997).
- [11] CSA. Design and Construction of Building Components with Fibre-Reinforced Polymers. Design Code. Standard S806-02. Canadian Standards Association. ONT., CANADA (2002).
- [12] CSA. Canadian Highway Bridge. Design Code. CAN/CSA-S6-00. Canadian Standards Association. ONT., CANADA (2006).
- [13] FIB. Externally Bonded (frp) Reinforcement for RC Structures. FIB Bulletin No. 14. International Federation for Structural Concrete (FIB - Fédération Internationale du Béton). Lausanne, SWISS (2001).
- [14] CNR. Guide for the Design and Construction of Externally Bonded FRP Systems for Strengthening Existing Structures. CNR DT200/2004. CNR Committee-Italian National Research Council. ITALIA (2006).
- [15] A. Nanni. North American design guidelines for concrete reinforcement and strengthening using FRP: Principles, applications and unresolved issues. *Construction and Building Materials* 17(6-7)(2003) 439-446.
- [16] M. Molina, J. Cruz, S. Oller, A. Barbat, L. Gil. Estudio de la interfaz Hormigón-Epoxi-FRP de un ensayo de doble cortante por medio de la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*. 13-14 (1) (2009) 103-121.
- [17] V.M. Karbhari, L. Zhao. Use of composites for 21st century civil infrastructure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185 (2-4) (2000) 433-454.
- [18] A.A. Mufti, B. Bakht, N. Banthia, B. Benmokrane, G. Desgagné, R. Eden, M.-A. Erko, V. Karbhari, J. Kroman, D. Lai, A. Machida, K. Neale, G. Tadros, B. Täljsten. New Canadian Highway Bridge Design Code design provisions for fibre-reinforced structures. *Canadian Journal of Civil Engineering* 34 (3) (2007) 267-283.
- [19] E. J. Barbero *Introduction to composite materials design*. Taylor & Francis Group. 2nd ed. Boca Raton, USA, 2011.
- [20] L. Bizindavyi, K. W. Neale. Transfer lengths and bond strengths for composites bonded to concrete. *Journal of Composites for Construction* ASCE 3 (4) (1999) 153-160.
- [21] L.C. Bank, *Composites for construction : structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons, N.J., USA, 2006.
- [22] O. Benjeddou, M. B. Ouezdou, A. Bedday. Damaged RC beams repaired by bonding of CFRP laminates. *Construction and Building Materials* 21 (6) (2007) 1301-1310.

- [23] R. Kotynia, H.A. Baky, K.W. Neale, U.A. Ebead. Flexural strengthening of RC beams with externally bonded CFRP systems: test results and 3D nonlinear FE analysis. *Journal of Composites for Construction ASCE* 12 (2) (2008) 190–201.
- [24] M.R. Esfahani, M.R. Kianoush, A.R. Tajari. Flexural behaviour of reinforced concrete beams strengthened by CFRP sheets *Engineering Structures* 29 (10) 2007 2428–2444.
- [25] V.M. Karbhari. Materials considerations in FRP rehabilitation of concrete structures. *Journal of Materials in Civil Engineering. ASCE* 13 (2) (2001) 90–97.
- [26] L.C. Hollaway. The evolution of and the way forward for advanced polymer composites in the civil infrastructure. *Construction and Building Materials* 17 (6–7) (2003) 365–378.
- [27] Z.J. Yang, J.F. Chen, D. Proverbs. Finite element modelling of concrete cover separation failure in FRP plated RC beams. *Construction and Building Materials* 17 (1) (2003) 3–13.
- [28] L.J. Li, Y.C. Guo, F. Liu, J.H. Bungey. An experimental and numerical study of the effect of thickness and length of CFRP on performance of repaired reinforced concrete beams. *Construction and Building Materials* 20 (10) (2006) 901–909.
- [29] H. Niu, Z. Wu. Effects of FRP-concrete interface bond properties on the performance of RC beams strengthened in flexure with externally bonded FRP sheets. *Journal of Materials in Civil Engineering ASCE* 18 (5) (2006) 723–731.
- [30] X.Z. Lu, J.G. Teng, L.P. Ye, and J.J. Jiang. Intermediate crack debonding in FRP-strengthened RC beams: FE analysis and strength model. *Journal of Composites for Construction ASCE* 11 (2) (2007) 161–174.
- [31] G. Camata, E. Spacone, R. Zarnic. Experimental and nonlinear finite element studies of RC beams strengthened with FRP plates. *Composites Part B: Engineering* 38 (2) (2007) 277–288.
- [32] S.P. Tastani, S.J. Pantazopoulou. Detailing procedures for seismic rehabilitation of reinforced concrete members with fiber reinforced polymers. *Engineering Structures* 30 (2) (2008) 450–461.
- [33] Y. Xiao, H. Wu. Compressive behavior of concrete confined by carbon fiber composite jackets. *Journal of Materials in Civil Engineering ASCE* 12 (2) (2000) 139–146.
- [34] A. Parvin, W. Wang. Behavior of fiber reinforced plastic jacketed concrete columns under eccentric loading. *Journal of Composites for Construction ASCE* 5 (3) (2001) 146–152.
- [35] O. Ozcan, B. Binici, G. Ozcebe. Improving seismic performance of deficient reinforced concrete columns using carbon fiber-reinforced polymers. *Engineering Structures* 30 (6) (2008) 1632–1646.
- [36] D. Anggawidjaja, T. Ueda, J. Dai, H. Nakai. Deformation capacity of RC piers wrapped by new fiber-reinforced polymer with large fracture strain. *Cement and Concrete Composites* 28 (10) (2006) 914–927.
- [37] A. Nanni, M.S. Norris. FRP jacketed concrete under flexure and combined flexure-compression. *Construction and Building Materials* 9 (5) (1995) 273–281.
- [38] A. Mirmiran, M. Shahawy, M. Samaan, H.E. Echary, J.C. Mastrapa, O. Pico. Effect of column parameters on FRP confined concrete. *Journal of Composites for Construction ASCE* 2 (4) (1998) 175–185.
- [39] L.-M. Wang, Y.-F. Wu. Effect of corner radius on the performance of CFRP-confined square concrete columns: Test. *Engineering Structures* 30 (2) (2008) 493–505.
- [40] A. De Luca; F. Nardone; F. Matta, A. Nanni, G.P. Lignola, A. Prota. Structural Evaluation of Full-Scale FRP-Confined Reinforced Concrete Columns. *Journal of Composites for Construction ASCE* 15 (1) (2011) 112–123.
- [41] C.-T. Cheng, J.-C. Yang, Y.-K. Yeh, S.-E. Chen. Seismic performance of repaired hollow-bridge piers. *Construction and Building Materials* 17 (5) (2003) 339–351.
- [42] G.P. Lignola, A. Prota, G. Manfredi, E. Cosenza. Experimental performance of RC hollow columns confined with CFRP. *Journal of Composites for Construction ASCE* 11 (1) (2007) 42–49.

- [43] A. Parvin, W. Wang. Concrete columns confined by fiber composite wraps under combined axial and cyclic lateral loads. *Composite Structures* 58 (4) (2002) 539–549.
- [44] A. Parvin, A.S. Jamwal. Performance of externally FRP reinforced columns for changes in angle and thickness of the wrap and concrete strength. *Composite Structures* 73 (4) (2006) 451–457.
- [45] A. Mirmiran, K. Zagers, W. Yuan. Nonlinear finite element modeling of concrete confined by fiber composites. *Finite Elements in Analysis and Design* 35 (1) (2000) 79–96.
- [46] A.I. Karabinis; T.C. Rousakis, G.E. Manolitsi. 3D Finite-Element Analysis of Substandard RC Columns Strengthened by Fiber-Reinforced Polymer Sheets. *Journal of Composites for Construction ASCE* 12 (5) (2008) 531–540.
- [47] A. Ghobarah, A. Said. Shear strengthening of beam-column joints. *Engineering Structures* 24 (7) (2002) 881–888.
- [48] A.M. Said, M.L. Nehdi. Use of FRP for RC frames in seismic zones: Part I. Evaluation of FRP beam-column joint rehabilitation techniques. *Applied Composite Materials* 11 (4) (2004) 205–226.
- [49] S.H. Alsayed, Y.A. Al-Salloum, T.H. Almusallam, N.A. Siddiqui. Seismic Response of FRP-Upgraded Exterior RC Beam-Column Joints. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (2) (2010) 195–218 .
- [50] S.H. Alsayed; T.H. Almusallam; Y.A. Al-Salloum; and N.A. Siddiqui Seismic Rehabilitation of Corner RC Beam-Column Joints Using CFRP Composites. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (6) (2010) 681–692.
- [51] Y.A. Al-Salloum, T.H. Almusallam. Seismic response of interior RC beam-column joints upgraded with FRP sheets. I: Experimental study. *Journal of Composites for Construction ASCE* 11 (6) (2007) 575–589.
- [52] P. Granata, A. Parvin. An experimental study on klevar strengthening of beam-column connections. *Composite Structures* 53 (2) (2001) 163–171.
- [53] A. Ghobarah, T. El-Amoury. Seismic rehabilitation of deficient exterior concrete frame joints. *Journal of Composites for Construction ASCE* 9 (5) (2005) 408–416.
- [54] A. Mukherjee, M. Joshi. FRPC reinforced concrete beam-column joints under cyclic excitation. *Composite Structures* 70 (2) (2005) 185–199
- [55] W.T. Lee, Y.J. Chiou, M.H. Shih. Reinforced concrete beam-column joint strengthened with carbon fiber reinforced polymer. *Composite Structures* 92 (1) (2010) 48–60.
- [56] K. Le-Trung, K. Lee, J. Lee, D.H. Lee, S. Woo. Experimental study of RC beam-column joints strengthened using CFRP composites. *Composites Part B: Engineering* 41 (1) (2010) 76–85.
- [57] T. El-Amoury, A. Ghobarah. Seismic rehabilitation of beam-column joint using GFRP sheets. *Engineering Structures* 24 (11) (2002) 1397–1407.
- [58] C.P. Antonopoulos, T.C. Triantafillou. Experimental investigation of FRP-strengthened RC beam-column joints. *Journal of Composites for Construction ASCE* 7 (1) (2003) 39–49.
- [59] C.P. Pantelides, Y. Okahashi, L.D. Reaveley. Seismic rehabilitation of reinforced concrete frame interior beam-column joints with FRP composites. *Journal of Composites for Construction ASCE* 12 (4) (2008) 435–445.
- [60] B. Li, H.Y. G. Chua. Seismic Performance of Strengthened reinforced concrete beam-column joints using FRP composites. *Journal of Structural Engineering* 135 (2009) 1177–1190.
- [61] J. Gergely, C.P. Pantelides, L.D. Reaveley. Shear strengthening of RC T joints using CFRP composites. *Journal of Composites for Construction ASCE* 4 (2) (2000) 56–64.
- [62] A. Parvin, S. Wu. Ply angle effect on fiber composite wrapped reinforced concrete beam-column connections under combined axial and cyclic loads. *Composite Structures* 82 (4) (2008) 532–538.
- [63] J. Li, S.L. Bakoss, B. Samali, L. Ye. Behaviour of concrete beam-column connections reinforced with hybrid FRP sheet. *Composite Structures* 57 (1–4) (2002) 357–365.
- [64] C.G. Karayannis, G.M. Sirkelis Strengthening and rehabilitation of RC beam-column

- joints using carbon-FRP jacketing and epoxy resin injection. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 37 (5) (2008) 769-790.
- [65] A. Parvin, P. Granata. Investigation on the effects of fiber composites at concrete joints. *Composites Part B: Engineering* 31 (6-7) (2000) 499-509.
- [66] M. Molina, S. Oller, A.H. Barbat, X. Martínez. Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 26 (2) (2010) 135-155.
- [67] S. Oller. *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería-CIMNE, Barcelona, España, 2003.
- [68] L. Mishnaevsky. *Computational mesomechanics of composites : numerical analysis of the effect of microstructures of composites on their strength and damage resistance*. John Wiley & sons. Chichester, UK, 2007.
- [69] T.I. Zohdi, D. Powell. Multiscale construction and large-scale simulation of structural fabric undergoing ballistic impact. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 195 (1-3) (2006) 94-109.
- [70] P.Gosselet, C. Rey. Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics. *Archives of Computational Methods in Engineering* 13 (4) (2006) 515-572.
- [71] O. Lloberas-Valls, D.J. Rixen, A. Simone, L.J. Sluys Domain decomposition techniques for the efficient modeling of brittle heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 200 (13-16) (2011) 1577-1590.
- [72] K. Haidar, J. F. Dubé, G. Pijaudier-Cabot. Modelling crack propagation in concrete structures with a two scale approach. *International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics* 27 (13) (2003) 1187-1205.
- [73] J. Fish, A. Suvorov, V. Belsky. Hierarchical composite grid method for global local analysis of laminated composite shells. *Applied Numerical Mathematics* 23 (2)(1997) 241-258.
- [74] J.S. Ahn, K.S. Woo, P.K. Basu, J.H. Park. p-Version nonlinear analysis of RC beams and slabs strengthened with externally bonded plates. *Finite Elements in Analysis and Design* 42 (8-9) 2006 726-739.
- [75] S. Oller, J. Miquel, F. Zalamea. Composite material behaviour using a homogenization double scale method. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 131 (1) (2005) 65-79.
- [76] J.C. Michel, P. Suquet. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (48-51) (2004) 5477-5502.
- [77] M.Hori, S. Nemat-Nasser. On two micromechanics theories for determining micro-macro relations in heterogeneous solids. *Mechanics of Materials* 31 (10) (1999) 667-682.
- [78] R. Hill. The Essential Structure of Constitutive Laws for Metal Composites and Polycrystals *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 15 (1) (1967) 79-95.
- [79] J. Mandel. *Plasticité classique et viscoplasticité*. CISM Courses and lectures No. 97. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1971.
- [80] J.-H. Song, T. Belytschko. Multiscale aggregating discontinuities method for micro-macro failure of composites. *Composites Part B: Engineering* 40 (6) (2009) 417-426.
- [81] S. Ghosh, K. Lee, P. Raghavan. A multi-level computational model for multi-scale damage analysis in composite and porous materials. *International Journal of Solids and Structures* 38 (14) (2001) 2335-2385.
- [82] S. Ghosh, J. Bai, P. Raghavan. Concurrent multi-level model for damage evolution in microstructurally debonding composites. *Mechanics of Materials* 39 (3) (2007) 241-266.
- [83] S. Avril, A. Vautrin, P. Hamelin, Y. Surret A multi-scale approach for crack width prediction in reinforced-concrete beams repaired with composites. *Composites Science and Technology* 65 (3-4) (2005) 445-453.

- [84] E. Sanchez Palencia, *Nonhomogeneous Media and Vibration Theory.*, Lecture Notes in Physics No. 127, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, 1980
- [85] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. In: *Studies in Mathematics Applications Vol. 5*. Amsterdam, North-Holland, 1978.
- [86] P. Suquet. Elements of homogenization for inelastic solid mechanics. In: *Homogenization techniques for composite media*. Lecture Notes in Physics No. 272. E. Sanchez-Palencia and A. Zaoui, editors. Springer-Verlag, Wien, Austria, 1987. 193–278.
- [87] J. Fish, K. Shek, M. Pandheeradi, M.S. Shephard. Computational plasticity for composite structures based on mathematical homogenization: Theory and practice. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 148 (1-2) (1997) 53-73.
- [88] G.J. Dvorak. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proceedings Royal Society of London. Series A* 437 (1992) 311–327.
- [89] F. Zalamea. *Tratamiento numérico de materiales compuestos mediante la teoría de homogeneización*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Directores: S. Oller y J. Canet (2001).
- [90] F. Feyel, J.-L. Chaboche. FE2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre SiC/Ti composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 183 (3-4) (2000) 309-330.
- [91] E. Car, F. Zalamea, S. Oller, J. Miquel, E. Oñate. Numerical simulation of fiber reinforced composites-Two procedures. *International Journal of Solids and Structures* 39 (7) (2002) 1967–1986.
- [92] C. Trusdell, R. Toupin. *The classical Field Theories*. Handbuch der Physik III/I. Springer Verlag, Berlin, Germany, 1960 .
- [93] A.Green, P. Naghdi. A dynamical theory of interacting continua. *International Journal of Engineering Science* 3 (2) (1965) 231-241
- [94] M. Ortiz, E.P. Popov. Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials* 1 (2) (1982) 139-150.
- [95] S. Oller, S. Botello, J. Miquel, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations* 12 (3) (1995) 245–262.
- [96] E. Car, S. Oller, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185 (2–4) (2000) 245– 277
- [97] F. Rastellini, S. Oller, O. Salomon, E. Oñate. Composite materials non-linear modelling for long fibre-reinforced laminates: Continuum basis, computational aspects and validations. *International Journal of Computers & Structures* 86 (9) (2008) 879–896.
- [98] E. Car. *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Directores: S. Oller y E. Oñate (2000).
- [99] F. Rastellini. *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. (2006).
- [100] X. Martínez. *Micro-mechanical simulation of composite materials using the serial/parallel mixing theory*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Director: S. Oller (2008).
- [101] S. Oller, E. Car, J. Lubliner. Definition of a general implicit orthotropic yield criterion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (7-8) (2003) 895-912.
- [102] J. Betten. Creep Theory of Anisotropic Solids. *Journal of Rheology* 25 (6) (1981) 565-581.
- [103] J. Betten Application of tensor functions to the formulation of yield criteria for anisotropic materials. *International Journal of Plasticity* 4 (1) (1988) 29-46.
- [104] E. Car, S. Oller, E. Oñate. A large strain plasticity for anisotropic materials-composite material application. *International Journal of Plasticity* 17 (11) (2001) 1437–1463.
- [105] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel, S. Botello. A plastic damage constitutive model for

- composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (17) (1996) 2501-2518.
- [106] B. Luccioni, D. López. "Modelo para materiales compuestos con deslizamiento de fibras". *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*. S. Oller, ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería - CIMNE, Barcelona, España, 2002, 411-431.
- [107] M. Molina. Estudio numérico de la adherencia de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado. Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Director: S. Oller y A. Barbat (2009).
- [108] X. Martínez, S. Oller, F. Rastellini, A. Barbat. A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers and Structures* 86 (15-16) (2008) 1604-1618.
- [109] M. Molina, J. Cruz, S. Oller, A. Barbat, L. Gil., Estudio numérico-experimental de la interfaz hormigón-epoxi-FRP para una estructura reforzada sometida a doble cortadura, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. In press. Vol 28 N°1 (2012).
- [110] X. Martínez, F. Rastellini, S. Oller, F. Flores, E. Oñate. Computationally optimized formulation for the simulation of composite materials and delamination failures. *Composites Part B: Engineering* 42 (2) (2011) 134-144.
- [111] CIMNE, "PLCD Manual: Código termomecánico no lineal de elementos finitos dirigido a estudiantes de Ph.D.", Universidad Politecnica de Cataluña, Barcelona, España, (1991-2011)).
- [112] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. *The Finite element method for solid and structural mechanics*. 6th ed. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2005.
- [113] E. Oñate. *Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos: análisis estático lineal*. 2ª ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería-CIMNE, Barcelona, España, 1995.
- [114] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall. New Jersey USA, 1996.
- [115] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2000.
- [116] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. "Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete." In. *Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Vol 2. p.945-958. Eds. N. Bicánc and H. Mang. Zell Am See, Austria, 1990.
- [117] S. Oller, E. Oñate, J. Oliver, J. Lubliner. Finite element non-linear analysis of concrete structures using a plastic-damage model, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.35 N°1-3 pp. 219-31 (1990).
- [118] J.Faleiro, S. Oller, y A.H. Barbat, Plastic-damage seismic model for reinforced concrete frames, *Computer and Structures*, Vol.86 N°7-8 pp.581-597 (2008)
- [119] J.Vielma, A.H. Barbat, S. Oller. Seismic performance of waffled-slab floor buildings, *ICE Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Structures and Buildings*, Vol.162 SB3 pp.169-182 (2009).
- [120] M. Molina S. Oller, A. Barbat, M. Martínez. Estudio De Estructuras De Hormigón Reforzadas con FRP Medcante la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo. *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*. 13-14 (1) (2009) 29-54.
- [121] M.D.G. Pulido, J.A. Sobrino. Los materiales compuestos en el refuerzo de puentes. *Revista Internacional de Ingeniería y Estructuras* 3 (1) (1998) 75-95.

# Capítulo 3

---

## Análisis del comportamiento de la interfaz entre el compuesto laminado y el hormigón

---

Frente al incremento del uso de los materiales compuestos conformados por polímeros reforzados con fibras largas (FRP) como una alternativa de refuerzo de las estructuras, es importante estudiar su comportamiento para optimizar su uso tanto en la reparación de los elementos estructurales con cierto nivel de daño, como en la rehabilitación de los elementos que requieren tener un mejor comportamiento dentro de la estructura.

La comparación entre la experimentación y la simulación numérica con elementos finitos representan una estrategia eficiente para estudiar el comportamiento de las estructuras reforzadas con materiales compuestos. Dado que la simulación numérica de los materiales compuestos es un campo que está en desarrollo, y que su uso en obras civiles es relativamente reciente, aún hay aspectos de los FRP, como la pérdida de adherencia entre el FRP y el hormigón, que por su complejidad, no han sido suficientemente estudiados para un mejor uso de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado [1].

En las investigaciones se muestra que la eficiencia del refuerzo en los elementos sometidos a flexión y cortante depende en gran medida de la integridad del sistema reforzado para poder garantizar la interacción entre el FRP y el hormigón; por lo tanto, la eficiencia del refuerzo esta directamente relacionada con la adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP [2; 3]. Además, las investigaciones hacen énfasis en la necesidad que existe de buscar nuevas herramientas que permitan predecir, de una forma más precisa la pérdida de adherencia por el deslizamiento entre el FRP y el hormigón o por la delaminación del FRP [4].

Por consiguiente, uno de los aspectos que ha sido más investigado es el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, la mayoría de los estudios se han enfocado en la parte experimental para establecer una formulación que permita determinar la resistencia de adherencia; sin embargo, son pocas las investigaciones que involucran la simulación numérica como una herramienta para profundizar el análisis del comportamiento de la interfaz.

En este capítulo se presenta una estrategia para analizar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP utilizando las teorías de mezclas en la simulación numérica de los ensayos de adherencia. En particular, se muestran las ventajas que ofrece la teoría de mezclas serie/paralelo [5], como una herramienta del análisis numérico de los materiales compuestos y su influencia en el comportamiento de la interfaz. La validación de la estrategia se hace a través de la simulación numérica en tres dimensiones de cuatro ensayos de adherencia, en los que se analiza el comportamiento no lineal de la zona interfacial.

### 3.1 Modos de fallo por pérdida de adherencia en la zona reforzada

La eficiencia del refuerzo con materiales compuestos en las estructuras de hormigón armado depende tanto de la selección de la configuración del refuerzo acorde con los requisitos de resistencia requeridos la estructura, como de la integridad del sistema reforzado [6].

Los diferentes test de laboratorio realizados en vigas de hormigón reforzadas con FRP han evidenciado que se dificulta desarrollar completamente la resistencia del refuerzo por el fallo prematuro de las vigas debido al despegue del laminado y/o la delaminación [7; 8]. De otra parte, los estudios existentes que examinan el comportamiento de las uniones señalan que el FRP mejora su capacidad a cortante y a flexión, hay mejor control en el daño estructural, y concluyen que la adherencia entre el laminado y el hormigón es un factor importante para garantizar la efectividad del refuerzo [9; 10; 11].

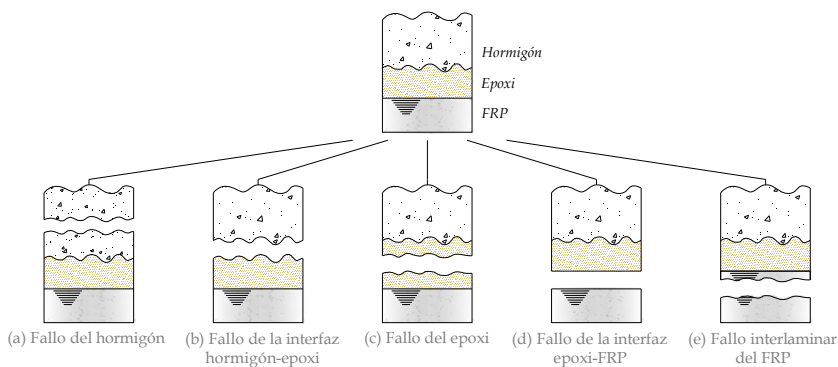


FIGURA 3-1 MODOS DE FALLO DE LA ADHERENCIA EN LA INTERFAZ HORMIGÓN-EPOXI-FRP. [12]

En la figura 3-1 se muestran los posibles modos de fallo de la adherencia en la interfaz hormigón-epoxi-FRP. La pérdida de adherencia se identifica con el deslizamiento entre el refuerzo con FRP y el hormigón llamado deslizamiento interfacial, el cual ocurre en forma rápida y generalmente va acompañado del desprendimiento del laminado con parte del epoxi y del hormigón de recubrimiento. Este deslizamiento interfacial limita el incremento de la resistencia tanto a flexión como a cortante del elemento estructural reforzado, por lo que es un



factor crítico para vigas y uniones viga-columna reforzadas con FRP.

Hay múltiples factores que causan el fallo por la pérdida de adherencia entre el hormigón, el adhesivo y el FRP, en general, sucede por elevadas tensiones normales y/o tangenciales que exceden la resistencia del material más débil, el cual usualmente es el hormigón. No obstante, el deslizamiento en la interfaz también puede presentarse por la baja adherencia al no preparar adecuadamente las superficies del hormigón o del FRP, por las imperfecciones en el epoxy como porosidades y microfisuras ocasionadas su proceso de aplicación y curado, o por el estado del hormigón con respecto a la magnitud y proporción de las fisuras y microfisuras preexistentes [4; 13; 14].

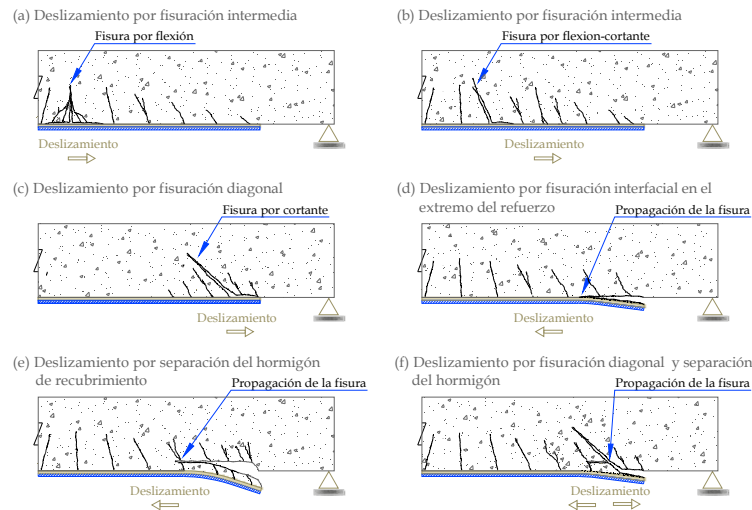


FIGURA 3-2 MODOS DE FALLO CON DESLIZAMIENTO EN VIGAS DE HORMIGÓN REFORZADAS CON FRP.

En la figura 3-2 se puede ver los modos de fallo en las vigas reforzadas con FRP relacionados con el deslizamiento del refuerzo con FRP y el hormigón armado, esta clasificación se ha hecho acorde con los resultados de ensayos realizados por diferentes investigadores [15; 16; 17; 18]. Los dos primeros modos de fallo se deben a deslizamientos de la interfaz inducidos por fisuración del hormigón dentro de la zona intermedia donde esta adherido el refuerzo, los otros modos se relacionan con el deslizamiento de la interfaz en el extremo del refuerzo o en la zona aledaña. A continuación se describen brevemente:

- Deslizamiento interfacial por fisuración intermedia "IC" (Intermediate crack debonding): Este modo de fallo se presenta de dos formas: en una de ellas, el deslizamiento interfacial sucede bajo la fisura a flexión principal, en el adhesivo o en la superficie microfisurada del hormigón (figura 3-2(a)); en la otra, el deslizamiento ocurre bajo una fisura secundaria a flexión o a cortante (figura 3-2(b)). Los modos de fallo IC, pueden estar acompañados del desprendimiento del hormigón de recubrimiento, dependiendo de la rigidez de la zona interfacial y de la resistencia del hormigón. Las investigaciones que han estudiado el deslizamiento por

fisuración intermedia, han encontrado que los modos de fallo IC ocurren con mayor frecuencia en elementos esbeltos y en elementos reforzados con láminas de FRP de poco espesor [16].

- Deslizamiento interfacial en el extremo del FRP: Con respecto a los modos de fallo que se presentan hacia el extremo del refuerzo, el deslizamiento originado por fisuración diagonal (figura 3-2(c)) señalado como “CDC” (Critical diagonal crack debonding), se debe a las altas tensiones tangenciales en el hormigón cercano al extremo del refuerzo, donde la fisura diagonal también se extiende a lo largo de la zona interfacial. El modo de fallo de deslizamiento interfacial en el extremo del refuerzo (figura 3-2 (d)), denominado “PE” (Plate end debonding), esta asociado a la concentración de tensiones en la interfaz hormigón-epoxi-FRP en el extremo adherido del FRP, en este caso la fisuración se da en la zona interfacial o en un substrato del hormigón aledaño a la interfaz. El modo de fallo CDC puede estar acompañado del desprendimiento del hormigón de recubrimiento como se indica en la figura 3-2 (f).

El deslizamiento por separación del hormigón de recubrimiento (figura 3-2 (e)), se produce por fisuras en la zona cercana al extremo del refuerzo, que se propagan hasta la armadura, y luego se extienden a lo largo de la armadura longitudinal hasta que se desprende el hormigón. Como no se pierde la adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, este mecanismo no corresponde en un sentido estricto a un fallo de adherencia [19].

Existen varios estudios desarrollados para analizar el comportamiento de elementos en hormigón armado reforzados con FRP, los cuales en su mayoría se han enfocado en la respuesta del elemento fisurado, sin embargo algunos han detallado el comportamiento de la interfaz y su fallo en el extremo del refuerzo, mientras que un número mas reducido lo ha estudiado en zonas intermedias.

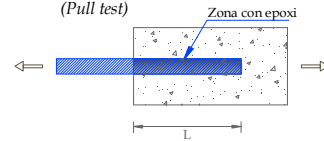
El mecanismo de pérdida de adherencia ha sido más estudiado en el extremo del refuerzo con FRP que en zonas intermedias, debido a que inicialmente se tomó como base que en las vigas reforzadas con láminas de acero predomina el fallo en los extremos a causa del cambio abrupto de rigidez en las zonas donde termina el refuerzo [17]. Sin embargo, al FRP tener una elevada esbeltez en comparación con las láminas de acero, en los elementos de hormigón reforzados con FRP, la pérdida de adherencia en los extremos del refuerzo se presenta en un menor porcentaje.

La principal dificultad del estudio del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi- FRP esta en que el deslizamiento interfacial ocurre en forma súbita, a pesar de cumplir con los requisitos de preparación de superficie y contar con una buena adherencia entre el FRP y el hormigón, además que la pérdida de adherencia puede conllevar a un fallo frágil del elemento reforzado. Esto muestra que es necesario complementar la experimentación con la simulación numérica para detallar aspectos que no se alcanzan a observar y a medir durante los ensayos [20].

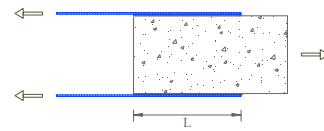
### 3.2 Pruebas experimentales de adherencia

#### Ensayos de corte

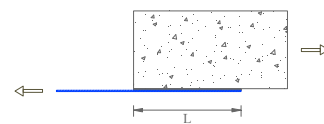
Ensayos donde se hala el hormigón  
(Pull test)



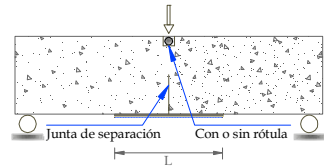
(a) Ensayo de corte doble con el bloque de hormigón a tracción



(c) Ensayo de corte simple con el bloque de hormigón a tracción

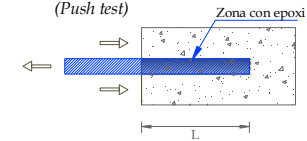


(e) Ensayo de flexión con junta de separación

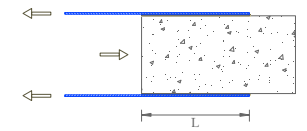


Con o sin rótula

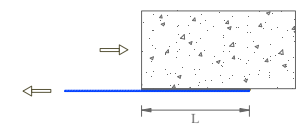
Ensayos donde se empuja el hormigón  
(Push test)



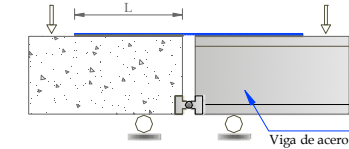
(b) Ensayo de corte doble con el bloque de hormigón a compresión



(d) Ensayo de corte simple con el bloque de hormigón a compresión

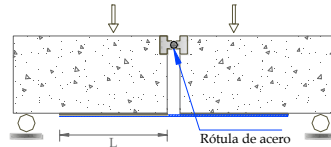


(f) Ensayo de flexión con montaje de acero



Viga de acero

(g) Ensayo de flexión con rótula



Rótula de acero

FIGURA 3-3 ENSAYOS DE ADHERENCIA PARA FRP COMO REFUERZO DEL HORMIGÓN [21]

Dado que la resistencia de la zona interfacial proporcionada es el factor de control de los modos de fallo por deslizamiento del FRP en estructuras reforzadas, se han propuesto diversos ensayos para estudiar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi- FRP; los cuales se han aplicado a compuestos reforzados con distintas clases de fibra, principalmente, de vidrio (GFRP), de carbono (CFRP) y de aramida (AFRP). En la figura 3-3 se indican los diferentes tipos de ensayos de adherencia, entre ellos:

- **Ensayos de adherencia por corte:** De este grupo las pruebas mas aplicadas experimentalmente por la simplicidad de su montaje corresponden al ensayo de corte simple mostrado en la figura 3-3 (d) [Ej. 22-27], y al ensayo corte doble indicado en la figura 3-3 (a) [Ej. 28 -31].

Los mecanismos producidos por la pérdida de adherencia que se presentan en

los ensayos de corte simple y doble, principalmente corresponden a fallos bajo el sustrato de hormigón y al fallo de las interfaces hormigón-epoxi y epoxi-FRP, y en una menor proporción también se presenta el fallo en el epoxi.

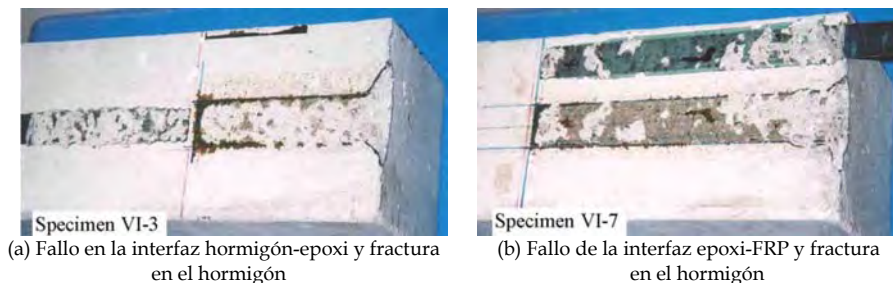


FIGURA 3-4 FALLOS EN LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA POR CORTE SIMPLE [22]

Algunos modos de fallo en ensayos de corte simple se observan en la figura 3-4. Dentro de las investigaciones que realizaron ensayos de corte simple se pueden enunciar:

- Chajes et al. (1996) [ 23], fue de las primeras investigaciones donde con probetas reforzadas con laminados en CFRP estudiaron el mecanismo de transferencia de tensiones entre el refuerzo y el hormigón. Ellos encontraron que predominó en el fallo la fisuración por corte en el hormigón cercano a la interfaz, además concluyen que la transferencia de la carga en la interfaz es esencialmente por flujo de cortante, que depende de las propiedades mecánicas de los adherentes (el refuerzo y el hormigón) y del adhesivo (epoxi).
- Täljsten (1997) [24] hizo un estudio de la longitud de anclaje en láminas de acero y laminados de CFRP por medio de ensayos de corte simple, observó que para los dos casos el fallo ocurrió en el hormigón por tensiones tangenciales, e indica que el límite de deformación del hormigón es el factor que gobierna el fallo .
- Bizindavyi y Neale (1999) [25], analizaron la longitud de transferencia y resistencia de adherencia en probetas de corte simple reforzadas con laminados de CFRP y GFRP, donde señalan que el fallo se presentó por cortante en el hormigón bajo la interfaz y por rotura del laminado.
- Subramaniam et al. (2007) [26] estudiaron la influencia de la relación de ancho FRP-hormigón  $b_{FRP}/b_h$  en la capacidad de la interfaz. De acuerdo con sus datos experimentales, observaron que durante el proceso del deslizamiento, se forma una región, en la que el FRP se encuentra en un estado de tensión uniaxial. Concluyeron que la influencia de la relación  $b_{FRP}/b_h$  en la capacidad de carga depende de si se forma o no la región de estado uniaxial en el ancho del hormigón.
- Czaderski et al. (2010) [27] aplicando la técnica de medición óptica en 3D,

muestran que en los ensayos de corte simple aparte de las tensiones de corte también se presentan tensiones de despegue durante el mecanismo de deslizamiento.



(a) Fractura y fisuración en el hormigón (b) Fallo en la interfaz epoxi- hormigón

FIGURA 3-5 FALLOS EN LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA POR CORTE DOBLE[31]

Algunos modos de fallo por pérdida de adherencia en ensayos de corte doble se aprecian en la figura 3-5. Entre los estudios que hicieron ensayos se señalan:

- Nakaba et al. (2001) [28] con diferentes tipos de laminado (CFRP, GFRP y AFRP), observaron que el tipo de FRP no influye en las tensiones de la interfaz contrario a lo que sucede con el cambio de resistencia del hormigón.
- Ueda et al. (2002) [29] señalan que al reforzar el hormigón con el laminado, el espacio entre fisuras disminuye conforme aumenta la rigidez del laminado, asimismo que el refuerzo brinda un control en el ancho de las fisuras; de otra parte, concluyen que las propiedades de la interfaz son afectadas por las fisuras presentadas en el hormigón, lo cual también induce al deslizamiento interfacial y a la delaminación del refuerzo.
- Pellegrino et al. (2005) [30] muestran que bajo el laminado, las fisuras en la superficie de falla del hormigón tienen una forma curvilínea, lo que refleja que la distribución transversal de las deformaciones en la interfaz es variable, siendo mayor en el centro y menor en los extremos de la sección transversal del FRP.
- Xue et al. (2008) [31] indican que en la zona con refuerzo se presentan tres estados de fallo, el primero corresponde al micro-deslizamiento ocurrido entre las fisuras, el segundo al deslizamiento entre el FRP y el hormigón, y el tercer estado corresponde al desprendimiento del laminado. Además Xue et al. [31] señalan que la adherencia en la interfaz hormigón-epoxi-FRP se mejora con la colocación de anclajes, tal y como se ha recomendado en algunas investigaciones de elementos reforzados con FRP [10;11] para garantizar la eficiencia del refuerzo.

Independientemente del tipo de ensayo de cortante, el fallo se presenta de

forma súbita, aún para ensayos realizados con control de desplazamientos. Esto conduce a que las mediciones tengan fuertes variaciones, sin poderse detallar adecuadamente, el proceso de pérdida de adherencia de la interfaz. Esto ha conllevado a que se propongan diferentes modificaciones de los ensayos con el objetivo disminuir los efectos del despegue súbito del FRP y/o de la concentración de tensiones en el hormigón.

Entre las propuestas más destacables están: la de Mazzotti et al. [32] en la que impiden el deslizamiento del laminado en uno de los extremos; la planteada por Yao et al. [22], donde controlan el desplazamiento vertical y horizontal del FRP con un montaje que se coloca en el extremo del laminado que se hala, y sólo restringen el desplazamiento en la base del bloque para evitar que las tensiones de compresión generadas por el apoyo afecten el comportamiento de la interfaz. Del mismo modo, en algunos montajes proponen adherir el FRP dejando la zona del extremo del bloque de hormigón sin reforzar [25; 26; 33], para reducir los efectos de frontera causados por la concentración de tensiones que se presentan en las aristas del bloque. Aunque algunos investigadores indican que si esta zona es muy pequeña o no existe, no hay variaciones significativas en el comportamiento de la interfaz, siempre que la longitud de adherencia no sea corta [33; 34].

Actualmente se están estudiando diferentes sistemas de anclaje para el refuerzo a través de los ensayos de adherencia por corte, entre ellos pueden enunciarse: la colocación de tiras de tejidos o láminas que se adhieren transversalmente sobre el laminado, técnica analizada por Xue et al. [31] y por Yalim et al. [35] con ensayos de corte doble; la instalación de anclajes mecánicos de FRP transversales en los que se perfora el refuerzo, sistema investigado por Niemitz et al. [36] con ensayos de corte simple; o la inserción de mecanismos en el hormigón de recubrimiento que modifican las condiciones del sustrato a lo largo del sector con refuerzo, técnica estudiada Kalfat y Al-Mahaidi [37] con ensayos de corte simple. Estas investigaciones han mostrado que se aumenta la ductilidad en los ensayos porque se retrasa el fallo súbito de la interfaz, pero advierten que no evita el deslizamiento, y el posterior despegue o rotura del FRP.

En forma general a nivel experimental, se ha encontrado que el mecanismo de fallo de los ensayos de corte donde el hormigón está solicitado a tracción (ver figura 3-3 (a) y (b)), es similar al modo de fallo producido por fisuración diagonal cerca al extremo del refuerzo con FRP mostrado en la figura 3-2 (c) [15; 25; 22]. Asimismo en algunas investigaciones [16; 38] sostienen que en las vigas reforzadas, el comportamiento de la adherencia entre el FRP y el hormigón en la zona cercana a una fisura indicado en la figura 3-2(d) es similar al mecanismo de fallo de la interfaz en los ensayos de corte simple.

Basados en esta similitud del mecanismo de fallo, Yao et al. [22] proponen que el ensayo de corte simple indicado figura 3-3 (d) se tome como el ensayo estándar de resistencia de la zona interfacial, sin embargo, es un tema que aún

requiere mayor estudio. Por ejemplo, este tipo test no simula el mecanismo de deslizamiento por fisuración intermedia, debido a que al ser un ensayo de corte, no se presentan los efectos de la curvatura por flexión y de la múltiple fisuración que pueden ocurrir en las vigas reforzadas con FRP [39] .

Aunque se ha encontrado similitud en el modo de fallo de la interfaz entre estos ensayos y los realizados en vigas reforzadas con FRP, se debe considerar que al estar la interfaz solicitada principalmente por corte, se omiten los efectos producidos por la flexión que pueden tener incidencia en el comportamiento de la interfaz.

- **Ensayos de adherencia por flexión:** Son adaptaciones de los ensayos de adherencia de elementos en hormigón reforzados con láminas de acero. La idea principal de este tipo de ensayos es observar el comportamiento de la interfaz teniendo una fisura artificial. Los mecanismos de fallo que se presentan en los ensayos de adherencia por flexión, comúnmente corresponden a la fractura por cortante del hormigón y/o el fallo de las interfaces epoxi-hormigón u hormigón-FRP, unos ejemplos de los modos de fallo se indican en la figura 3-6.



(a) Fractura por corte en el hormigón [44] (b) Fallo en la interfaz epoxi- hormigón y fractura [45]

FIGURA 3-6 FALLOS EN LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA POR FLEXIÓN

Dentro de los ensayos adherencia por flexión con junta de separación parcial indicados en la figura 3-3(e) se pueden enunciar:

- Lorenzis et al. (2001) [40] realizaron los primeros ensayos de adherencia por flexión, específicamente con junta de separación y rótula. Encontraron que la mayor parte de los fallos ocurrieron en la interfaz hormigón-epoxi, sin o con poco daño en la superficie del hormigón; por lo tanto, concluyen que para este tipo de ensayos, la resistencia del hormigón no influye en la carga última. Además, observaron que en los casos con una buena adherencia entre el hormigón y el refuerzo, el tipo de fallo que se presentó fue la rotura del laminado.
- Katz (2007) [41] estudió el mecanismo de transferencia de tensiones entre laminados de CFRP y GFRP colocados en superficies de hormigón deterioradas por medio de ensayos por flexión con junta de separación y sin rótula. Indica que las superficies deterioradas no afectan de una forma significativa la capacidad a flexión de las probetas, probablemente por las tensiones que se forman por fricción entre el FRP y el hormigón, además

señala que el mecanismo de fallo comienza con la fisuración por corte dentro de la zona deteriorada del hormigón y que se extiende en la interfaz hormigón-epoxi hasta que se despegue el FRP.

Entre los ensayos adherencia por flexión con montaje de viga de acero en mostrados en la figura 3-3(f) se señalan:

- Leung et al. (2006) [42] estudiaron el mecanismo de fallo entre el FRP y el hormigón iniciado bajo fisuras por cortante y/o por flexión en el hormigón. Indican que la pérdida de resistencia es causada por la pérdida de cohesión entre los materiales que la componen, mientras que el decrecimiento de las tensiones tangenciales se debe al efecto conjunto del daño de la zona interfacial y del deslizamiento continuo del FRP.
- Pan y Leung (2007) [43] proponen una adaptación del ensayo, en el que colocan el FRP en la viga de acero con una excentricidad para estudiar el deslizamiento en la interfaz inducido por fisuras a flexión y a cortante en el hormigón. Observaron que el efecto del despegue es significativo cerca a la fisura, pero su influencia decrece rápidamente al alejarse. Además, identificaron que con el despegue del FRP, se presenta el modo de fractura de apertura en la zona interfacial, a la vez que se reducen las tensiones tangenciales que producen el modo de fractura de deslizamiento. De otra parte, señalan que los laminados largos son menos susceptibles al despegue que los laminados cortos.

De las investigaciones realizadas con ensayos adherencia por flexión con rótula señalados en la figura 3-3(f), se pueden mencionar:

- Perera et al. (2004) [44] indican que el fallo localizado se debe principalmente a las altas tensiones de corte transmitidas al hormigón por el refuerzo en las zonas cercanas a las fisuras, por consiguiente, señalan que la resistencia a cortante de la interfaz es un factor importante en el comportamiento de las vigas reforzadas con FRP. Asimismo, enfatizan que el fallo localizado ocurre en zonas donde el laminado presenta altos gradientes de tensión axial, es decir, en las zonas cercanas a las fisuras.
- Casas y Pascual (2007) [45] en sus ensayos con refuerzo de láminas y tejidos de CFRP (figura 3-3(e)), observaron que el mecanismo de fallo comenzó con la concentración de tensiones en la zona central, generando tensiones de tracción que sobrepasan la resistencia del hormigón. Esto produjo fisuras diagonales que se propagaron hacia los extremos del refuerzo hasta producir el despegue del refuerzo.
- Pellegrino et al. (2008) [46] muestran que la distribución transversal de deformaciones es variable en la interfaz, del mismo modo como sucede en los ensayos de corte, las deformaciones son mayores en el centro de la sección transversal de la zona reforzada. Teniendo en cuenta esto, ellos recomiendan realizar simulaciones en tres dimensiones para estudiar de una forma detallada el comportamiento de la interfacial.



Los ensayos de adherencia por flexión permiten estudiar la transferencia de tensiones de la interfaz en la zona adyacente a las fisuras en el hormigón producidas por flexión o por flexión/corte [40-46]. A diferencia de los ensayos por cortante, con estos ensayos por flexión el FRP es evidente la acción conjunta de esfuerzos de tracción y de despegue en la interfaz, aunque la interpretación de sus resultados es compleja por la interacción de las fuerzas y los momentos generados por la misma flexión.

Inicialmente a través de los ensayos de interfaz tanto por corte como por flexión, se enfocaron en estudiar el efecto de la preparación de superficie, la influencia de los diversos tipos de adhesivos y de las clases de refuerzos con FRP, con el fin de mejorar la transferencia de las tensiones entre el FRP y el hormigón. Luego se han investigado otros aspectos como la influencia de la resistencia del hormigón, la longitud efectiva de adherencia y la energía de fractura de la interfaz. Asimismo, los resultados obtenidos a través de los ensayos de adherencia se han utilizado para el desarrollo de formulaciones de la resistencia de la interfaz, así como para determinar leyes constitutivas que definan el comportamiento de la interfaz en función del deslizamiento en la interfaz [34].

Según la comparación realizada en algunas investigaciones [47; 48] se observó que con los ensayos de flexión se obtienen mas altas tensiones que con los de corte simple, como efecto de la deflexión y la correspondiente curvatura. Asimismo, Aiello y Leone [48] encontraron que las tensiones dadas en las pruebas de corte doble, son mayores que las obtenidas en los ensayos de corte simple, esto se debe a que en los ensayos de corte doble se reduce la posibilidad de que se presenten excentricidades. No obstante, hay montajes en ensayos de corte simple, como el utilizado por Kalfat y Al-Mahaidi [37], en los que se puede impedir cualquier movimiento de la probeta de hormigón para evitarlas.

El comportamiento registrado experimentalmente de la interfaz depende del tipo de ensayo que se aplique, por lo tanto, tal y como lo sugiere Yao et al. [22], es necesario que se defina un ensayo estándar para determinar la resistencia a la adherencia de una forma objetiva.

Al considerar los resultados de los ensayos de adherencia en el diseño de elementos en hormigón armado reforzado con FRP es importante tener en cuenta tres aspectos [49]: (i) El estado de tensiones de la interfaz tiene un significado diferente dependiendo del tipo de prueba que se realice, ya que las acciones que lo originan son distintas. (ii) Para utilizar adecuadamente la información obtenida en los ensayos, se debe entender que por la complejidad del comportamiento de la interfaz, con una ligera variación en las probetas se puede producir un notable cambio en el estado de tensiones, por consiguiente en la carga de falla y en el mecanismo que genera el fallo. (iii) Se deben identificar las similitudes y diferencias entre los tipos de ensayos para establecer los casos estructurales en que sus resultados son aplicables.

### 3.3 Simulación numérica de la interfaz hormigón-epoxi-FRP

Frente a la complejidad del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, es evidente que además de la experimentación, se debe buscar en la simulación numérica un apoyo en el análisis del comportamiento estructural de los elementos reforzados para optimizar los diseños y garantizar la eficiencia del FRP como refuerzo [14].

En la década pasada, gran parte de las modelizaciones con el método de elementos finitos (MEF) se realizaron para la simulación de vigas reforzadas, sin embargo, sólo algunas involucraron los modos de fallo de la interfaz por deslizamiento, debido al gran coste computacional que implica simular un fenómeno de este grado de complejidad [44; 50; 51]. En los primeros estudios, se tomaron grandes simplificaciones; por ejemplo no consideraron el daño en el hormigón y se supuso la adherencia perfecta entre el hormigón y el FRP durante todo el proceso de carga; además, en algunos casos no se simuló la capa del adhesivo, o se consideró como un material elástico y lineal. Por tanto, la precisión de los resultados obtenidos mediante estas simulaciones es limitada, pero dieron las bases para establecer la distribución de las tensiones normales y tangenciales en la zona interfacial hormigón-FRP[1]. Actualmente, los estudios han aplicado análisis no lineales al hormigón, con el objetivo de simular el proceso de pérdida de adherencia entre el FRP y el hormigón [52].

#### 3.3.1 Modelos de aproximación para la simulación de fisuras en la interfaz

El avance del uso de los MEF en el análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP ha sido relacionado con la simulación de la propagación de las fisuras en el hormigón y en la zona interfacial. En ese sentido se utilizan tres tipos de aproximación en la simulación de fisuras:

- **Modelos de fisura discreta:** Este grupo de modelos basados en la mecánica de fractura elástica, parten de los principios planteados en el modelo de Ngo y Scordelis La [53]. Para simular la fractura en el hormigón, estas formulaciones combinan las teorías elásticas con las teorías de umbral máxima tensión.

En los modelos de fisura discreta, las fisuras son incorporadas al mallado manteniendo el comportamiento lineal elástico del sólido mallado, en el que se predeterminan la dirección y posición de las fisuras. En estos modelos se discretizan las fisuras como una propiedad geométrica del mallado, lo que implica que por cada incremento de carga, se requiere que la malla de elementos finitos se modifique de acuerdo con la propagación de cada fisura.

Esta metodología asegura una buena precisión de la simulación del proceso de formación y propagación de fisuras, lo que permite detallar el proceso de deslizamiento del refuerzo frente a los mecanismos de fallo en la interfaz, pero tiene el inconveniente de tener un elevado coste computacional por el remallado.

Es escasa la información de modelos de fisura discreta utilizados para la simulación de los ensayos de adherencia. No obstante, este tipo de estrategia se ha aplicado en investigaciones que estudian el comportamiento de la interfaz directamente en las vigas de hormigón armado reforzadas con FRP, entre otros están: Yang et al. [50], Niu y Wu [54], y Niu et al. [55].

- **Modelos de fisura distribuida:** Esta técnica ha sido introducida por Rashid [56] basada en la formulación de la mecánica del continuo utilizando la hipótesis y parámetros de la mecánica de la fractura [57]. Estas formulaciones permiten introducir en forma simple otros fenómenos, como la viscosidad y la plasticidad.

La malla de elementos finitos no se modifica y el proceso de fisuración se determina a través de la mecánica de medios continuos mediante ecuaciones constitutivas no lineales. Las fisuras son simuladas como discontinuidades locales que son distribuidas dentro de un dominio aplicando la teoría de la mecánica del continuo. Esta técnica tiene el inconveniente que no representa físicamente la fractura local del hormigón o de la interfaz hormigón-FRP, pero el efecto de inicio y propagación del deslizamiento del refuerzo puede ser analizado desde un enfoque fenomenológico.

Estos modelos tienen dos formas de análisis del proceso de fisuración [51; 58]:

- El modelo de fisura con ángulo fijo (FACM -Fixed angle crack model): en el que una vez aparece la fisura, la dirección de la fisura se mantiene sin variación. Dentro de este grupo está el modelo FACM ortogonal, en el cual se supone que la fisura aparece perpendicular a la tensión principal que sobrepasa la resistencia a tracción del material, luego esta orientación es fija. Esto puede ser un problema para los análisis de pasos de carga posteriores, ya que si hay cambios en la dirección de la tensión principal ocurren incrementos en las tensiones tangenciales del plano de la fisura.

Un modelo mejorado es el FACM multidireccional, en el que la fisura aparece perpendicular a la tensión principal que sobrepasa la resistencia a tracción del material, donde la dirección de la fisura cambia, si el ángulo entre la dirección de la tensión principal y la orientación de la fisura sobrepasa cierto rango preestablecido.

- El modelo de fisura con ángulo de rotación (RACM - Rotating angle crack model): en el que la fisura aparece paralela a la tensión principal que sobrepasa la resistencia a tracción del material, la cual puede diferir de la dirección de la deformación principal. Con estos modelos se evitan los problemas de control de tensiones si hay un cambio en la orientación de la fisura. El modelo RACM es no coaxial, cuando se permite la diferencia de dirección entre la tensión y la deformación principal, además introduce un parámetro empírico para el control del ablandamiento por corte de las tensiones. El modelo RACM es coaxial cuando se impone que la tensión y

la deformación principal tengan la misma dirección.

Los modelos de aproximación de fisura distribuida han permitido demostrar que los problemas de discontinuidad pueden aproximarse por medio de problemas continuos tratados en su estado límite [57]. Por la simplicidad que presentan estos tipos de modelos han sido ampliamente utilizados en diferentes software comerciales.

Entre los investigadores que han utilizado los modelos de aproximación de fisura distribuida para el análisis de la interfaz hormigón-FRP en ensayos de adherencia están Lu et al. [51; 52], Ebead y Neale [59], Pham y Al-Mahaidi [60]. Asimismo, otro grupo de investigaciones han aplicado estos modelos en el estudio del comportamiento de la interfaz en vigas reforzadas con FRP, entre ellos Wu y Yin [61], Baky et al. [62] y Aram et al. [63].

- **Modelos de fisuración combinados:** Con esta técnica se combinan los modelos de fisuración discreta con los modelos de fisuración distribuida. Contrastando los resultados de las simulaciones que combinan los modelos de fisuración con las mediciones experimentales, se aprecia que tienen una aproximación más precisa de la pérdida de rigidez y de la evolución del daño en los elementos reforzados que los modelos que utilizan sólo un tipo de aproximación. Sin embargo, al igual que sucede con los modelos de fisura discreta, son opciones que no predicen el comportamiento de los elementos reforzados, si no se cuenta de antemano con información de la formación y propagación de las fisuras. Un tema esencial para las investigaciones que siguen este tipo de lineamiento es el desarrollo de un método general para seleccionar la localización de las fisuras discretas.

Entre otros investigadores que aplican esta técnica están: Camata et al. [64] quienes en una simulación bidimensional utilizan el modelo de fisura distribuida en el hormigón, y, la aproximación de fisura discreta en la interfaz hormigón-FRP; Kishi et al. [65] en una modelización tridimensional aplican el modelo de fisura distribuida en el hormigón y el modelo de fisura discreta en las interfaces hormigón-armadura, hormigón-FRP y en los sectores con grietas abiertas dominantes; Pham et al. [66] en una simulación bidimensional aplican la aproximación de fisura distribuida en el hormigón, el cual lo discretizan con un mallado muy fino cerca de a la interfaz hormigón-epoxi, y la aproximación discreta la aplican en las zonas en que experimentalmente se presentaron las fisuras dominantes a flexo-cortante y las que inducen el despegue del FRP.

Las investigaciones que utilizan los modelos de fisuración han estudiado el deslizamiento entre el FRP y el hormigón considerando que el fallo ocurre por los modos de fractura de deslizamiento y/o de apertura como se indica en la figura 3-7. Por ello estos modelos han utilizado principalmente dos alternativas:

- Simular la interfaz a través de elementos a los que se les asigna una ley constitutiva de la zona interfacial que rige el comportamiento de la interfaz hormigón-FRP; estos elementos pueden ser de espesor nulo [50; 54; 55; 65;

66], o tener dimensiones específicas integrando el hormigón y el FRP [59; 61; 62; 63]. La ley constitutiva está controlada por diferentes parámetros relacionados con las características del FRP y del hormigón. La precisión de la aproximación depende de la ley constitutiva que se aplique a los elementos de la interfaz. Esta estrategia es apropiada para identificar y verificar el comportamiento interfacial contrastando sus resultados con las mediciones experimentales; sin embargo, no es conveniente utilizarla para predecir el comportamiento de los elementos reforzados, al menos que se hagan previamente pruebas con los materiales que se vayan a utilizar en el refuerzo para seleccionar la ley constitutiva más conveniente.

- Simular el proceso del deslizamiento mediante modelos de fisuración asignados a los elementos de hormigón adyacentes al adhesivo, sin modelar elementos de interfaz [51; 52; 60; 64]. Siempre que en la zona adyacente a la interfaz se utilice un mallado lo suficientemente fino y los modelos de fisuración sean apropiados, con esta alternativa se obtiene una buena aproximación del comportamiento de elementos reforzados bajo la pérdida de adherencia del refuerzo. No obstante, las simulaciones hasta ahora han sido realizadas en el plano, si se hicieran en tres dimensiones el costo computacional puede ser bastante elevado por el mallado detallado.

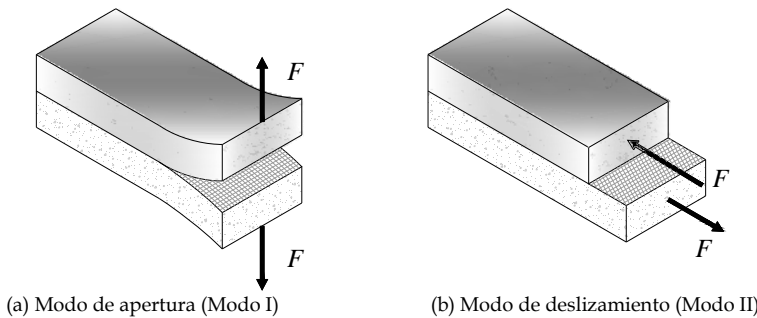


FIGURA 3-7 MODOS DE FRACTURA CONSIDERADOS EN LOS MODELOS FISURACIÓN PARA EL ANÁLISIS EN LA INTERFAZ HORMIGÓN-EPOXI-FRP

Recientemente bajo los principios de la mecánica del continuo, en los elementos finitos se han aplicado modelos constitutivos de daño y de plasticidad a la simulación no lineal para el estudio del proceso de degradación de la interfaz hormigón-FRP, entre este grupo están Perera et al. [44] y Coronado y López [67; 68]. Esta estrategia está en desarrollo y tiene un campo de aplicación bastante amplio para el estudio del comportamiento del refuerzo en estructuras de hormigón.

Aunque la simulación numérica en el análisis de la interfaz ha dado aportes importantes para mejorar el diseño y las técnicas de colocación del refuerzo, hasta ahora la mayoría de las simulaciones corresponden a calibraciones basadas en los resultados de ensayos específicos, además parten de ciertas suposiciones que impiden generalizar una metodología de modelización que se pueda aplicar a otros casos. Esto se debe tener en cuenta para futuras investigaciones en las que se

utilice la simulación numérica como un soporte para el análisis de elementos reforzados con FRP, ya que es un campo que se está consolidando en busca de optimizar el uso de los materiales compuestos.

### 3.3.2 Simulaciones de los ensayos de adherencia

Frente al desarrollo actual de programas de simulación con el MEF en los que se han implementado modelos constitutivos para definir el comportamiento de los materiales simples, con la simulación numérica se ha utilizado para profundizar en el comportamiento de fallo de los elementos en hormigón armado reforzados con FRP a nivel global y local, aprovechando sus resultados para analizar información que no se puede establecer con los ensayos como lo son: la distribución de tensiones, la transferencia de tensiones en la zona interfacial y los mecanismos generados en los materiales que inducen al fallo, entre otros[21].

A continuación se hace una breve reseña de las investigaciones enfocadas a la simulación de ensayos de adherencia para el estudio del proceso de deslizamiento entre el FRP y el hormigón. Básicamente se describe la metodología aplicada en la modelización y los principales aportes de cada estudio.

- *Simulaciones bajo un comportamiento elástico*

Dentro de las investigaciones que consideraron el hormigón como un material elástico para la simulación se pueden nombrar:

- Nendi et al. (2003) [69] realizaron un modelo tridimensional de un ensayo de corte doble con placas de GFRP. El hormigón y el GFRP fueron representados con elementos sólidos, mientras que la zona interfacial se simuló como dos sistemas de elementos unidimensionales tipo “spring”, uno en plano de la unión hormigón-FRP y otro sistema transversal perpendicular a la dirección del laminado, representando la rigidez normal y tangencial de la interfaz respectivamente. Esta propuesta no tiene una aplicación general para otros casos, ya que las constantes de rigidez son halladas por calibración del modelo con la parte experimental, además al suponer la rigidez de la interfaz constante, no están considerando la degradación que se puede presentar en la zona interfacial.
- Leung et al. (2006) [42] simularon en el plano del ensayo a flexión con montaje de viga de acero realizado en su investigación. El hormigón, el epoxi y FRP fueron modelizados con elementos cuadrilaterales, mientras que la armadura del bloque de hormigón se simuló con elementos tipo barra; el comportamiento de los cuatro materiales se supuso elástico. Para representar el daño progresivo en la interfaz utilizaron elementos no lineales tipo “spring” entre el hormigón y el epoxi, los cuales, restringen el desplazamiento vertical entre los dos materiales, pero se deforman y generan fuerzas en la dirección horizontal. Con esta modelización detallan el proceso del ablandamiento que ocurre en la interfaz durante la pérdida de adherencia; sin embargo, la respuesta de la interfaz depende de la formulación deslizamiento-tensión cortante que se asigne a los elementos

tipo “spring”, además se omite el efecto que tiene la pérdida de adherencia en el comportamiento no lineal del hormigón, del adhesivo y del refuerzo.

- Chen y Pan (2006) [49] simularon en 3D de un ensayo de corte simple, en el que analizaron la distribución de tensiones y deformaciones a lo largo de la zona reforzada, asimismo estudiaron en el comportamiento de la interfaz la incidencia de la relación de ancho FRP-hormigón  $b_{FRP}/b_h$ , y de los espesores del adhesivo y del FRP. Aunque hicieron el análisis elástico lineal, muestran que las distribuciones de tensión y deformación obtenidas en 3D es diferente a las determinadas cuando se simula bajo un estado plano de tensiones, diferencias que se deben tanto la incidencia de la relación entre el ancho del FRP y el del bloque de hormigón ( $b_{FRP}/b_h$ ), como a la influencia las relaciones de Poisson de cada uno de los materiales que conforma la interfaz. Además muestran que en los ensayos de cortante hay un efecto de flexión local significativa en la interfaz, contrario a lo que se indica en otras investigaciones [64; 68].

- *Simulaciones bidimensionales con modelos de fisuración*

Entre las investigaciones que consideraron la fisuración en el hormigón bajo los parámetros de la mecánica de la fractura para la modelización se mencionan:

- Camata et al. (2004) [64] realizaron dos simulaciones para comparar un ensayo de corte simple con un ensayo de cortante/tracción para investigar el comportamiento de despegue y deslizamiento en la interfaz. El comportamiento del hormigón se caracterizó bajo los principios de la mecánica no lineal de la fractura, el cual se representó con un mallado muy fino en la zona cercana a la zona reforzada; el FRP y el epoxi se analizaron como materiales isótropos elásticos y lineales. Concluyen que con los ensayos de corte simple no se puede relacionar directamente con el modo de fallo por deslizamiento en las vigas, porque en el proceso de deslizamiento, no combina los modos de fractura de apertura y de deslizamiento como sucede en las vigas sometidas a flexión.
- Lu et al. (2005) [52] proponen una simulación a meso-escala de un ensayo de corte simple, consiste en representar el hormigón en la zona adyacente al adhesivo con elementos de un tamaño muy pequeño entre 0.25mm-0.5mm, en los que se aplica el modelo de fisura con ángulo fijo (FACM-Fixed angle crack model) para capturar la aparición y la propagación de las fisuras. De otra parte, modelizan FRP como un material elástico e isótropo, donde el espesor del refuerzo se toma como el espesor nominal del laminado más el del epoxi. Lu et al. [52] muestran que obtienen una adecuada aproximación con respecto a la distribución de la deformación en el laminado de FRP para diferentes ensayos realizados en otras investigaciones, pero al utilizar un mallado tan fino en la zona adyacente a la interfaz puede llegar a ser computacionalmente costoso.
- Lu et al. (2006) [51] plantean una simulación de un ensayo de corte simple en la que aplican el modelo de fisura con ángulo de rotación (RACM) no

coaxial al hormigón, donde discretizan el mallado más denso en la zona bajo el refuerzo. Asimismo el FRP lo consideran como un material elástico y lo simulan con elementos tipo viga, con el fin que los elementos no pierdan la rigidez transversal con la fisuración del hormigón como sucede en los casos que se utilizan los elementos tipo barra. Lu et al. [51] compararon los resultados obtenidos de las simulaciones de un ensayo de corte en que se aplican los modelos RACM no coaxial, RACM coaxial y FACM ortogonal, y concluyen que el modelo RACM no coaxial es el que presenta una aproximación más precisa del mecanismo de deslizamiento para un ensayo de corte simple. Asimismo, aplicando esta metodología, muestran la aproximación de las simulaciones de ensayos de corte simple realizados en diferentes investigaciones, sin embargo, advierten que una de las limitaciones de esta técnica es que los principales parámetros que utiliza dependen directamente de los ensayos que se realicen.

En las dos investigaciones de Lu et al. [51; 52] son de los pocos casos de las simulaciones bidimensionales en que tienen en cuenta que el FRP esta adherido solo en un porcentaje del ancho del bloque de hormigón, para ello utilizaron el parámetro  $\beta w$  propuesto por Chen y Teng [70]. De otra parte, con estas simulaciones suponen que el comportamiento del adhesivo es elástico, por lo que estiman que su influencia en el proceso del fallo y en el deslizamiento interfacial es despreciable [51]; sin embargo, se ha observado en diferentes ensayos que esto es relativo, dado que el nivel de influencia depende del tipo de epoxi que se utilice para adherir el FRP.

- Ebead y Neale (2007) [59] analizan un modelo de un ensayo a corte simple. Simulan la interfaz hormigón-FRP con elementos tipo barra de 2 nodos, a los que se les aplica una ley constitutiva no-lineal interfacial. El hormigón se analizó como un material no lineal y se representó con elementos cuadrilaterales. El FRP fue modelizado como un material elástico con elementos tipo barra de 3 nodos, ya que parten de la suposición que solo transfiere fuerzas de tracción. También utilizaron el parámetro  $\beta w$  [70]. Ebead y Neale [59] muestran resultados bastante aproximados a los ensayos realizados por Chajes[23], y concluyen que el estado de tensiones, el deslizamiento y la resistencia interfacial dependen del comportamiento del hormigón, en particular de su resistencia.
- Pham y Al-Mahaidi (2007) [60] ensayaron y simularon diferentes ensayos de corte simple en los que variaron la longitud de adherencia, el ancho y el número de pliegues del CFRP. El hormigón se discretizó en tres zonas, con un mallado muy fino cerca a la zona del refuerzo, un mallado grosero y una zona de transición entre los dos, y se analizó con un modelo de fisura con ángulo de rotación (RACM - Rotating angle crack model). El CFRP y el adhesivo lo tomaron como materiales isótropos con un comportamiento lineal elástico y se simularon con mallados densos. Corroboraron los resultados experimentales donde encontraron dos modos de fallo, el fallo interfacial si la longitud efectiva de adherencia del refuerzo es suficiente, y



un fallo en el hormigón por tracción y cortante si la longitud es corta.

- *Simulaciones bidimensionales con modelos de constitutivos*

De los estudios que consideraron el comportamiento del hormigón no lineal bajo los principios de la mecánica del continuo para la simulación se señalan:

- Perera et al. (2004) [44] hicieron una modelización con la geometría de los ensayos de adherencia a flexión realizados en la misma investigación. Para tener en cuenta el efecto de las fisuras en el hormigón, utilizaron el modelo constitutivo de daño isótropo propuesto por Mazars que ha sido adaptado para el hormigón [71]. Ellos partieron de la hipótesis que el epoxi y el refuerzo permanecen en el rango lineal elástico, por lo tanto no consideran que el daño en el hormigón puede afectar el comportamiento lineal del epoxi del laminado. En la simulación muestran la aproximación de los resultados a los obtenidos experimentalmente, y concluyen que las tensiones tangenciales en la interfaz son un factor fundamental en el pérdida de adherencia entre el FRP y el hormigón.
- Coronado y López (2006) [67] realizaron una modelización de un ensayo de corte simple con cuatro discretizaciones: un mallado muy denso constituye el epoxi, otro denso caracteriza el FRP, y dos mallados simulan el hormigón: uno denso para la zona adyacente al epoxi que es susceptible a la fisuración, y, uno grosero para el resto de la sección de hormigón. En esta simulación las interfaces hormigón-epoxi y epoxi-FRP fueron simuladas a través del control de superficies de contacto para conectar los mallados con diferentes densidades.

Bajo la hipótesis que el principal mecanismo de fallo durante la pérdida de adherencia es la microfisuración del hormigón por la tracción, Coronado y López [67] en la zona densa del hormigón, denominada banda de fisuración, aplican el modelo de daño plástico propuesto por Lubliner et al. [72], introduciendo las recomendaciones dadas por Lee y Fleves[73]. El FRP lo consideraron como un material lineal y elástico; mientras que el epoxi lo analizaron bajo dos comportamientos diferentes, uno elástico y otro elasto-plástico, sin embargo, los resultados fueron similares para ambos casos. Coronado y López [67] concluyen que los ensayos de corte simple son sensibles a la variación de parámetros geométricos, por consiguiente recomiendan que los resultados experimentales realizados con este tipo de ensayos no se apliquen directamente en la determinación de la resistencia de la interfaz hormigón-FRP.

- Coronado et al. (2010) [68] mejoraron su anterior propuesta y compararon los resultados de las simulaciones de un ensayo de corte simple y de un ensayo de flexión con rótula. Con esta modificación consideran el FRP como un material no lineal, y le aplican el modelo de fisuración descrito por Hibitt et al. [74], con el cual, el FRP es lineal y elástico hasta que se alcanza una deformación determinada, luego el material pierde totalmente su capacidad de carga; además el epoxi lo simulan como un material

elasto-plástico con endurecimiento. Coronado et al.[68] muestran que simulando su ensayo a flexión, logran representar el fallo por corte del bloque de hormigón, fallo que se presenta generalmente cuando el refuerzo tiene el mismo ancho del elemento de hormigón. Esta metodología presenta una buena aproximación de la distribución de daño en el hormigón en los diferentes ensayos, sin embargo, la densidad del mallado que se requiere en la banda de fisuración conduce a altos costes computacionales si esta técnica se aplicara al campo 3D.

El aporte de estas investigaciones ha demostrado la importancia de complementar los ensayos experimentales con las simulaciones numéricas en el estudio del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, no obstante, es un camino que comienza a dilucidar el potencial que tiene para el análisis de elementos reforzados con FRP, y aún hay aspectos por mejorar y por involucrar dentro del campo de la modelización numérica.

Es así como pese a que se ha recomendado estudiar con mayor detalle el deterioro de las propiedades de la interfaz en las zonas cercanas a las fisuras del hormigón, en las simulaciones se ha involucrado el daño en el hormigón, en una minoría también se ha tenido en cuenta el comportamiento no lineal de la interfaz hormigón-epoxi y/o epoxi-FRP a través de formulaciones [21], aparte de Coronado et al. [68], no se ha considerado que el epoxi puede tener un comportamiento no lineal, por presentar plasticidad o daño, o en respuesta al efecto del daño en el hormigón.

De otra parte, en todos los casos hasta ahora tratados se analiza el FRP como un material homogéneo elástico, y no se considera la susceptibilidad que puede tener la matriz o las fibras al daño y a la plasticidad, según sea su composición. Tampoco se han hecho análisis en tres dimensiones de ensayos de adherencia involucrando el comportamiento no lineal del hormigón, del epoxi y del FRP.

Lo anteriormente comentado evidencia la necesidad que existe de plantear nuevas estrategias para el análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, y que preferiblemente se apliquen en el campo tridimensional para tener una óptica más general de los mecanismos que generan el fallo.

### 3.4 Factores que influyen en la interfaz hormigón-epoxi-FRP

Desde el enfoque experimental y el de modelización con MEF, las propiedades mecánicas y geométricas de los materiales que conforman la zona interfacial influyen en su comportamiento, entre las más relevantes se pueden enunciar:

- *Longitud de adherencia de la interfaz ( $l_{db}$ )*

La longitud de adherencia del interfaz es un factor importante para garantizar que la eficiencia del refuerzo en las vigas y en las uniones [9; 75]. De acuerdo con los resultados experimentales de diferentes investigaciones, por ejemplo Chajes et al.

[23], Täljsten [24] y Chen y Teng [70], se evidencia que el refuerzo adherido tiene una longitud efectiva con la cual se obtiene la máxima resistencia por adherencia en la interfaz, más allá de este límite al aumentar la longitud no se incrementa la capacidad de carga del elemento reforzado.

De igual forma, si la longitud de adherencia es insuficiente, causa el fallo prematuro de la interfaz impidiendo que se desarrolle la resistencia del FRP [22; 33; 66]. Esto demuestra que para asegurar un buen comportamiento del FRP como refuerzo, debe establecerse una longitud efectiva de adherencia con la que se garantice que el elemento reforzado puede soportar una determinada sollicitación.

- *Rigidez del FRP*

Nakaba et al. [28] entre otros investigadores encontraron que capacidad de carga de la interfaz se incrementa con el aumento de rigidez del FRP. Täljsten [24] y Czaderski [27] indican que con FRP rígidos el nivel de deformaciones decrece, lo que explica el aumento de capacidad de carga. No obstante, cuando se combinan efectos de tracción (apertura) con los de corte (deslizamiento), la capacidad de carga se reduce, como se observó en los ensayos de Yao et al. [22].

Katz [41], Casas y Pascual [45] observaron que los elementos reforzados con FRP rígidos son más propensos a fallar por deslizamiento que los elementos reforzados con FRP flexibles; es probable que esto suceda por las mayores tensiones tangenciales que se presentan en los FRP rígidos y que son transferidas por la interfaz, como lo mencionan Lorenzis et al. [40] y Pellegrino et al. [46].

El despegue del laminado es mas frecuente cuando la rigidez del FRP es alta [54], ya que el fallo tiende a producirse en la interfaz hormigón-epoxi si predomina el modo de apertura en la propagación de las fisuras interfaciales, o en la interfaz epoxi-FRP si se presenta modo de deslizamiento ante las elevadas tensiones tangenciales del FRP que se transmiten al epoxi [61]. Al tener mayor rigidez en el FRP se mejora la rigidez de la zona interfacial, sin embargo, se aumenta la probabilidad de disminuir la ductilidad del elemento reforzado por el mecanismo de fallo que se presenta.

- *La relación entre el ancho del FRP y el del hormigón ( $b_{FRP}/b_h$ )*

Según Chen et al. [49; 52], el efecto de la relación  $b_{FRP}/b_h$  incide en forma apreciable en la distribución tensiones en los extremos del laminado aumentando su magnitud conforme se incrementa la relación; además influye en la distribución de las tensiones del hormigón, lo que afecta directamente el mecanismo de fallo. En los test de adherencia por flexión y por cortante cuando el ancho del laminado es similar al del elemento reforzado, el hormigón tiende a fallar por cortante hacia el extremo donde termina el FRP [22; 44; 41; 60].

Subramaniam et al. [26] indican que si el ancho del elemento reforzado es suficiente para que se forme la zona en estado uniaxial, la capacidad de la carga se incrementa conforme es mayor la relación  $b_{FRP}/b_h$ , por el contrario, si el ancho es insuficiente, la capacidad de carga decrece con el aumento de la relación.

- *Resistencia del hormigón*

La resistencia del hormigón es uno de los factores que influye en la resistencia de la interfaz, ya que participa en la forma en como se propagan las fisuras que conducen al deslizamiento de la interfaz, o, al desprendimiento del hormigón de recubrimiento. De hecho, muchos estudios establecen que la capacidad de carga de la interfaz (carga máxima de transferencia) depende principalmente de la resistencia del hormigón [31; 39; 51].

Cuando el deslizamiento del FRP es inducido al fisurarse el hormigón por corte en la zona adyacente a la interfaz, se aprecia que la resistencia de la interfaz depende de la resistencia al corte del hormigón, y por consiguiente, de su resistencia por tracción [59]. Asimismo, según los resultados obtenidos en los ensayos y en las simulaciones numéricas se observa que al incrementar la resistencia a tracción en el hormigón se aumenta la resistencia de la zona interfacial [70].

- *La rigidez y resistencia del adhesivo*

Según Nakaba et al. [28] y Lu et al. [51] señalan que el espesor del epoxi no incide en el comportamiento de la interfaz hormigón-FRP. En contraposición a esto, algunas investigaciones experimentales y analíticas, entre las que se pueden mencionar Ueda et al.[29], Lu et al.[34] y Chen y Teng [70], hacen énfasis en que la resistencia y la rigidez del epoxi son parámetros que tienen incidencia en el mecanismo de pérdida de adherencia la resistencia de la interfaz, y por ende, influyen en la resistencia de la zona interfacial.

Da Silva et al. [76] en ensayos de adherencia epoxi-FRP concluyeron que la resistencia de la interfaz con un adhesivo dúctil aumenta al tener menor espesor del adhesivo; igualmente, que si el epoxi es frágil, el efecto de su espesor es despreciable, ya que la resistencia de la zona interfacial está en función de las imperfecciones que tenga la capa del adhesivo.

Con los resultados experimentales y numéricos, diferentes investigadores indican que la baja rigidez interfacial conduce a una distribución de tensiones mas uniforme en la zona fisurada; asimismo que el grado de flexibilidad de la interfaz está relacionado con la rigidez del epoxi [34; 77]. Los diferentes puntos de vista acerca de la incidencia de la rigidez y la resistencia del epoxi en el comportamiento de la zona interfacial, muestran que este es un tema que requiere mayor investigación, teniendo en cuenta que el adhesivo es el material que transfiere los esfuerzos del FRP al hormigón.

Frente a los múltiples parámetros que influyen en el comportamiento de la interfaz, en esta breve reseña, se evidencia la importancia de que la simulación numérica y la experimentación sean herramientas complementarias para estudiar de una forma integral el comportamiento de la interfaz hormigón- epoxi-FRP.

### 3.5 Propuesta para la modelización de la interfaz hormigón-epoxi-FRP

La transmisión de esfuerzos entre el refuerzo y el hormigón depende de la adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP [78], por lo tanto, el comportamiento de la interfaz incide en el mecanismo de soportar y transmitir las cargas de elementos de hormigón armado reforzados con FRP. Es así como diferentes estudios experimentales demuestran que los mecanismos de fallo de adherencia de la interfaz son factores críticos para definir la resistencia de vigas de hormigón armado reforzadas con FRP [13].

Con el fin de captar los diversos modos de fallo que se pueden presentar la interfaz hormigón-epoxi-FRP y que afectan la adherencia del refuerzo en los elementos de hormigón armado, se propone una estrategia de simulación de ensayos de adherencia en tres dimensiones. En esta propuesta se plantea el uso de la teoría de mezclas clásica y de la teoría de mezclas serie/paralelo para el estudio del comportamiento de la interfaz, ya que es importante que los materiales compuestos se puedan simular considerando el comportamiento de los materiales que lo componen. Asimismo, se propone incluir en la simulación el epoxi como una tercera entidad material de la interfaz, que sea independiente de los dos componentes que une, y que su comportamiento esté definido por su propio modelo constitutivo, con el propósito de evitar el uso de formulaciones teóricas que dependan de un conjunto de parámetros mecánicos y geométricos de los materiales para definir el comportamiento de la interfaz.

#### 3.5.1 Aspectos generales de la estrategia propuesta

En la simulación de los ensayos de adherencia se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- **Configuración de la modelización con MEF:** Dadas las necesidades que existen de entender mejor el comportamiento de la interfaz, y contando con muy buenas herramientas se propone hacer la simulación tridimensional. Asimismo se estima conveniente que el mallado sea más denso en la zona donde reforzada acorde con las dimensiones de cada material.

Es conveniente que se discreticen en forma separada cada material de la interfaz. Si el refuerzo es un laminado, se simulan el hormigón simple o armado, el adhesivo (epoxi) y el FRP; pero si el refuerzo es un compuesto tejido, dado que el adhesivo integra las capas de los tejidos y las adhiere al hormigón, sólo se discretizan el FRP y el hormigón.

- **Teorías de mezclas:** Se plantea el uso de las teorías de mezclas, ya que permiten involucrar en las simulaciones el comportamiento de cada componente de los compuestos que forman parte de la interfaz, considerando a través de los modelos constitutivos los diferentes fenómenos que en ellos pueden presentarse como la plasticidad y el daño.

En las simulaciones de los ensayos de adherencia, los materiales compuestos corresponden al FRP, asimismo, al hormigón armado si las probetas de hormigón tienen armadura. Para estos materiales compuestos, las matrices son la matriz del FRP o el hormigón, mientras que el refuerzo corresponde a las fibras o a las barras de la armadura respectivamente.

Independientemente de la teoría que se seleccione en la simulación, con ellas se considera el porcentaje de participación de cada componente para definir el comportamiento de los materiales compuestos. Esto permite que se involucren el comportamiento no lineal de los componentes que puede afectar localmente una determinada zona interfacial.

- **Modelos constitutivos aplicados a los materiales:** Un parámetro clave para la simulación numérica en el análisis del mecanismo de deslizamiento en la interfaz de elementos reforzados con FRP es considerar cada material de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, con su propio comportamiento. De esta forma se parte del principio que la presencia de fenómenos como el daño y la plasticidad en la interfaz conducen a la reducción de las propiedades mecánicas en los materiales que la componen, por consiguiente, afectan el comportamiento de la interfaz [21].

Por medio de los modelos constitutivos se tiene la ventaja que al distribuir en el mallado de MEF los efectos de la fisuración, la rotura y la plasticidad entre otros, el comportamiento no lineal de los materiales que componen la interfaz se analiza desde un punto de vista fenomenológico, sin que se requiera hacer remallados, o utilizar mallados muy finos; por lo tanto su uso tiene un costo computacional menor en las simulaciones.

Bajo el principio que la fisuración en el hormigón produce la reducción de sus propiedades mecánicas, que afecta directamente la adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, se propone aplicar al hormigón un modelo constitutivo de daño, como los modelos de daño isótropo de Oliver et al. [79], y de Mazars [71], o modelos de daño plástico como el de Lubliner et al. [72]. Si en los ensayos de adherencia, las probetas se hacen en elementos de hormigón armado, el acero se considera como un material elasto-plástico.

Aunque el epoxi y la matriz del FRP generalmente tienen mayor resistencia que el hormigón, al estar sujetos a una alta concentración de tensiones, pueden fisurarse o plastificarse durante el mecanismo de pérdida de adherencia de la interfaz, o también pueden tener un comportamiento no lineal, por las grandes deformaciones que ocurren en el sustrato del hormigón fisurado.

El comportamiento no lineal de estos materiales, contribuye de paso a la mayor pérdida de adherencia de la zona interfacial, por ende, al epoxi y a la matriz del FRP, es necesario aplicarles el modelo constitutivo que sea acorde con el comportamiento que sea observado en los ensayos de los materiales. Si son frágiles ó quasi-frágiles, se pueden analizar con un modelo constitutivo de

daño, o de daño-plástico, y si son dúctiles, se aplica un modelo de plasticidad.

El modelo constitutivo aplicado a las fibras, depende de la magnitud de su resistencia, si es elevada se considera como un material elástico, pero si su orden de magnitud es similar a l de la matriz, es conveniente analizarlo bajo el modelo constitutivo que sea más adecuado acorde con su comportamiento. De esta forma, se introduce en la simulación numérica, fenómenos que se presentan en las fibras, y que pueden afectar el comportamiento de la interfaz, como es el caso de algunos tipos de fibras que son susceptibles a la rotura.

Es importante recalcar que se pueden utilizar cualquiera de las dos teorías de mezclas en las simulaciones de los ensayos de adherencia teniendo en cuenta los alcances de cada una. Sin embargo, para el desarrollo de este capítulo, se hace mayor énfasis en el uso de la teoría serie/paralelo [5], debido a las ventajas que tiene en la simulación de los materiales compuestos. De igual forma, En la validación de la estrategia propuesta de la simulación de los ensayos de adherencia, se utiliza el modelo de daño isótropo de Oliver et al. [79] para representar el daño en los materiales frágiles, aunque se podría haber aplicado un modelo de daño plástico u otro modelo de daño.

### 3.5.2 Formulación detallada de la teoría serie/paralelo

Como se mencionó, la teoría serie/paralelo propuesta por Rastellini [5], parte de la hipótesis que la contribución de los componentes en la respuesta del compuesto, es proporcional a su participación volumétrica de cada material componente. Asimismo, en esta teoría se establece que los componentes tienen una misma deformación en la dirección en paralelo (condición de isodeformación), y que tienen una misma tensión en la dirección en serie (condición de iso-tensión).

En este apartado se presenta una formulación que plantea la teoría serie/paralelo bajo el esquema de la generalización propuesto por Oller et al. [80]. De este modo se deja definida la teoría serie/paralelo de una forma detallada en el marco de la cinemática de los pequeños movimientos, para contar con un planteamiento básico en los desarrollos que se establecen en los siguientes capítulos.

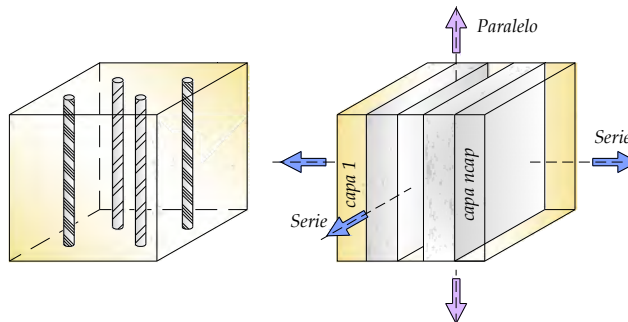


FIGURA 3-8 REPRESENTACIÓN DE UN MATERIAL COMPUESTO SEGÚN LA TEORÍA SERIE / PARALELO

Con base en la formulación presentada por Martínez et al. [81] para un material compuesto por dos componentes, a continuación se formulan las ecuaciones para una capa  $t$  del compuesto conformada por varios materiales. Por facilidad del planteamiento de la formulación se descompone el compuesto  $c$  en un determinado número de capas  $ncap$ , tal que cada capa  $t$  esta conformada por un número de componentes  $nc$ , donde los diferentes tipos de fibras que la componen están orientados en una dirección específica como se indica en la figura 3-8.

- *Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación y tensión*

En el análisis de un compuesto y sus componentes, el tensor deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se descompone una parte en serie  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  y otra en paralelo  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$  [81]:

$$(3:1) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_S$$

y el tensor de tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  se separa en sus componentes en serie  $\boldsymbol{\sigma}_S$  y en paralelo  $\boldsymbol{\sigma}_P$ :

$$(3:2) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \boldsymbol{\sigma}_S$$

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto*

Dada la condición de isodeformación entre las capas y el compuesto, el tensor de deformación total del compuesto  ${}^c\boldsymbol{\varepsilon}$  es equivalente a los tensores de deformación total de las capas que lo componen [82].

$$(3:3) \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon} \equiv {}^1\boldsymbol{\varepsilon} = \dots = {}^j\boldsymbol{\varepsilon} = \dots = {}^{ncap}\boldsymbol{\varepsilon}$$

- *Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en cada capa del compuesto*

Consecuentemente con la teoría serie/paralelo, en cada capa  $t$  se plantean las siguientes ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones:

- Comportamiento en paralelo

$$(3:4) \quad {}^c_t\boldsymbol{\varepsilon}_P = {}^1_t\boldsymbol{\varepsilon}_P = \dots = {}^n_t\boldsymbol{\varepsilon}_P = \dots = {}^{nc}_t\boldsymbol{\varepsilon}_P$$

$$(3:5) \quad {}^c_t\boldsymbol{\sigma}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n_t k_t^n \boldsymbol{\sigma}_P$$

- Comportamiento en serie

$$(3:6) \quad {}^c_t\boldsymbol{\varepsilon}_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n_t k_t^n \boldsymbol{\varepsilon}_S$$

$$(3:7) \quad {}^c_t\boldsymbol{\sigma}_S = {}^1_t\boldsymbol{\sigma}_S = \dots = {}^n_t\boldsymbol{\sigma}_S = \dots = {}^{nc}_t\boldsymbol{\sigma}_S$$

${}^n_j k$  corresponde a la participación volumétrica de cada componente, relaciona los volúmenes infinitesimales del  $n$ -ésimo componente  $d^n V$  y de la capa  $t$  del compuesto  $d^c V$ . Para garantizar el principio de conservación de masa en cada capa  $t$ , se debe cumplir que:

$$(3:8) \quad {}^n_j k = \frac{d^n V}{d^c V} \quad n = \{1, \dots, nc\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{nc} {}^n_j k = 1$$



- *Ecuación constitutiva en cada capa del compuesto*

Considerando que el tensor deformación  ${}^n\boldsymbol{\varepsilon}$  esta conformado por una parte elástica  ${}^n\boldsymbol{\varepsilon}^e$  y otra irre recuperable  ${}^n\boldsymbol{\varepsilon}^p$ , de las ecuaciones (3:4) y (3:6) se tiene que

$$(3:9) \quad \begin{aligned} {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P &= {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P & \Rightarrow & \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P^p = {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^p & \quad n = \{1, \dots, nc\} \\ {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^e & \Rightarrow & \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S^e + {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S^p = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^e + {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

El estado de tensiones se determina a través de la ecuación constitutiva que rige el comportamiento de cada componente  $n$  y el compuesto  $c$ :

$$(3:10) \quad {}^n\boldsymbol{\sigma} = {}^n\mathbb{C} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}^e = {}^n\mathbb{C} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon} - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

teniendo en cuenta la descomposición de los tensores de deformación y de tensión de las ecuaciones (3:1) y (3:2), la expresión anterior queda dada como:

$$(3:11) \quad \begin{bmatrix} {}^n\boldsymbol{\sigma}_P \\ {}^n\boldsymbol{\sigma}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^n\mathbb{C}_{PP} & {}^n\mathbb{C}_{PS} \\ {}^n\mathbb{C}_{SP} & {}^n\mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^e \\ {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^e \end{bmatrix} \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

$$\begin{aligned} {}^n\mathbb{C}_{PP} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_P}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \frac{\partial^2 {}^n\Psi}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P \partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P} & {}^n\mathbb{C}_{PS} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_P}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S} = \frac{\partial^2 {}^n\Psi}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P \partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S} \\ {}^n\mathbb{C}_{SP} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_S}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P} = \frac{\partial^2 {}^n\Psi}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S \partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P} & {}^n\mathbb{C}_{SS} &= \frac{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}_S}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S} = \frac{\partial^2 {}^n\Psi}{\partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S \partial {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que para el compuesto las tensiones son equivalentes a:

$$(3:12) \quad \begin{aligned} {}^c\boldsymbol{\sigma}_P &= {}^c\mathbb{C}_{PP} : {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^c\mathbb{C}_{PS} : {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S^e = {}^c\mathbb{C}_{PP} : ({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^c\mathbb{C}_{PS} : ({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \\ {}^c\boldsymbol{\sigma}_S &= {}^c\mathbb{C}_{SP} : {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^c\mathbb{C}_{SS} : {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S^e = {}^c\mathbb{C}_{SP} : ({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^c\mathbb{C}_{SS} : ({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

asimismo, introduciendo las expresiones (3:4) para cada componente se obtiene:

$$(3:13) \quad \begin{aligned} {}^n\boldsymbol{\sigma}_P &= {}^n\mathbb{C}_{PP} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^n\mathbb{C}_{PS} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^e = {}^n\mathbb{C}_{PP} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^n\mathbb{C}_{PS} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \\ {}^n\boldsymbol{\sigma}_S &= {}^n\mathbb{C}_{SP} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^n\mathbb{C}_{SS} : {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^e = {}^n\mathbb{C}_{SP} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^n\mathbb{C}_{SS} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

relacionando las ecuaciones (3:5) y (3:7) con las anteriores expresiones:

$$(3:14) \quad \begin{aligned} {}^c\boldsymbol{\sigma}_P &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n\boldsymbol{\sigma}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n\mathbb{C}_{PP} : ({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n\mathbb{C}_{PS} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \\ {}^c\boldsymbol{\sigma}_S &= {}^n\mathbb{C}_{SP} : ({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^n\mathbb{C}_{SS} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

- *Función de energía libre y tensor constitutivo en cada capa del compuesto*

La función de energía libre para cada capa  $t$  del compuesto queda expresada como

$$(3:15) \quad {}^c m {}^c \Psi({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^c\boldsymbol{\alpha}, {}^c\boldsymbol{\beta}) = {}^c m {}^c \Psi({}^c\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \underbrace{{}^c\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p, {}^c\boldsymbol{\alpha}, {}^c\boldsymbol{\beta}}_{{}^c\xi}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n \Psi({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \underbrace{{}^n\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p, {}^n\boldsymbol{\alpha}, {}^n\boldsymbol{\beta}}_{{}^n\xi})$$

${}^n\Psi({}^n\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^n\xi)$  es la energía libre de cada  $n$ -ésimo componente de la capa  $t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\boldsymbol{\beta}$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\xi$  es el grupo total de variables internas. Los grupos de variables son

aplicables de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente del compuesto.

De las expresiones (3:1), (3:4) y (3:6) el tensor de deformación de la capa  $t$  es:

$$(3:16) \quad {}^c \boldsymbol{\varepsilon} = {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P + {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S = {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S \Rightarrow {}^c \varepsilon_{ij} = {}^c (\varepsilon_{ij})_P + {}^c (\varepsilon_{ij})_S = {}^n (\varepsilon_{ij})_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n (\varepsilon_{ij})_S$$

$$\frac{\partial {}^c \varepsilon_{ij}}{\partial {}^n (\varepsilon_{kl})_P} = I_{ijkl} \quad \frac{\partial {}^c \varepsilon_{ij}}{\partial {}^n (\varepsilon_{kl})_S} = {}^n k I_{ijkl}$$

esta ecuación puede interpretarse como una relación de los comportamientos básicos en serie y en paralelo, y con influencia en los tensores de tensión en cada componente como se observa en las expresiones (3:11).

Bajo esta hipótesis de acoplamiento se supone una redistribución interna de la energía libre de los dos comportamientos básicos, tal que la energía libre de la capa  $t$  o los componentes puede descomponerse, una parte en serie  ${}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$ , y otra en paralelo  ${}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$ .

$$(3:17) \quad {}^n m {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) = {}^n m {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) + {}^n m {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

Con base en lo formulado por Oñate et al. [83], se determina la función de energía libre en serie y en paralelo, de tal forma que:

$$(3:18) \quad {}^c m {}^c \Psi_P({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) \equiv \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$$

$${}^c m {}^c \Psi_S({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) \equiv \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$$

La ley constitutiva surge de considerar la desigualdad de Clausius-Duhem y el método de Coleman [84; 85], conduciendo a la siguiente forma

$$(3:19) \quad {}^c \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial {}^c \varepsilon_{ij}}$$

$$= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_P} \frac{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_P}{\partial {}^c \varepsilon_{ij}} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_S} \frac{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_S}{\partial {}^c \varepsilon_{ij}}$$

$$= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_P} (I_{kl ij})^{-1} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_S} ({}^n k I_{kl ij})^{-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{ij})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{ij})_S}$$

$$= \underbrace{({}^n \sigma_{ij})_P}_{({}^c \sigma_{ij})_P} + \underbrace{({}^n \sigma_{ij})_S}_{({}^c \sigma_{ij})_S}$$

De acuerdo con el segundo término de la ecuación (3:19) y su relación con la

expresión (3:7) se define que

$$(3:20) \quad {}_i^c m \frac{\partial {}^c \Psi_S({}_i^c \varepsilon_{ij}, {}_i^c \xi)}{\partial ({}_i^c \varepsilon_{kl})_S} \equiv {}_i^n m \frac{\partial {}^n \Psi_S({}_i^n \varepsilon_{ij}, {}_i^n \xi)}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{kl})_S} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Con lo cual se cumplen las ecuaciones (3:5) y (3:7) y se obtiene que el tensor de tensión para la capa  $t$  equivale a:

$$(3:21) \quad {}_i^c \sigma_{ij} = ({}_i^c \sigma_{ij})_P + ({}_i^c \sigma_{ij})_S = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k ({}_i^n \sigma_{ij})_P + ({}_i^n \sigma_{ij})_S$$

La disipación mecánica  $\Xi_m$  queda expresada como:

$$(3:22) \quad \begin{aligned} \Xi_m &= {}_i^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}_i^c \varepsilon_{ij}, {}_i^c \xi)}{\partial {}^c \xi} \dot{{}_i^c \xi} = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}^n \Psi({}_i^n \varepsilon_{ij}, {}_i^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \dot{{}_i^n \xi} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}^n \Psi_P({}_i^n \varepsilon_{ij}, {}_i^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \dot{{}_i^n \xi} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}^n \Psi_S({}_i^n \varepsilon_{ij}, {}_i^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \dot{{}_i^n \xi} \leq 0 \end{aligned}$$

El tensor constitutivo tangente  $\mathbb{C}$  corresponde a:

$$(3:23) \quad {}_i^c C_{ijkl} = \frac{\partial {}_i^c \sigma_{ij}}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} = {}_i^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}_i^c \varepsilon_{ij}, {}_i^c \xi)}{\partial {}_i^c \varepsilon_{ij} \partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}^n \Psi({}_i^n \varepsilon_{ij}, {}_i^n \xi)}{\partial {}_i^n \varepsilon_{ij} \partial {}_i^n \varepsilon_{kl}}$$

$$\begin{aligned} ({}_i^c C_{ijkl})_P &= \frac{\partial ({}_i^c \sigma_{ij})_P}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial ({}_i^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^c \varepsilon_{kl})_P} + \frac{\partial ({}_i^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^c \varepsilon_{kl})_S} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_P} \frac{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_P}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} + \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{kl})_S} \frac{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_S}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_P} (I_{rskl})^{-1} + \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_S} ({}_i^n k I_{rskl})^{-1} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{kl})_P} + \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{kl})_S} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ({}_i^c C_{ijkl})_S &= \frac{\partial ({}_i^c \sigma_{ij})_S}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial ({}_i^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^c \varepsilon_{kl})_P} + \frac{\partial ({}_i^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^c \varepsilon_{kl})_S} \\ &= \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_P} \frac{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_P}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_S} \frac{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_S}{\partial {}_i^c \varepsilon_{kl}} \\ &= \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_P} (I_{rskl})^{-1} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{rs})_S} ({}_i^n k I_{rskl})^{-1} \\ &= \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{kl})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}_i^n k} \frac{\partial ({}_i^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \varepsilon_{kl})_S} \end{aligned}$$

La expresión del tensor constitutivo equivale a:

$$(3:24) \quad \begin{aligned} ({}^c C_{ijkl})_{PP} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^c \epsilon_{kl})_P} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k ({}^n C_{ijkl})_{PP} & ({}^c C_{ijkl})_{PS} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^c \epsilon_{kl})_S} = \sum_{n=1}^{nc} ({}^n C_{ijkl})_{PS} \\ ({}^c C_{ijkl})_{SP} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^c \epsilon_{kl})_P} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} ({}^n C_{ijkl})_{SP} & ({}^c C_{ijkl})_{SS} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^c \epsilon_{kl})_S} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k} ({}^n C_{ijkl})_{SS} \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3:12(a))y (3:12(b)) quedan re-escritas como:

$$(3:25) \quad \begin{aligned} {}^c \sigma_P &= {}^c C_{PP} : {}^c \epsilon_P + {}^c C_{PS} : {}^c \epsilon_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{PP} : {}^c \epsilon_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n C_{PS} : {}^c \epsilon_S \\ {}^c \sigma_S &= {}^c C_{SP} : {}^c \epsilon_P + {}^c C_{SS} : {}^c \epsilon_S = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n C_{SP} : {}^c \epsilon_P + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k} {}^n C_{SS} : {}^c \epsilon_S \end{aligned}$$

Considerando las expresiones indicadas en (3:9) se tiene que estas formulaciones son equivalentes a las ecuaciones (3:14).

- *Ecuación de equilibrio en el compuesto*

Hecho el análisis de cada capa, se tiene que el tensor de tensión del compuesto  $c$  corresponde a la suma de los tensores de tensiones de las capas del compuesto  $ncap$  acorde con el porcentaje de participación volumétrica de cada capa  ${}^c k$ .

$$(3:26) \quad {}^c \sigma = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k {}^t \sigma = \sum_{t=1}^{ncap} {}^t k ({}^c \sigma_P + {}^c \sigma_S)$$

### 3.5.3 Aspectos generales del modelo de daño isótropo

En la mecánica de medios continuos, el proceso de crecimiento de las microfisuras y los micro-vacíos en los materiales, con la consecuente degradación de sus propiedades, se simula por medio de una variable interna de daño. El modelo de daño isótropo desarrollado por Oliver et al. [79], fundamentado en la teoría de daño continuo presentada inicialmente por Kachanov [86], es una particularización del modelo de daño anisótropo.

El modelo de daño anisótropo [57] define la variable interna de daño, como un tensor de cuarto orden  ${}^n \mathbb{M}$  que transforma el tensor de tensiones real  ${}^n \sigma$  del material real con daño en un tensor de tensiones efectivas  ${}^n \bar{\sigma}$  de un material ficticio sin daño, tal que:

$$(3:27) \quad {}^n \bar{\sigma} \equiv {}^n \mathbb{M} : {}^n \sigma$$

En el modelo de daño isótropo la degradación del material se desarrolla en todas las direcciones por igual y depende de una variable escalar de daño  ${}^n d$  [87], con lo que el tensor de daño se reduce a  ${}^n \mathbb{M}^{-1} = (I - {}^n d) \mathbb{I}$ , y la ecuación se define como:

$$(3:28) \quad {}^n \bar{\sigma} \equiv [(1 - {}^n d) \mathbb{I}]^{-1} : {}^n \sigma = (1 - {}^n d)^{-1} {}^n \sigma$$

siendo la variable de daño  ${}^n d$ , una medida de la pérdida de rigidez del material; su rango de valores es  $0 \leq {}^n d \leq 1$ , donde 0 corresponde al material sin daño y 1 equivale al material completamente dañado.

El modelo de daño isótropo, como se indica en la figura 3-9, aparte de utilizar la transformación de las tensiones entre el espacio del material ficticio sin daño y el espacio del material real con daño, bajo el concepto de tensión efectiva, parte de la hipótesis de equivalencia de las deformaciones entre los dos espacios, concepto que fue presentado por primera vez por Lemaitre y Chaboche en 1978 [88].

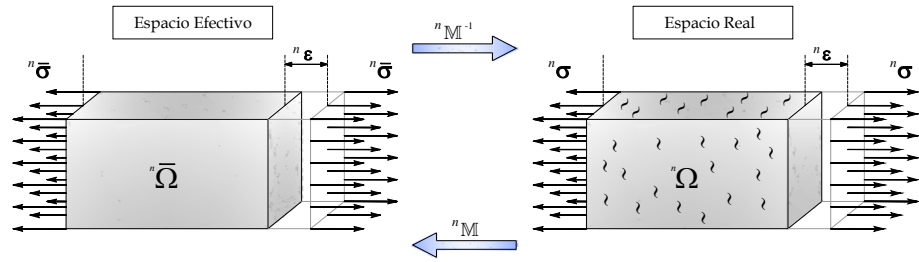


FIGURA 3-9 ESQUEMA REPRESENTATIVO DE LA HIPÓTESIS TENSION EFECTIVA. [57]

Con el modelo de daño isótropo se define el valor de la tensión en que se inicia el daño y la evolución del parámetro de daño para describir el comportamiento de un determinado material. El criterio de daño isótropo está dado como [85]

$$(3:29) \quad \mathcal{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) = f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \kappa({}^nd) \leq 0 \quad {}^n\boldsymbol{\beta} \equiv \{{}^nd\}$$

$\mathcal{F}^\sigma$  es la función continua de tensiones que determina la superficie de daño, se divide en una función  $f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})$  que depende del tensor de tensiones y en una función  $\kappa({}^nd)$  que establece la posición del umbral de daño. Esta formulación constitutiva permite que el modelo de daño isótropo se utilice bajo cualquier función de fluencia, como Von Mises, Mohr Coulomb o Drucker-Prager [89].

La variación del parámetro del daño es obtenida a través del parámetro de consistencia del daño y de la condición de Kuhn-Tucker [57], haciendo posible la integración explícita de la variable de interna de daño, tal que

$$(3:30) \quad \begin{aligned} \kappa({}^nd) &= \max \left\{ {}^n\kappa_o, \max \left\{ f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \right\} \right\} \\ {}^nd &= G \left[ f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \right] \end{aligned}$$

${}^n\kappa_o$  es el valor inicial del umbral de daño que corresponde a una propiedad del material y está relacionado con la resistencia a compresión o a tracción, de acuerdo con la función de umbral de daño con la que se realice el análisis.

La función escalar  $G[\chi]$  que establece la evolución del ablandamiento del material, es invertible y positiva, y su derivada es positiva y monótona creciente [87]. En este capítulo se utilizó una función de ablandamiento lineal, definida como

$$(3:31) \quad G \left[ f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \right] = \frac{1 - \frac{{}^n\kappa_o}{\kappa({}^nd)}}{1 + {}^nA} \quad \text{con} \quad 0 < \kappa_o \leq \kappa({}^nd)$$

siendo  ${}^nA$  un parámetro que depende de la energía de fractura del material, donde:

$$(3.32) \quad {}^nA = -\frac{{}^n\tau_o^2}{2{}^ng_f} \quad \text{con} \quad {}^ng_f = \frac{{}^nG_f}{{}^nl_f}$$

donde  ${}^n\tau_o = f_o({}^n\bar{\sigma})$  es el valor que se obtiene del criterio de daño indicado en la expresión (3.29) para el primer umbral de degradación,  ${}^ng_f$  es la energía máxima específica,  ${}^nG_f$  es la energía de fractura del material y  ${}^nl_f$  es la longitud de fractura.

La longitud de fractura esta relacionada con las dimensiones del elemento finito en el que se aplica el criterio de daño; este parámetro permite que el proceso de degradación resultante sea independiente del mallado, con lo cual se garantiza la objetividad y exactitud de la solución del análisis numérico realizado. Para mayores detalles de este modelo se puede consultar Oliver et al. [79] y Oller [57].

El modelo constitutivo de Oliver et al. [79] es un modelo eficiente y sencillo para simular el comportamiento de materiales frágiles, no obstante, se hace énfasis en que con la estrategia propuesta para el análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, se pueden considerar otros modelos constitutivos, de tal forma, que se seleccione en cada material el modelo que mejor represente su comportamiento.

### 3.6 Análisis de la interfaz hormigón-epoxi-FRP en ensayos de adherencia a través de las teorías de mezclas

Son pocas las investigaciones que involucran simulaciones en tres dimensiones en el estudio del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, y que hasta ahora estas simulaciones solo han considerado el comportamiento lineal la zona interfacial; entre las mas recientes se encuentran: la simulación de un ensayo de corte doble con refuerzo de GFRP de Nendi et al. [69] y la simulación de un ensayo de corte simple de Chen y Pan [49].

La estrategia propuesta en este capítulo permite la simulación de los ensayos de adherencia en tres dimensiones considerando el comportamiento no lineal de todos los materiales que inciden en el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP. Por consiguiente, con esta estrategia se puede estudiar la transmisión de esfuerzos y los mecanismos de fallo en la zona interfacial de una forma integral.

Con el fin de validar la estrategia propuesta para el análisis de los ensayos se analiza y compara el comportamiento interfacial concreto-epoxi y epoxi-FRP en tres ensayos de corte doble y uno de flexión con rótula\*. De otra parte, a través de las simulaciones de los ensayos se busca establecer las diferencias entre los ensayos

\* Las pruebas experimentales, con las que se contrasta las simulaciones, fueron realizadas por el grupo de investigación que dirige el profesor Lluís Gil en el Laboratorio de Resistencia de Materiales y Estructuras de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Terrassa. Los montajes y las configuraciones de los ensayos de adherencia fueron definidos por el profesor Lluís Gil y el ingeniero Juan José Cruz.

de adherencia por corte y por flexión, y, analizar su incidencia en el comportamiento de la interfaz.

Los resultados de este estudio hacen parte de los proyectos de investigación “Estudio de materiales compuestos para el diseño, refuerzo y reparación de estructuras en ingeniería civil - RECOMP” y “Comportamiento no lineal de materiales compuestos multilaminados, considerando delaminación - DELCOM”, realizados en la Universidad Politécnica de Cataluña.

### 3.6.1 Montajes de los ensayos de adherencia

Los ensayos de corte doble fueron propuestos para analizar el comportamiento de la interfaz al transmitir el esfuerzo axial en la zona reforzada, sin la influencia de efectos por flexión indeseables [1], y el ensayo de adherencia por flexión fue planteado para observar el comportamiento de la interfaz al transferir el esfuerzo cortante en la zona reforzada considerando los efectos por flexión.

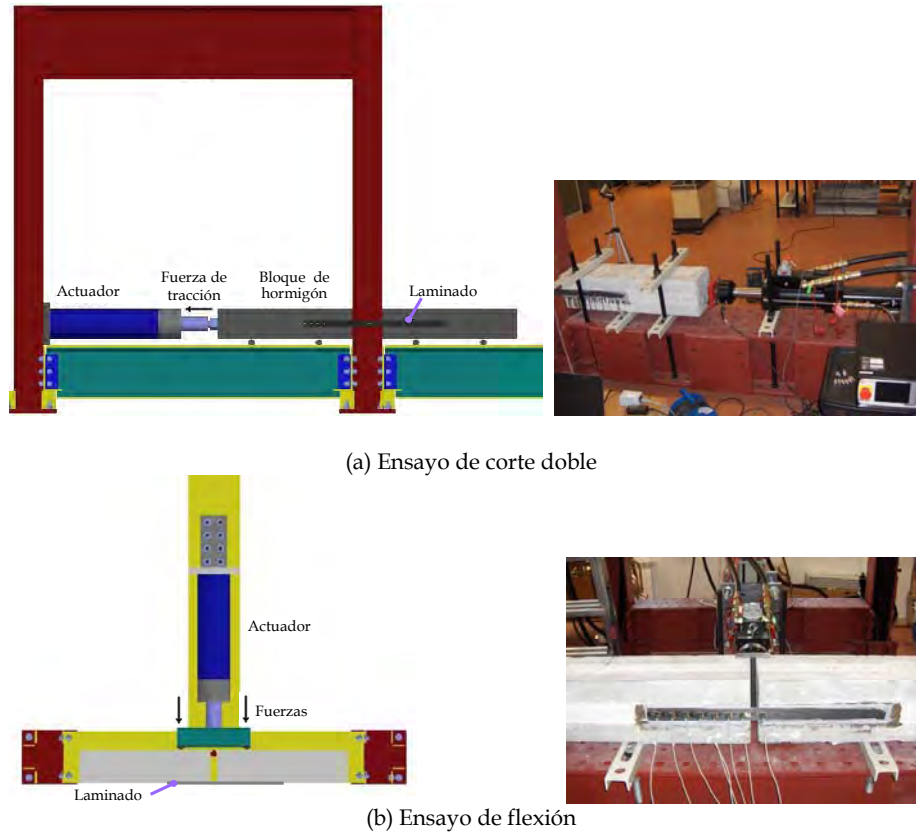


FIGURA 3-10 MONTAJES DE ENSAYOS DE ADHERENCIA (Cortesía de Ll. Gil y J.J. Cruz)

En la figura 3-10 (a) se muestra el montaje de los ensayos de adherencia por corte

doble y en la figura 3-10 (b) se señala el montaje del ensayo de adherencia por flexión con rótula. Para los dos tipos de ensayo, una de las láminas se coloca con una menor longitud en uno de los bloques, con el propósito de inducir el fallo en ese sector, y de esta forma, garantizar que la instrumentación utilizada en los montajes registrase todo el proceso de carga hasta el fallo. Por ello, para todos los ensayos sólo se simuló el bloque en el que se produce el mecanismo de fallo.

### 3.6.2 Simulaciones de los ensayos de adherencia

Las simulaciones numéricas de los ensayos de adherencia, mediante el programa de elementos finitos PLCD [90], fueron analizadas por control de desplazamientos. Estos modelos se discretizaron con mallados de elementos finitos hexaédricos de 8 nodos, dejando un mallado denso en la zona reforzada, un mallado grosero y un mallado de transición, como se indica en la figura 3-11. En las simulaciones se parte de la hipótesis de un estado inicial de adherencia perfecta en las interfaces hormigón-epoxi, epoxi-CFRP y hormigón-acero.

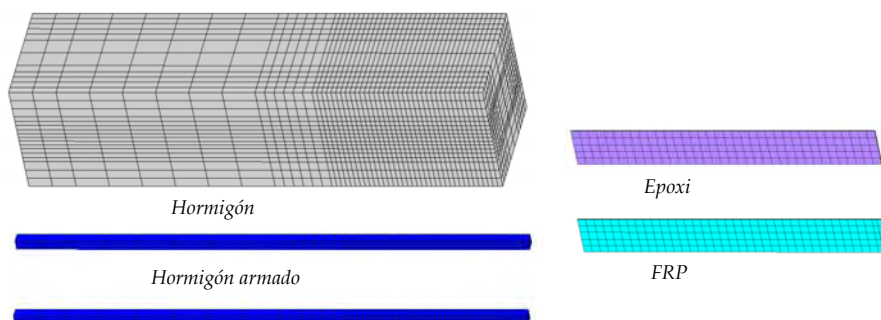


FIGURA 3-11 DISCRETIZACIÓN EN LAS PROBETAS DE LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA

Para hacer las comparaciones de las deformaciones medidas en los ensayos con las obtenidas en las simulaciones, en la discretización de los modelos se tuvo en cuenta que sobre la banda corta de FRP se colocaron las galgas extensométricas cada 0.05m desde del extremo donde se adhiere el refuerzo. En la tabla 3-1 se indican en los cuatro modelos la nomenclatura, el número de elementos para cada material compuesto y la longitud de adherencia  $l_{db}$ .

Ensayos de adherencia		$l_{db}$ m	Elementos de hormigón	Elementos de hormigón armado	Elementos del epoxi	Elementos del FRP
Descripción	Nomenclatura					
Corte doble reforzado desde el extremo	CD-21-EX	0.21	7524	228	520	300
Corte doble reforzado desde el extremo	CD-36-EX	0.36	9702	294	620	440
Corte doble reforzado en una zona intermedia a 0.25m del extremo	CD-36-IN	0.36	9702	294	620	490
Flexión reforzado desde el extremo	F-36-EX	0.36	9900	300	360	380

TABLA 3-1 DISCRETIZACIÓN DE LOS MODELOS DE LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA



### 3.6.3 Materiales utilizados en los ensayos de adherencia

En los ensayos de adherencia el refuerzo corresponde a un laminado unidireccional de CFRP, el cual fue adherido al hormigón (H-50) con un epoxi adhesivo, que esta conformado por dos capas, una de imprimación (MBRACE Primer) y otra adhesiva (MBRACE Adhesive).

- *Descripción de los materiales compuestos*

De acuerdo con la teoría de mezclas serie/paralelo, en el hormigón armado y en el CFRP, las matrices de estos compuestos son el hormigón y la matriz polimérica, respectivamente, mientras que el acero y las fibras de carbono constituyen el refuerzo. Además, para considerar su correspondiente anisotropía, se tiene en cuenta que las barras de acero y las fibras de carbono están orientadas a 0 grados de la dirección en que se aplica la carga. En la figura 3-12 se indican los cuatro materiales compuestos asignados a los modelos de los ensayos de adherencia y en la tabla 3-2 se muestran los porcentajes volumétricos en los que participan los componentes en cada material compuesto.

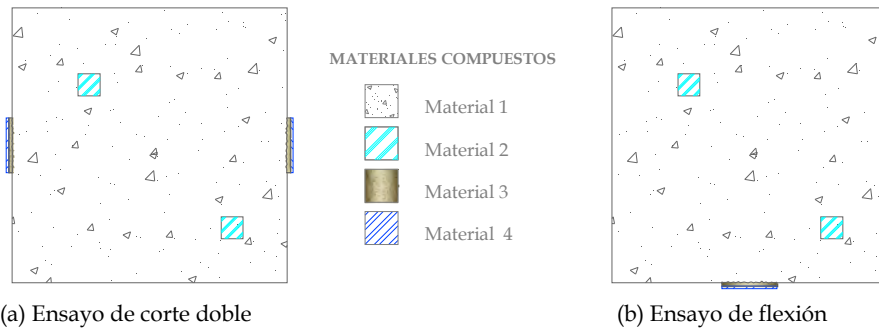


FIGURA 3-12 CONFIGURACIÓN DE LOS COMPUESTOS EN LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA[21]

Material compuesto	Matriz de Hormigón	Acero a 0°	Matriz de Resina	Matriz Polimérica	Fibra de Carbono a 0°
1	100				
2	49.8	50.2			
3			100		
4				0.32	0.68

TABLA 3-2 PORCENTAJES DE LOS COMPONENTES EN LOS MATERIALES COMPUESTOS [21]

- *Descripción de los materiales simples*

Los modelos tiene cinco materiales simples y sus propiedades se muestran en la tabla 3-3, donde  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  son los módulos de elasticidad en las direcciones "x", "y" y "z",  $\nu$  es el módulo de Poisson,  $\sigma_c$  y  $\sigma_t$  son las tensiones máximas resistentes de compresión y de tracción,  $G_c$  y  $G_t$  son las energías de aplastamiento y de fractura. Las propiedades mecánicas de los materiales fueron obtenidas de ensayos realizados por el fabricante.

En las investigaciones de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, en las que se han modelizado ensayos de adherencia, se han considerado diferentes criterios de daño

para el hormigón. Sin embargo, no se ha tenido en cuenta el daño en el adhesivo o en la matriz del FRP, efectos que evidentemente, reducen las propiedades mecánicas de los materiales que componen la interfaz y, por ende, afectan la adherencia [1].

Con el propósito de considerar el comportamiento no lineal de los materiales de la interfaz, con la estrategia propuesta para analizar su influencia en el mecanismo de fallo, en el hormigón, el epoxi y la matriz polimérica del compuesto se aplicó el modelo de daño de isotrópico de Oliver et al. [79], en el acero se utilizó el modelo elasto-plástico, mientras que la fibra de carbono se consideró como un material elástico por su elevada resistencia. Además se parte del principio que los materiales en su estado inicial no hay daño, ni plasticidad.

Material	Criterio de límite	$E_x=E_y=E_z$ MPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$\sigma_t$ MPa	Gc J/m <sup>2</sup>	Gt J/m <sup>2</sup>
Hormigón	Mohr-Coulomb	$3.65 \cdot 10^4$	0.25	52.0	3.0	55.0-36.5	0.55-36
Acero	Von Mises	$2.00 \cdot 10^5$	0.00	270.0	270.0	2000.0	2000.0
Epoxi	Mohr-Coulomb	$1.25 \cdot 10^4$	0.20	80.2	22.9	36.0	3.0
Matriz polimérica	Mohr-Coulomb	$1.20 \cdot 10^4$	0.20	87.5	29.2	36.0	3.0
Fibra de carbono	Von Mises	$2.26 \cdot 10^5$	0.00	2200.0	2200.0	14500.0	14500.0

TABLA 3-3 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES COMPONENTES

### 3.6.4 Ensayo de corte doble CD-21-EX

La geometría de la probeta analizada se indica en la figura 3-13, donde se ve que las bandas de CFRP adheridas desde el extremo del bloque, tienen una longitud de adherencia de 0.21m y de 0.50m. Las bandas de CFRP tienen un ancho de 0.05m y un espesor de 0.0012m, y el epoxi se tomó con un espesor promedio de 0.0015m. En la figura 3-14 se muestra el mallado de la probeta y se señala la región en que se analiza el comportamiento de la interfaz.

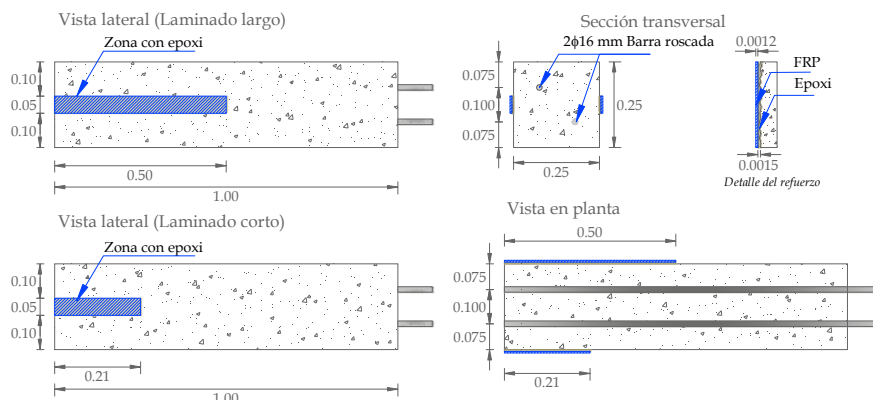


FIGURA 3-13 GEOMETRÍA DE LA PROBETA DE CORTE DOBLE CON  $L_{DB}$  DE 0.21M CD-21-EX

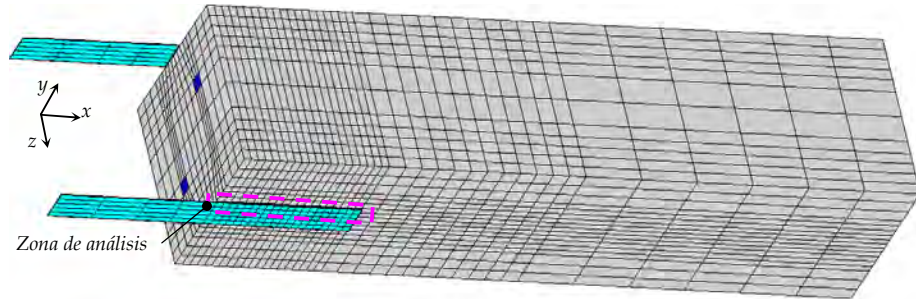


FIGURA 3-14 MALLADO DE CD-21-EX

- *Deformaciones*

En la prueba experimental la carga máxima obtenida por cada lámina fue de 29.7kN. En el hormigón se tomó una energía de aplastamiento  $G_c$  de 55J/m<sup>2</sup> y una energía de fractura  $G_t$  de 0.55J/m<sup>2</sup>.

En la figura 3-15 se presentan las deformaciones en el compuesto de acuerdo con la ubicación de las galgas en la probeta. Se observa la similitud que existe entre la evolución de las deformaciones medidas en el ensayo y la obtenida en la simulación. En este caso, en general, se puede decir que la simulación y la prueba experimental tienen una relación de carga deformación similar, por lo tanto el modelo de simulación es apropiado para estudiar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP.

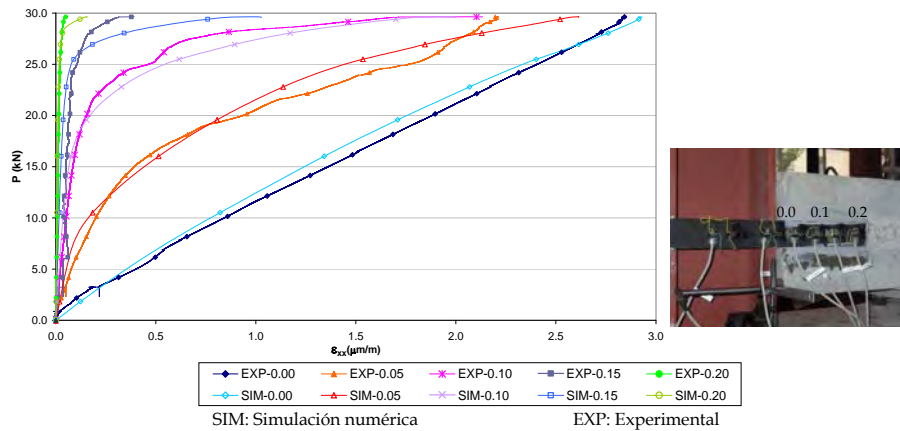


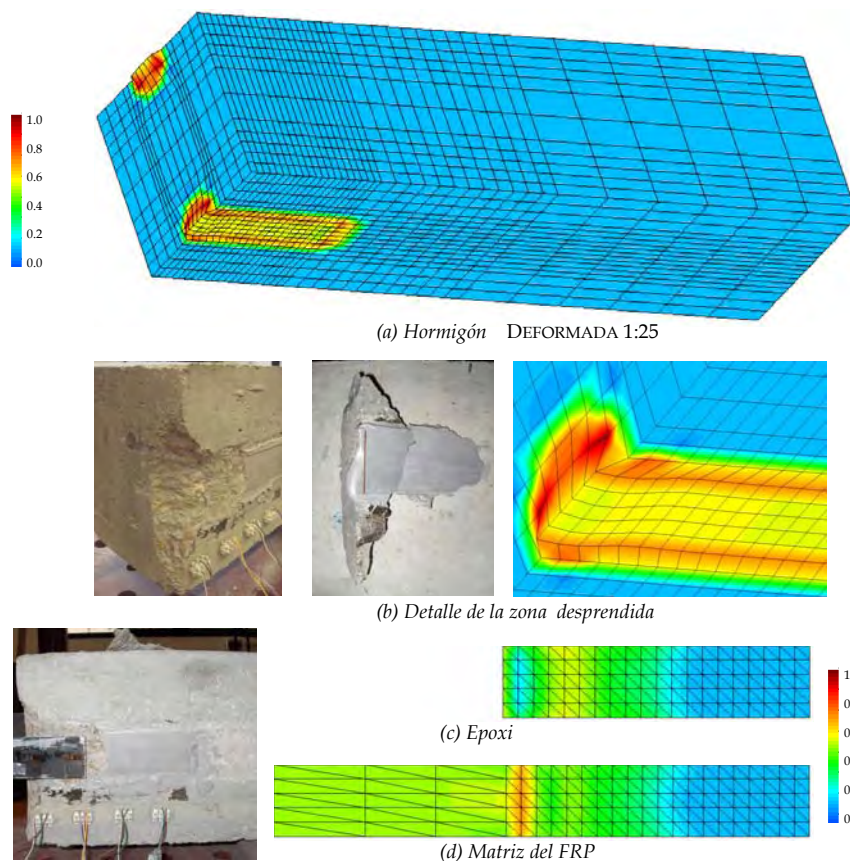
FIGURA 3-15 EVOLUCIÓN DE LAS DEFORMACIONES EN EL COMPUESTO DE CD-21-EX

La evolución de las deformaciones muestra como se va transfiriendo la carga conforme se va reduciendo la zona adherida del laminado. Se observa que el nivel de carga y la magnitud de las deformaciones están muy por debajo del límite elástico del CFRP, incluso cuando ocurre el desprendimiento total del laminado. En la figura 3-15 se observa que primero se presenta un estado de carga no lineal en el 0.05m, después en el 0.10m, luego en el 0.015 y, finalmente a 0.20, hasta que se produce el desprendimiento de la lámina.

- *Daño*

La probeta CD-21-EX tuvo una baja ductilidad durante el fallo, en la cual se deslizó el laminado, se desprendió una sección del extremo del bloque de hormigón, falló la interfaz hormigón-epoxi en la zona aledaña, y finalmente se despegó el FRP totalmente, tal como se aprecia en la figura 3-16.

El uso de la teoría de mezclas permite definir la evolución de las variables internas acorde con el modelo constitutivo asignado a cada componente de los compuestos, lo que conduce a que se pueda analizar el mecanismo de fallo de la interfaz de una forma integral. Aprovechando esta ventaja, a través de la estrategia propuesta se estudia la evolución del daño en el hormigón, el epoxi y la matriz del FRP.



\* Las fotografías son cortesía de L.I. Gil y J.J. Cruz

FIGURA 3-16 DAÑO EN CD-21-EX

En la figura 3-16 (a) se aprecia que el mayor daño en el hormigón se produce hacia los bordes superior e inferior de la zona con refuerzo, con un máximo del 75% hacia donde termina el FRP. En la figura 3-16 (b) se evidencia que la parte desprendida del hormigón en el bloque tiene una forma similar a la sección que se

deforma en el modelo numérico y que presenta el mayor daño. El desprendimiento de un trozo hormigón denominado como de falla, se presenta también en los ensayos de corte simple, como se puede ver en diferentes estudios, entre ellos, el de Yao et al. [22] como se muestra en la figura 3-4.

En la figura 3-16 (c) se muestra que en el epoxy hay daño hasta la zona intermedia, siendo mayor en las esquinas de la zona con refuerzo y a 0.04m del extremo del bloque. En la figura 3-16(d) se observa que en la matriz del FRP el mayor daño se presenta a 0.01m del extremo de la zona reforzada con un valor de 62%, como. Tanto en el epoxy, como en la matriz del FRP, se ve que el mayor daño ocurre hacia el extremo donde se desprende el hormigón, asimismo se aprecia que el daño se reduce hacia la zona intermedia con refuerzo.

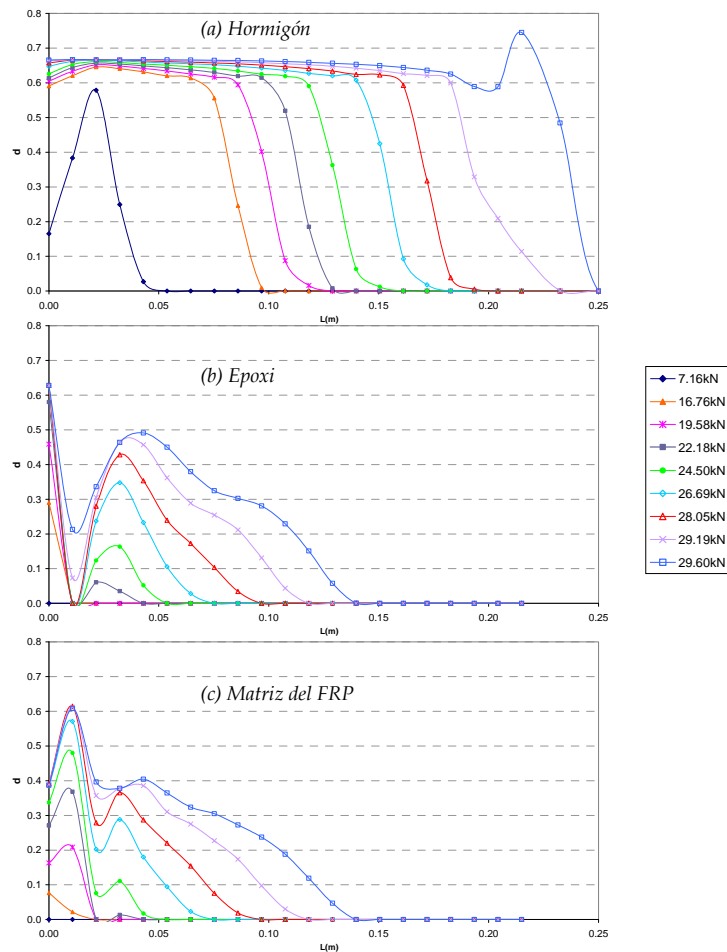


FIGURA 3-17 EVOLUCIÓN DEL DAÑO EN CD-21-EX

En la figura 3-17 se observa la evolución del daño a lo largo del borde superior mostrado en la figura 3-14. En lo referente al daño en el hormigón, en la figura 3-17

(a) se aprecia que hay una distribución de daño uniforme con un 67% y que el máximo daño ocurre en el extremo donde termina el laminado, con un 75% correspondiente al momento del fallo. En lo que respecta al daño en el epoxi señalado en la en la figura 3-17 (b), la distribución de daño no es uniforme, el máximo daño en el epoxi ocurre en el extremo del bloque donde se adhiere el refuerzo alcanzando un valor de 62.8%, luego se reduce a los 0.01m y se vuelve a incrementar a 0.04m pero sus valores son menores; el daño en el extremo del epoxi evidencia la influencia del desprendimiento del hormigón . El daño en la matriz polimérica indicado en la figura 3-17 (c), no tiene una distribución uniforme es máximo a 0.01m, en 0.03 se reduce y se vuelve a incrementar entre 0.04m y 0.05m aunque el daño es menor un 30% con respecto al de 0.01m.

En este caso se muestra que el daño en el hormigón se extiende hasta 0.25m desde el extremo del bloque, es decir, a 0.04m más allá del laminado, asimismo el daño en el adhesivo y en la matriz sólo se presenta hasta 0.014m de la zona reforzada.

- *Distribución de tensiones principales para la carga última*

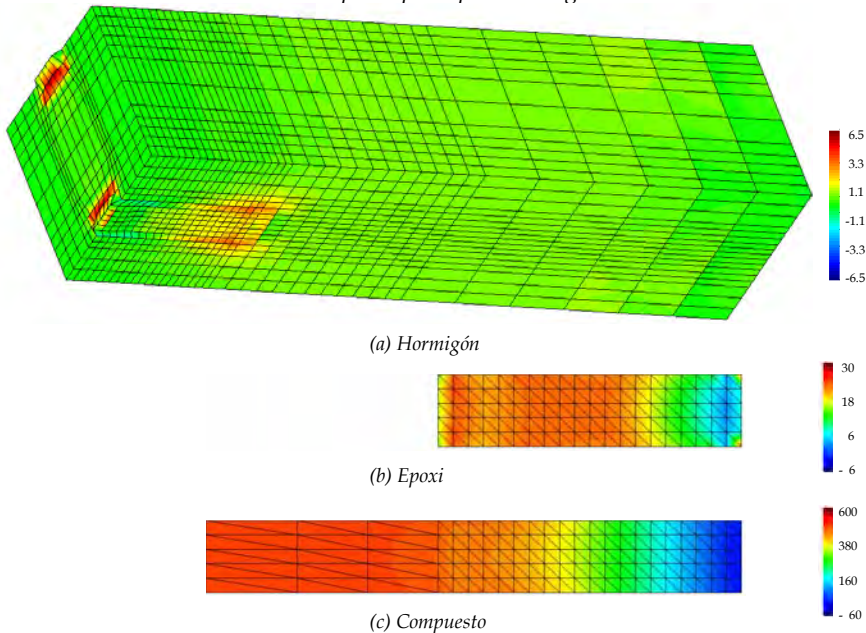


FIGURA 3-18 TENSIONES PRINCIPALES EN CD-21-EX PARA UNA CARGA ÚLTIMA DE 29.60kN

En la figura 3-18 (a) se observa el estado de tensiones principales del hormigón en los extremos de la zona reforzada, donde se aprecia el efecto conjunto del desprendimiento y del deslizamiento. En la figura 3-18 (b) se muestra el estado de tensiones principales en el epoxi, donde se identifica que en algunos sectores la distribución de tensiones transversalmente no es uniforme, siendo mayor en el centro, en particular esto se aprecia entre 0.02m y 0.06m, y, después de 0.13m. Por último, en la figura 3-18 (c) se presentan las tensiones en el laminado CFRP, las cuales no superan la resistencia del compuesto 2200MPa, solo de alcanza un 22.5%,

pero por el daño progresivo en los materiales de la interfaz, el refuerzo tiene un comportamiento no lineal.

De otra parte, se aprecia que la distribución de tensiones principales en el epoxy y en el FRP no es uniforme transversalmente, siendo mayor en el centro, lo que explica la forma de la fracción fallada del epoxy a los 0.05m mostrada en la figura 3-16 (b), y la forma de las fisuras observadas en la superficie de falla de los ensayos de Pellegrino [30].

- *Distribución de tensiones en la zona de análisis*

En lo que respecta a las tensiones axiales en el hormigón, en la figura 3-19 se observa que por el desprendimiento del hormigón, en el extremo donde se adhiere el CFRP,  $\sigma_{xx}$  disminuye con el incremento de carga mientras que  $\sigma_{zz}$  aumenta, efecto que ocurre hasta una carga de 22.18kN.

Como señal del deslizamiento, las mayores tensiones  $\sigma_{xx}$  con valores próximos a 2.00MPa van cambiando de posición, desde el extremo del bloque hacia el extremo donde termina el FRP. Con la carga previa fallo, ocurre la tensión máxima  $\sigma_{xx}$  a 0.21m de 2.31MPa, posteriormente con la carga última la mayor tensión de 1.78MPa se presenta a 0.24m, lo que muestra la pérdida de capacidad de la zona reforzada, y el consecuente despegue del laminado. En lo que respecta a  $\sigma_{zz}$  en el extremo inicial alcanza una tensión máxima de -2.70MPa para 22.18kN; mientras que a lo largo del laminado las tensiones son bajas después de 0.02m y la máxima tensión  $\sigma_{zz}$  tiene valores próximos a 0.38MPa para los diferentes casos de carga.

Referente a las tensiones tangenciales en el hormigón indicadas en la figura 3-20, se observa que para los diferentes niveles de carga hasta 26.69kN, las mayores tensiones  $\tau_{xy}$  ocurren en el extremo donde se adhiere el FRP, donde se alcanza la máxima tensión de 1.79MPa con una carga de 7.16kN, para cargas superiores la tensión va disminuyendo. Como evidencia del deslizamiento, a lo largo de la zona reforzada hacia el extremo final del laminado se van presentando las mayores tensiones entre 0.75MPa y 0.80MPa hasta una 28.05kN; luego se incrementan en 0.019m, hasta alcanzar una tensión de 1.31MPa. En lo que corresponde a las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  en el extremo de la zona reforzada se presenta la máxima tensión de 1.11MPa, a lo largo del hormigón con refuerzo las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  no superan los 0.50MPa.

De acuerdo con lo anterior, se aprecia que el fallo de la zona reforzada para es un efecto conjunto de las tensiones normales y tangenciales, en el extremo del bloque de hormigón predominan las tensiones  $\sigma_{zz}$ , en cambio a lo largo del laminado imperan las tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\tau_{xy}$ . Esto indica que en el extremo de la zona reforzada hay un efecto conjunto entre el deslizamiento y el desprendimiento del laminado, mientras que a lo largo del refuerzo predomina el efecto del deslizamiento.

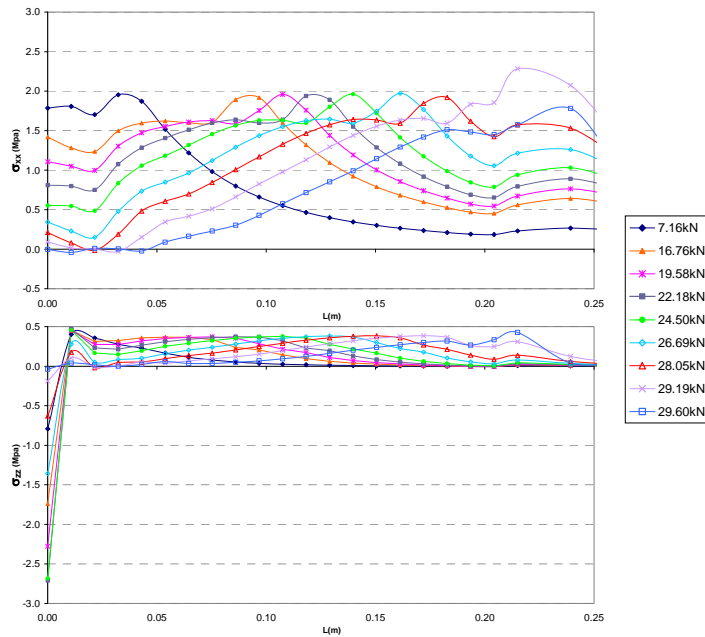


FIGURA 3-19 TENSIONES NORMALES EN EL HORMIGÓN DE CD-21-EX

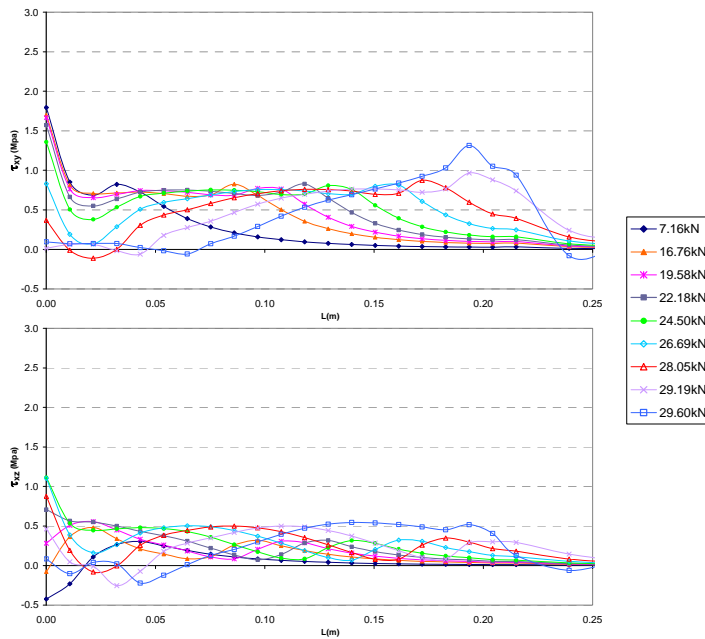


FIGURA 3-20 TENSIONES TANGENCIALES EN EL HORMIGÓN DE CD-21-EX

En la figura 3-21 se señalan las tensiones normales y en la figura 3-22 se indican las tensiones tangenciales en el epoxy. En lo que respecta a las tensiones normales se tiene que las tensiones máximas  $\sigma_{xx}$  se presentan entre 0.01m y 0.02m, la máxima



tensión  $\sigma_{xx}$  es de 23.96MPa. También se observa que en el epoxi al incrementarse el nivel de carga, se amplía el área de desarrollo de las tensiones, y que después de 24.5kN comienza a mostrarse una distribución uniforme de tensiones  $\sigma_{xx}$ .

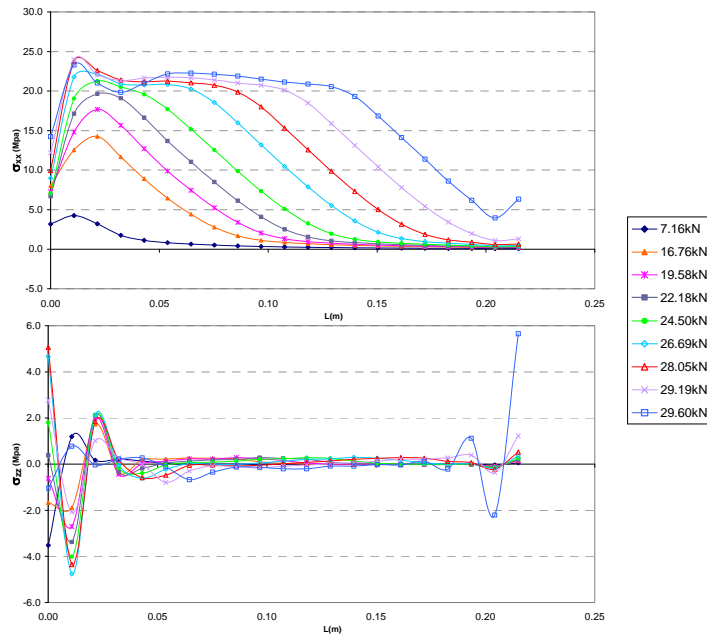


FIGURA 3-21 TENSIONES NORMALES EN EL ADHESIVO DE CD-21-EX

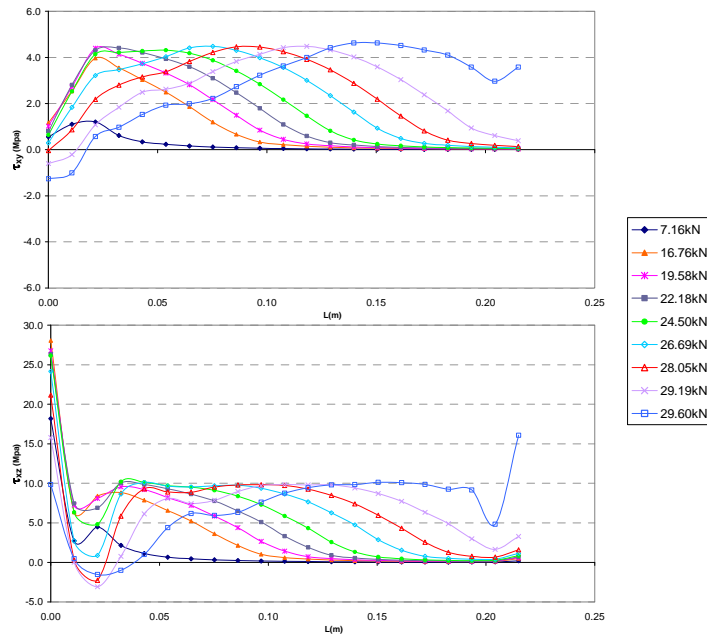


FIGURA 3-22 TENSIONES TANGENCIALES EN EL ADHESIVO DE CD-21-EX

En la figura 3-21 se observa que hasta 29.19kN se producen las mayores tensiones  $\sigma_{zz}$  en el extremo inicial de la zona con refuerzo, alcanzando un valor máximo de 5.06MPa, luego para 29.60kN la máxima tensión de 5.65MPa ocurre en el extremo final, lo que evidencia el despegue del laminado; es así como las tensiones  $\sigma_{zz}$  sólo influyen en los extremos de la zona reforzada.

En la figura 3-22 se señala la evolución de las tensiones por corte que permiten identificar el proceso de deslizamiento en el epoxi, a lo largo de la zona reforzada las tensiones mayores  $\tau_{xy}$  están entre 4.40MPa y 4.60MPa que equivalen a un 18.4% y a un 19.1% de las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ . Las tensiones  $\tau_{xz}$  en el extremo de la zona reforzada alcanzan 28.06MPa con 16.76kN, para cargas mayores decrecen; a lo largo del laminado, el epoxi presenta tensiones  $\tau_{xz}$  cercanas a los 9.95MPa correspondientes a un 41.7% de la tensión máxima axial  $\sigma_{xx}$ .

A lo largo de la zona reforzada en el epoxi las tensiones predominantes en el mecanismo de deslizamiento son  $\sigma_{xx}$  y en menor proporción en el respectivo orden  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$ ; mientras que en los extremos prevalecen las tensiones  $\tau_{xz}$ , en una menor proporción influyen las tensiones normales  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{zz}$ . Asimismo se observa que para la carga última las tensiones normales y tangenciales se incrementan en el extremo donde termina el laminado, lo que demuestra el fallo de la interfaz.

En la figura 3-23 se muestran las tensiones normales  $\sigma_{xx}$  y las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  y  $\tau_{xz}$ . Las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  en el laminado tienen una tendencia casi lineal hasta una fuerza de 22.18kN y, después tienen una distribución semi-parabólica. Para los diferentes niveles de carga, la mayor tensión ocurre en el extremo donde se adhiere el laminado. Las tensiones tangenciales en el laminado  $\tau_{xy}$  tienen una distribución de tensiones parabólica; para las cargas entre 16.76kN y 22.18kN, la mayor tensión se presenta a 0.02 donde se adhiere el laminado; luego las mayores tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  van cambiando de posición, conforme aumenta la carga se van alejando del extremo del bloque, manteniendo los valores entre 10.30MPa y 11.10MPa. Con las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  los mayores valores se presentan a 0.03 hasta 29.19kN alcanzando una tensión de -6.51MPa; a lo largo del laminado las mayores tensiones se aproximan a 2.0MPa.

Al comparar las gráficas de la figura 3-23 se puede ver como en la zona donde termina el laminado, las tensiones axiales y tangenciales son bajas en el CFRP incluso para la carga de fallo. Por otra parte, se evidencia que el CFRP está solicitado básicamente por acciones axiales, dado que las tensiones tangenciales son desde un 1% hasta un 4% de las tensiones axiales.

Con este modelo se muestra que el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, depende de la interacción de los tres materiales, por ende, es importante que se simulen los ensayos de adherencia en tres dimensiones y se considere el comportamiento no lineal de los materiales que conforman la interfaz. De otra parte también se observa que la pérdida de adherencia se debe al daño en

interfacial, efectos que también han sido señalados en las pruebas experimentales de Bizindavyi y Neale [25].

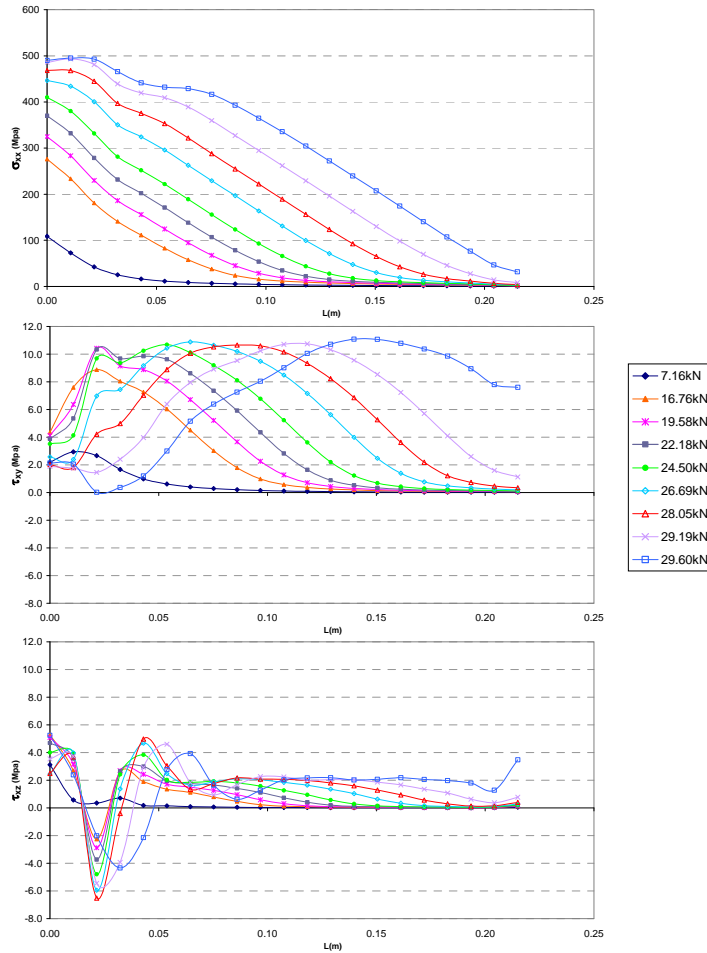


FIGURA 3-23 TENSIONES EN EL COMPUESTO DE CD-21-EX

### 3.6.5 Ensayo de corte doble CD-36-EX

Con el fin de apreciar las diferencias en los ensayos de corte con distintas longitudes de adherencia, se analiza un ensayo que tiene la misma configuración de CD-21-EX en el que la longitud de adherencia de la lámina corta es mayor. La geometría de la probeta analizada se señala en la figura 3-24, donde se ve que las láminas de CFRP adheridas desde el extremo del bloque tienen una longitud de adherencia de 0.36m y de 0.50m. Las bandas de CFRP tienen un ancho de 0.05m y un espesor de 0.0012m, y el epoxy se tomó con un espesor promedio de 0.0015m. En la figura 3-25 se muestra la discretización de la probeta, y se indica la zona en la que se estudia el comportamiento de la interfaz.

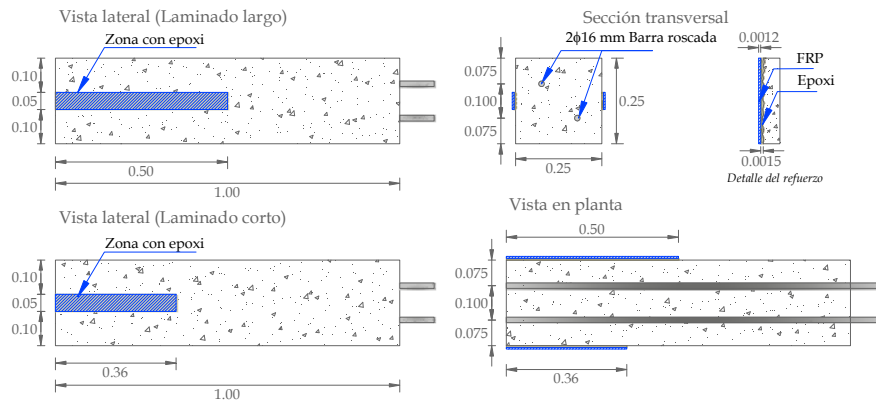
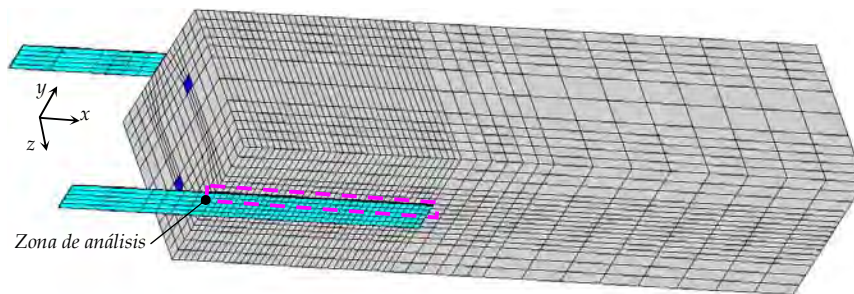
FIGURA 3-24 GEOMETRÍA DE LA PROBETA DE CORTE DOBLE CON  $L_{DB}$  DE 0.36M CD-36-EX

FIGURA 3-25 MALLADO DE CD-36-EX

- *Deformaciones*

En el ensayo CD-36-EX la carga máxima en cada banda fue de 23.99kN. Debido a que la carga de falla en el ensayo de CD-36-EX fue menor a la obtenida en CD-21-EX, en la simulación de CD-36-EX fue necesario en el hormigón reducir la energía de aplastamiento  $G_c$  a 38J/m<sup>2</sup> y la energía de fractura  $G_f$  a 0.38J/m<sup>2</sup>.

En la figura 3-26 se observan las deformaciones en el compuesto de acuerdo con la ubicación de las galgas en la probeta. Se aprecia la aproximación que existe entre la evolución de las deformaciones medidas en el ensayo y la obtenida en la simulación. Dado que una relación de carga deformación similar, por lo tanto la simulación es apropiada para estudiar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP.

Las deformaciones muestran la forma como se transfieren la carga conforme se va reduciendo la adherencia en la interfaz. Se observa que el nivel de carga y la magnitud de las deformaciones están muy por debajo del límite elástico del laminado, por consiguiente la pérdida de linealidad de las deformaciones a lo largo del laminado con respecto al nivel de carga, tiene relación directa con el proceso de pérdida de adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP.

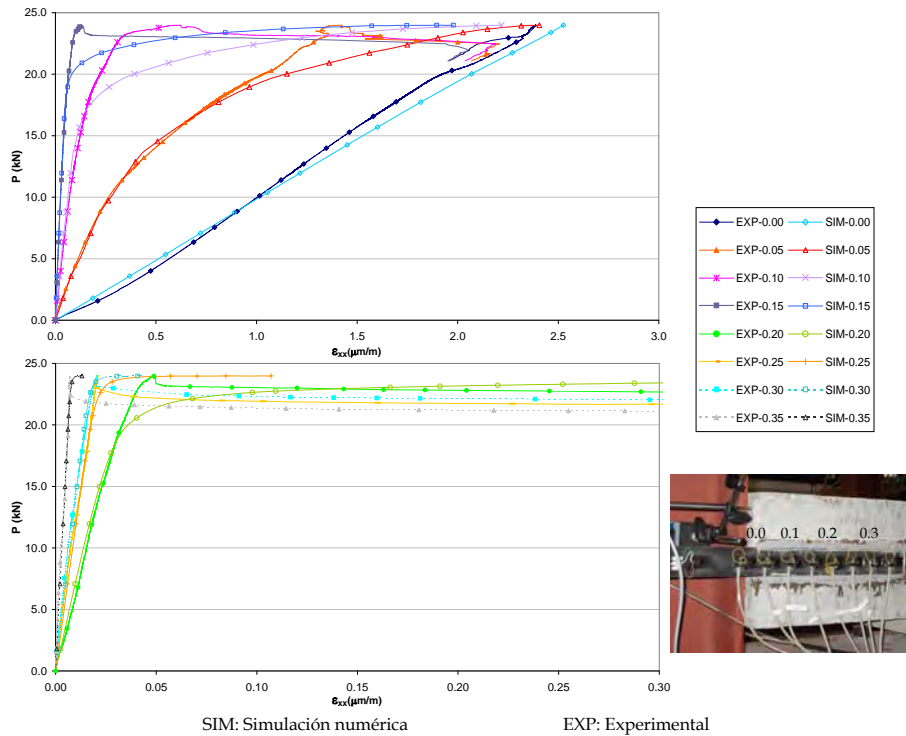


FIGURA 3-26 EVOLUCIÓN DE LAS DEFORMACIONES EN EL COMPUESTO DE CD-36-EX

Teniendo en cuenta que donde las deformaciones axiales aumentan sin incrementos de carga, en ese sector no hay transferencia de esfuerzos en la interfaz porque la interfaz ha fallado [40], en la figura 3-26 se puede ver el proceso del mecanismo de pérdida de adherencia de la interfaz a lo largo de la zona reforzada, se muestra que primero se presenta un estado de carga no lineal en el 0.05m, después en 0.10m, y así sucesivamente hasta 0.35m, hasta que se produce el despegue del refuerzo.

- *Daño*

El fallo en la probeta CD-36-EX se produjo de una forma dúctil, al igual que CD-21-EX se deslizó el laminado y se desprendió una sección del bloque de hormigón. En la figura 3-27 se muestra el daño en el hormigón, el epoxy y la matriz polimérica.

En la figura 3-27 (a) se aprecia el mayor daño en el hormigón se produce hacia los bordes superior e inferior del refuerzo y se extiende hasta 0.04m después de donde termina la zona reforzada. Del mismo modo como sucedió en CD-21-EX, se forma el cono de falla en el hormigón, aunque para CD-36-EX el daño es menor; esto indica que entre mayor es la longitud de adherencia menor es la incidencia de los efectos de frontera. En la figura 3-27 (b) se muestra que el daño en el epoxy sólo se presenta hasta la zona media con porcentajes inferiores a un 35%. En lo que respecta a la matriz del FRP, en la figura 3-27 (c) se observa que el mayor daño se presenta a 0.01m del extremo del bloque con un valor máximo del 61%. Para el

epoxi el laminado el daño sólo se extiende hasta 0.25m.

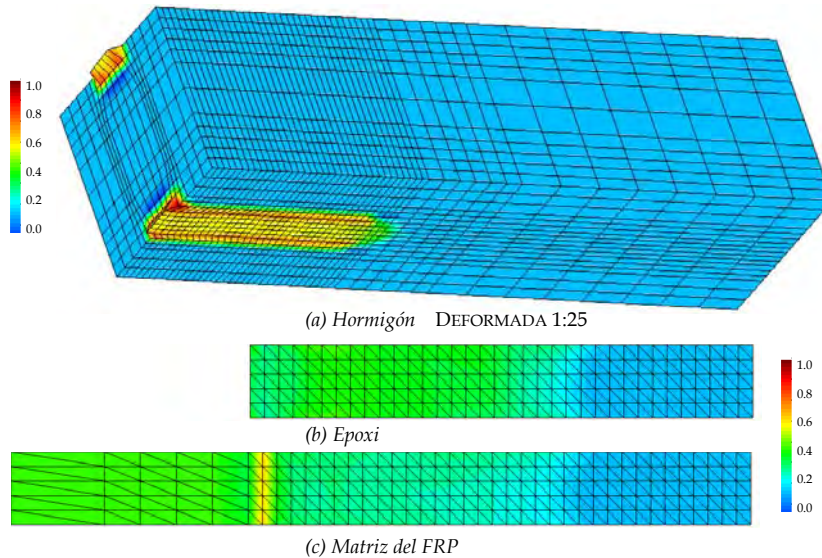


FIGURA 3-27 DAÑO EN CD-36-EX

En la figura 3-28 se indica la evolución del daño para los diferentes niveles de carga a lo largo del borde superior señalado en la figura 3-25. En la figura 3-28 (a) se observa que hay una distribución uniforme de daño cercana al 67%. En lo que corresponde al daño en el epoxi, en la figura 3-28 (b) se ve que el mayor daño ocurre a 0.04m con un valor del 35.4% y el que el daño se va extendiendo de una forma menos uniforme a la del hormigón. El hecho que el mayor daño en el epoxi no se presente en el extremo, muestra el comportamiento del epoxi esta influenciado principalmente por el deslizamiento. En la figura 3-28 (c) se señala el daño en la matriz polimérica, donde el mayor daño sucede a 0.01m, luego se presenta una distribución uniforme con un porcentaje aproximado al 20%.

El nivel de daño en el hormigón CD-36-EX y CD-21-EX es del mismo orden de magnitud y una misma forma de distribución, aunque proporcionalmente a la longitud de adherencia la zona afectada en CD-36-EX es menor. En lo que respecta al epoxi y a la matriz del FRP, se tiene que el daño en CD-36-EX es menor, asimismo que tiene una distribución de tensiones más uniforme que la observadas en CD-21-EX. En CD-21-EX y en CD-36-EX se observa que donde se produce el máximo daño en la matriz a 0.01m, el daño en el epoxi es mínimo, lo que refleja la reducción de la transmisión de esfuerzos cerca al extremo inicial de la zona reforzada. Del análisis de la distribución de daño en la interfaz se puede decir que al tener una mayor longitud de adherencia hay menor influencia de los efectos de frontera producidos en el extremo del bloque, coincidiendo con lo concluido por Mazzotti et al. [33] y Lu et al. [34].

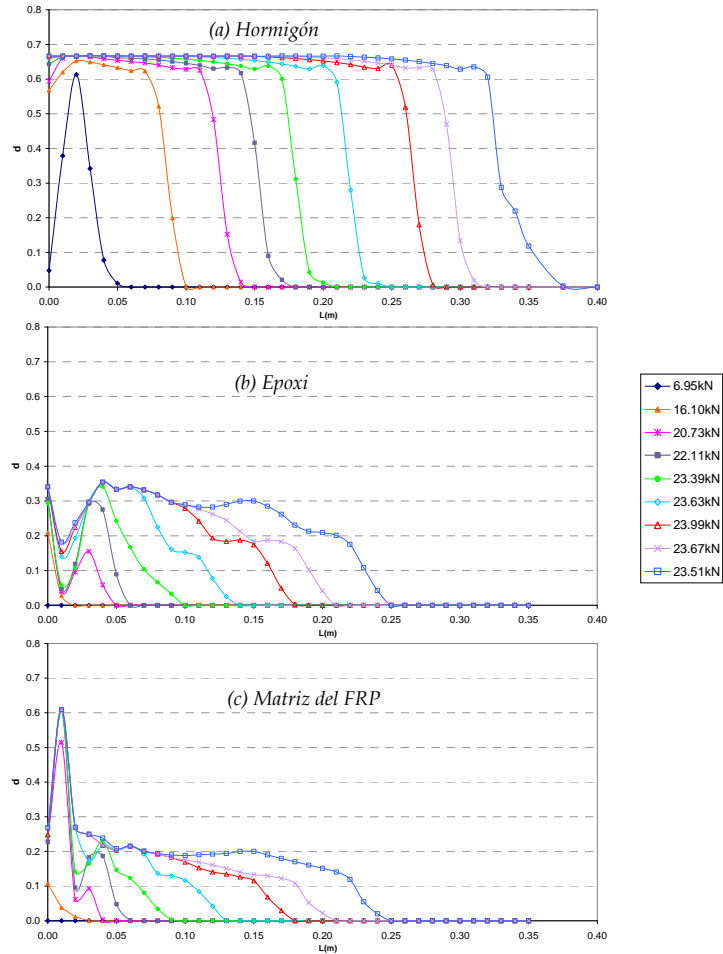


FIGURA 3-28 EVOLUCIÓN DEL DAÑO EN CD-36-EX

- *Distribución de tensiones principales para la carga última*

En la figura 3-29 se muestra la distribución de la tensión principal en el hormigón, el adhesivo y el FRP. En la figura 3-29 (a) se observan las tensiones principales cerca al extremo donde termina el laminado, asimismo se aprecia que las tensiones máximas se presentan hacia el extremo donde finaliza el refuerzo; a diferencia de CD-21-EX, CD-36-EX no presenta tensiones en el extremo donde inicia el refuerzo, esto se debe a que para la carga última el hormigón en el extremo ha descargado totalmente por el daño de la interfaz. En la figura 3-29 (b) se muestra el estado de tensiones principales en el epoxi, donde se identifica que en algunos sectores la distribución de tensiones transversalmente no es uniforme, entre 0.26m y 0.32m las tensiones son mayores en el centro de la sección transversal. Por último, en la figura 3-29 (c) se presentan las tensiones en el laminado CFRP, se muestra que aunque solo alcanzan un 18.2% de la resistencia del CFRP 2200MPa, el laminado tiene un comportamiento no lineal debido al daño progresivo en la matriz polimérica, en el epoxi y en el hormigón.

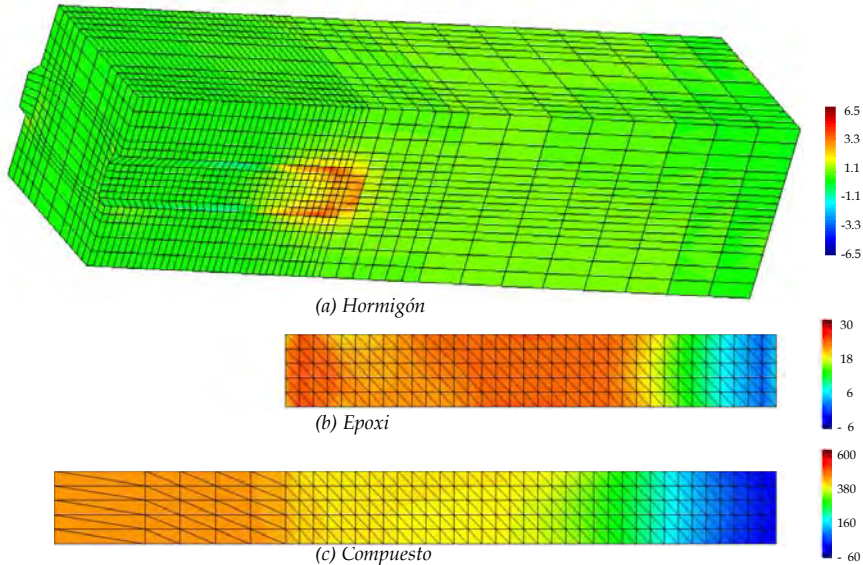


FIGURA 3-29 TENSIONES PRINCIPALES EN CD-36-EX PARA UNA CARGA ÚLTIMA DE 23.51kN

- *Distribución de tensiones en la zona de análisis*

La distribución de tensiones normales en el hormigón para CD-36-EX se observa en la figura 3-30. A lo largo de la zona con refuerzo, como muestra del deslizamiento, las tensiones normales en el hormigón van cambiando de posición desde el extremo donde se adhiere el refuerzo hacia donde termina; las mayores tensiones de  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{zz}$  se aproximan a 2.00MPa y a 0.38MPa respectivamente. En el extremo inicial se aprecia que hasta 20.73kN, las tensiones  $\sigma_{xx}$  disminuyen, mientras que las tensiones  $\sigma_{zz}$  se incrementan alcanzando una tensión máxima de -3.90MPa, esto es un reflejo del mecanismo de desprendimiento del hormigón. Asimismo, como señal del despegue total del laminado, en el extremo donde termina el FRP se presenta la máxima tensión axial de 2.23MPa con la carga última.

En lo que respecta a las tensiones tangenciales en el hormigón, en la figura 3-31 se observa que las tensiones  $\tau_{xy}$  son mayores en el extremo del bloque hasta 20.73kN, teniendo una tensión máxima de 1.81MPa con 6.95kN; luego en señal del deslizamiento, las tensiones máximas se van presentando a lo largo de la zona reforzada con un valor aproximado a 0.88MPa, hasta que con la carga última se incrementa a 1.04MPa en 0.34m. En cuanto a las tensiones  $\tau_{xz}$  se tiene que hasta 23.39kN las mayores tensiones se presentan en el extremo del bloque, teniendo una tensión máxima de 1.68MPa, después de 0.02m a lo largo de la zona con refuerzo las tensiones mayores son cercanas a 0.33MPa.

De acuerdo con lo observado, se tiene que en la zona con refuerzo el comportamiento del hormigón esta gobernado por las tensiones normales y tangenciales, en el extremo inicial predominan las tensiones  $\sigma_{zz}$ , en cambio a lo largo de la zona con refuerzo incluyendo el extremo final, prevalecen las tensiones



$\sigma_{xx}$  y  $\tau_{xy}$ . Esto indica que en el extremo de la zona reforzada hay un efecto conjunto entre el deslizamiento y el desprendimiento del laminado, mientras que a lo largo del refuerzo solo incide el efecto del deslizamiento.

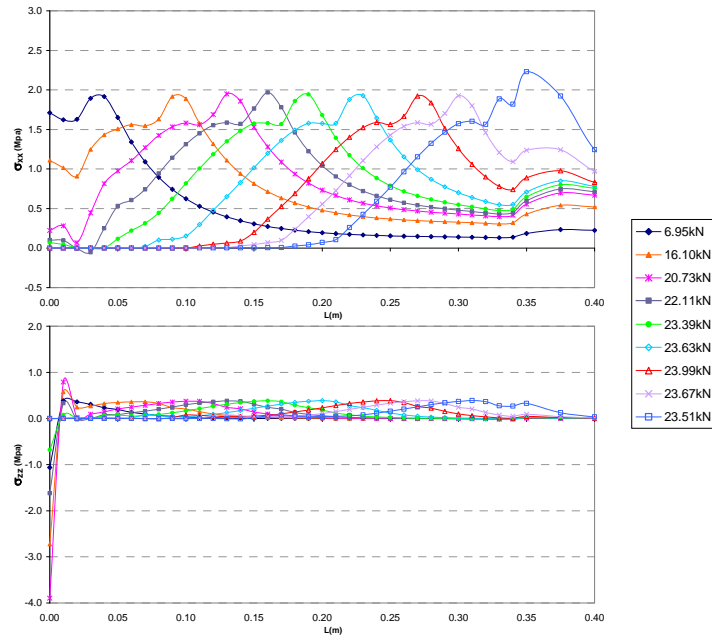


FIGURA 3-30 TENSIONES NORMALES EN EL HORMIGÓN DE CD-36-EX

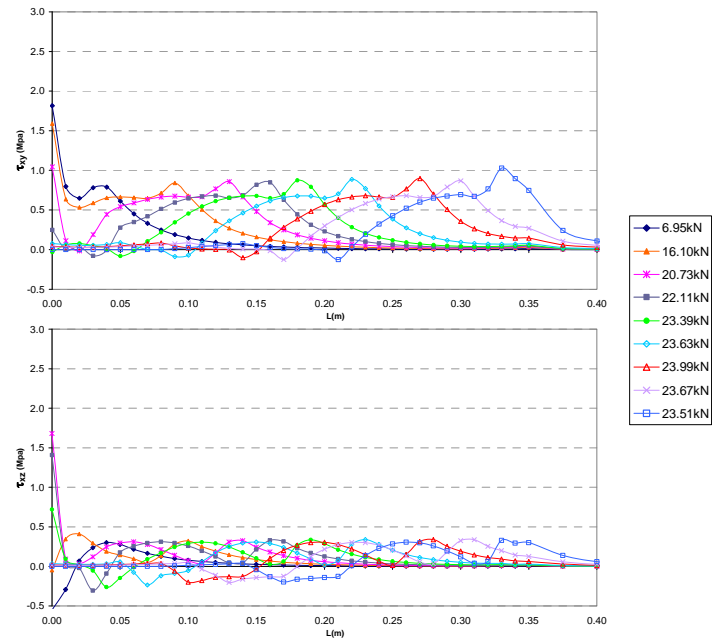


FIGURA 3-31 TENSIONES TANGENCIALES EN EL HORMIGÓN DE CD-36-EX

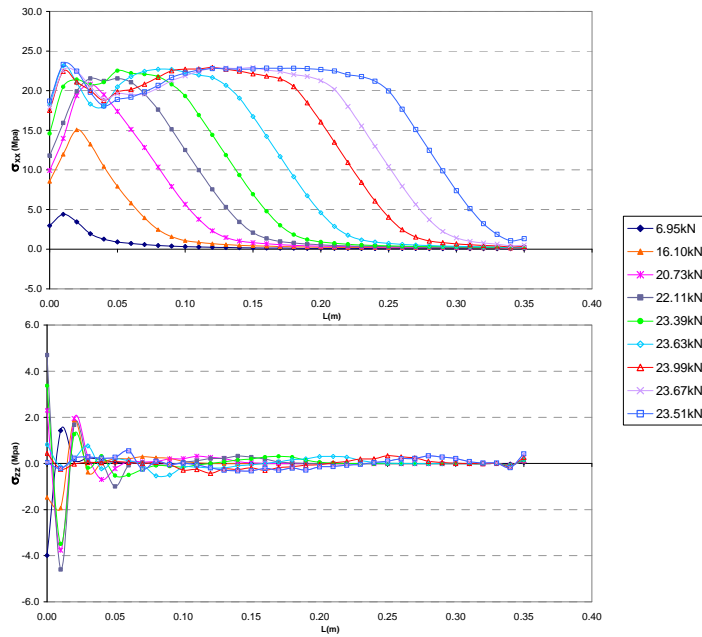


FIGURA 3-32 TENSIONES NORMALES EN EL ADHESIVO DE CD-36-EX

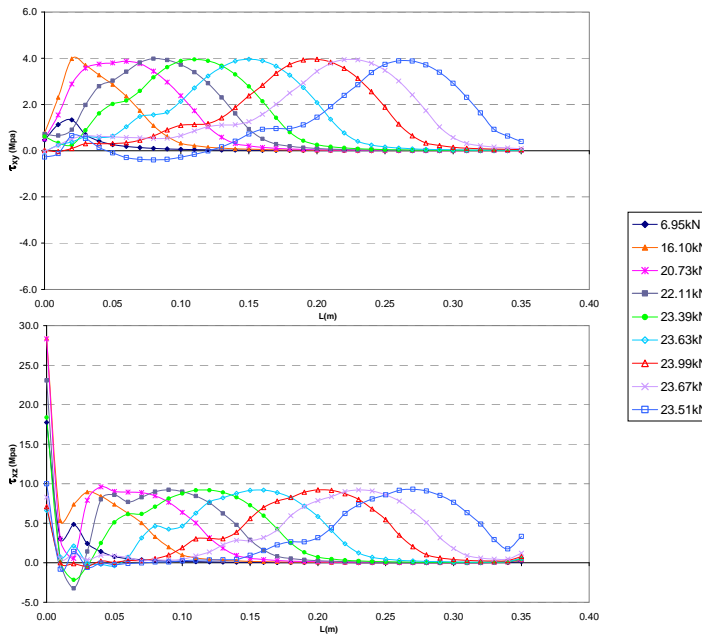


FIGURA 3-33 TENSIONES TANGENCIALES EN EL ADHESIVO DE CD-36-EX

Las tensiones normales en el epoxy se indican en la figura 3-32. Las tensiones mayores  $\sigma_{xx}$  se presentan entre 0.01m y 0.04m hasta una carga de 23.39kN, luego

con cargas posteriores se producen a 0.01m, alcanzando una tensión máxima de 23.31MPa con la carga última; asimismo se aprecia que después de 0.05m, con cargas mayores a 22.11kN, la distribución de tensiones tiende a ser uniforme con valores cercanos a 22.8MPa. En lo referente a  $\sigma_{zz}$  se tiene que las mayores tensiones se presentan hasta 0.05m, en el extremo inicial se obtiene la máxima tensión de 4.70MPa con una carga de 22.11kN, equivalente al 20% de la máxima tensión  $\sigma_{xx}$ ; además se puede ver que después de 0.04m las tensiones  $\sigma_{zz}$  son pequeñas son menores a un 3% de las tensiones  $\sigma_{xx}$ .

En la figura 3-33 se señalan las tensiones tangenciales en el adhesivo y se identifica el proceso de deslizamiento por el cambio de distribución de las tensiones; de acuerdo con Bizindavyi y Neale [25], la reducción las tensiones tangenciales a lo largo de la zona con refuerzo es un reflejo del avance del daño interfacial, mientras que el incremento de las tensiones es un indicador de la transferencia de esfuerzos interfacial en el sector. Se observa que las tensiones  $\tau_{xy}$  son bajas en el extremo inicial y sus valores mayores a lo largo de la zona con refuerzo son aproximados a 4.00MPa. Las tensiones  $\tau_{xz}$  son mayores en el extremo inicial hasta una carga de 23.63kN, con una carga de 16.10kN se tiene la máxima tensión de 28.42MPa; a lo largo de la zona con refuerzo después de 0.03m, las mayores tensiones son cercanas a 9.35MPa. Además, con la carga última, en el extremo final del epoxi se ve un incremento en las tensiones  $\tau_{xz}$ , que es más notorio que el dado tensiones normales, este incremento es una señal del despegue total del laminado.

A lo largo del epoxi las tensiones predominantes son  $\sigma_{xx}$  y en menor proporción  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$ , en cambio que en el extremo del bloque prevalecen las tensiones  $\tau_{xz}$  y  $\sigma_{xx}$ , y en una menor proporción inciden las tensiones  $\sigma_{zz}$ ; esto muestra que en el extremo inicial del epoxi el comportamiento esta regido el desprendimiento del hormigón y el deslizamiento del laminado, mientras que a lo largo de la interfaz esta gobernado por el deslizamiento.

Las tensiones normales  $\sigma_{xx}$  y las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ , y,  $\tau_{xz}$  en el laminado se muestran en la figura 3-34 . Las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  tienen una tendencia lineal hasta una carga de 20.73kN, luego comienzan a presentar una tendencia semi-parabólica, teniendo la máxima tensión de 411.34MPa con la carga última; asimismo se tiene que después de 22.11kN presenta una distribución uniforme alrededor de los 394.00MPa. En lo que referente a la distribución de tensiones  $\tau_{xy}$  del FRP, se observa que tiene una forma parabólica donde las mayores tensiones se van presentando a lo largo de la zona reforzada con valores aproximados a 9.40MPa. Por su parte, las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  son variables hasta 0.10m, luego tienen una tendencia a 2.00MPa; la máxima tensión  $\tau_{xz}$  de 8.07MPa se da en el extremo del bloque con una carga de 20.73kN.

Teniendo en cuenta que en el compuesto, las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  equivalen al 2.3% y al 1.9% las tensiones máximas  $\sigma_{xx}$ , se comprueba que en el laminado el comportamiento esta gobernado por las tensiones axiales.

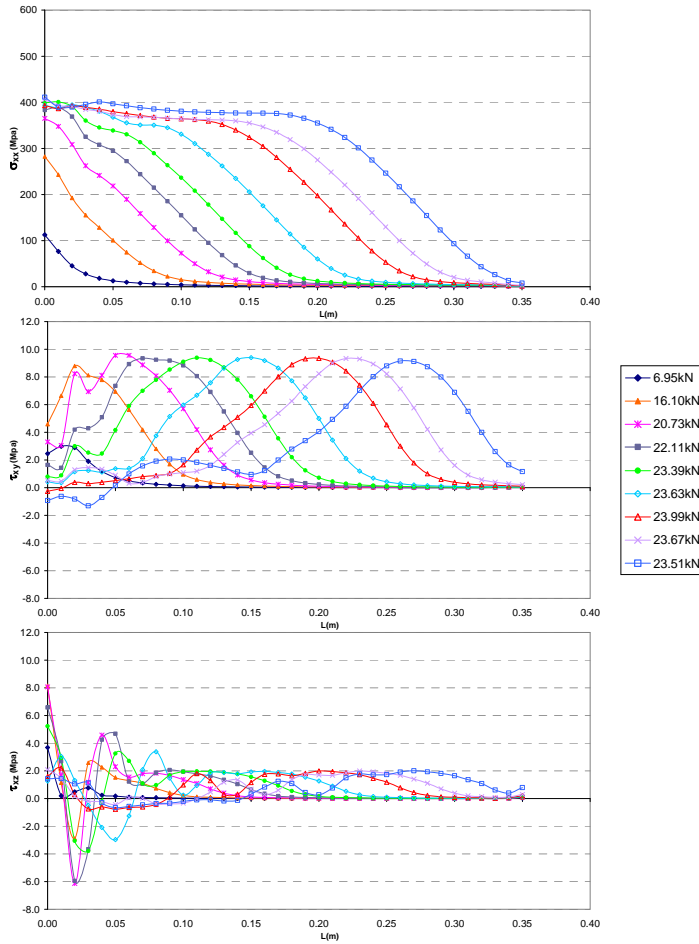


FIGURA 3-34 TENSIONES EN EL COMPUESTO DE CD-36-EX

Comparando el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP entre los modelos CD-21-EX y CD-36-EX, se tiene que en el hormigón el orden de magnitud de las tensiones son bastante aproximados, se diferencian en que con CD-21-EX de 0.21 para cargas cercanas a la carga de falla, hay tensiones altas donde termina el refuerzo, mientras que con CD-36-EX, a excepción de las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ , las tensiones altas se presentan dentro de la zona con refuerzo. En lo que corresponde al epoxi, las tensiones en CD-36-EX tienen un mismo orden de magnitud CD-21-EX y no se aprecia un elevado incremento de las tensiones donde termina el refuerzo. En lo referente al FRP se tiene que las tensiones del FRP en CD-36-EX son menores, pero esta diferencia se debe básicamente a que las cargas de falla en los dos ensayos son distintas.

Tanto en el FRP como en el epoxi se observa que en los sectores en que las tensiones axiales son constantes, las tensiones tangenciales se reducen, indicando que en esos tramos no hay transferencia de esfuerzos, por lo tanto, la uniformidad

de las tensiones axiales, al igual que el decrecimiento de las tensiones tangenciales, es un indicativo de la pérdida de adherencia de la interfaz.

Al contrastar CD-36-EX con CD-21-EX se demuestra que es necesario contar con la suficiente longitud de adherencia del refuerzo para garantizar que halla un comportamiento dúctil en la zona interfacial del elemento estructural reforzado con FRP. Además que al diseñar el refuerzo con FRP en un elemento de hormigón se debe tener en cuenta que con el incremento de la longitud de adherencia del laminado se distribuye de una forma más uniforme el daño en el epoxi y en la matriz polimérica, aunque no incide en el daño en el hormigón.

### 3.6.6 Ensayo de corte doble CD-36-IN

En algunas investigaciones en los ensayos de corte han optado por dejar una zona del extremo del bloque de hormigón sin adherir el laminado, con el propósito de estudiar el comportamiento de los componentes de la interfaz y su mecanismo de fallo, sin involucrar los efectos de frontera producidos por la formación del cono de falla del hormigón. Entre las investigaciones experimentales que han aplicado esta técnica están de Bizindavyi y Neale [25], Subramaniam et al. [26] y Mazzotti et al. [32; 33] y entre las simulaciones están la de Lu et al.[51; 52] y la de Ebead et al.[59], aunque en la mayoría de investigaciones no incluyen esta zona libre.

En forma general, las investigaciones que han utilizado zonas libres, han aplicado longitudes pequeñas: Lu et al. [51; 52] 0.025m, Bizindavyi y Neale [25] y Subramaniam et al. [26] 0.035m, y, Ebead et al.[59] 0.040m. En los estudios se ha observado que si esta zona libre es pequeña o no existe, generalmente hay desprendimiento de un trozo de hormigón, asimismo muestran que este fenómeno no tiene un efecto significativo en el comportamiento de la interfaz y en el mecanismo de fallo, siempre que la longitud de adherencia del FRP no sea corta.

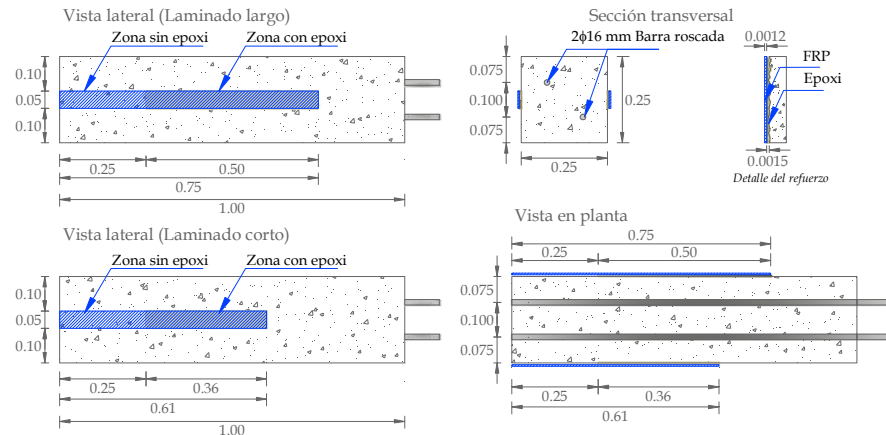


FIGURA 3-35 GEOMETRÍA DE LA PROBETA DE CORTE DOBLE REFORZADA EN UNA ZONA INTERMEDIA CON  $L_{DB}$  DE 0.36M CD-36-IN

Con el objetivo de observar las diferencias en los ensayos de corte doble en el comportamiento de la interfaz al reforzar el hormigón dejando una zona libre, se analiza un ensayo de doble corte, en el que el FRP se adhiere a 0.25m del extremo del bloque de hormigón. La geometría de la probeta CD-36-IN se indica en la figura 3-35, donde se ve que las láminas de CFRP en una zona intermedia tienen una longitud de adherencia de 0.36m y de 0.50m. De igual forma, las bandas de CFRP tienen un ancho de 0.05m y un espesor de 0.0012m, y el epoxi tiene un espesor promedio de 0.0015m. En la figura 3-36 se muestra el mallado de la probeta y se indica la zona en la que se estudia el comportamiento de la interfaz.

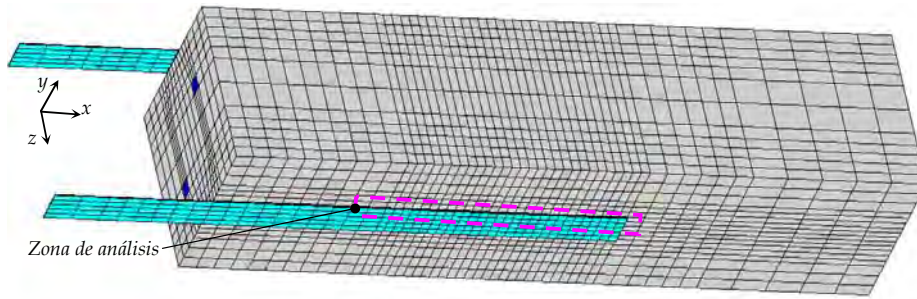


FIGURA 3-36 MALLADO DE CD-36-IN

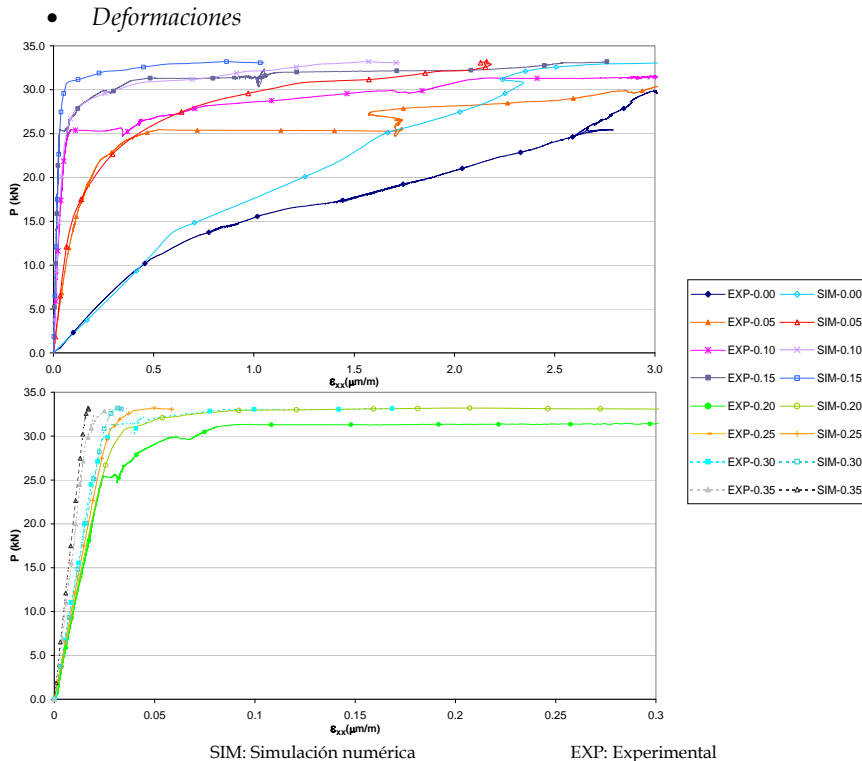
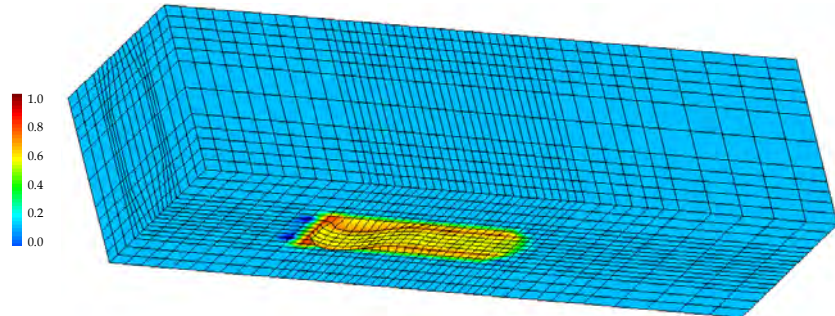


FIGURA 3-37 EVOLUCIÓN DE LAS DEFORMACIONES EN EL COMPUESTO DE CD-36-IN

En el ensayo CD-36-IN la carga máxima obtenida por cada lámina fue de 33.2kN. Para obtener la carga de falla del ensayo de CD-36-IN en la simulación, se redujo en el hormigón la energía de aplastamiento  $G_c$  de 36J/m<sup>2</sup> y una energía de fractura  $G_t$  de 0.36J/m<sup>2</sup>.

En la figura 3-15 se presentan las deformaciones en el compuesto de acuerdo con la ubicación de las galgas en la probeta. Teniendo en cuenta que en los ensayos de adherencia, si aparecen fisuras en la interfaz, la concentración de tensiones inducidas en las zonas adyacentes a ellas pueden crear variaciones en las lecturas de las deformaciones que dificultan la predicción [42], es apreciable la similitud que existe entre la evolución de las deformaciones medidas en el ensayo y la obtenida en la simulación. En este caso, en general, se aprecia que la simulación y la prueba experimental tienen una relación de carga deformación similar, por lo tanto el modelo de simulación es apropiado para estudiar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP.

- *Daño*



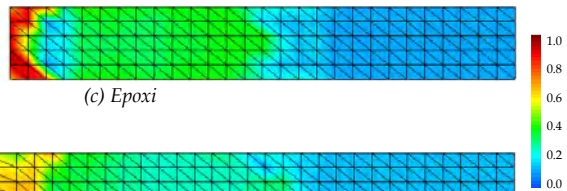
(a) Hormigón DEFORMADA 1:25



(b) Detalle de la zona despegada



(c) Epoxi



(d) Matriz del FRP

\* Las fotografías son cortesía de Ll. Gil y J.J. Cruz

FIGURA 3-38 DAÑO EN CD-36-IN

El fallo en la probeta CD-36-IN se produjo de una forma frágil, aunque con una carga mayor un 37.5% de la obtenida CD-36-EX. El laminado se deslizó y alcanzó a desprenderse del bloque de hormigón una longitud aproximada a los 0.25m pero hubo rotura en el FRP como se muestra en la figura 3-38.

En la figura 3-38 (a) se muestra que el daño en el hormigón solo se extiende dentro de la zona reforzada, y que el mayor daño se presenta hacia el extremo inicial y a los bordes del refuerzo. De acuerdo con la deformada se tiene que la zona más afectada por el daño está desde el extremo inicial de la zona con refuerzo hasta aproximadamente 0.20m, coincidiendo con lo sucedido en el ensayo en el que el laminado no se despegó. En la figura 3-38 (b) se aprecia el daño en la interfaz hormigón-epoxi y epoxi-FRP del sector afectado, asimismo se ve el detalle del daño del sector donde inicia el refuerzo. En este ensayo con una longitud libre de 0.25m, el hormigón no presenta el cono de falla, al igual como su sucedió en los ensayos realizados por Mazzotti et al. [32] en los que la longitud libre correspondía a 0.10m. En la figura 3-38 (c) se señala el daño en el epoxi, el cual se extiende hasta 0.24m, a diferencia de los ensayos adheridos desde el extremo del bloque, en CD-36-IN donde se adhiere el refuerzo se observa que el daño es total. En la figura 3-38 (d) se muestra el daño en la matriz del compuesto, el cual se extiende hasta 0.22m, además que el mayor daño se presenta entre -0.025m y 0.025m.

En la figura 3-39 se indica la evolución del daño en el hormigón, el epoxi y la matriz polimérica a lo largo del borde superior indicado en la figura 3-36. En la figura 3-39 (a) se aprecia que el daño en el hormigón se presenta a -0.025m antes de la zona reforzada y que el máximo daño ocurre donde inicia el refuerzo con un 80%. Después de 0.02m se observa una distribución uniforme cercana a 67% y alcanzando en el borde superior a afectarse hasta 0.33m de la zona reforzada. En la figura 3-39 (b) se señala el daño en el epoxi, el cual es máximo a 0.01m y nulo en a 0.02, luego presenta una distribución semi-parabólica con un daño aproximado al 38%. El daño en la matriz polimérica se muestra en la figura 3-39 (c), se aprecia que antes de adherirse el refuerzo hay daño en la matriz, en el extremo donde se adhiere se reduce, y luego a 0.02m se presenta el mayor daño hasta alcanzar un 70%, asimismo se ve que después de 0.04m el daño se distribuye de una forma no uniforme, teniendo un daño menor al 30%.

CD-36-IN tiene una la distribución del daño en el hormigón uniforme, similar a la dada en CD-36-EX. En el epoxi, la distribución del daño en el extremo inicial de la zona con refuerzo difiere entre los dos modelos, mientras que a 0.01m en CD-36-IN es máximo, en CD-36-EX el daño es mínimo. El daño máximo en la matriz polimérica y en el epoxi de CD-36-IN es mayor al presentado en CD-36-EX; además, la zona afectada por el daño en CD-36-IN es menor. Aunque para los dos materiales la distribución de daño en los modelos difiere, CD-36-EX tiende a ser uniforme y CD-36-IN es variable, después de 0.04m los valores mayores de daño son similares.



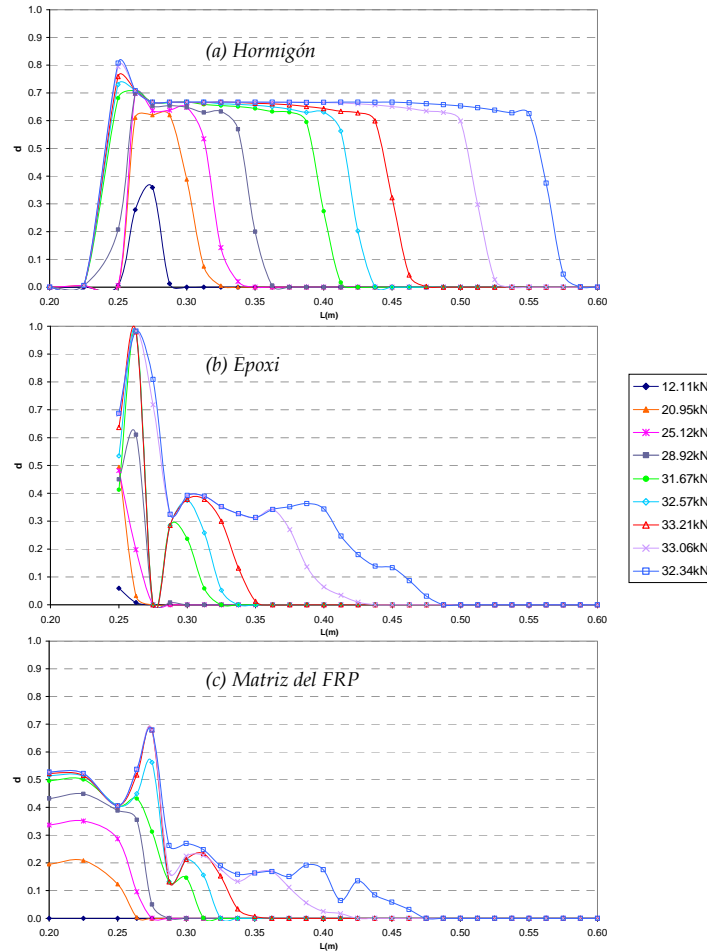


FIGURA 3-39 EVOLUCIÓN DEL DAÑO CD-36-IN

- *Distribución de tensiones principales para la carga última*

En la figura 3-40 se muestra la distribución de la tensión principal en el hormigón, el epoxi y el laminado. En la figura 3-40 (a) se observa la distribución variable de tensiones principales en el extremo donde inicia la zona reforzada donde hay altas tensiones de compresión y de tracción, además se aprecia la distribución de tensiones en la extremo donde finaliza el refuerzo. En la figura 3-40 (b) se muestra el estado de tensiones principales en el epoxi, se identifica que la distribución de tensiones transversalmente no es uniforme, donde las tensiones tienden a ser mayores en el centro de la sección transversal, excepto entre 0.17m y 0.19m donde las mayores tensiones se presentan hacia los bordes; asimismo se muestra que en el extremo donde se adhiere el refuerzo las tensiones son bajas como indicador de la descarga en el sector por el daño localizado. En la figura 3-40 (c) se presentan las tensiones en el laminado CFRP, las cuales se aproximan a un 25.4% de la resistencia del compuesto 2200MPa, sin embargo hubo rotura en el laminado.

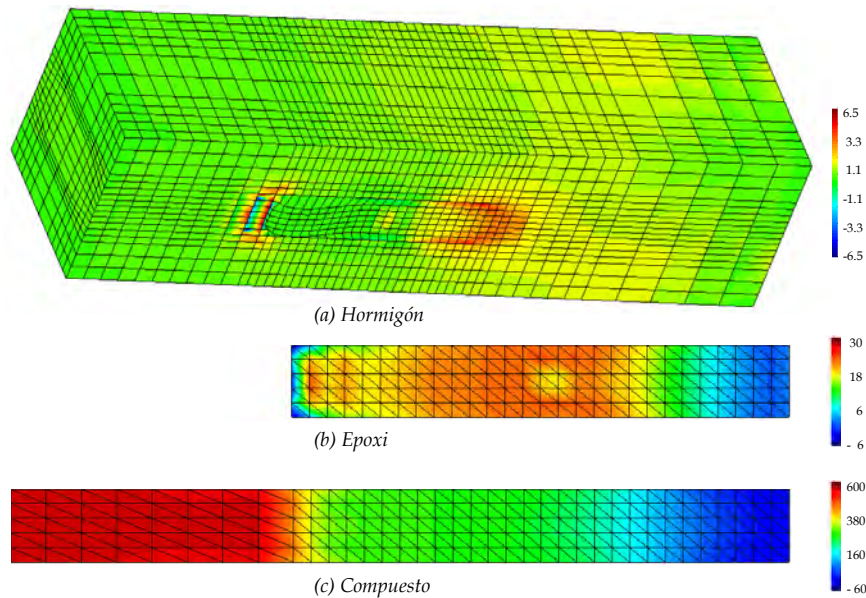


FIGURA 3-40 TENSIONES PRINCIPALES EN CD-36-IN PARA UNA CARGA ÚLTIMA DE 33.06kN

- *Distribución de tensiones*

La distribución de tensiones normales en el hormigón se observa en la figura 3-41, donde se observa la gran compresión a la que está sometido el bloque en la zona libre. En lo que zona libre se aprecia que la mayor tensión a compresión  $\sigma_{xx}$  se obtiene con la carga máxima cercana a los  $-33.22\text{MPa}$ , y para una carga de  $31.67\text{MPa}$  se presenta la tensión máxima  $\sigma_{zz}$  de  $-4.78\text{MPa}$ . En el inicio donde se adhiere el refuerzo, las tensiones normales son de compresión, teniendo una máxima tensión  $\sigma_{xx}$  de  $-26.08\text{MPa}$  para una carga de  $32.57\text{kN}$ , estas elevadas compresiones son las que evitan que se forme un cono de falla en el hormigón.

En la figura 3-41 se observa que entre el inicio y  $0.01\text{m}$  hay un cambio abrupto de un estado de compresión a un estado de tracción. Las máximas tensiones normales a tracción ocurren a  $0.01\text{m}$ ,  $\sigma_{xx}$  de  $6.00\text{MPa}$  con  $33.06\text{kN}$  y  $\sigma_{zz}$  de  $1.21\text{MPa}$  con  $28.92\text{kN}$ . A lo largo de la zona reforzada las tensiones mayores van cambiando de posición como muestra del deslizamiento, donde con el aumento de carga se van alejando hacia el final del refuerzo. En este sector las mayores tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{zz}$  se aproximan a  $2.00\text{MPa}$  y a  $0.38\text{MPa}$  respectivamente, de un modo similar al presentado en CD-36-EX.

En lo referente a las tensiones tangenciales en el hormigón, en la figura 3-42 se aprecia que en la zona libre y en el extremo donde se adhiere el FRP, las tensiones de corte son elevadas en comparación con las dadas en los otros ensayos de corte. En CD-36-IN después de  $0.02\text{m}$  las tensiones  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  presentan una distribución similar a la de CD-36-EX. A lo largo de la interfaz se tiene que en los sectores donde se alcanzan las máximas tensiones tangenciales, las tensiones decrecen con

el incremento de carga; como se mencionó antes, este decrecimiento es un indicativo de la evolución del daño en la interfaz, por lo tanto, como lo mencionan Ebead y Neale [59] el decrecimiento es un indicativo de la pérdida de adherencia.

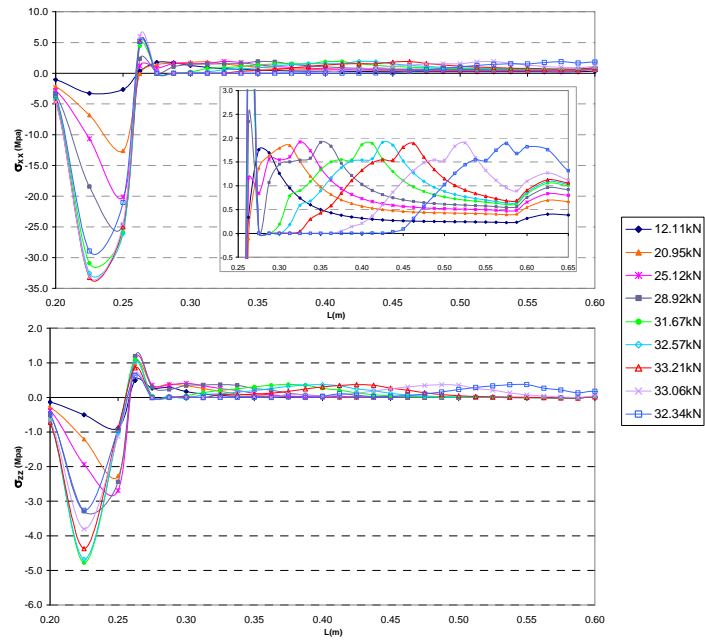


FIGURA 3-41 TENSIONES NORMALES EN EL HORMIGÓN DE CD-36-IN

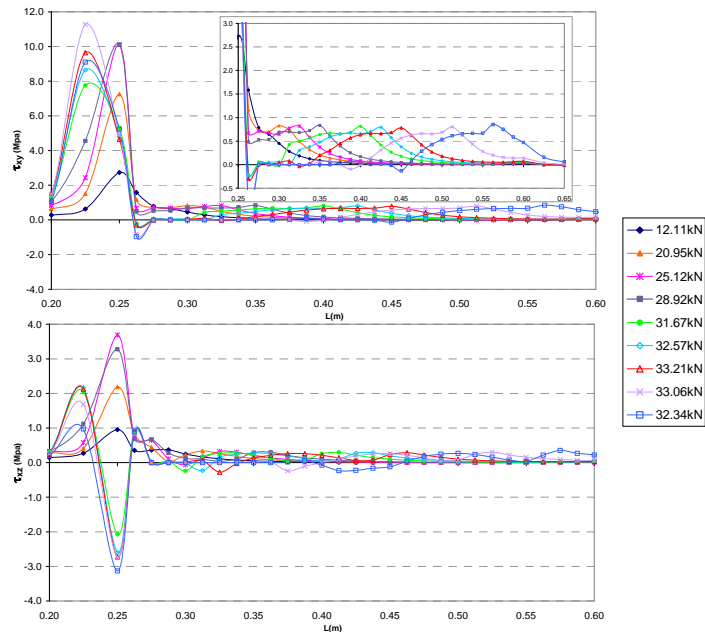


FIGURA 3-42 TENSIONES TANGENCIALES EN EL HORMIGÓN DE CD-36-IN

De acuerdo con lo visto en CD-36-IN, se tiene que dejando una zona libre de 0.25, efectivamente el comportamiento del hormigón en toda la zona reforzada solo está influenciado por el mecanismo de deslizamiento, predominando las tensiones  $\sigma_{xx}$  y las tensiones  $\tau_{xy}$ .

En la figura 3-43 se señalan las tensiones normales en el adhesivo, donde se observa que hasta 0.0375m del inicio de la zona reforzada la distribución de las tensiones tiene cambios abruptos como consecuencia de la alta compresión del hormigón. Las mayores tensiones están en el inicio de la zona con refuerzo con la carga máxima,  $\sigma_{xx}$  de -59.86MPa y  $\sigma_{zz}$  de 6.51MPa a 0.0125m, de igual forma, con 32.57kN la mayor tensión a compresión  $\sigma_{zz}$  es de -7.99MPa. A lo largo de la zona reforzada después de 0.04m, en lo que respecta a las tensiones  $\sigma_{xx}$  se ve que la máxima tensión de tracción es de 22.64MPa para las cargas posteriores a 33.21kN, por su parte, las tensiones  $\sigma_{zz}$  son bajas, las mayores tensiones tienden a 0.40MPa.

Las tensiones tangenciales del epoxi se indican en la figura 3-44. Se observa que la máxima tensión  $\tau_{xy}$  de 14.69MPa se presenta en el extremo donde se adhiere el FRP con una carga de 31.67kN. Además se muestra que con cargas posteriores a 28.92kN se presentan fuertes cambios en la distribución de tensiones hasta 0.04m, luego las mayores tensiones  $\tau_{xy}$  van cambiando de posición en señal del deslizamiento, las cuales se aproximan a 4.00MPa y son equivalentes a un 20% de las mayores tensiones axiales en ese sector.

En lo que respecta a las tensiones  $\tau_{xz}$ , en la figura 3-44 se aprecia que la máxima tensión de 32.67MPa sucede a 0.0125m con una carga de 31.67kN, la distribución de tensiones presentan fuertes cambios abruptos hasta 0.05m para todos los niveles de carga, luego las mayores tensiones tienden a 9.70MPa, que corresponden a un 42% de las mayores tensiones axiales.

Observando el comportamiento del epoxi, se evidencia que una zona libre de 0.25m conlleva a fuertes cambios en la distribución de tensiones donde inicia la zona de adherencia, lo que conduce al daño concentrado en el extremo del epoxi. Por lo tanto, el adhesivo en el extremo inicial está condicionado por los efectos de despegue y de deslizamiento del laminado, en el que inciden todas las tensiones normales y tangenciales, en especial predominan las tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\tau_{xz}$ ; después de 0.05m el comportamiento está gobernado por los efectos de deslizamiento en el que prevalecen las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ , y en una menor proporción, influyen las tensiones tangenciales. En CD-36-IN es tangible que el comportamiento del adhesivo, no está influenciado por el desprendimiento del hormigón.

Al comparar el comportamiento del epoxi de CD-36-IN con el de CD-36-EX, se tiene que después de 0.05m las distribuciones de tensiones normales y tangenciales presentan tendencias similares. En cambio en a lo largo de los 0.05m iniciales, las diferencias son notorias por los cambios abruptos, en especial las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  son más altas en el tramo inicial.

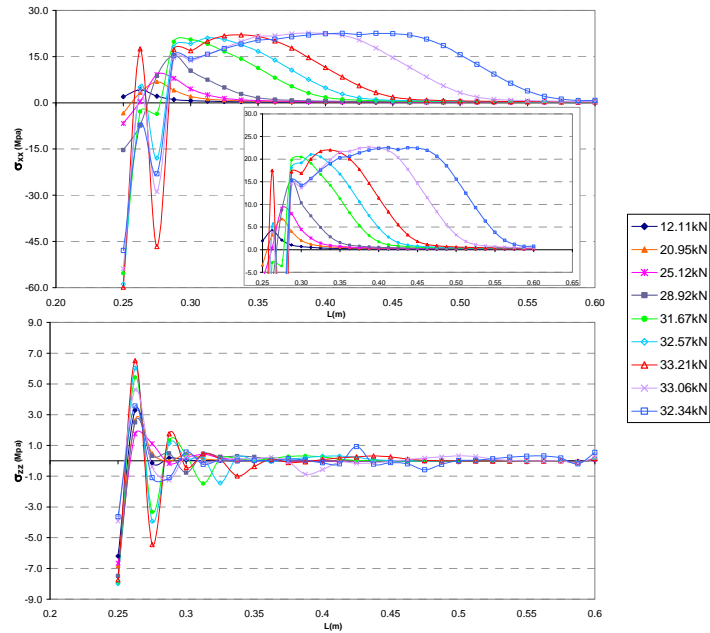


FIGURA 3-43 TENSIONES NORMALES EN EL ADHESIVO DE CD-36-IN

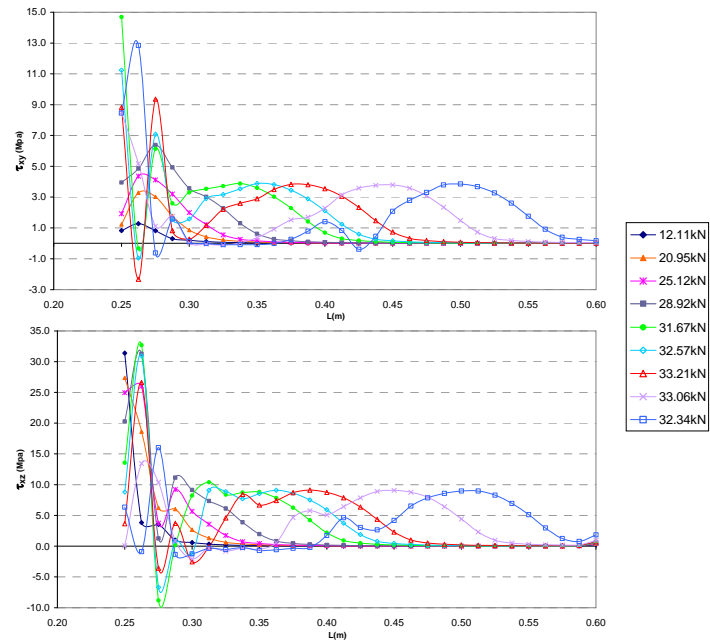


FIGURA 3-44 TENSIONES TANGENCIALES EN EL ADHESIVO DE CD-36-IN

En la figura 3-45 se observa la distribución de tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  y las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  en el FRP. En lo que corresponde a las tensiones axiales, se tiene que en el tramo en que esta libre, las tensiones son mayores a las que se

presentan en la zona en que se adhiere al hormigón, teniendo una tensión  $\sigma_{xx}$  máxima de 565.67MPa para la carga máxima a -0.025m; dentro de la zona reforzada, el comportamiento del compuesto es no lineal durante todo el proceso de carga, las mayores tensiones se presentan donde se adhiere el laminado alcanzando una tensión de 527.52MPa para una carga de 32.57kN.

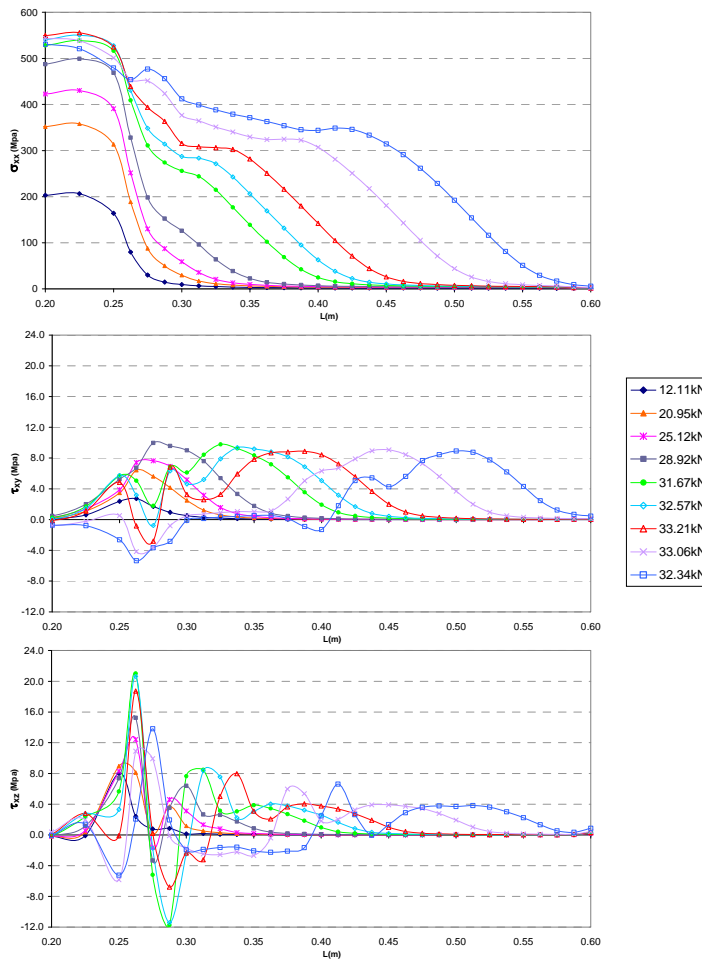


FIGURA 3-45 TENSIONES EN EL COMPUESTO DE CD-36-IN

En lo referente a las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ , la máxima tensión  $\tau_{xy}$  es de 9.97MPa ocurre a 0.025m con una carga de 28.92kN, para cargas posteriores las mayores tensiones cambian de posición con una tendencia a 9.40MPa; asimismo se observa que desde 31.67kN las tensiones  $\tau_{xy}$  comienzan a decrecer desde el extremo hasta 0.04m debido al daño concentrado del epoxi. La distribución tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  tiene cambios fuertes en la desde -0.25m hasta 0.05m, la máxima tensión ocurre con la carga de 31.67kN a 0.0125m 21.01MPa; después de 0.10m las tensiones tienen una tendencia a 2.00MPa.

Considerando que las máximas tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  equivalentes al 1.7% y 3.7% la tensión máxima axial, se deduce que el comportamiento del FRP está regido por las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ , y que su comportamiento no lineal es un reflejo de los cambios de la transmisión de esfuerzos en la interfaz producidos por el daño, y de los efectos de la transición entre la zona libre y la reforzada.

Comparando el comportamiento del compuesto de CD-36-IN con el de CD-36-EX, se aprecia que en CD-36-IN las tensiones axiales son mayores, además que su distribución es menos uniforme; las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  tienen unas tendencias parecidas, en cambio las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  son bastante mayores en el inicio de la zona reforzada, incluso la diferencia entre tensiones máximas es del 300%. Mazzotti et al. [32] en sus ensayos de corte simple, también encontraron que dejando una zona libre se presentaba un incremento considerable de las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$ .

De esta prueba se observó que el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP está influenciado por el efecto de confinamiento de concreto en el tramo inicial de la zona reforzada. De otra parte, aunque el mecanismo de deslizamiento del laminado fue más controlado y se aumentó la carga de resistencia en CD-36-EX, no se pudo evitar el fallo frágil, en este caso hubo rotura del laminado probablemente causado por el elevado daño en la matriz y el daño concentrado del epoxi.

Los resultados de los ensayos de corte doble con una zona libre considerable pueden relacionarse con el comportamiento de la interfaz de elementos reforzados en los que se presentan fuertes cambios en los estados de tensiones; sin embargo, no es recomendable tomarlos como base para el análisis de la interfaz en vigas reforzadas que están simplemente apoyadas, dado que las altas tensiones de compresión generadas en la zona libre conducen a un estado de transmisión de esfuerzos en la interfaz que no se presentan en este tipo de vigas.

Diferentes autores indican que cuando el ensayo de corte se hace con el refuerzo adherido en el extremo, este provee de información de la adherencia del FRP en las zonas aledañas a las fisuras, como sucede en las vigas de hormigón reforzadas con FRP solicitadas a flexión. No obstante, es importante establecer los casos y las condiciones en que los ensayos de corte doble con una zona libre considerable representan de una forma adecuada el comportamiento de la interfaz en las vigas y en las uniones reforzadas con FRP. Esto muestra la necesidad de establecer los alcances y las limitaciones de cada tipo ensayo de adherencia para evitar errores, tanto en el diseño de la zona interfacial por sobreestimación de su resistencia, como en la concepción del mecanismo de fallo que se puede generar en el elemento estructural reforzado.

### 3.6.7 Ensayo de flexión F-36-EX

Es escasa la literatura en que se realizan comparaciones de los resultados experimentales de adherencia por flexión con respecto a simulaciones numéricas,

además solo se han hecho comparaciones con modelos bidimensionales. Una de las investigaciones es la de Leung et al. [42] en la que utilizan elementos de interfaz, y las simulaciones de Perera et al. [44] y de Coronado et al. [68] basadas en los principios de la mecánica de medios continuos. Esto muestra que hasta la fecha no se ha analizado el mecanismo de fallo de la interfaz en tres dimensiones de un ensayo de adherencia por flexión.

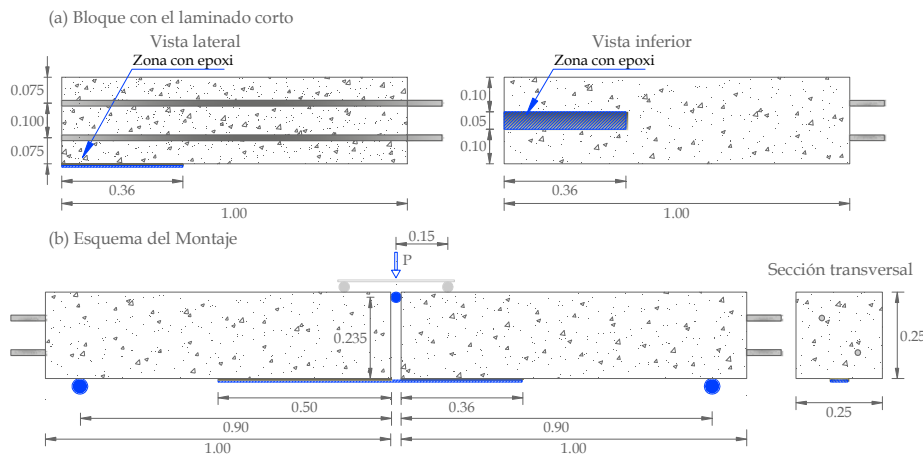


FIGURA 3-46 GEOMETRÍA DE LA PROBETA DE FLEXIÓN CON  $L_{DB}$  DE 0.36M F-36-EX

La geometría de la probeta del ensayo flexión se indica en la figura 3-46, donde se observa que la lámina de CFRP adherida desde el extremo del bloque tiene una longitud de adherencia de 0.36m. La banda de CFRP, al igual que los ensayos de corte doble, tiene un ancho de 0.05m y un espesor de 0.0012m, y el epoxi se consideró con un espesor promedio de 0.0015m. En la figura 3-47 se muestra el mallado de la probeta y se señala la región en que se analiza el comportamiento de la interfaz.

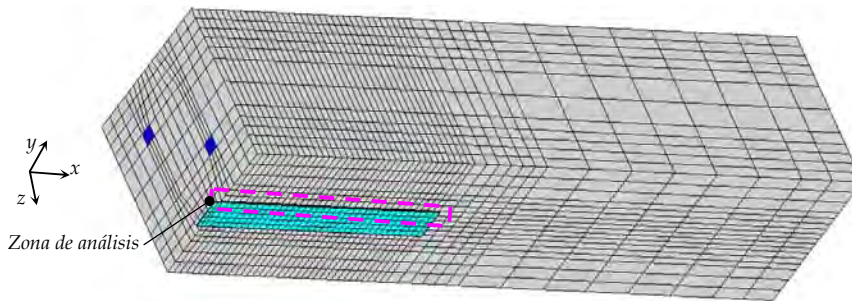


FIGURA 3-47 MALLADO DE F-36-EX

- *Deformaciones*

En el ensayo de adherencia por flexión F-36-EX, la carga máxima obtenida por cada lámina fue de 28.7kN. En el hormigón de F-36-EX se tomó una energía de aplastamiento  $G_c$  de 52J/m<sup>2</sup> y una energía de fractura  $G_t$  de 0.52J/m<sup>2</sup>.



En la figura 3-48 se presentan las deformaciones en el FRP de acuerdo con la ubicación de las galgas en la probeta. Dado a que la relación de carga deformación en la simulación y en el ensayo es similar, el modelo de simulación es apropiado para analizar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP.

En la figura 3-48 se observa que en los diferentes puntos medidos, con los niveles iniciales de carga, hay un comportamiento lineal, donde el incremento de deformación es proporcional a la magnitud de la carga. Luego, al ir aumentándola esta proporcionalidad deja de existir, secuencialmente desde el extremo donde se adhiere el CFRP hacia donde termina, siendo un indicador del daño progresivo del hormigón y del adhesivo. De esta forma se puede ver como a 0.05m del extremo del bloque luego de 8kN se pierde la linealidad, mientras que a 0.35m ocurre con una carga cercana a la máxima. Este comportamiento coincide con lo encontrado en los ensayos realizados por Leung et al. [42].

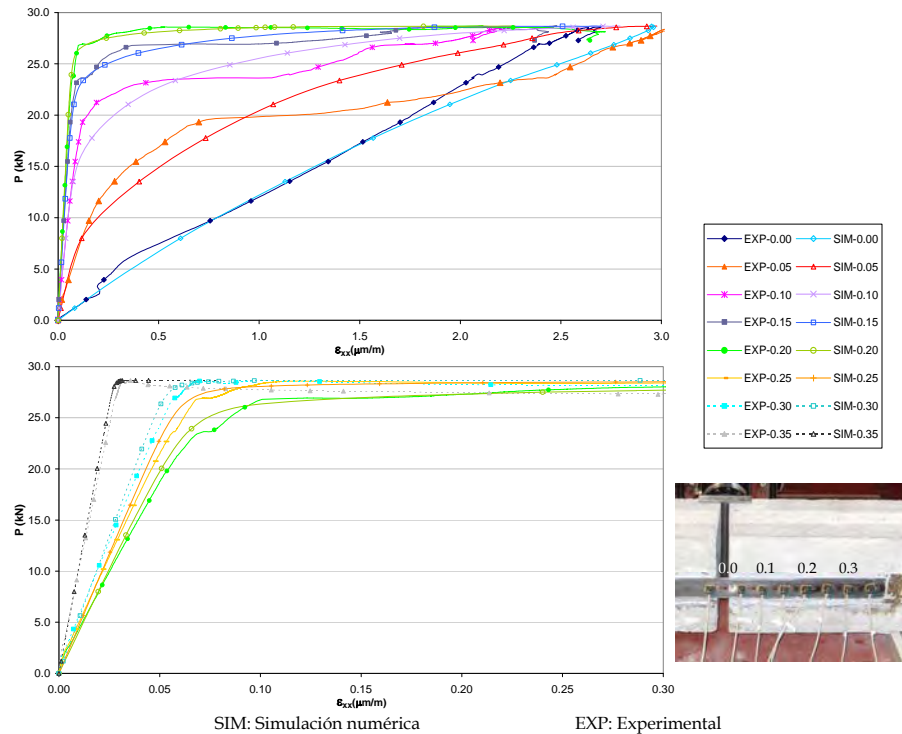
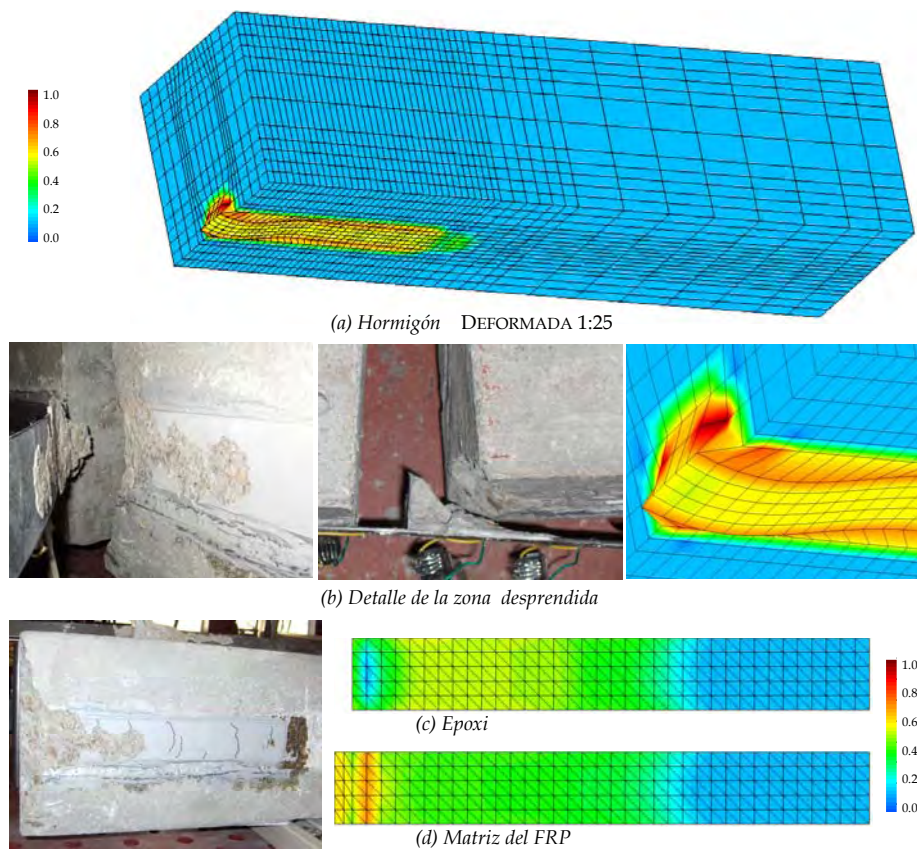


FIGURA 3-48 EVOLUCIÓN DE LAS DEFORMACIONES EN EL COMPUESTO DE F-36-EX

- *Daño*

El fallo en la probeta F-36-EX se produjo de una forma dúctil, al igual que en los ensayos de corte, en el mecanismo de fallo de la interfaz del ensayo de flexión, el FRP se deslizó, una sección del bloque de hormigón se desprendió, la interfaz hormigón-epoxi falló en la zona aledaña, y por último despegó el FRP del epoxi.

Como se puede ver en la figura 3-49 (a) y (b), el daño en el hormigón se produce en la zona reforzada, siendo mayor en los bordes superior e inferior de la zona con refuerzo, el daño en la superficie de hormigón se extiende hasta 0.38m desde el extremo del bloque, es decir, a 0.02m después del refuerzo. En la figura 3-49 (c) se ve que el epoxi tiene mayor daño en las esquinas del extremo inicial, y, entre 0.04m y 0.014m, luego se va reduciendo hacia el extremo donde termina el refuerzo. El máximo daño en la matriz polimérica se presenta a 0.01m del extremo reforzado como se señala en la figura 3-49 (d). Tanto para la matriz como para el adhesivo no hay daño donde finaliza el refuerzo.



\* Las fotografías son cortesía de L.I. Gil y J.J. Cruz

FIGURA 3-49 DAÑO EN F-36-EX

En la figura 3-49 (b), se observa que el cono desprendido del bloque de hormigón tiene una forma similar a la sección que se deforma en el modelo numérico, asimismo se ve que en la figura 3-49 (c) el mayor daño en el epoxi coincide con la superficie afectada en la probeta. El daño del hormigón en la zona donde se adhiere el FRP es producido por el efecto conjunto entre el deslizamiento y el desprendimiento del laminado, fallo localizado que también fue observado en los ensayos de Katz [41]. En las vigas reforzadas con FRP, este mecanismo de fallo

localizado se presenta en las zonas adyacentes a las fisuras por flexión y en las regiones de transición hacia el extremo donde se adhiere el refuerzo [44].

En la figura 3-50 se muestra la evolución del daño en el hormigón, el epoxy y la matriz polimérica a lo largo del borde superior indicado en la figura 3-47. En lo referente al daño en el hormigón, en la figura 3-50 (a) se observa que hay una distribución de daño uniforme teniendo un valor máximo de un 67%, además para la carga posterior a la máxima, hay un daño del 13% al final de la zona con refuerzo, como indicador de la pérdida de capacidad de la interfaz y del deslizamiento del CFRP en este sector.

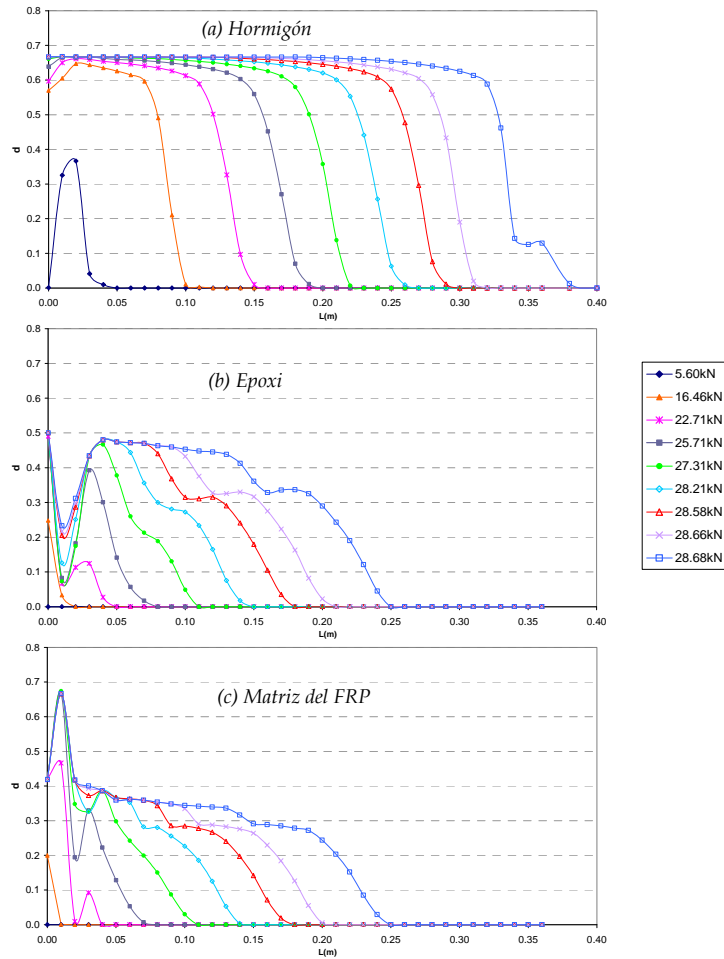


FIGURA 3-50 EVOLUCIÓN DEL DAÑO EN F-36-EX

En lo que respecta al daño en el epoxy mostrado en la figura 3-50 (b) para F-36-EX la distribución de daño en los primeros 0.03m no es uniforme; asimismo, el máximo daño en el epoxy del 50% ocurre en el extremo del bloque donde se adhiere el refuerzo, después de 0.04m el daño se distribuye de una forma uniforme

aproximado a 47.5%. El daño en la matriz del FRP indicado figura 3-50 (c) muestra que el mayor daño se presenta para 0.01m teniendo un valor de 67.8%, después de 0.05m se distribuye uniformemente con un promedio de 41.7%.

El daño local en el extremo del adhesivo y en la matriz polimérica se debe a que hay una concentración de tensiones, donde hay un efecto de arrancamiento aparte de la tracción por la deflexión del FRP en la junta de separación. Asimismo, la distribución no uniforme en la zona adyacente, es producto de la redistribución de tensiones que se evidencia a 0.01m con la reducción del daño en el epoxi mientras en la matriz polimérica es alto. Además para los dos materiales después de los 0.04m, dada la uniformidad de la distribución del daño la influencia del desprendimiento es despreciable.

- *Distribución de tensiones principales para la carga última*

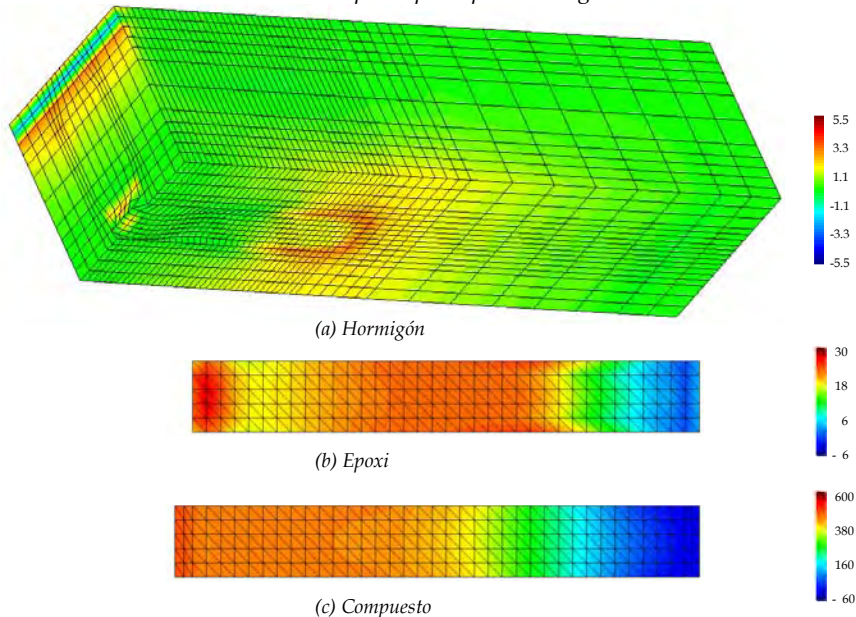


FIGURA 3-51 TENSIONES PRINCIPALES EN F-36-EX PARA UNA CARGA ÚLTIMA DE 28.68kN

En la figura 3-51 (a) se observan las tensiones principales en el extremo del bloque de hormigón reforzado, en el extremo donde termina el laminado. Se aprecia que las tensiones en el cono de falla de F-36-EX son menores a las tensiones dadas en los ensayos de corte. En la figura 3-51 (b) se muestra el estado de tensiones principales en el epoxi, donde se identifica que en algunos sectores la distribución de tensiones transversalmente no es uniforme, siendo mayor en el centro como lo registró en los ensayos con las deformaciones Pellegrino et al. [46], en particular esto se aprecia entre 0.00m y 0.14m, y, después de 0.24m. Por último, en la figura 3-51 (c) se presentan las tensiones en el laminado CFRP, las cuales no superan la resistencia del compuesto 2200MPa, solo de alcanza un 22.7% pero su comportamiento no es lineal por el daño progresivo del hormigón, del epoxi y de

la matriz polimérica.

- *Distribución de tensiones en la zona de análisis*

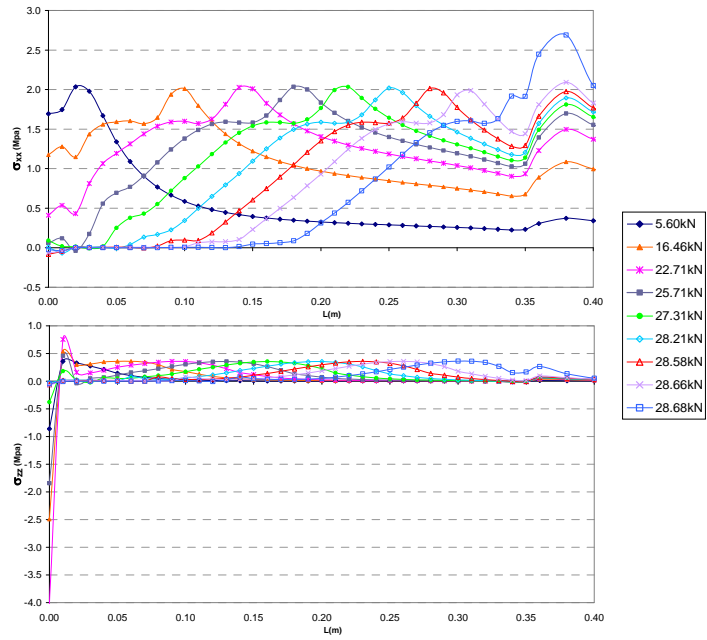


FIGURA 3-52 TENSIONES NORMALES EN EL HORMIGÓN DE F-36-EX

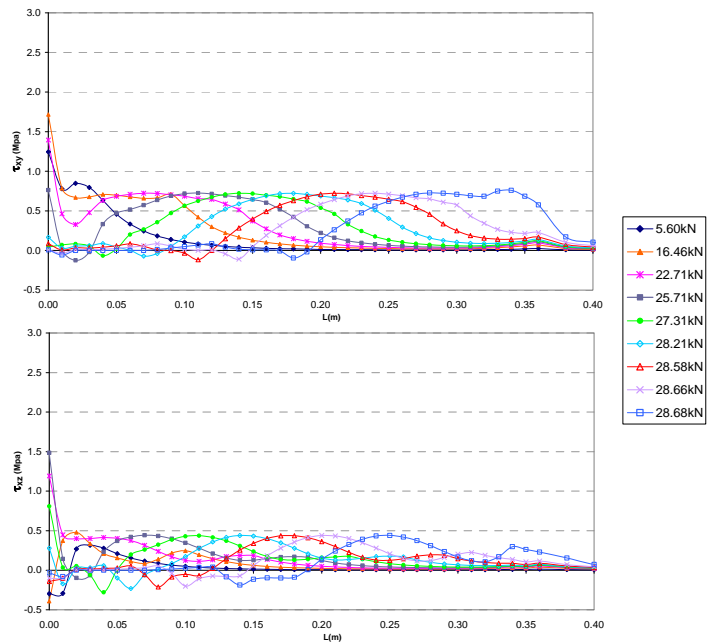


FIGURA 3-53 TENSIONES TANGENCIALES EN EL HORMIGÓN DE F-36-EX

En la figura 3-52 se muestran las tensiones normales en el hormigón. En lo que respecta a las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ , como señal del deslizamiento se observa la variación de la distribución de las tensiones a lo largo de la zona reforzada hacia donde termina el CFRP. Con los diferentes niveles de carga hasta 28.66kN, las máximas tensiones se aproximan a 2.00MPa; para la carga máxima de 28.68MPa hay una tensión de 2.69MPa a 0.02m del refuerzo, lo que muestra la pérdida de transferencia de esfuerzos de la zona reforzada. En lo referente a las tensiones  $\sigma_{zz}$ , éstas sólo inciden en el extremo del bloque; con una carga de 22.7kN se tienen las máximas tensiones de -4.07MPa en el extremo y de 0.70MPa a 0.01m, luego de 0.02m, las mayores tensiones se aproximan a 0.36MPa.

Referente a las tensiones tangenciales indicadas en la figura 3-53, se observa que para los diferentes niveles de carga hasta 22.17kN, las mayores tensiones  $\tau_{xy}$  ocurren en el extremo donde se adhiere el CFRP, donde se alcanza la máxima tensión de 1.71MPa con una carga de 16.46kN. Luego, para niveles de carga superiores a 16.46kN, las mayores tensiones están alrededor de 0.72MPa, y se producen a lo largo de la zona con refuerzo. Con la carga máxima, donde finaliza el refuerzo, la tensión se incrementa en 0.34m a 0.76MPa. En lo que corresponde a las tensiones  $\tau_{xz}$  se tiene que la máxima tensión ocurre en el extremo del bloque donde se tiene 1.48MPa con una carga de 25.71kN, a lo largo de la zona reforzada las tensiones mayores están alrededor de los 0.44MPa.

De acuerdo con lo anterior, se tiene que el comportamiento a lo largo de la zona reforzada corresponde a la acción conjunta de las tensiones tangenciales y normales. En el extremo inicial predominan las tensiones  $\sigma_{zz}$ , por ello se observa que el fallo en este sector corresponde a los efectos del desprendimiento del hormigón y del deslizamiento. A lo largo de la zona con refuerzo en cambio prevalecen las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  y las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ , lo que muestra que el comportamiento del hormigón a lo largo del refuerzo está regido por el efecto de deslizamiento. Además, se aprecia que las tensiones tangenciales tienen mayor incidencia en el comportamiento en el extremo inicial de la zona reforzada que en el extremo final.

De la distribución de las tensiones normales en el epoxi indicada en la figura 3-54, se ve que las mayores tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  ocurren entre 0.01m y 0.02m de donde se adhiere el CFRP, alcanzando una tensión máxima de 23.16MPa. Por otro lado, al incrementarse el nivel de carga en el epoxi, se amplía el área de desarrollo de las tensiones, para cargas posteriores a 25.71kN presenta la distribución en determinados sectores es uniforme. En lo que corresponde a las tensiones  $\sigma_{zz}$  se tiene que al igual que en los ensayos de corte solo tiene cierta incidencia hacia los extremos de la zona reforzada. En los primeros 0.03m hay cambios fuertes en la distribución de tensiones  $\sigma_{zz}$  hasta una carga de 28.21kN, en cambio con la carga última se incrementa donde finaliza el laminado. En el extremo inicial de la zona con refuerzo ocurre la máxima tensión  $\sigma_{zz}$  de 4.89MPa con 25.71kN, que es equivalente a un 20% de las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ .

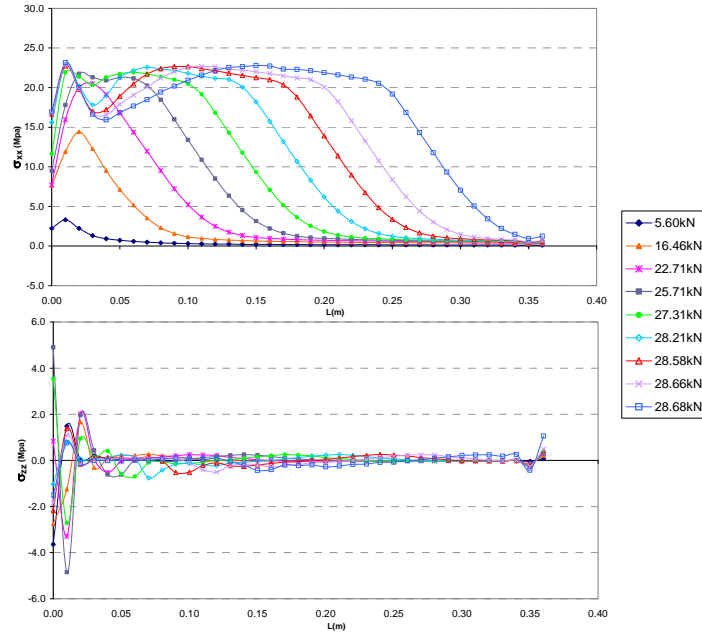


FIGURA 3-54 TENSIONES NORMALES EN EL ADHESIVO DE F-36-EX

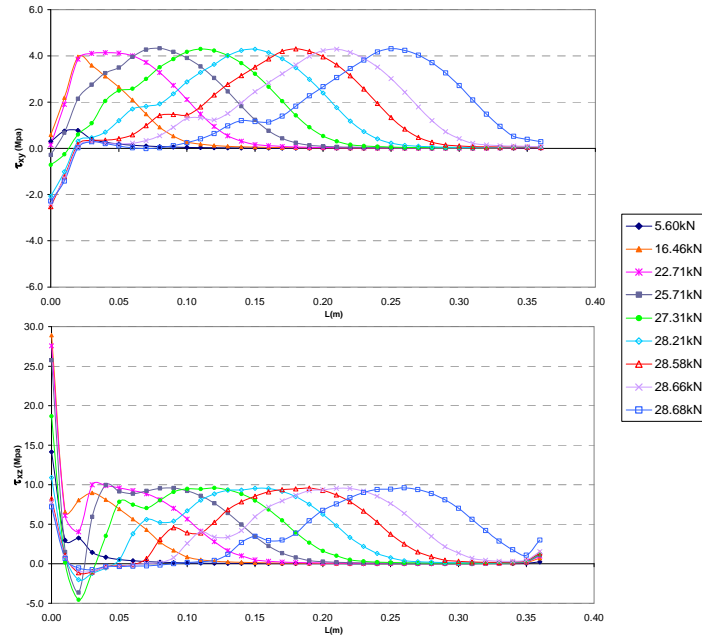


FIGURA 3-55 TENSIONES TANGENCIALES EN EL ADHESIVO DE F-36-EX

La distribución de las tensiones tangenciales en el epoxi es aproximadamente parabólica, tal y como puede verse en la figura 3-55. Las tensiones  $\tau_{xy}$  a lo largo de la zona con refuerzo desarrollan las mayores tensiones entre 7.09MPa y 7.13MPa.

Las tensiones  $\tau_{xz}$  son mayores en el extremo del bloque hasta 28.21kN, teniendo un valor máximo de 28.93MPa con 16.46kN, después de 0.03m las tensiones mayores son cercanas a 9.60MPa.

En el epoxy, hacia el extremo de la zona reforzada se tiene que las tensiones tangenciales las  $\tau_{xz}$  y la tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  son las que gobiernan el comportamiento de la interfaz, por lo tanto, actúan conjuntamente los efectos de deslizamiento y de desprendimiento. En cambio a lo largo de la zona reforzada prevalecen las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$  y en menor proporción inciden las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  y  $\tau_{xy}$ , ya que equivalen a un 50% y 30% de las tensiones  $\sigma_{xx}$ .

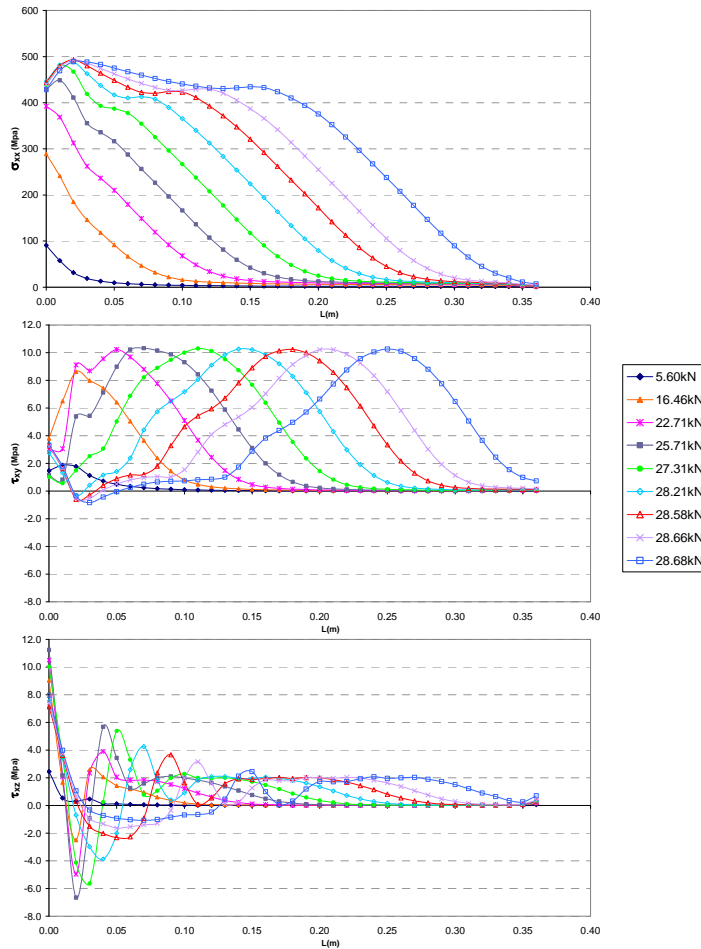


FIGURA 3-56 TENSIONES EN EL COMPUESTO DE F-36-EX

En la figura 3-56 se muestran las tensiones axiales y tangenciales en el CFRP. Las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ , tienen una tendencia casi lineal hasta una fuerza de 22.71kN donde la máxima tensión se presenta en donde se adhiere el CFRP en el extremo del bloque de hormigón. Con niveles de carga superiores hasta 27.31kN, la



distribución de tensiones es semi-parabólica, donde la mayor tensión ocurre a 0.01m del extremo del bloque. Con los otros niveles de carga, las mayores tensiones se presentan a 0.02m, teniendo la máxima tensión axial de 493.1MPa con una carga de 28.58kN, además después de 0.08m comienzan a presentar una distribución uniforme tensiones alrededor de los 440.00MPa.

Las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  en el laminado tienen una distribución parabólica, como muestra del deslizamiento, el sector con la mayor tensión cambia trasladándose hacia donde finaliza el CFRP, manteniendo los valores mayores de tensión tangencial aproximados a 10.25MPa. Las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$ , tienen mayor incidencia en el extremo del bloque, la máxima tensión de 11.24MPa sucede en el extremo inicial con una carga de 25.71kN, después de 0.12m las mayores tensiones tienen una tendencia a 2.0MPa.

Al comparar las gráficas de la figura 3-56 se ve como a lo largo del laminado, las tensiones son menores al 22% de la resistencia del CFRP, lo que indica que no se alcanza a desarrollar la capacidad total del laminado. Por otra parte, ya que las tensiones tangenciales son desde un 2% hasta un 4% de las tensiones axiales, se evidencia que el CFRP en el ensayo de flexión esta gobernado por acciones axiales.

Con este modelo se muestra que el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP en los ensayos de adherencia por flexión, depende de la interacción integral de los tres materiales, por tanto, es importante que se simulen los ensayos de adherencia en tres dimensiones. De otra parte también se observa que la pérdida de adherencia se debe al daño en el epoxi, en el hormigón y en la matriz del FRP, efectos que también han sido señalados en las pruebas experimentales a flexión de Katz[41] y de Pellegrino et al. [46].

Se tiene que la distribución de tensiones en el ensayo de corte CD-36-EX y en el ensayo de flexión F-36-EX son bastante parecidas para los tres materiales, salvo algunas diferencias, entre las cuales se enuncian:

- En el FRP la diferencia de magnitud en las tensiones axiales que básicamente se debe a que las cargas de falla son distintas 23.99kN vs. 28.7kN.
- En el epoxi las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{xz}$  en el extremo del bloque de F-36-EX son un 13% menores a las dadas en CD-36-EX.
- En el hormigón se tiene que las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  aunque son de un mismo orden de magnitud, en el ensayo de flexión son más uniformes que las obtenidas en el ensayo de corte, de otra parte, en el extremo del bloque las máximas tensiones en CD-36-EX  $\sigma_{zz}$  y  $\tau_{xz}$  son menores un 21% y un 14% con respecto a las tensiones máximas de F-36-EX, no obstante la distribución de tensiones es similar y tienen un mismo orden de magnitud.

Estas diferencias muestran que las tensiones influenciadas por el efecto de desprendimiento del hormigón son mayores en los ensayos de flexión que en los ensayos de corte, debido a la transferencia combinada de acciones axiales y de cortante en el extremo libre del FRP, las cuales son intrínsecas a la deflexión del ensayo.

Las diferencias del comportamiento de la interfaz en el extremo inicial de la zona reforzada explican el porqué algunos investigadores concluyen que los ensayos de corte no representan el efecto de apertura de las fisuras que ocurren en las vigas reforzadas, sin embargo con la comparación hecha entre las simulaciones se demuestra que la distribución de tensiones en los materiales a lo largo de la zona con refuerzo es similar para los dos tipos de ensayo.

De las cuatro simulaciones contrastadas con los ensayos experimentales se evidencia que, el epoxi, al no ser tan resistente como el laminado y al tener mayor resistencia que el hormigón, debe tener la capacidad suficiente para garantizar que las tensiones se transmitan y distribuyan en forma adecuada desde el laminado al hormigón. Asimismo se ve la importancia de tener en cuenta el epoxi en el análisis del comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, y se muestra que su comportamiento no es elástico, ni lineal, en respuesta al daño progresivo del hormigón, y al ser susceptible al daño y/o a la plasticidad.

En las simulaciones también se observó la ventaja que se tiene al considerar el comportamiento de cada componente de los materiales compuestos, a través de las teorías de mezclas, dado que se puede determinar el nivel de influencia de los materiales componentes en el comportamiento no lineal de los materiales compuestos. Sin embargo las diferencias localizadas que se presentan en las deformaciones muestran que es necesario que en las teorías de mezclas se tengan en cuenta las inestabilidades locales que pueden existir en los materiales compuestos como el deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz, la delaminación o el pandeo de la fibra.

De otra parte, con las simulaciones en tres dimensiones se aprecia la importancia de hacer un análisis integral del comportamiento de la interfaz. Coincidiendo con lo encontrado por Chen y Pan [49], en las simulaciones realizadas, al observar el comportamiento del hormigón, del adhesivo y del FRP, se concluye que en la simulación tridimensional, la contribución de las tensiones axiales y tangenciales es diferente a lo indicado en los estudios en los que se ha considerado el estado plano de tensiones. En lo que respecta al comportamiento de la interfaz, en el hormigón y en el epoxi, tanto las tensiones tangenciales como las tensiones axiales tienen un porcentaje de participación significativo, mientras que en el FRP predominan las tensiones axiales.

### 3.6.8 Ensayos de adherencia simulados con la teoría de mezclas clásica

Con el objetivo de comparar la resistencia y la rigidez en los cuatro ensayos se hicieron 4 simulaciones, en las que se le asignó al hormigón una energía de aplastamiento  $G_c$  de  $40\text{J}/\text{m}^2$  y una energía de fractura  $G_f$  de  $0.4\text{J}/\text{m}^2$ . En la tabla 3-4 se indican en los cuatro modelos la nomenclatura, el número de elementos y la longitud de adherencia  $l_{db}$ . La composición de los compuestos y las propiedades de los materiales simples son correspondientes a las utilizadas en los modelos anteriores, las cuales se muestran en la tabla 3-2 en la tabla 3-3.

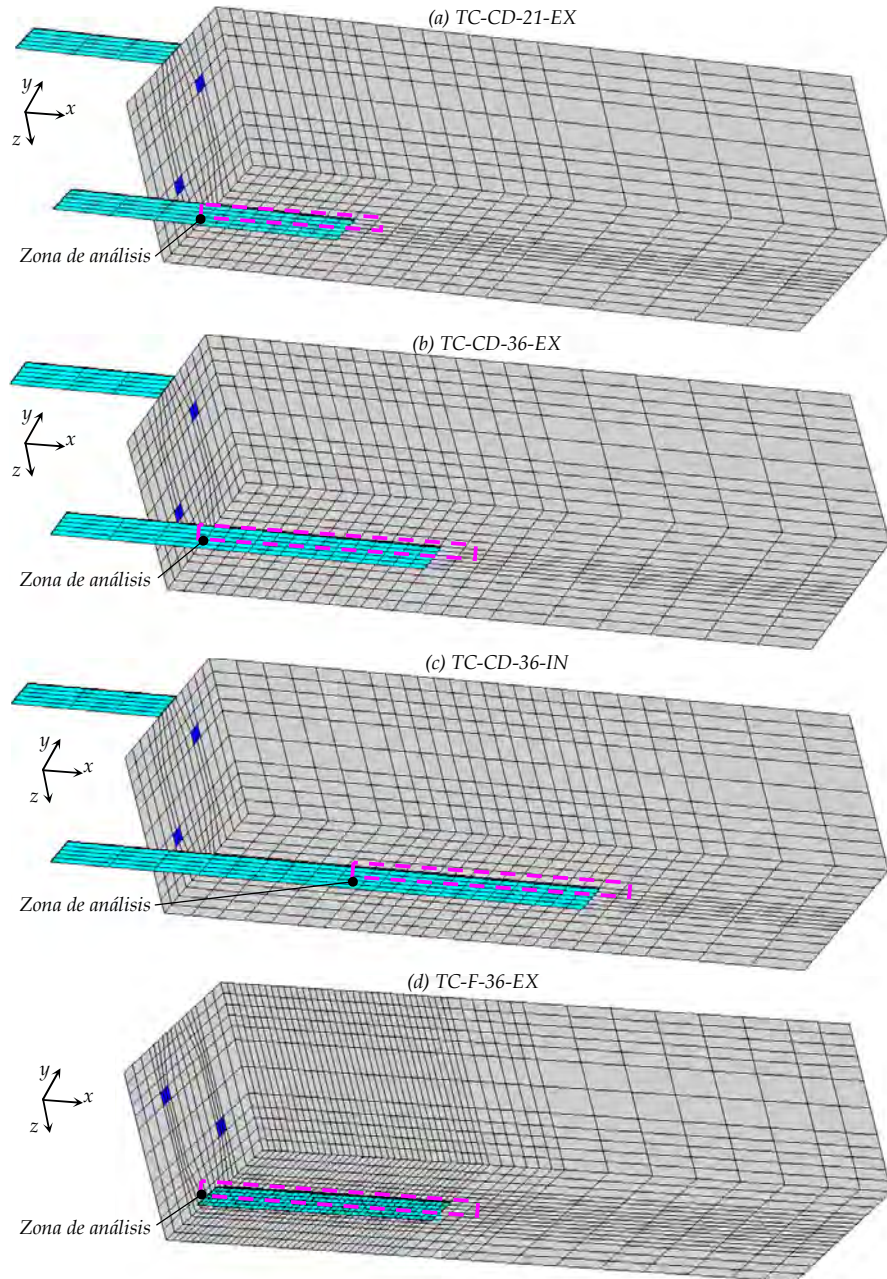


FIGURA 3-57 MALLADOS DE LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA CON  $G_c$  DE  $40\text{J}/\text{m}^2$

Los mallados de los cuatro modelos se indican en la figura 3-57, los ensayos de corte doble se modelizaron con un mallado menos denso y el modelo ensayo de flexión se simuló con el mismo mallado de F-36-EX. Además para este análisis se utilizó la teoría de mezclas clásica, que también se puede aplicar en la simulación

de los ensayos de adherencia. A través de estas simulaciones se aprecia que con la estrategia propuesta no se requieren mallados finos para estudiar el mecanismo de fallo de la interfaz con una buena aproximación.

Ensayos de adherencia		$l_{db}$ m	Elementos de hormigón	Elementos de hormigón armado	Elementos del epoxi	Elementos del FRP
Descripción	Nomenclatura					
Corte doble reforzado desde el extremo	TC-CD-21-EX	0.21	3504	96	140	170
Corte doble reforzado desde el extremo	TC-CD-36-EX	0.36	3504	96	160	190
Corte doble reforzado en una zona intermedia a 0.25m del extremo	TC-CD-36-IN	0.36	3904	108	160	250
Flexión reforzado desde el extremo	TC-F-36-EX	0.36	9900	300	360	380

TABLA 3-4 DISCRETIZACIÓN DE LOS MODELOS DE LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA

- *Resistencia*

En la figura 3-58 se observan las curvas carga desplazamiento para los cuatro modelos y en la tabla 3-2 se indican las cargas máximas obtenidas. Comparando TC-CD-21-EX con TC-CD-36-EX se identifica la influencia de la longitud de anclaje en el comportamiento de la zona interfacial, de una parte se aprecia que la longitud de adherencia para los ensayos de corte doble es uno de los parámetros que controla el modo de fallo, dado que al reducir la longitud de adherencia se afecta la ductilidad; de otra parte, al aumentar la longitud de anclaje del refuerzo de 0.21m a 0.36m, la resistencia de la probeta disminuye, no obstante esta reducción es poco significativa, apenas es de un 2.0%. Asimismo se observa que en los dos ensayos de corte, la rigidez es independiente de la longitud de adherencia.

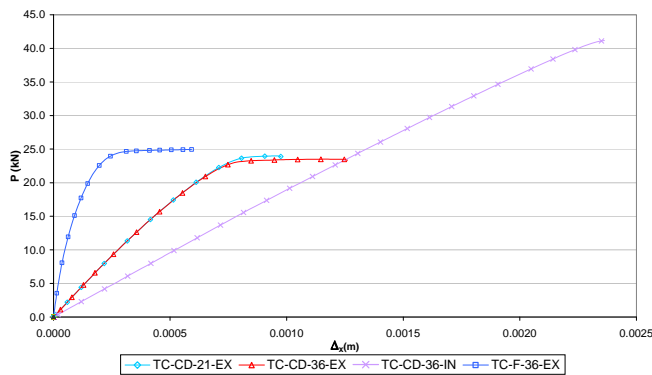


FIGURA 3-58 CARGA P- DESPLAZAMIENTO  $\Delta x$  DE LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA

SIMULACIÓN	TC-CD-21-EX	TC-CD-36-EX	TC-CD-36-IN	TC-F-36-EX
Carga máxima Pmax (kN)	23.98	23.53	41.16	24.95

TABLA 3-5 CARGAS MÁXIMAS DE LOS MODELOS DE LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA

Contrastando TC-CD-36-EX con TC-CD-36-IN, se aprecia que pese a que la TC-CD-36-IN tiene una geometría similar a la de la TC-CD-36-EX, al colocarse el refuerzo a 0.25m del extremo del bloque de hormigón, la rigidez disminuye un

48%, por el contrario la resistencia aumenta un 75%; sin embargo se señala que la TC-CD-36-IN tiene un fallo frágil mientras que la TC-CD-36-EX presenta un fallo dúctil. Es importante aclarar que el cambio de rigidez en este tipo de ensayo no implica que el elemento estructural a reforzar varíe su rigidez global al colocar el FRP en una zona intermedia o en el extremo del elemento, ya que con los ensayos de adherencia, sólo se está analizando el comportamiento de la interfaz.

Comparando TC-F-36-EX con TC-CD-36-EX, se tiene que desde la carga inicial TC-F-36-EX presenta un comportamiento no lineal debido a los efectos de la flexión del mismo ensayo, sin embargo la diferencia entre las cargas resistentes es apenas de un 6.1%, asimismo se observa que tienen una ductilidad similar. La rigidez de TC-F-36-EX es 5 veces mayor TC-CD-36-EX, sin embargo, no son comparables ya que la longitud libre del laminado incide directamente en la rigidez de las probetas como lo mostró Molina [21] en su investigación, en el ensayo a flexión la longitud libre es de 0.0125m, mientras que en los ensayos de corte doble es de 0.23m.

- *Daño*

En la figura 3-59 se muestra el daño en el hormigón, el epoxy y la matriz polimérica para los cuatro ensayos, en las zonas indicadas en la figura 3-57. Debe tenerse en cuenta que en los ensayos de corte al tener un mallado aproximadamente 3 veces menos denso, no se captura el daño localizado con el mismo detalle que se logra establecer con mallados mas finos, no obstante definen el comportamiento de los materiales de la interfaz y su interacción con una buena aproximación.

En la figura 3-59 (a) se observa que para los ensayos de TC-CD-21-EX, TC-CD-36-EX y TC-F-36-EX, la distribución del daño en el hormigón a lo largo de la interfaz presenta una misma tendencia del 67%, la diferencia está en la zona aledaña donde finaliza el refuerzo, en los ensayos de corte hay un incremento al 80% mientras en el ensayo a flexión hay un pequeño resalto del 12%. En TC-CD-21-EX, TC-CD-36-EX el daño se extiende a una zona mas allá de la zona reforzada mientras que TC-CD-36-IN solo se presenta hasta 0.15m de la zona con refuerzo.

En lo referente al daño en el adhesivo, en la figura 3-59 (b) se tiene que el mayor daño ocurre en TC-CD-36-IN, pero afecta sólo los 0.05m iniciales; en cambio en TC-CD-21-EX, TC-CD-36-EX y TC-F-36-EX el daño se distribuye con una distribución uniforme aproximada a un 28%.

En cuanto a la matriz polimérica del compuesto, en la figura 3-59 (c) se observa que TC-CD-21-EX y TC-CD-36-EX tienen una misma tendencia de daño. También se ve que el daño es alto en la matriz de TC-CD-36-IN y que la zona reforzada sólo afecta los 0.05m iniciales; con este ensayo se aprecia que el FRP es más susceptible a la rotura debido a que la matriz polimérica presenta un daño elevado en la transición de la zona libre y la reforzada.

Asimismo, se aprecia que el ensayo a flexión TC-F-36-EX tiene una distribución uniforme con un daño un 8% mayor al de los ensayos de corte TC-CD-21-EX y TC-CD-36-EX. En proporción con la longitud de adherencia, se aprecia que en TC-CD-

36-EX la zona con daño del epoxy y de la matriz polimérica es mayor que la zona afectada de TC-F-36-EX y de TC-CD-21-EX.

Comparando los modelos de corte doble TC-CD-21-EX y TC-CD-36-EX, se muestra que hay una longitud de adherencia efectiva, tal que una longitud de adherencia mayor, no implica una mayor capacidad de carga o un menor daño en los materiales de la interfaz, asimismo se observa que la longitud de adherencia adicional incrementa la ductilidad.

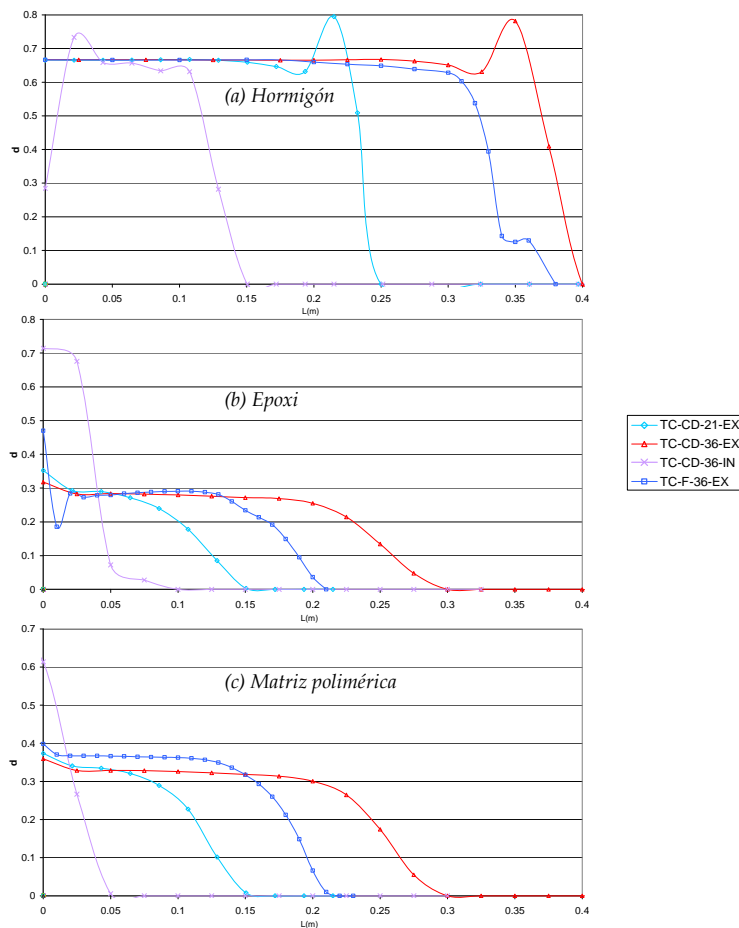


FIGURA 3-59 DAÑO EN LOS ENSAYOS DE ADHERENCIA

De acuerdo con lo analizado, se aprecia que si bien el FRP como refuerzo aumenta la capacidad de carga de los elementos estructurales, puede reducirse su ductilidad, si el mecanismo de fallo está gobernado por la pérdida de adherencia entre el laminado y el hormigón, o por la rotura del refuerzo. Los ensayos de adherencia permiten analizar diferentes mecanismos de fallo que se pueden presentar con la pérdida de adherencia, la selección de efectuar un determinado

ensayo de adherencia depende de lo que se pretenda estudiar, es así como en las simulaciones realizadas se evidencia que los ensayos de corte doble y los de flexión son complementarios.

Para considerar los resultados de estos ensayos en el diseño de elementos en hormigón armado reforzado con FRP es importante tener en cuenta que para utilizar adecuadamente la información obtenida en los ensayos y las simulaciones, se debe entender que por la misma complejidad del comportamiento de la interfaz, es necesario identificar las similitudes y diferencias entre los tipos de ensayos para establecer los casos estructurales en que sus resultados son aplicables.

El potencial de la estrategia propuesta esta en la facilidad de hacer las simulaciones de los diferentes tipos ensayos de adherencia para analizar el comportamiento de la interfaz; no obstante, es necesario extender la aplicación de la estrategia a simulaciones de vigas y uniones reforzados FRP con el fin de definir los alcances y limitaciones de los ensayos de adherencia para representar el comportamiento de la interfaz en ellos.

### 3.6.9 Influencia del espesor del epoxi en los ensayos de corte doble

Se tiene que el espesor del epoxi no es constante, por las irregularidades de la superficie del hormigón, acorde con la técnica de preparación que se utilice, y por la misma manipulación del epoxi para adherir el laminado. El espesor del epoxi tiene variaciones entre 0.5mm y 3mm [23], lo que puede conllevar a algunas imperfecciones como microfisuras o porosidades durante su fraguado.

Con el propósito de analizar la influencia del espesor del adhesivo en el comportamiento de la interfaz se hicieron simulaciones del ensayo de corte doble con 4 espesores diferentes. Este análisis se realizó con las teorías de mezclas clásica (TC) y serie/paralelo (SP). La nomenclatura de las configuraciones analizadas se indica en la tabla 3-6.

Espesor del epoxi (m)	$l_{ab}(m)$	Teoría clásica	Teoría serie/paralelo
0.0005	0.36	TC-CD-05	SP-CD-05
0.0010	0.36	TC-CD-10	SP-CD-10
0.0015	0.36	TC-CD-15	SP-CD-15
0.0030	0.36	TC-CD-30	SP-CD-30

TABLA 3-6 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DE LOS ENSAYOS DE CORTE DOBLE CON DIFERENTES ESPESORES

En las simulaciones se consideró una longitud de adherencia de 0.36m, con la configuración mostrada en la figura 3-24. El mallado utilizado corresponde al mallado de TC-CD-36-EX, el cual se muestra la figura 3-57 (b). La composición de los compuestos se indica en la tabla 3-2. Las propiedades de los materiales simples son correspondientes a las utilizadas en los modelos anteriores, las cuales se

señalan en la tabla 3-3. Al hormigón se le asignó una energía de aplastamiento  $G_c$  de  $40\text{J}/\text{m}^2$  y una energía de fractura  $G_f$  de  $0.4\text{J}/\text{m}^2$ .

- *Resistencia*

En la figura 3-60 se observan las curvas carga desplazamiento de las simulaciones y en la tabla 3-7 se indican las cargas máximas obtenidas. Se aprecia que con las dos teorías de mezclas, las simulaciones presentan curvas bastante aproximadas, la diferencia entre las cargas máximas es menor a 0.3%.

En lo que corresponde a la influencia del espesor, se tiene que el espesor incide en la resistencia de la zona interfacial, y no afecta la rigidez, ni la ductilidad de la interfaz en los ensayos de corte doble. En ausencia de microfisuras y micro-vacíos en el adhesivo, se tiene que al aumentar el espesor del adhesivo, la interfaz aumenta su capacidad de carga; aunque el incremento no es proporcional, por ejemplo, de  $0.0005\text{m}$  a  $0.0010\text{m}$  aumenta un 2.5%, mientras que de  $0.0015\text{m}$  a  $0.0030\text{m}$  el cambio es de 6.6%. Sin embargo, se debe tener en cuenta que con el aumento del espesor del epoxi, hay una mayor probabilidad de que hayan microfisuras y micro-vacíos en la capa del adhesivo, por su proceso de colocación y fraguado, imperfecciones que conducen a que el epoxi sea vulnerable al fallo.

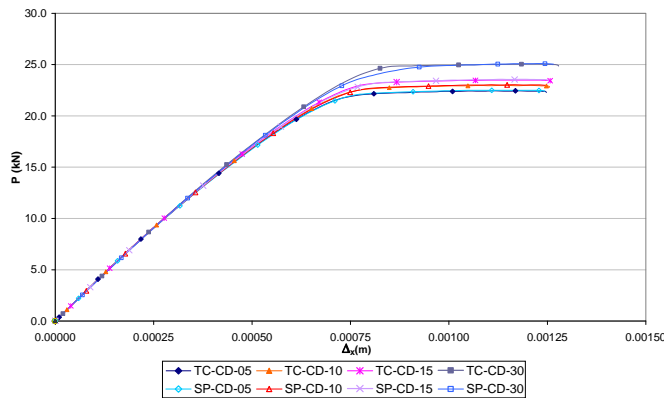


FIGURA 3-60 CARGA P- DESPLAZAMIENTO  $\Delta x$  DE LOS ENSAYOS DE CORTE DOBLE CON DIFERENTES ESPESORES DE ADHESIVO

Teoría clásica	Carga máxima $P_{max}$ (kN)	Teoría serie/paralelo	Carga máxima $P_{max}$ (kN)
TC-CD-05	22.45	SP-CD-05	22.50
TC-CD-10	22.97	SP-CD-10	23.04
TC-CD-15	23.50	SP-CD-15	23.57
TC-CD-30	25.05	SP-CD-30	25.10

TABLA 3-7 CARGAS MÁXIMAS DE LOS ENSAYOS DE CORTE DOBLE CON DIFERENTES ESPESORES

- *Distribución de tensiones en la zona de análisis para la carga última*

En la figura 3- 61 se señala la distribución de tensiones en el hormigón para la carga última, en la cual se observan las diferencias del comportamiento del



hormigón de acuerdo con los espesores del epoxi y las teorías de mezclas. En esta figura se aprecia que en el hormigón aunque la magnitud de las tensiones es diferente entre las dos teorías, la distribución tiene una misma tendencia.

En todos los modelos se observa el incremento de tensiones  $\sigma_{xx}$  fuera de la zona reforzada a 0.025m, lo que muestra la pérdida de capacidad de la interfaz. Las máximas tensiones tangenciales máximas  $\tau_{xy}$  se presentan donde termina el refuerzo, y corresponden al 37% de las tensiones  $\sigma_{xx}$  obtenidas con la teoría clásica y al 42% de las calculadas con la teoría serie/paralelo. Las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{xz}$  corresponden a un 8% y a un 6% de las tensiones  $\sigma_{xx}$  determinadas con la teoría clásica y la serie/paralelo respectivamente. Con las dos teorías de mezclas se muestra que en el extremo donde finaliza el refuerzo, el comportamiento del hormigón esta gobernado principalmente por las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ , y en una menor proporción por las tensiones  $\tau_{xy}$ .

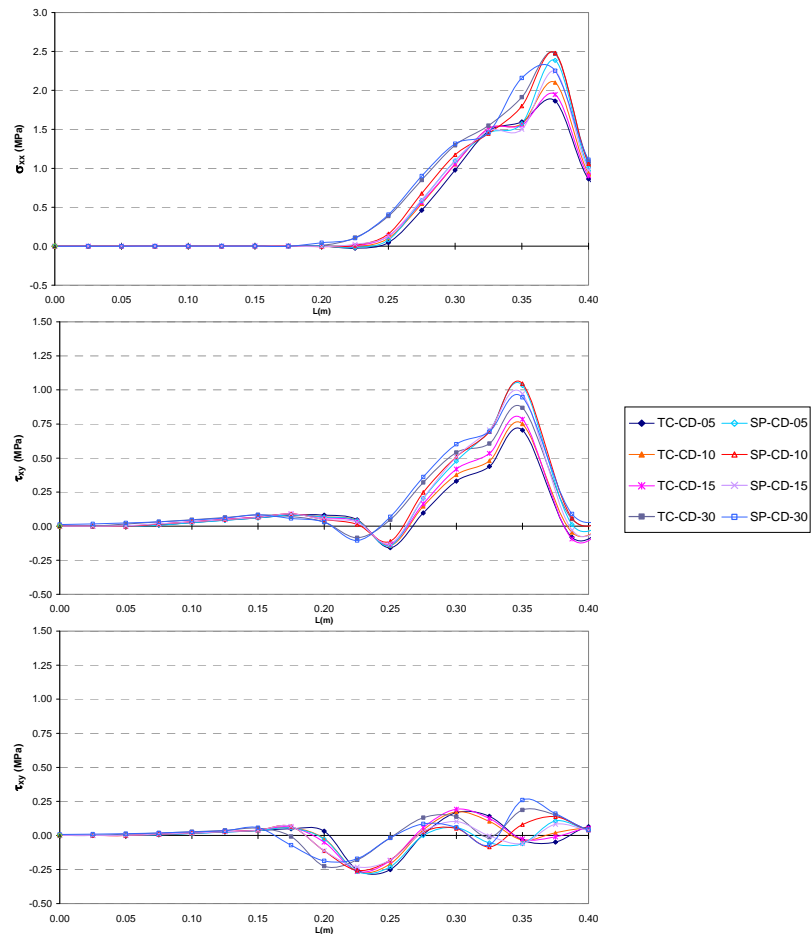


FIGURA 3- 61 TENSIONES EN EL HORMIGÓN CON DIFERENTES ESPESORES DE ADHESIVO

En la tabla 3-8 se muestran las diferencias porcentuales entre las tensiones máximas por cada espesor entre las dos teorías, se observa que aunque las diferencias en las tensiones axiales son apreciables, las mayores diferencias se aprecian en las tensiones tangenciales. Las tensiones  $\tau_{xy}$  obtenidas con la teoría serie paralelo son mayores que las dadas con la teoría clásica, mientras que las tensiones  $\tau_{xz}$  son menores excepto para 0.003m, pero SP-CD-30 muestra estar en proceso de descarga. Por consiguiente en el hormigón se tiene que aunque la magnitud de las tensiones es diferente, la forma de distribución la distribución es parecida entre las dos teorías.

Relación entre modelos	Tensiones axiales $\sigma_{xx}$ (%)	Tensiones tangenciales $\tau_{xy}$ (%)	Tensiones tangenciales $\tau_{xz}$ (%)
SP-CD-05.vs. TC-CD-05	27.9	46.5	-36.2
SP-CD-10.vs. TC-CD-10	18.2	39.6	-20.2
SP-CD-15.vs. TC-CD-15	15.3	23.7	-46.8
SP-CD-30.vs. TC-CD-30	-8.8	9.0	38.7

TABLA 3-8 DIFERENCIAS ENTRE LAS TENSIONES MÁXIMAS EN EL HORMIGÓN

En lo que respecta al espesor del adhesivo, con las dos teorías de mezclas en el hormigón se tiene que las tensiones axiales de 0.0005m a 0.001m se incrementan, de 0.001m a 0.0015m se reducen y de 0.0015m a 0.003m aumentan, indicando que hay un espesor de epoxi con el que se producen las máximas tensiones axiales en el hormigón. De otra parte, con la teoría clásica se tiene que al incrementar el espesor aumentan las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$ , en cambio con la teoría serie/paralelo las tensiones tangenciales SP-CD-05 y SP-CD-10 son similares y para espesores mayores a 0.001m se tiene que conforme aumenta el espesor la tensión decrece  $\tau_{xy}$ . Con las tensiones  $\tau_{xz}$  no se evidencia un parámetro de comportamiento específico por sus fluctuaciones.

En la figura 3-62 se indica la distribución de tensiones en el epoxi para la carga última, donde se muestran diferencias del comportamiento del adhesivo de acuerdo con su espesor y con las teorías de mezclas.

Se aprecia que en el epoxi las tensiones axiales entre las teorías de mezclas son parecidas, mientras que la distribución de las tensiones tangenciales presenta diferencias notorias. Esto se debe a que el epoxi al ser el medio que transmite los esfuerzos del laminado al hormigón, está directamente influenciado por las condiciones de compatibilidad dadas en la interfaz epoxi-FRP, las cuales son establecidas por la teoría de mezclas con la que se analice el comportamiento del laminado.

En todos los modelos se observa una distribución de tensiones  $\sigma_{xx}$  es uniforme hasta 0.20m, luego se reduce de acuerdo con el espesor del adhesivo y la teoría de mezclas utilizada. Las máximas tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  se presentan entre 0.25m y 0.30m, y corresponden al 5.5% de las tensiones  $\sigma_{xx}$  obtenidas con la teoría clásica (TC) y entre un 15% y un 43% de las tensiones  $\sigma_{xx}$  calculadas con la

teoría serie/paralelo (SP). Las tensiones tangenciales máximas  $\tau_{xz}$  corresponden a un 27% de las tensiones axiales determinadas con la teoría clásica, y entre un 19% y un 38% de las tensiones axiales calculadas con la serie/paralelo. En el extremo donde termina el refuerzo, con la teoría clásica el comportamiento del epoxy esta gobernado por las tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\tau_{xz}$ , mientras que con la teoría serie paralelo esta regido por el efecto conjunto entre las tensiones axiales y tangenciales, en los donde predominan las tensiones axiales  $\sigma_{xx}$ .

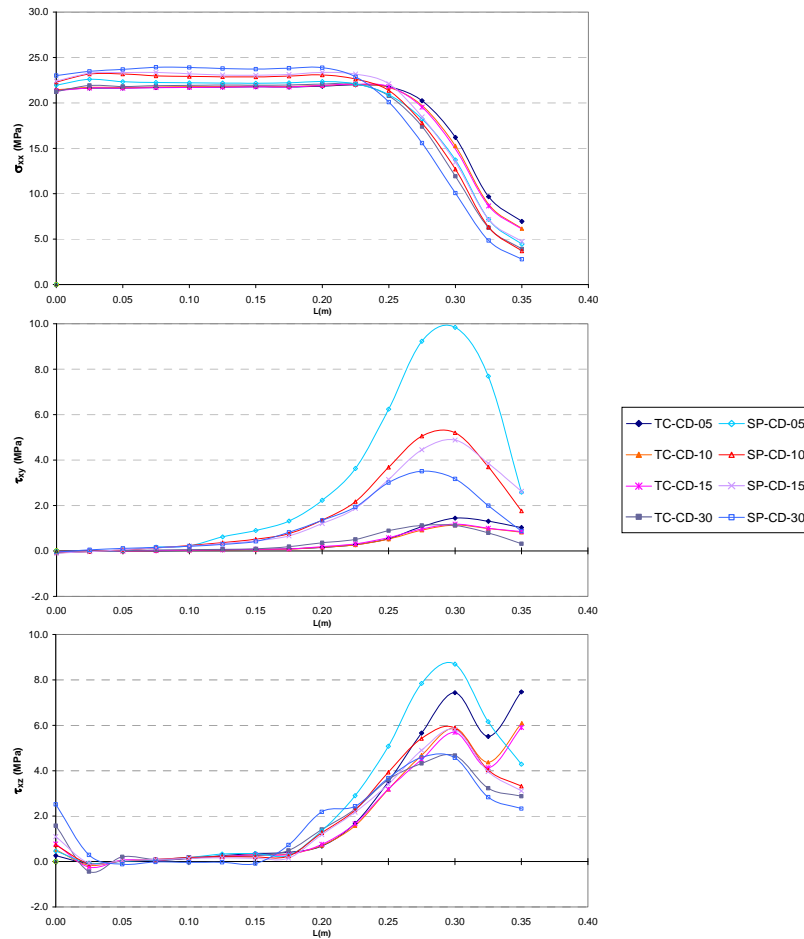


FIGURA 3-62 TENSIONES EN EL ADHESIVO CON DIFERENTES ESPESORES

En la tabla 3-9 se muestran las diferencias porcentuales entre las tensiones máximas obtenidas por cada espesor entre las dos teorías, las menores diferencias que se presentan en las tensiones axiales y las tensiones tangenciales  $\tau_{xz}$  son pequeñas, por el contrario con las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  las diferencias son considerables. Las tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\tau_{xy}$  obtenidas con la teoría serie paralelo son mayores que las dadas con la teoría clásica, mientras que las tensiones  $\tau_{xz}$  son menores excepto para 0.0005m.

Relación entre modelos	Tensiones axiales $\sigma_{xx}$ (%)	Tensiones tangenciales $\tau_{xy}$ (%)	Tensiones tangenciales $\tau_{xz}$ (%)
SP-CD-05.vs. TC-CD-05	2.7	581.6	16.3%
SP-CD-10.vs. TC-CD-10	5.3	357.4	-3.4
SP-CD-15.vs. TC-CD-15	5.9	314.8	-1.4
SP-CD-30.vs. TC-CD-30	8.3	213.7	-1.8

TABLA 3-9 DIFERENCIAS ENTRE LAS TENSIONES MÁXIMAS DEL ADHESIVO

En lo que respecta al espesor del adhesivo, las tensiones axiales con la teoría serie/paralelo muestran al aumentar el espesor se incrementa las tensiones, con la teoría clásica se obtiene esta misma tendencia con espesores entre 0.001m y 0.003m pero las tensiones máximas  $\sigma_{xx}$  TC-CD-05 son similares a las dadas en TC-CD-10. Las tensiones tangenciales  $\tau_{xy}$  y  $\tau_{xz}$  con las dos teorías de mezcla muestran que al aumentar el espesor disminuyen las tensiones.

En los modelos analizados con las dos teorías de mezclas, las diferencias entre las tensiones tangenciales son mayores a las dadas con las tensiones axiales, debido a que con la teoría de mezclas clásica se parte de la hipótesis que hay un estado de isodeformación entre los materiales del compuesto en todas las direcciones, mientras que con la teoría serie/paralelo, el estado de isodeformación sólo se presenta en la dirección paralela a la orientación de las fibras, es así como la isodeformación en el laminado de una forma intrínseca establece las condiciones de compatibilidad entre los materiales de la interfaz.

Como se observa en la figura 3-60, en los ensayos de adherencia analizados las diferencias de distribución de tensiones entre las teorías de mezclas no afectan la respuesta global; esto se debe a que por la orientación de las fibras del FRP, juntas teorías imponen el estado de isodeformación en la dirección de las acciones axiales, que son las que gobiernan mecanismo de fallo de la interfaz.

Posiblemente con otras orientaciones en las fibras habrá diferencias entre los resultados obtenidos con las dos teorías mezclas, sin embargo, por la tendencia de las fibras a reorientarse en la dirección de las mayores tensiones [91], el uso de la teoría de mezclas serie/paralelo presenta mayores ventajas para determinar el comportamiento del compuesto y su influencia en el comportamiento interfacial, ya que además de considerar la condición de isodeformación en la dirección en que están orientadas las fibras, en las direcciones perpendiculares a ellas contempla la condición iso-tensión.

En este análisis se muestra que el incremento de espesor en la capa del epoxi en las probetas de doble cortante incide en la resistencia de la interfaz pero no influye en la rigidez y la ductilidad. Al aumentar el espesor del adhesivo se incrementa la resistencia de la zona interfacial, no obstante con un espesor de epoxi alto, hay una mayor probabilidad de que haya imperfecciones en la capa adhesiva, por su proceso de colocación y de fraguado, imperfecciones que hacen la interfaz

hormigón-epoxi-FRP más vulnerable al fallo.

### 3.7 Conclusiones del capítulo 3

Debido a que la pérdida de adherencia entre laminado y el hormigón ocurre por sobrepasar la resistencia del hormigón, del epoxi, o de las interfaces hormigón-epoxi o epoxi-FRP, y que en ningún caso la resistencia del FRP es superada, es evidente que la eficiencia del refuerzo con FRP no está siendo totalmente aprovechada como refuerzo en elementos de hormigón. Por la complejidad del fenómeno hay bastantes investigaciones, pero la mayoría están enfocadas a resultados experimentales y a formulaciones de modelos analíticos para el diseño, que si bien han mostrado aportes importantes, no contemplan dentro de su alcance el análisis detallado del comportamiento de los materiales en la zona interfacial. Consecuentemente con lo anterior, es un tema que requiere mayor investigación con herramientas adicionales a la experimentación, por ende es necesario utilizar la simulación numérica como un medio para complementar los análisis de la pérdida de adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-refuerzo con FRP.

Los análisis los elementos finitos se han utilizado para estudiar la transferencia de tensiones y los modos de fallo de la interfaz hormigón-adhesivo-FRP, aunque la mayoría se han limitado a ser simulaciones bidimensionales contrastadas con resultados experimentales realizados a diferentes escalas. Reconociendo que la modelización numérica en los materiales compuestos es un campo que está en desarrollo, es importante que las estrategias de simulación tengan en cuenta que las simulaciones se realicen en tres dimensiones, considerando el comportamiento no lineal de los materiales que componen la interfaz con su respectiva interacción, para analizar de una forma integral, el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, y de esta forma, tener una mejor aproximación de la respuesta de la zona interfacial y de los mecanismos de fallo que generan la pérdida de adherencia.

En este capítulo se propone una estrategia en la que a través de la simulación en tres dimensiones se estudia el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP y se comparan los resultados con los obtenidos en diferentes ensayos de adherencia. Esta estrategia tiene tres aspectos fundamentales:

- Utiliza las teorías de mezclas para considerar en el análisis de la interfaz, el comportamiento no lineal de los componentes de los materiales compuestos, tanto del laminado como del hormigón armado.
- A través de los modelos constitutivos permite considerar el comportamiento no lineal de todos los materiales que componen la interfaz, de tal forma que se puede seleccionar en cada material el modelo que mejor represente su comportamiento.
- El epoxi se considera como una tercera entidad material de la interfaz, independiente de los dos componentes que une, donde su comportamiento está definido por su propio modelo constitutivo, con el propósito de evitar el uso de formulaciones teóricas que dependen de un conjunto de

parámetros mecánicos y geométricos de los materiales para definir el comportamiento de la interfaz

Con la estrategia propuesta se tiene un instrumento que simula de una forma más precisa el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP en los ensayos de adherencia, lo cual permite comprender mejor la interacción entre el hormigón, el epoxi y el FRP, y su incidencia en el mecanismo de fallo en la interfaz. Asimismo se muestra la importancia de utilizar modelos tridimensionales en los ensayos de adherencia y de considerar el comportamiento no lineal de los materiales que componen la interfaz, ya que permite analizar el mecanismo de pérdida de adherencia de la interfaz hormigón-epoxi-FRP de una forma integral. En las simulaciones contrastadas con los ensayos se comprobó que pese a que el epoxi y el FRP tienen mayor resistencia que el hormigón, su comportamiento no es lineal, por estar interactuando con el hormigón fisurado y por ser susceptibles al daño y/o a la plasticidad.

Los ensayos de adherencia por corte doble y por flexión permiten evaluar el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP, incluyendo los mecanismos de deslizamiento y despegue del refuerzo y de desprendimiento del hormigón. Al complementar los análisis experimentales con la simulación numérica, aplicando la estrategia propuesta, se estudia de una forma detallada el comportamiento de las interfaces hormigón-epoxi y epoxi -FRP. El uso complementario de esta estrategia permite analizar la zona efectiva transmisión de esfuerzos a lo largo de las zonas reforzadas, así como, examinar los efectos locales que se presentan en los extremos donde se adhiere el refuerzo y que son producidos por la acción conjunta del arrancamiento y tracción en el laminado.

De acuerdo con los análisis realizados, se aprecia que si bien el FRP como refuerzo aumenta la capacidad de carga de los elementos estructurales, puede reducirse su ductilidad, si el mecanismo de fallo está gobernado por la pérdida de adherencia entre el laminado y el hormigón, o por la rotura del refuerzo. Los ensayos de adherencia permiten analizar diferentes mecanismos de fallo que se pueden presentar con la pérdida de adherencia, la selección de efectuar un determinado ensayo de adherencia depende de lo que se pretenda estudiar.

Las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo son herramientas versátiles para analizar el comportamiento de los materiales compuestos y de sus componentes dentro de una estructura. Por una parte, permiten que cada componente del compuesto se analice mediante la ecuación constitutiva que sea más conveniente para predecir su comportamiento (elasticidad, plasticidad, daño etc.); y por otra, al calcular el comportamiento del material compuesto en cada punto de Gauss, lo acoplan al resto del mallado, definiendo a su vez, el comportamiento global de la estructura. Por lo tanto, estas herramientas numéricas conllevan un mejor análisis de estructuras reforzadas con materiales compuestos sin ocasionar excesivos costos computacionales, ya que permiten considerar diferentes tipos de no linealidades y utiliza un único mallado para el análisis de la estructura, de los materiales compuestos y de sus componentes. No obstante, estas teorías aún no tienen en

cuenta las inestabilidades microestructurales que pueden existir en los materiales compuestos como el deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz, y que afectan el comportamiento de la interfaz, por lo tanto se requiere mayor investigación, para adaptar las teorías de mezclas e introducir nuevos algoritmos que permitan considerar estos fenómenos locales en el análisis de los materiales compuestos reforzados con fibras.

Con las simulaciones en tres dimensiones se ve la importancia de hacer un análisis global y local del comportamiento de la interfaz. Comparando los resultados obtenidos con los mostrados en las simulaciones en dos dimensiones se tiene que: (i) La distribución de tensiones normales y tangenciales es diferente, en dos dimensiones solo se ha considerado que las tensiones  $\sigma_{xx}$  y  $\tau_{xz}$  son las que inciden en el deslizamiento del FRP y en el desprendimiento del hormigón, pero con las simulaciones en tres dimensiones se ha mostrado que a lo largo del epoxy y del hormigón en la zona reforzada, las tensiones  $\tau_{xy}$  y  $\sigma_{zz}$ , también influyen en los mecanismos de fallo de la interfaz. (ii) De igual forma como ha sido observado en las superficies de falla de los ensayos experimentales, en las simulaciones en tres dimensiones se muestra que en la sección de la zona reforzada transversalmente la distribución de tensiones no es uniforme. Esto indica que en las simulaciones en dos dimensiones, aparte de considerar el efecto de la diferencia entre anchos del hormigón y del FRP, también se debe tener en cuenta que las tensiones en el centro de la sección transversal de la zona reforzada son mayores a la de los extremos.

El desarrollo de los lineamientos en el diseño del refuerzo de vigas y uniones de hormigón armado reforzadas con FRP requiere entender el proceso de pérdida de adherencia de la interfaz para evitar mecanismos de fallo súbitos. Dado que el la distribución de tensiones y la transmisión de esfuerzos en la interfaz es de difícil medición, es necesario extender la aplicación de la estrategia propuesta a la simulación de ensayos de vigas y uniones en los que se estudie el comportamiento de la interfaz, para establecer la relación entre los análisis de los ensayos de adherencia y el comportamiento de la interfaz en los elementos reforzados. Es importante tener en cuenta que para utilizar adecuadamente la información obtenida en los ensayos y las simulaciones, se debe entender que por la misma complejidad del comportamiento de la interfaz, es necesario identificar las similitudes y diferencias entre los tipos de ensayos para establecer los casos estructurales en que sus resultados son aplicables.

### 3.8 Bibliografía del capítulo 3

- [1] M. Molina, J. Cruz, S. Oller, A. Barbat, L. Gil. Estudio de la interfaz Hormigón-Epoxi-FRP de un ensayo de doble cortante por medio de la Teoría de Mezclas Serie/Paralelo. Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras. 13-14 (1) (2009) 103-121.
- [2] V.M. Karbhari. Materials considerations in FRP rehabilitation of concrete structures. Journal of Materials in Civil Engineering ASCE 13 (2) (2001) 90-97.
- [3] L.C. Hollaway. A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil infrastructure with reference to their important in-service properties. Construction and Building Materials 24 (12) (2010) 2419-2445.

- [4] A. Nanni. North American design guidelines for concrete reinforcement and strengthening using FRP: Principles, applications and unresolved issues. *Construction and Building Materials* 17(6-7)(2003) 439-446.
- [5] F. Rastellini. Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España, (2006).
- [6] L.C. Hollaway. The evolution of and the way forward for advanced polymer composites in the civil infrastructure. *Construction and Building Materials* 17 (6-7) (2003) 365-378.
- [7] L. Bizindavyi, K. W. Neale. Transfer lengths and bond strengths for composites bonded to concrete. *Journal of Composites for Construction ASCE* 3 (4) (1999) 153-160.
- [8] L.C. Bank, *Composites for construction : structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons, N.J., USA, 2006.
- [9] A. Ghobarah, A. Said. Shear strengthening of beam-column joints. *Engineering Structures* 24 (7) (2002) 881-888.
- [10] C.P. Antonopoulos, T.C. Triantafillou. Experimental investigation of FRP-strengthened RC beam-column joints. *Journal of Composites for Construction ASCE* 7 (1) (2003) 39-49.
- [11] S.H. Alsayed, Y.A. Al-Salloum, T.H. Almusallam, N.A. Siddiqui. Seismic Response of FRP-Upgraded Exterior RC Beam-Column Joints. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (2) (2010) 195-218 .
- [12] *Strengthening and rehabilitation of civil infrastructures using fibre-reinforced polymer (FRP) composites*. Edited by L. C. Hollaway and J. G. Teng. Woodhead Publishing Limited and CRC Press LLC. Cambridge, UK, 2008
- [13] S.S. Pendhari, T. Kant, M.Y. Desai. Application of polymer composites in civil construction: A general review. *Composite Structures* 84 (2) (2007) 114-124.
- [14] V.M. Karbhari. Materials considerations in FRP rehabilitation of concrete structures. *Journal of Materials in Civil Engineering ASCE* 13 (2) (2001) 90-97.
- [15] D.J. Oehlers, S.M. Park, M.S. Mohamed-Ali. A structural engineering approach to adhesive bonding longitudinal plates to RC beams and slabs. *Composites Part A: Applied science and manufacturing* 34 (9) (2003) 887-897.
- [16] J.G. Teng, S.T. Smith, J. Yao, J.F. Chen. Intermediate crack-Induced debonding in RC beams and slabs. *Construction and Building Materials* 17 (6-7) (2003) 447-462.
- [17] J.G. Teng, J. Yao. Plate end debonding in FRP-plated RC beams-I: Experiments. *Engineering Structures* 29 (10) (2007) 2457-2471.
- [18] M.R. Esfahani, M.R. Kianoush, A.R. Tajari. Flexural behaviour of reinforced concrete beams strengthened by CFRP sheets. *Engineering Structures* 29 (10) (2007) 2428-2444.
- [19] S.T. Smith, J.G. Teng. FRP-strengthened RC beams. I: Review of debonding strength models. *Engineering Structures* 24 (4) (2005) 385- 395.
- [20] M. Molina, S. Oller, A.H. Barbat, X. Martínez. Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 26 (2) (2010) 135-155.
- [21] M. Molina. Estudio numérico de la adherencia de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado. Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Directores: S. Oller y A. Barbat (2009).
- [22] J. Yao, J.G. Teng, J. F. Chen. Experimental study on FRP-to-concrete bonded joints. *Composites Part B: Engineering* 36 (2) (2005) 99-113.
- [23] M.J. Chajes, J. Finch, T.F. Januszka, J. Thomson. Bond and force transfer of composite material plates bonded to concrete. *ACI Structural Journal* 93 (2) (1996) 208-217.
- [24] B. Täljsten. Defining anchor lengths of steel and CFRP plates bonded to concrete. *International Journal of Adhesion & Adhesives* 17 (4) (1997) 319-327.
- [25] L. Bizindavyi, K. W. Neale. Transfer lengths and bond strengths for composites bonded to concrete. *Journal of Composites for Construction ASCE* 3 (4) (1999) 153-160.



- [26] K. V. Subramaniam, C. Carloni, L. Nobile. Width effect in the interface fracture during shear debonding of FRP sheets from concrete. *Engineering Fracture Mechanics* 74 (4) (2007) 578–594.
- [27] C. Czaderski, K. Soudki, M. Motavalli. Front and side view image correlation measurements on FRP to concrete pull-off bond tests. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (4) (2010) 451–463.
- [28] K. Nakaba, T. Kanakubo, T. Furuta, H. Yoshizawa. Bond behaviour between fiber-reinforced polymer laminates and concrete. *ACI Structural Journal* 98 (3) (2001) 359–367.
- [29] T. Ueda, R. Yamaguchi, K. Shoji, Y. Sato. Study on behaviour in tension of reinforced concrete members strengthened by carbon fiber sheet. *Journal of Composites for Construction ASCE* 6 (3) (2002) 168–174.
- [30] C. Pellegrino, G. Boschetto, D. Tinazzi, C. Modena. Progress on understanding bond behaviour in RC elements Strengthened with FRP. In: *Proceedings of the International Symposium on Bond Behaviour of FRP in Structures (BBFS 2005)*. International Institute for FRP in Construction, Chen and Teng (Eds.), Hong Kong, (2005) 63–68.
- [31] W. Xue, L. Zeng, Y. Tan. Experimental studies on bond behaviour of high strength CFRP plates. *Composites Part B: Engineering* 39 (4) (2008) 592–603.
- [32] C. Mazzotti, M. Savoia and B. Ferracuti. A new single-shear set-up for stable debonding of FRP–concrete joints. *Construction and Building Materials* 23 (4) (2009) 1529–1537.
- [33] C. Mazzotti, M. Savoia and B. Ferracuti. An experimental study on delamination of FRP plates bonded to concrete. *Construction and Building Materials*. 22 (7) (2008) 1409–1421.
- [34] X.Z. Lu, J. G. Teng, L.P. Ye, J.J. Jiang. Bond-slip models for FRP sheets/plates bonded to concrete. *Engineering Structures* 27 (6) (2005) 920–937.
- [35] B. Yalim, A.S. Kalayci, A. Mirmiran. Performance of FRP-strengthened RC beams with different concrete surface profiles. *Journal of Composites for Construction ASCE* 12 (6) (2008) 626–634.
- [36] C.W. Niemitz, R. James, S.F. Breña. Experimental behavior of carbon fiber-reinforced polymer CFRP sheets attached to concrete surfaces using CFRP anchors. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (2) (2010) 185–194.
- [37] R. Kalfat, R. Al-Mahaidi. Investigation into bond behaviour of a new CFRP anchorage system for concrete utilising a mechanically strengthened substrate. *Composite Structures* 92 (11) (2010) 2738–2746.
- [38] P. Saxena, H. Toutanji, J. Gilbert. Premature bond failure in FRP strengthened RC beams. In: *FRPRCS-8 - 8th International Symposium on Fiber Reinforced Polymer Reinforcement for Concrete Structures*. University of Patras, Greece (2007) 66–67.
- [39] J. G. Teng, H. Yuan, J.F. Chen. FRP-to-concrete interfaces between two adjacent cracks: Theoretical model for debonding failure. *International Journal of Solids and Structures* 43 (18–19) (2006) 5750–5778.
- [40] L. De Lorenzis, B. Miller, A. Nanni. Bond of FRP laminates to concrete. *ACI Structural Journal* 98 (3) (2001) 256–264.
- [41] A. Katz. Stress transfer between FRP laminates and concrete through deteriorated concrete surfaces. *Journal of Composites for Construction* 11 (4) (2007) ASCE 410–418.
- [42] C. K. Y. Leung, M. Klenke, W. K. Tung, H. C. Y. Luk. Determination of nonlinear softening behavior at FRP composite/concrete interface. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 132 (5) (2006) 498–508.
- [43] J. Pan, C. K. Y. Leung. Debonding along the FRP-concrete interface under combined pulling/peeling effects. *Engineering Fracture Mechanics* 74 (1–2) (2007) 132–150.
- [44] R. Perera, A. Recuero, A.D. Diego, C. López. Adherence analysis of fiber reinforced polymer strengthened RC beams. *Computers and Structures* 82 (23–26) (2004) 1865–1873.
- [45] J.R. Casas, J. Pascual. Debonding of FRP in bending: Simplified model and experimental validation. *Construction and Building Materials* 21 (10) (2007) 1940–1949.
- [46] C. Pellegrino; D. Tinazzi, C. Modena. Experimental study on bond behavior between

- concrete and FRP reinforcement. *Journal of Composites for Construction ASCE* 12 (2) (2008) 180-189.
- [47] T. Horiguchi, N. Saeki. Effect of test method and quality of concrete on bond strength of CFRP sheet. In: *FRPRCS-3- Third International Symposium on Non-metallic FRP Reinforcement for Concrete Structures*. Vol. 1. Japan Concrete Institute, Sapporo, Japan, 1997. pp. 265-270.
- [48] M.A. Aiello, M. Leone. Interface analysis between FRP EBR system and concrete. *Composites Part B: Engineering* 39 (2008) 618-626.
- [49] J.F. Chen, W. Pan. Three dimensional stress distribution in FRP-to-concrete bond test specimens. *Construction and Building Materials* 20 (1-2) (2006) 46-58.
- [50] Z.J. Yang, J.F. Chen, D. Proverbs. Finite element modelling of concrete cover separation failure in FRP plated RC beams. *Construction and Building Materials* 17 (1) (2003) 3-13.
- [51] X.Z. Lu, J.J. Jiang, J.G. Teng, L.P. Ye. Finite element simulation of debonding in FRP-to-concrete bonded joints. *Construction and Building Materials* 20 (6) (2006) 412-424.
- [52] X.Z. Lu, L.P. Ye, J.G. Teng, J.J. Jiang. Meso-scale finite element model for FRP sheets/plates bonded to concrete. *Engineering Structures* 27 (4) (2005) 564-575.
- [53] D. Ngo, A.C. Scordelis. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams. *Journal of ACI* 64 (3) (1967) 152-163.
- [54] H. Niu, Z. Wu. Numerical analysis of debonding mechanisms in FRP -strengthened RC beams. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* 20 (5) (2005) 354-368.
- [55] H. Niu, V.M. Karbhari, Z. Wu. Diagonal macro-crack induced debonding mechanisms in FRP rehabilitated concrete. *Composites Part B: Engineering* 35 (7-8) (2006) 627-641.
- [56] Y.R. Rashid. Ultimate strength analysis of prestressed concrete pressure vessels. *Nuclear Engineering and Design* 7 (4) (1968) 334-344.
- [57] S. Oller. *Fractura Mecánica. Un Enfoque Global*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Ediciones UPC. Barcelona España. 2001.
- [58] J.G. Rots, J. Blaauwendraad. Crack models for concrete: discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? *HERON* 34(1) (1989) 1-59.
- [59] U. A. Ebead, K.W. Neale. Mechanics of fibre-reinforced polymer-concrete interfaces. *Canadian Journal of Civil Engineering* 34 (3) (2007) 367-377.
- [60] H.B. Pham, R. Al-Mahaidi. Modelling of CFRP-concrete shear-lap tests. *Construction and Building Materials* 21 (4) (2007) 727-735.
- [61] Z. Wu, J. Yin. Fracturing behaviors of FRP-strengthened concrete structures. *Engineering Fracture Mechanics* 70 (10) (2003) 1339-1355.
- [62] H.A. Baky, U.A. Ebead, K.W. Neale. Flexural and interfacial behavior of FRP-strengthened reinforced concrete beams. *Journal of Composites for Construction ASCE* 11 (6) (2007) 629-639.
- [63] M.R. Aram, C. Czaderski, M. Motavalli. Debonding failure modes of flexural FRP-strengthened RC beams. *Composites Part B: Engineering* 39 (5) (2008) 826-841.
- [64] G. Camata, E. Spacone, R. Al-Mahaidi, V. Saouma. Analysis of test specimens for cohesive near-bond failure of fiber-reinforced polymerplated concrete. *Journal of Composites for Construction ASCE* 8 (6) (2004) 528-538.
- [65] N. Kishi, G. Zhang, H. Mikami. Numerical cracking and debonding analysis of rc beams reinforced with FRP sheet. *Journal of Composites for Construction ASCE* 9 (6) (2005) 507-514.
- [66] H.B. Pham, R. Al-Mahaidi, V. Saouma. Modelling of CFRP-concrete bond using smeared and discrete cracks. *Composite Structures* 75(1-4) (2006) 145-150.
- [67] C.A. Coronado, M.M. Lopez. Damage approach for the prediction of debonding failure on concrete elements strengthened with FRP. *Journal of Composites for Construction ASCE* 11 (4) (2007) 391-400.
- [68] C.A. Coronado, M.M. Lopez. Numerical modeling of concrete-FRP debonding using a crack band approach. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (1) (2010) 11-21.

- [69] M. Nehdi, A.E. Damatty, R. Rahimi. Investigation on lap-joint behaviour of GFRP plates bonded to silica fume and rice husk ash concrete. *International Journal of Adhesion & Adhesives* 23(4)(2003) 323–333.
- [70] J.F. Chen, J.G. Teng. Anchorage strength models for FRP and steel plates bonded to concrete. *Journal of Structural Engineering*. ASCE 127 (7) (2001) 784–791.
- [71] J. Mazars, G. Pijaudier-Cabot. Continuum damage theory-Application to concrete. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 115 (2) (1989) 345-365.
- [72] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Oñate. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures* 25 (3) (1989) 299–326.
- [73] J. Lee, G.L. Fenves. A plastic-damage concrete model for earthquake analysis of dams. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* 27(9) (1998) 937–956.
- [74] Hibbitt, Karlsson, Sorensen. ABAQUS/Explicit: User’s manual, Hibbitt, Karlsson, and Sorensen Inc., Pawtucket, R.I. 2004.
- [75] A.A. Mufti, B. Bakht, N. Banthia, B. Benmokrane, G. Desgagné, R. Eden, M.-A. Erko, V. Karbhari, J. Kroman, D. Lai, A. Machida, K. Neale, G. Tadros, B. Täljsten. New Canadian Highway Bridge Design Code design provisions for fibre-reinforced structures. *Canadian Journal of Civil Engineering* 34 (3) (2007) 267–283.
- [76] L. da Silva, T. Rodrigues, M. Rigueiredo, M. de Moura, D. Chousal. Effect of adhesive type and thickness on the lap shear strength. *Journal of Adhesion* 82 (11) (2006) 1091–1115.
- [77] A. Tounsi, S. Benyoucef. Interfacial stresses in externally FRP-plated concrete beams. *International Journal of Adhesion & Adhesives* 27 (3) (2007) 207–215.
- [78] L.C. Bank, *Composites for construction: structural design with FRP materials*. John Wiley & Sons, N.J., USA, 2006.
- [79] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In. *Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Vol 2. 945–958. Eds. N. Bicanic and H. Mang. Zell Am See, Austria. 1990.
- [80] S. Oller, L. Neamtu, E. Oñate. Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo. En *Congreso Nacional de Materiales Compuestos*, (1995) 433 – 438.
- [81] X. Martínez, S. Oller, F. Rastellini, A. Barbat. A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers and Structures* 86 (15–16) (2008) 1604–1618.
- [82] M. Molina, J. Cruz, S. Oller, A. Barbat, L. Gil., Estudio numérico-experimental de la interfaz hormigón-epoxi-FRP para una estructura reforzada sometida a doble cortadura, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. In press. Vol 28 N°1 (2012).
- [83] E. Oñate, L. Neamtu y S. Oller. Generalization of a classical mixing theory for analysis of composite materials. In . *International Conference on Advances in Computational Engineering Science (ICES’97)*. Eds N.S. Atluri y G. Yagawa. Georgia, USA: Tech. Science Press (1997).
- [84] S. Oller. *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería-CIMNE, Barcelona, España, 2003.
- [85] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, New York, USA, 1990.
- [86] L.M. Kachanov. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk. USSR Otd. Tekh Nauk*, 8 (1958) 26-31.
- [87] S. Oller. *Dinámica No Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Ediciones UPC. Barcelona España. 2001.
- [88] J. Lemaitre, J.L. Chaboche. Aspect phenomenologique de la rupture par endommagement. *Journal de Mécanique Appliquée*, 2 (3) (1978) 317–365.
- [89] X. Martínez, F. Rastellini, S. Oller, F. Flores and E. Oñate. “Computationally optimized

formulation for the simulation of composite materials and delamination failures". Composites Part B: Engineering, Vol. 42 N° 2 p. 134-144 (2011).

[90] CIMNE, "PLCD Manual: Código termomecánico no lineal de elementos finitos dirigido a estudiantes de Ph.D.", Universidad Politecnica de Cataluña, Barcelona, España, (1991-2011).

[91] M.W. Hyer. Stress analysis of fiber-reinforced composite materials. Contributions on fibers, matrices, interfaces, and manufacturing by S.R. White. DEStech Publications, Inc. PA, USA, 2009.

# Capítulo 4

---

## Tratamiento numérico del deslizamiento fibra-matriz en compuestos reforzados

---

El comportamiento de los materiales compuestos está influenciado por la no linealidad de la matriz y de la fibra, y por la presencia de diferentes fenómenos como la fisuración de la matriz, el pandeo de la fibra, el deslizamiento de las fibras con respecto a la matriz y la delaminación entre pliegues [1].

Los compuestos conformados por matriz y fibras, poseen un comportamiento no lineal complejo. Además de la alta anisotropía que tienen por su propia configuración, debido a la no linealidad de la matriz y/o de las fibras, el comportamiento de los compuestos está sujeto a la pérdida de adherencia de la interfaz fibra-matriz, la cual conduce al deslizamiento relativo entre sus componentes. Este fenómeno denominado en inglés “debonding”, en el presente capítulo será indicado como DFM (deslizamiento fibra-matriz).

Si bien la resistencia del compuesto depende del comportamiento no lineal tanto de la fibra como de la matriz; al reducirse la interacción entre las fibras y la matriz por la pérdida de adherencia en la interfaz, se degradan las propiedades mecánicas del compuesto, principalmente su rigidez y su resistencia, además induce a que hayan deformaciones inelásticas o no recuperables en el compuesto bajo descarga y ciclos de histéresis [2].

Para determinar el comportamiento de las estructuras reforzadas con materiales compuestos reforzados con fibras (FRP), las diferentes técnicas que se usan en la simulación numérica, se seleccionan buscando tener precisión en la respuesta, tanto del comportamiento de los materiales que la componen, como de los mecanismos que producen su fallo. Por ello, es necesario que en la simulación numérica se consideren los mecanismos de fallo microestructurales y sus efectos en el comportamiento de los materiales compuestos. En la actualidad hay diferentes técnicas en las que se ha introducido el DFM dentro de las modelizaciones numéricas, entre las más destacables están: la implementación de elementos especiales, modelos basados en la micromecánica, modelos constitutivos basados en la mecánica de medios continuos y los modelos de homogenización.

El objetivo en este capítulo es introducir a la formulación de las teorías de mezclas de materiales compuestos, el fenómeno microestructural de movimiento relativo entre las fibras y la matriz cuando se excede un determinado estado de tensiones en la interfaz de los dos materiales. La formulación del deslizamiento relativo de las fibras que se propone por medio de la mecánica de medios continuos, se basa en el movimiento de cuerpo rígido que se da entre las fibras y la matriz. Este planteamiento se fundamenta en dos principios: (i) en la reducción de la rigidez del compuesto debido a la pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz, y (ii) en que el deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz es irre recuperable. Para ello en el modelo propuesto bajo los principios de la mecánica de los medios continuos, se plantea incluir el DFM en las teorías de mezclas, con el fin de considerar su efecto en el comportamiento de los materiales compuestos, donde además los modelos constitutivos definen el comportamiento de cada material componente y limitan su capacidad acorde con el DFM presentado.

#### 4.1 Mecanismos de fallo microestructurales que producen el DFM

En los materiales compuestos por fibras, el fallo en alguno de los materiales componentes incide en el fenómeno de despegue de las fibras y en el deslizamiento en la interfaz (DFM). Los mecanismos de fallo que se presentan en los materiales compuestos reforzados por fibras dependen del comportamiento de cada uno de los materiales que los componen, no obstante el fallo comienza en el material menos resistente. Los análisis experimentales muestran que el DFM en los compuestos ocurre al presentarse uno de los tres mecanismos que se indican en la figura 4-1 y que se describen a continuación:

- Si la matriz del compuesto es metálica o polimérica, las tensiones están soportadas principalmente por las fibras y tienden a fallar primero. Luego que hay rotura en las fibras débiles, los incrementos de carga son soportados por las fibras que permanecen intactas [3]. Con la rotura de las fibras, hasta que se produce su arrancamiento, hay pérdida de adherencia, y por lo tanto, deslizamiento entre las fibras y la matriz. Durante este proceso de carga, en las zonas donde se rompen las fibras, la concentración de tensiones alrededor de las fibras rotas y las cavidades en la matriz producidas por el despegue de los extremos rotos de las fibras, afectan el comportamiento de la matriz y de la interfaz fibra-matriz, como se muestra en la figura 4-1(a). Cuando la adherencia es débil, las fisuras se extienden longitudinalmente en la interfaz (paralelo al eje de la fibra) [4]. Si la adherencia es fuerte, el comportamiento depende de la ductilidad de la matriz: cuando la matriz es frágil o con baja ductilidad, las fisuras se propagan transversalmente en la matriz (perpendicular al eje de la fibra) [5]; en el caso en que la matriz es muy dúctil, en la zona adyacente a la fibra rota, la matriz se deforma elásticamente hasta que se plastifica, luego con el incremento de deformaciones eventualmente puede fisurarse [6].
- Si la matriz del compuesto es frágil, como sucede con los compuestos con matrices cerámicas, el fallo del compuesto se origina por la fisuración en la

matriz [7]. Una vez hay daño la matriz, con la consecuente apertura de las fisuras se inicia el proceso de deslizamiento fibra-matriz. Como se señala en la figura 4-1(b) con este mecanismo donde la matriz se fisura, las fibras quedan como medio de conexión entre los segmentos fisurados del compuesto [6]. Pero al perderse el medio de redistribución de esfuerzos entre las fibras, las tensiones que se generan en la zona de la matriz fisurada tienden a causar rotura en las fibras adyacentes o a extender las fisuras a lo largo de la interfaz [1].

- La interfaz fibra-matriz puede fallar por corte (resistencia) o por tracción (baja adherencia) [8]. Como se ve en la figura 4-1(c) el DFM se presenta por el agrietamiento en la interfaz. Este mecanismo afecta la transmisión de tensiones entre la fibra y la matriz, conduciendo a que las tensiones en las fibras sean bajas, pero no se produce descarga total debido a las fuerzas de fricción (dadas por la rugosidad entre los dos materiales [6]), eventualmente ocurre fisuración de la matriz o fractura en las fibras.

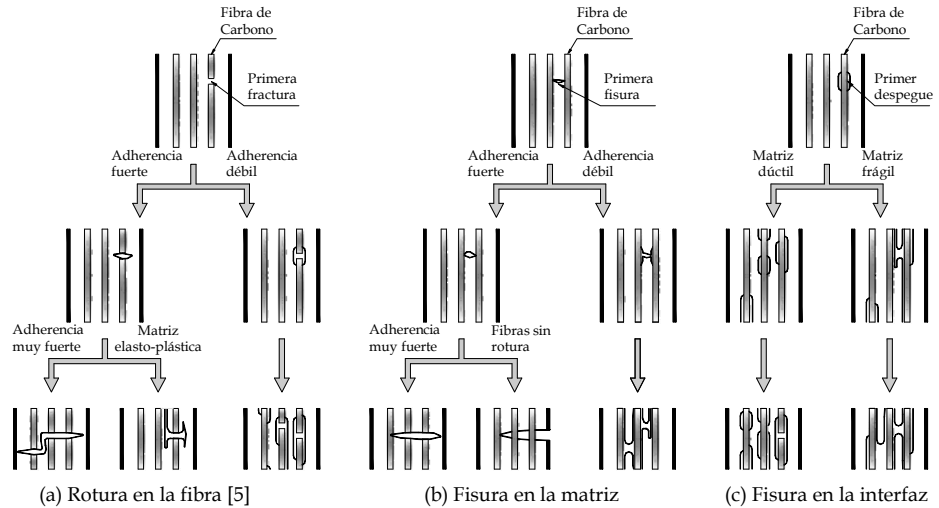


FIGURA 4-1 MECANISMOS DE FALLO EN LOS MATERIALES COMPUESTOS QUE PRODUCEN DFM

Los dos primeros mecanismos tienen que ver exclusivamente con las propiedades mecánicas de los materiales que componen el compuesto, mientras que el tercer mecanismo, se debe a efectos del proceso de fabricación y curado del compuesto. Independiente del mecanismo que induzca el DFM en el material compuesto, el deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz incide en el proceso de propagación e incremento de la fisuración y/o de la plasticidad en los materiales componentes, por ende, afecta la rigidez y la resistencia del compuesto.

#### 4.2 Transferencia de esfuerzos entre las fibras y la matriz ante el DFM

En los materiales compuestos reforzados con fibras largas, la carga a tracción en

dirección de las fibras es soportada principalmente por la rigidez de las fibras, mientras que la matriz es el medio que une las fibras y que transfiere los esfuerzos entre ellas [8]. Debido a que en un proceso de carga de un material compuesto, el estado de daño y/o plasticidad de la matriz, de las fibras o de la interfaz reduce la transmisión de esfuerzos y produce el deslizamiento fibra-matriz [9], los mecanismos de transferencia de tensiones en los materiales compuestos han sido estudiados desde diversos enfoques: experimental, analítico y numérico.

En lo que respecta a nivel experimental, los ensayos que han sido más usados para obtener información del comportamiento de la interfaz fibra-matriz y su adherencia corresponden a los ensayos simples de pull-out y push-out, en los que se prueba una fibra embebida a una matriz. No obstante, el comportamiento de la interfaz en las probetas que son fabricadas especialmente para estos ensayos, difiere del comportamiento de la interfaz fibra-matriz de los materiales compuestos reales, de una parte porque son fabricados con técnicas de manufactura, y de otra, porque existe la interacción con las fibras adyacentes [10].

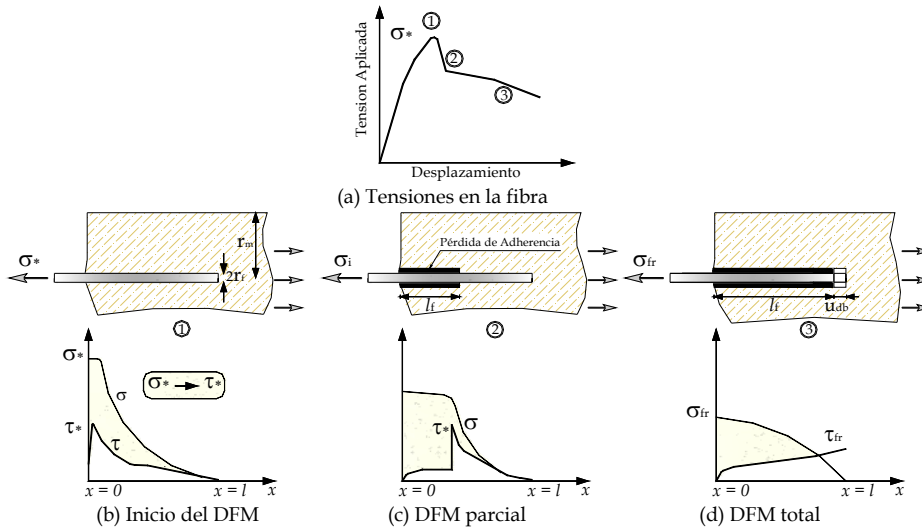


FIGURA 4-2 ESQUEMA DE LAS TENSIONES EN LA INTERFAZ EN DIFERENTES ETAPAS DEL DFM [10]

En la figura 4-2 se muestra un esquema de las tensiones en la interfaz fibra-matriz y la influencia del DFM para un ensayo pull-out simple. En la figura 4-2(b) se observa que el DFM comienza una vez la máxima tensión tangencial  $\tau^*$  alcanza la resistencia de la interfaz, instante en el que también se produce la máxima tensión normal en la fibra  $\sigma^*$ ; luego como se indica en la figura 4-2(c), comienza el proceso de pérdida de la adherencia a lo largo de la interfaz conforme el estado de tensiones supera la resistencia de la interfaz, causando un deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz. Finalmente, como se observa en la figura 4-2(d), el DFM es progresivo hasta que toda la interfaz falla y se produce el arrancamiento de la fibra. El fallo que se genera en el ensayo pull-out está relacionado con el mecanismo de fisura a lo largo de la interfaz con o sin daño en la matriz.



Por medio de estos ensayos simples de pull-out combinados con la técnica fotoelasticidad se ha estudiado visualmente el efecto de la distribución de tensiones durante el mecanismo de DFM. En las fotografías mostradas en la figura 4-3, se observan franjas isocromáticas que están relacionadas con las tensiones de corte del sistema, estas franjas aparecen cuando la deformación inducida produce un retraso en la longitud de onda de la luz que viaja a través de la probeta [11].

En la figura 4-3(a) se muestra la distribución de tensiones de corte donde hay pérdida de adherencia cerca al extremo en que se tensiona la fibra, esta distribución representa el comportamiento en la zona adyacente a la cara de una fisura en la matriz, donde la fibra es el medio de interconexión entre los segmentos fisurados. En la figura 4-3(b) se indica el estado de las tensiones tangenciales previo a la pérdida total de la adherencia a lo largo de la interfaz, en el cual se ve que gran parte de la fibra está separada de la matriz y que la distribución de tensiones está localizada en el extremo donde la fibra esta adherida a la matriz. En los dos casos se evidencia que debido al deslizamiento de la fibra, los mecanismos de transferencia de esfuerzos que se producen entre la fibra y la matriz generan estados de tensión complejos.

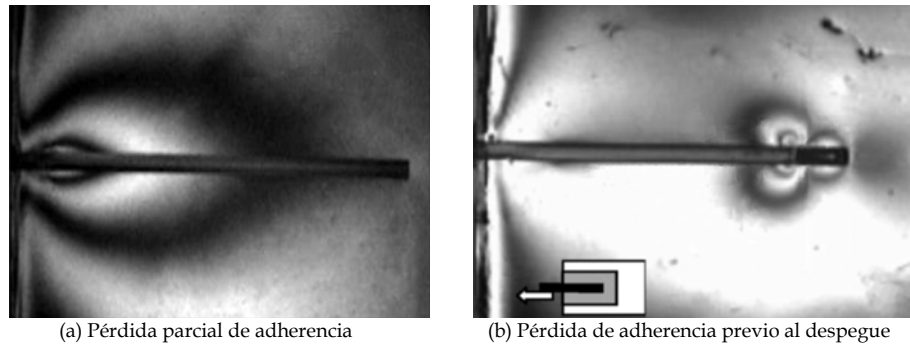


FIGURA 4-3 DISTRIBUCIÓN DE LAS TENSIONES EN UN ENSAYO SIMPLE PULL-OUT [11]

Para el análisis de la adherencia fibra-matriz también se ha utilizado un ensayo de fragmentación, desarrollado por Kelly y Tyson [12]. La probeta de los ensayos de fragmentación tiene forma de hueso de perro y esta compuesta por una fibra embebida en una matriz polimérica. Con este tipo de ensayo, la elongación de las probetas solicitadas a tracción resulta del mecanismo de rotura de la fibra, el cual es producido por la concentración de tensiones axiales.

En la figura 4-4 se muestran los patrones de fallo por fractura de la fibra encontrados por Feih et al. [13]. En sus ensayos de fragmentación a un compuesto con fibra de vidrio, se advierte que la matriz se fisura dependiendo del nivel de adherencia en la interfaz; si la adherencia es baja se fisura la interfaz (figura 4-4(a)), pero si la adherencia es fuerte, se fisura la matriz (figura 4-4(b)). En las dos fotografías se observa el desplazamiento de los dos segmentos de la fibra fracturada, además se evidencia el despegue entre la fibra y la matriz en cada

fragmento, definido por el cambio de superficie alrededor de la fibra en la zona adyacente a la fractura; esto permite identificar la zona en la que se presenta el DFM con una longitud  $2l_d$ .

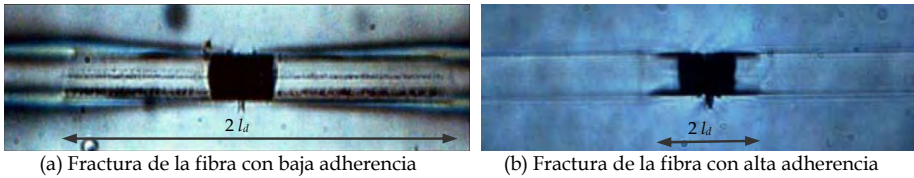


FIGURA 4-4 FALLOS EN ENSAYOS DE FRAGMENTACIÓN [13]

En la figura 4-5 se aprecia la concentración de tensiones en la zona de despegue de la fibra y la matriz cuando hay fractura en la fibra, además por el cambio de color en la superficie de la fibra se identifica la zona de frontal de deslizamiento. En esta figura, con la técnica de la fotografía empleada en el ensayo, no se aprecia la distribución de tensiones en la matriz, debido a que la técnica se centra en la intensidad de las tensiones en la zona de la interfaz fibra/matriz [13].

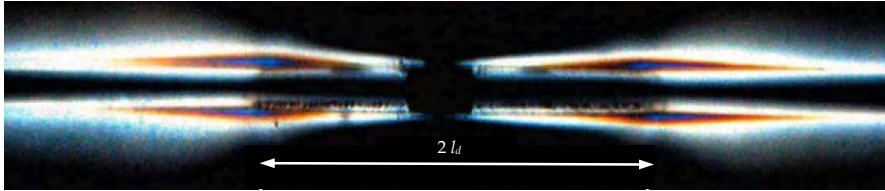


FIGURA 4-5 FRACTURA EN LA FIBRA CON PROPAGACIÓN DE FISURA EN LA INTERFAZ [13]

En la figura 4-6 se muestra la distribución de tensiones en la matriz cuando la fractura de la fibra conduce a la fisuración de la matriz por la alta adherencia entre los dos componentes [14]. Al comparar las fotografías de la figura 4-6 se evidencia el avance progresivo del DFM y la evolución de la concentración de tensiones en la zona adyacente a la fractura conforme se aumenta la elongación de la probeta.

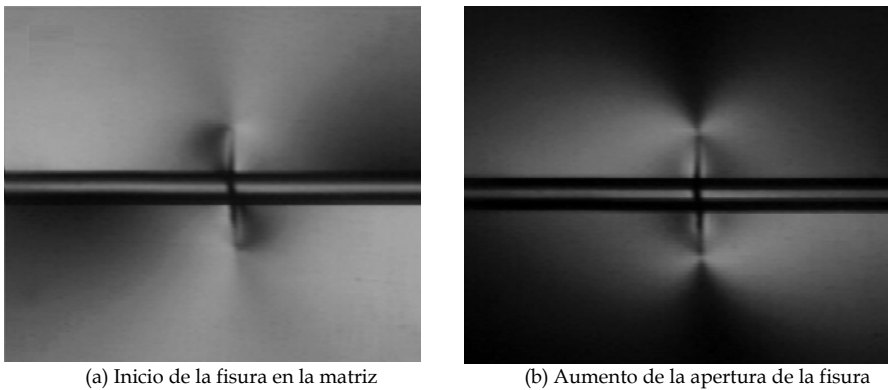
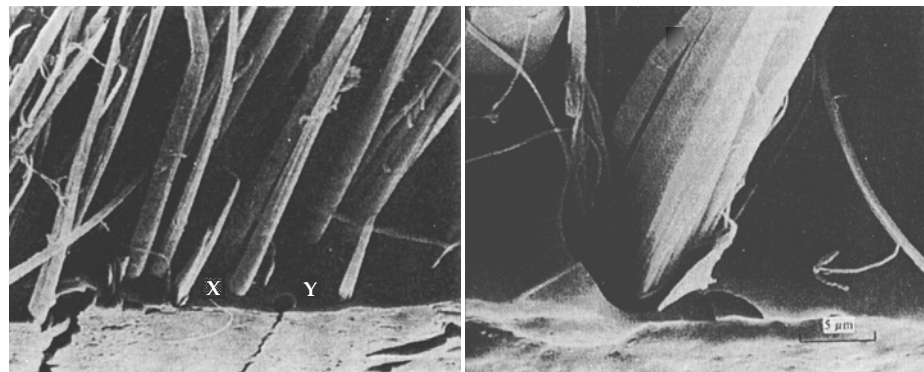


FIGURA 4-6 FRACTURA EN LA FIBRA CON PROPAGACIÓN DE LA FISURA EN LA MATRIZ [14]

De acuerdo con lo observado, el fenómeno de DFM en el ensayo de fragmentación se presenta de forma diferente al ensayo de pull-out. En el ensayo de fragmentación la zona que comienza a deslizarse parte desde el extremo donde se fractura la fibra hacia el lado donde aplica la tracción, mientras que en el ensayo de pull-out el deslizamiento comienza desde el extremo donde se tensiona la fibra. Sin embargo para los dos tipos de ensayos se observa que:

- En el sector donde empieza el despegue entre los dos materiales (frontal del DFM) se presenta un estado de concentración de tensiones que incrementa la fisuración en la interfaz o en la matriz.
- Hay un sector adyacente a la zona frontal del DFM en el que pese a no tener adherencia, hay un transferencia de tensiones entre la fibra y la matriz debido a la fricción entre las superficies de los materiales.
- Contiguo a la zona con fricción hay un sector en el que los dos materiales no tienen contacto, por lo tanto, en esta zona cada material se deforma de manera independiente y no hay transferencia de tensiones entre ellos.

Aunque este tipo de ensayos permiten observar la evolución de la interacción fibra-matriz, las pruebas de tracción a materiales compuestos por múltiples fibras muestran que se presentan simultáneamente diferentes mecanismos que producen el DFM. Un ejemplo de esto se observa en el fallo de un material compuesto fibroso de la figura 4-7, el cual esta conformado por una matriz epóxica y fibras Klevlar 49. En la figura 4-7(a) se muestran la superficie de fractura de la matriz junto con micro-fisuras, la rotura de las fibras (X) y las cavidades en la matriz generadas por el arranque de las fibras (Y). En la figura 4-7(b) se detalla la rotura de una fibra (X), donde se evidencia el deslizamiento fibra-matriz, dado que en la superficie de la fractura se aprecia la zona de despegue de la fibra dentro de la matriz.



(a) Fractura en la superficie de la matriz (b) Detalle del desprendimiento de la fibra en (X)

FIGURA 4-7 MECANISMO DE FALLO EN UN COMPUESTO LAMINADO CON ROTURA FIBROSA [10]

### 4.3 Metodologías de simulación del DFM

Debido a la naturaleza compleja de los materiales compuestos reforzados con fibras, la modelización con elementos finitos es una herramienta óptima para analizar la transferencia de esfuerzos y la evolución del daño y/o plasticidad en las

fibras y en la matriz [15].

Para una adecuada representación de la transferencia de esfuerzos y redistribución de tensiones entre las fibras y la matriz debe considerarse los mecanismos de adherencia y sus efectos en el comportamiento del compuesto. El problema de simular el deslizamiento relativo fibra-matriz en elementos finitos ha sido resuelto a través de diferentes alternativas basadas tanto en la mecánica de la fractura, como en la mecánica de medios continuos.

Una de las formas de simular el proceso del DFM ha sido a través de los modelos, en los que se introducen como interfaz, elementos que unen la matriz con la fibra, con los cuales se captura el comportamiento no lineal por la pérdida de adherencia [16]. Entre los más destacables están los elementos tipo resorte (spring), los elementos tipo viga, los elementos de contacto y los elementos cohesivos de espesor nulo.

Otra de las formas para involucrar el DFM en la modelización con elementos finitos se basa en la mecánica de medios continuos; donde en el análisis de los materiales compuestos se utilizan modelos constitutivos que han sido formulados para describir el comportamiento de materiales frágiles y/o dúctiles. El DFM en estos modelos al igual que la fisuración y la plasticidad, se trata desde un enfoque fenomenológico, en el que son representados de una forma constitutiva con variables internas de estado. Para reducir el grado de complejidad de los análisis del comportamiento de los materiales compuestos, debido a que las ecuaciones de evolución de las variables internas introducen parámetros de los materiales componentes, y que en algunos casos no se obtienen con ensayos sencillos, se han formulado modelos a diferentes escalas. A continuación se hace una recopilación de los modelos propuestos desde la micromecánica y la mecánica de medios continuos para estudiar el DFM en los materiales compuestos, enfoques que son complementarios al modelo propuesto en este capítulo.

#### 4.3.1 Análisis de la interacción fibra-matriz basados en la micromecánica

La micromecánica ha sido utilizada para predecir el comportamiento del material compuesto a través de micromodelos basados en los resultados experimentales de sus componentes (fibras y matriz) [17]. Esta rama adquiere importancia para la mecánica de medios continuos, porque para el análisis del fallo de los materiales compuestos y de sus componentes, los modelos constitutivos introducen variables internas de estado que han sido identificadas desde la micromecánica [7;8].

A través de la micromecánica se observan diferentes aspectos de los mecanismos que generan la pérdida de adherencia entre las fibras y de la matriz, y su influencia a nivel macroscópico. En la escala de la micromecánica, los mecanismos de fallo de los materiales compuestos varían de acuerdo con el proceso de aplicación de carga y con las propiedades de los componentes (fibras, matriz e interfaz), los micro-niveles de los mecanismos de fallo involucran, la fractura, el pandeo, el deslizamiento y el arranque de la fibra, la pérdida de adherencia en la interfaz y la

fisuración de la matriz [18].

Bajo el concepto de que el DFM es dependiente de las propiedades mecánicas de los materiales componentes, para la micromecánica existen dos tipos de comportamientos básicos en los sistemas reforzados con fibras: (i) cuando las fibras tienden a fracturarse (figura 4-1(a)), se produce un efecto conjunto de deslizamiento y arrancamiento de las fibras durante el proceso de pérdida de adherencia, o (ii) cuando la matriz es frágil (figura 4-1(b)), el proceso de fisuración de la matriz va acompañado de la pérdida de adherencia de la interfaz y el consecuente deslizamiento. Estos dos mecanismos en la micromecánica se han considerado desacoplados, dado que el fallo comienza en el componente menos resistente, por ello, existen dos enfoques, uno en el que el DFM se presenta por la fractura de la fibra, y otro, en el que ocurre por la fisuración de la matriz.

#### 4.3.1.1 Modelos basados en la fractura de las fibras

Con este tipo de modelos se supone que la matriz es la encargada de transmitir los esfuerzos entre las fibras, y que las fibras son las que resisten tensiones por tracción o compresión. Por ello, las fibras son las que se fracturan.

- *Modelos “shear lag” basados en la fractura de las fibras*

Este tipo de modelos se basa en el análisis de retardo en cortadura propuesto por Cox en 1952 [19], denominado en inglés “shear lag”. Con este tipo de modelos se asume que la matriz transmite tensiones tangenciales entre las fibras, pero no soporta tensiones axiales, de otra parte, las fibras son las que resisten tensiones por tracción o compresión, y en ellas, no hay deformaciones tangenciales. Dentro de las limitaciones de estos modelos, esta en que en la dirección longitudinal de las fibras, no se considera el aporte de la matriz a la resistencia del compuesto, tampoco, se tiene en cuenta la fisuración en la matriz.

Desde que el modelo fue propuesto, se han presentado diversas modificaciones para introducir efectos que no se tuvieron en cuenta como la fricción o el efecto de la relación de Poisson. Entre las diferentes extensiones del modelo, una de las más destacables es la propuesta por Hsueh [20], en la que incorporó la transferencia de tensiones en los extremos de la fibra, además planteó la formulación para que la carga aplicada por el extremo libre de la fibra sea soportada por la porción que esta dentro del compuesto [10]. Posteriormente, Hsueh [21] hizo una adaptación del modelo, dejando una formulación más compleja, donde incluyó en el análisis: la fricción en la interfaz, el efecto de Poisson en la fibra cargada y las tensiones residuales en los procesos de carga y de descarga.

Aunque el modelo inicial fue propuesto para el análisis de la interacción fibra-matriz de los compuestos reforzados con fibras cortas, este tipo de modelo ha sido utilizado para el estudio de la resistencia y daño de los compuestos reforzados con fibras largas [7], dado que se han realizado diferentes adaptaciones en las que se analiza la redistribución de los esfuerzos como resultado de la fractura de una o varias fibras independientemente de su longitud.

Los modelos con el esquema del análisis de retardo en cortadura también han sido propuestos para analizar los efectos de la rotura de múltiples fibras y su interacción en la distribución de tensiones y resistencia de los compuestos. Parten del principio que el esfuerzo que deja de soportar una fibra al romperse, se redistribuye entre las fibras adyacentes que permanecen intactas; asimismo, consideran que las concentraciones de tensiones causadas por la redistribución, son las que determinan el patrón de fallo del compuesto.

Como se indica en el modelo propuesto para materiales compuestos unidireccionales de Zhou y Wagner [22], una de las técnicas usadas en estos modelos para la redistribución de tensiones entre fibras teniendo en cuenta el DFM, consiste en aplicar del factor de concentración de tensiones SCF (stress concentration factor), donde el SCF relaciona la tensión local de una fibra intacta y la tensión aplicada en la fibra más lejana de la fibra rota. Otra de las técnicas utilizadas, es la técnica de influencia de la rotura por superposición BIS (Break Influence Superposition Technique), propuesta por Sartry y Phoenix [23] como una modificación del modelo de análisis de retardo. Beyerlein y Phoenix [24] generalizaron esta técnica para considerar la contribución de las fibras que permanecen elásticas, y mostraron que la concentración de tensiones y los esfuerzos en las fibras intactas se reducen ante el incremento del deslizamiento.

Con respecto a las desventajas que tiene este tipo de modelos, Xia et al. [25] concluyen que los modelos de análisis de retardo en cortadura son aproximados para compuestos reforzados con fibras (FRC) con relaciones altas de rigidez fibra-matriz donde la proporción de volumen de fibras es elevada, pero que no son adecuados cuando la proporción de volumen de fibras es baja. De otra parte, en el estudio de la evolución del DFM entre las fibras rotas, Mishnaevsky y Brøndsted [7] advierten que estos modelos no permiten introducir de una forma sencilla modelos no lineales que definan de una forma mas apropiada el comportamiento de los componentes, un ejemplo de ello, es que no consideran el daño que se produce en la matriz ante la rotura de la fibra.

- *Enfoque general de la formulación de los modelos "shear lag"*

El efecto del que parten los modelos de análisis de retardo en cortadura se presenta en la figura 4-8(a), donde se observa la diferencia entre el estado de deformación inicial en que la fibra esta sin daño y el estado de deformación en el compuesto a lo largo de la fibra rota. Este efecto ha sido corroborado a través de diferentes ensayos, entre ellos los ensayos de pull-out, en la figura 4-8(b) se muestran dos patrones de franjas en el extremo de una fibra de vidrio para un estado previo al fallo [26], la fotografía izquierda corresponde a un estado de tensiones bajo en el compuesto, y la derecha corresponde a un estado de tensiones alto. En las dos fotografías se observa el efecto en el extremo de la fibra previo al fallo, el cual es ocasionado por la combinación del deslizamiento y el arrancamiento de la fibra.

Teniendo en cuenta los principios los modelos de análisis de retardo en cortadura, a continuación se hará una breve explicación del enfoque general de las fórmulas que se plantean a través de los diferentes modelos [10]. Para ello, como se muestra

en la figura 4-8(a), se analiza la variación radial de las tensiones tangenciales en la matriz en un tramo  $dx$  del extremo de la fibra rota.

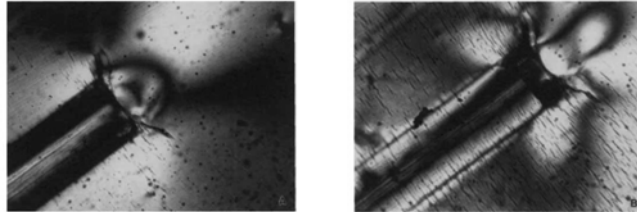
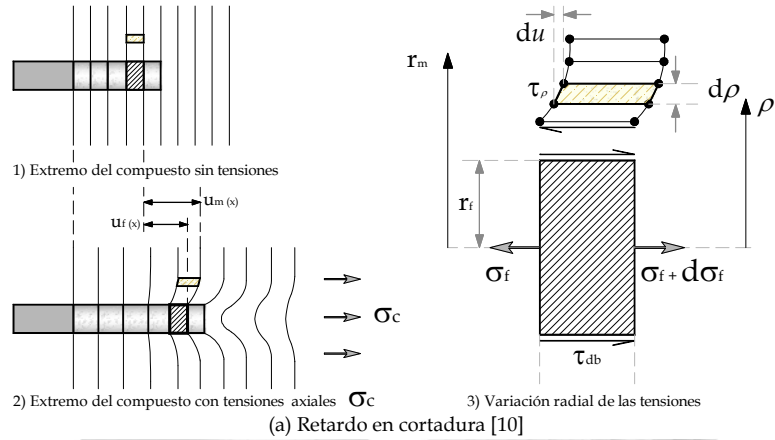


FIGURA 4-8 ESQUEMA DEL COMPORTAMIENTO FIBRA-MATRIZ DE LOS MODELOS SHEAR LAG

Partiendo del equilibrio de fuerzas de corte, la tensión tangencial en la matriz  $\tau_\rho$  a un radio  $\rho$  se relaciona con la tensión tangencial de la interfaz  $\tau_{db}$  y el radio de la fibra  $r_f$  como:

$$(4:1) \quad \tau_\rho = \tau_{db} \left( \frac{r_f}{\rho} \right)$$

por lo tanto, la deformación tangencial en la interfaz queda expresada en función de las tensiones tangenciales, del módulo de elasticidad de la matriz  $E_m$  y su relación de Poisson  $\nu_m$ :

$$(4:2) \quad \gamma = \frac{du}{d\rho} = \frac{2(1+\nu_m)}{E_m} \tau_\rho = \frac{2(1+\nu_m)}{E_m} \tau_{db} \left( \frac{r_f}{\rho} \right)$$

Suponiendo que la tensión tangencial en la interfaz es constante para el elemento infinitesimal de la fibra, al integrar la ecuación (4:3), se determina el desplazamiento relativo entre la fibra y la matriz  $u_{db}$ :

$$(4:3) \quad \int_{u_f}^{u_m} du = \frac{2(1+\nu_m)}{E_m} \tau_{db} r_f \int_{r_f}^{r_m} \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow u_{db} = u_m - u_f = \frac{2(1+\nu_m)}{E_m} \tau_{db} r_f \ln(r_m/r_f)$$

siendo  $u_f$  y  $u_m$  los desplazamientos la fibra y la matriz, donde se toma como límite un radio  $r_m$  en la matriz, lo suficientemente alejado de la interfaz, tal que la

distribución de deformaciones sea uniforme,  $2r_m$  equivale a la separación promedio entre fibras [27]. De esta forma, la tensión tangencial en la interfaz es:

$$(4:4) \quad \tau_{db} = \frac{E_m}{2(1+\nu_m)} \frac{1}{r_f \ln(r_m/r_f)} (u_m - u_f)$$

Haciendo un equilibrio de las fuerzas en la fibra por medio de la tensión normal  $\sigma_f$  en la fibra y la tensión tangencial  $\tau_{db}$  en la interfaz, se tiene que:

$$(4:5) \quad \begin{aligned} \sigma_f \pi r_f^2 + d\sigma_f \pi r_f^2 + 2\tau_{db} \pi r_f dx &\Rightarrow \frac{d\sigma_f}{dx} = -\frac{2\tau_{db}}{r_f} \\ &= -\frac{E_m}{(1+\nu_m)} \frac{1}{r_f^2 \ln(r_m/r_f)} (u_m - u_f) \end{aligned}$$

Dado que los desplazamientos son desconocidos, se determinan sus diferenciales a partir de las deformaciones de la fibra y de la matriz respectivamente  $\varepsilon_f$ ,  $\varepsilon_m$ :

$$\frac{du_f}{dx} = \varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} \quad \frac{du_m}{dx} = \varepsilon_m$$

Por tanto derivando la expresión (4:5), la ecuación queda definida como:

$$(4:6) \quad \frac{d^2\sigma_f}{dx^2} = \frac{E_m}{(1+\nu_m)} \frac{1}{r_f^2 \ln(r_m/r_f)} \left( \frac{\sigma_f}{E_f} - \varepsilon_m \right) = \beta^2 (\sigma_f - E_f \varepsilon_m)$$

esta expresión al resolverse queda de la forma:

$$(4:7) \quad \sigma_f = E_f \varepsilon_m + B_1 \sinh(\beta x) + B_2 \cosh(\beta x)$$

donde  $E_f$  es el módulo de Young de la fibra,  $B_1$  y  $B_2$  son constantes que dependen de las condiciones de frontera del tramo de la fibra rota. Considerando que la tensión axial es nula en los extremos se obtiene

$$(4:8) \quad \sigma_f = E_f \varepsilon_m \left( 1 - \frac{\cosh \beta(l/2 - x)}{\cosh(\beta l/2)} \right) \quad \forall 0 \leq x \leq l/2$$

Con la ecuación (4:8) se muestra que la tensión axial en la fibra no es constante, es máxima en el centro y nula en los extremos, pero si la fibra es lo suficientemente larga se tiene que  $\sigma_f \rightarrow E_f \varepsilon_m$ . Recíprocamente la tensión tangencial en la interfaz se obtiene de aplicar la derivada de esta expresión en la ecuación (4:5); con la fórmula resultante se observa que la tensión tangencial es máxima en los extremos de la fibra rota y es nula hacia el centro

$$(4:9) \quad \tau_{db} = \frac{\beta r_f}{2} E_f \varepsilon_m \left( \frac{\sinh \beta(l/2 - x)}{\cosh(\beta l/2)} \right) \quad \forall 0 \leq x \leq l/2$$

Esta formulación básica muestra los parámetros generales de los modelos de análisis de retardo en cortadura. En algunos de los modelos cambian la forma en como plantean la tensión tangencial de la interfaz dado depende de distintos factores entre ellos la fricción.



#### 4.3.1.2 Modelos basados en la fractura de la matriz

Cuando un material compuesto con una matriz frágil esta solicitado a tracción, el control de la evolución del daño del compuesto esta proporcionado por la interconexión entre los sectores fisurados de la matriz, la cual está dada por las fibras que se mantienen intactas al abrirse las fisuras. De acuerdo con esto, para la mecánica de la fractura, la adherencia fibra-matriz es la que establece la resistencia a la tracción del compuesto.

En la figura 4-9 se muestra el esquema de análisis de los modelos que analizan la interacción fibra-matriz a partir de la fractura de la matriz y la interconexión de las fibras, por medio del estudio de las celdas cilíndricas. En los modelos se supone que el comportamiento de la interfaz esta determinado por la resistencia en la interfaz, atribuida en la mayoría de las investigaciones a la fricción. En cada celda cilíndrica, como se indica en la figura 4-9, se consideran tres sectores: uno donde la adherencia es perfecta, otro en el que hay pérdida de adherencia y fricción, y por último, un sector en el que no hay adherencia entre la fibra y la matriz. Estos tres sectores tienen coinciden con lo observado en los ensayos de fragmentación, mostrados en la figura 4-3.

El modelo analítico de Aveston et al. [28] ha sido la base para el estudio del DFM producido por la fractura en la matriz; el cual se ha complementado con modelos que se han formulado bajo el enfoque de combinar la mecánica de la fractura con la mecánica del medio continuo.

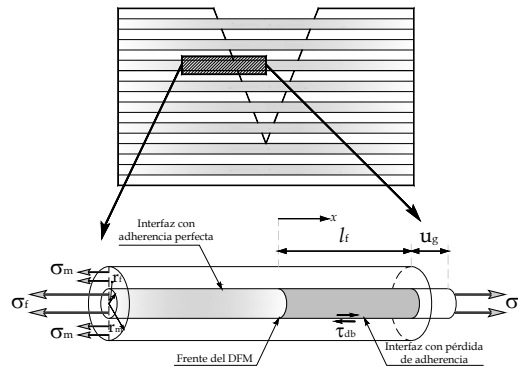


FIGURA 4-9 ESQUEMA DEL COMPORTAMIENTO FIBRA-MATRIZ CON FRACTURA EN LA MATRIZ

- *Modelos ACK*

Los modelos "ACK", describen el proceso de agrietamiento de un laminado solicitado a tracción, en el que el material compuesto esta conformado por una matriz frágil reforzada con fibras continuas y alineadas en una dirección. Estos modelos parten de tres hipótesis: (i) que las fibras se mantienen en la matriz sólo por las tensiones tangenciales, (ii) las tensiones tangenciales en la interfaz son constantes a lo largo de la zona con pérdida de adherencia, y (iii) que el deslizamiento fibra-matriz ocurre cuando se sobrepasa la resistencia de la interfaz.

En el modelo propuesto por Aveston et al. [28], inicialmente se consideró que el deslizamiento ocurría en toda la longitud de separación entre fisuras, que la tensión tangencial  $\tau_{db}$  era constante y que la distribución de tensiones normales en la matriz y en la fibra era lineal. Este modelo fue extendido por Aveston y Kelly [29], quienes propusieron que en los segmentos entre las fisuras aparte de la zona sin adherencia, también existe una zona elástica donde la adherencia es perfecta, en la que se relaciona la geometría y las propiedades elásticas de la fibra y la matriz con las tensiones del compuesto. También en su modelo introdujeron el análisis entre fisuras en compuestos reforzados con fibras no paralelas.

Budiansky et al. [30] hicieron una generalización del modelo "ACK", teniendo lo propuesto por Aveston y Kelly [29], consideraron dos situaciones en la zona con deslizamiento, una en que no hay adherencia pero existe tensión tangencial por fricción al deslizamiento  $\tau_{db}=\tau_{df}$  (alta o baja), y otra, en la que hay deslizamiento debido a que las tensiones en el frente de propagación de la fisura sobrepasan la resistencia a la rotura de la interfaz  $\sigma_{do}$ . Para Budiansky et al. [30], cuando la resistencia al deslizamiento es alta, el comportamiento de la interfaz se aproxima al modelo de Aveston y Kelly [29]; pero si la resistencia es baja, el comportamiento del compuesto es correspondiente al formulado por Aveston et al. [28], donde el deslizamiento ocurre en toda la longitud del segmentos fisurado.

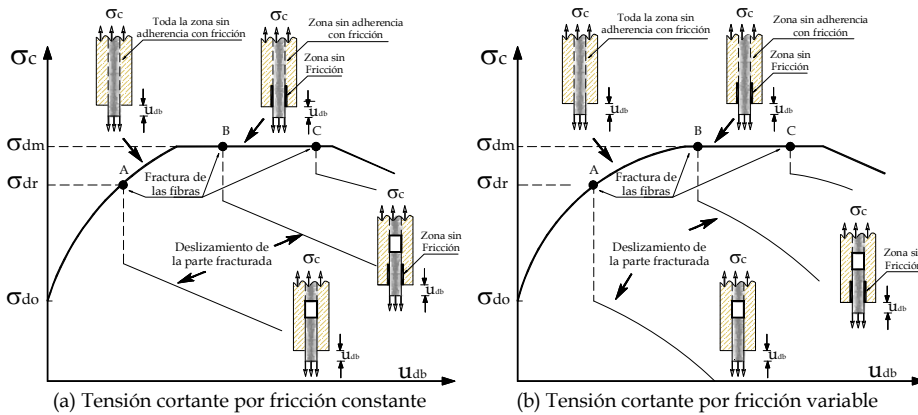


FIGURA 4-10 TENSION NORMAL EN EL COMPUESTO CON RESPECTO AL DFM [31]

Hutchinson y Jensen [31] bajo la hipótesis que las fisuras de la matriz están interconectadas por las fibras, analizaron la pérdida de adherencia en la interfaz producida por la fisuración de la matriz frágil y la posterior rotura de la fibra. Ellos partieron de la suposición que la interfaz es lo suficientemente débil, tal que permite el despegue de la fibra. Para relacionar el DFM y la rotura de la fibra con el estado de tensiones en la interfaz, en este modelo estudiaron el comportamiento del compuesto bajo dos idealizaciones de la tensión tangencial  $\tau_{db}$ : una, en la que es constante (figura 4-10(a)), y otra, en la que varía de acuerdo con la ley de Coulomb (figura 4-10(b)).

Hutchinson y Jensen [31] demostraron que el ablandamiento del compuesto

debido al deslizamiento, depende de la distribución de la tensión tangencial en la interfaz  $\tau_{db}$  y de la tensión de fractura de la fibra  $\sigma_{fr}$ . En la figura 4-10 se observa que si la fractura de la fibra ocurre cuando la resistencia a la rotura de la fibra  $\sigma_{fr}$  es menor que la tensión en la matriz  $\sigma_{dm}$ , la resistencia del compuesto se reduce drásticamente; en cambio si  $\sigma_{fr}$  es mayor que  $\sigma_{dm}$ , después de que se alcanza la resistencia máxima  $\sigma_{dm}$ , la rotura de la fibra dependerá del incremento de las deformaciones y del estado de tensiones generado por el deslizamiento. Posteriormente, Budiansky et al. [32] orientados por estos resultados, integraron en su modelo los dos estados en que el deslizamiento esta condicionado por la resistencia a la rotura de la interfaz  $\sigma_{do}$  y por la tensión tangencial a la fricción  $\tau_{df}$ .

- *Análisis de fractura matriz basados en el modelo ACK*

Los modelos "ACK" en forma general consideran los dos estados de tensiones indicados en la figura 4-11. Un estado en que la tensión normal en la matriz tiene una distribución uniforme y no hay deslizamiento (figura 4-11 (b)), y otro estado, en el que hay DFM (figura 4-11 (c)).

Para los modelos ACK, cuando se supera la resistencia de rotura de la matriz, se produce un agrietamiento múltiple con un espaciamento entre fisuras  $2l$ , donde las grietas en la matriz se propagan perpendicularmente a la dirección de las fibras, no obstante, algunos de los modelos "ACK" parten de la suposición que solo se presenta una grieta [33]. Como se muestra en la figura 4-11 (c), este agrietamiento conlleva a que en cada segmento entre fisuras, la distribución de tensiones normales en la matriz no sea uniforme, y que se produzca el DFM bajo una tensión tangencial en la interfaz  $\tau_{db}$ .

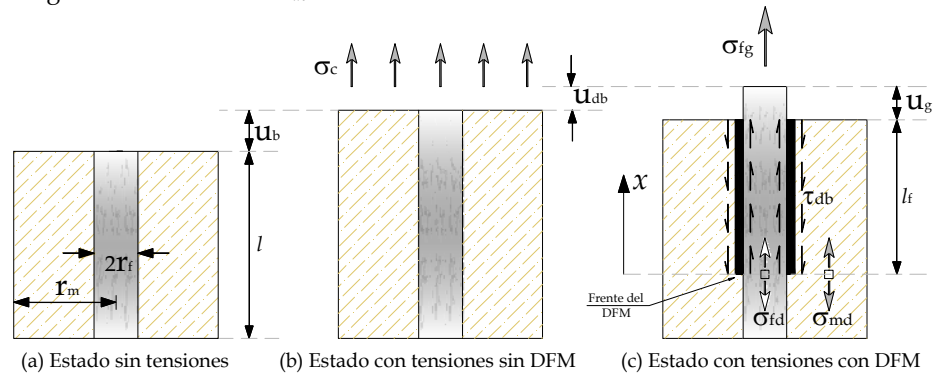


FIGURA 4-11 ESQUEMA DE LOS ESTADOS DE CARGA PARA LOS MODELOS ACK [34]

En los modelos "ACK" se relacionan los procesos de pérdida de adherencia y de fisuración de la matriz a través del análisis de medio segmento entre fisuras (figura 4-11). En la figura 4-11 (b), se observa el estado sin DFM [34]; partiendo de la teoría de mezclas simple, la tensión normal del compuesto  $\sigma_c$  esta en función de las tensiones de la matriz  $\sigma_m$  y de la fibra  $\sigma_f$ , asimismo, las deformaciones en el compuesto  $\epsilon_c$ , en la matriz  $\epsilon_m$  y en la fibra  $\epsilon_f$  son iguales [33].

$$(4:10) \quad \sigma_c = {}^m k \sigma_m + {}^f k \sigma_f \quad \epsilon_c = \epsilon_m = \epsilon_f = \frac{\sigma_c}{E_c}$$

El módulo del compuesto  $E_c$  se define con la regla de mezclas simple como:  $E_c = {}^f k E_f + {}^m k E_m$ , donde  $E_f$  y  $E_m$  corresponden a los módulos de elasticidad de la fibra y de la matriz. Por compatibilidad de deformaciones se tiene que

$$(4:11) \quad \sigma_m = \frac{E_m}{E_c} \sigma_c \quad \sigma_f = \frac{E_f}{E_c} \sigma_c$$

Para el estado con DFM indicado en la figura 4-11 (c), en el plano de la fisura o grieta, dado que la tensión en la matriz  $\sigma_{mg}$  es nula, la tensión de la fibra  $\sigma_{fg}$  queda en función de la tensión del compuesto  $\sigma_{cg}$ :

$$(4:12) \quad \sigma_{mg} = 0 \quad \sigma_{fg} = \frac{\sigma_{cg}}{{}^f k}$$

Por lo tanto, las tensiones en la matriz  $\sigma_{md}$  y de la fibra  $\sigma_{fd}$  en el frente del DFM que

$$(4:13) \quad \sigma_{md} = \frac{2l_f}{{}^r f} \frac{{}^f k}{{}^m k} \tau_{db} \quad \sigma_{fd} = \sigma_{fg} - \frac{2l_f}{r_f} \tau_{db}$$

siendo  $l_f$  la longitud de la zona con pérdida de adherencia. Suponiendo la tensión tangencial  $\tau_{db}$  constante [32], la distribución de tensiones en la matriz y en la fibra a lo largo de la zona con pérdida de adherencia equivale a:

$$(4:14) \quad \begin{aligned} \sigma_m(x) &= \sigma_{md} \left(1 - \frac{x}{l_f}\right) = \frac{2l_f}{{}^r f} \frac{{}^f k}{{}^m k} \tau_{db} \left(1 - \frac{x}{l_f}\right) \\ \sigma_f(x) &= \sigma_{fd} - (\sigma_{fg} - \sigma_{fd}) \frac{x}{l_f} = \sigma_{fg} - \frac{2l_f}{r_f} \tau_{db} \left(1 - \frac{x}{l_f}\right) \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq l_f$$

Los desplazamientos en la matriz  $u_m$  y de la fibra  $u_f$  corresponden a:

$$(4:15) \quad \begin{aligned} u_m(x) &= \int \frac{\sigma_m(x)}{E_m} dx = \frac{2l_f}{{}^r f} \frac{{}^f k}{{}^m k} \frac{\tau_{db}}{E_m} \left(x - \frac{x^2}{2l_f}\right) \\ u_f(x) &= \int \frac{\sigma_f(x)}{E_f} dx = \frac{\sigma_{fg}}{E_f} x - \frac{2l_f}{r_f} \frac{\tau_{db}}{E_f} \left(x - \frac{x^2}{2l_f}\right) \end{aligned} \quad 0 \leq x \leq l_f$$

En el estado de carga con DFM indicado en la figura 4-11 (c), el desplazamiento  $u_g$  queda calculado en términos de la diferencia entre los desplazamientos entre la matriz y la fibra cuando  $x=l_f$ , donde  $2u_g$  corresponde a la apertura de la grieta.

$$(4:16) \quad u_g \approx u_f(l_f) - u_m(l_f) = \frac{\sigma_{fg}}{E_f} l_f - \frac{l_f^2}{r_f} \frac{E_c \tau_{db}}{E_m E_f}$$

En el estado sin DFM visto en la figura 4-11 (b), el desplazamiento del compuesto  $u_c$  corresponde a  $u_c(l_f) = l_f \sigma_{cg} / E_c$ . El deslizamiento en la interfaz  $u_{db}$  se define:

$$(4:17) \quad u_{db} \approx u_f(l_f) - u_c(l_f) = \frac{{}^m k E_m}{E_c E_f} \sigma_{fg} l_f - \frac{l_f^2}{r_f} \frac{\tau_{db}}{E_f}$$

Aveston et al. [28] determinaron el deslizamiento en la interfaz  $u_{db}$ , mientras que otros como Marshall et al. [35] definieron el desplazamiento  $u_g$  correspondiente a la apertura de la grieta. Al comparar las ecuaciones (4:16) y (4:17), se observa que

hay una diferencia entre los dos tipos de desplazamiento, sin embargo, esta diferencia no es reconocida en otros modelos "ACK" [34].

A través de la condición de balance de energía, entre las variaciones del trabajo  $dW$ , de la energía de deformación  $dU_e$ , de la energía del deslizamiento  $dU_s$  y de la energía de la interfaz  $dG_{db}$ , la tensión en la fibra en el extremo donde esta la grieta  $\sigma_{fg}$  se determina a de la siguiente forma:

$$(4:18) \quad dW = dU_e + dU_s + dG_{db} \rightarrow \sigma_{fg} = \frac{\sigma_{cg}}{f k} = 2 \left( \frac{E_f E_c \zeta_{db}}{m k E_m r_f} \right)^{1/2} + \frac{2l_f}{r_f} \frac{E_c}{m k E_m} \tau_{db}$$

$\sigma_{cg}$  es la tensión del compuesto entre las caras de la fisura debido a la interconexión de la fibra y  $\zeta_{db}$  es la energía disipada por la pérdida de adherencia en la interfaz.

Cuando  $l_f=0$ , por medio de la ecuación (4:18), se obtiene la resistencia a la rotura de la interfaz  $\sigma_{do}$  [33; 32], la cual una vez se alcanza comienza el DFM:

$$(4:19) \quad \sigma_{do} = 2 \left( \frac{f k^2 E_f E_c \zeta_{db}}{m k E_m r_f} \right)^{1/2}$$

#### 4.3.1.3 Modelos de la micromecánica incorporados a la homogenización

Aunque los modelos de la micromecánica son bastante costosos para propósitos prácticos, estos pueden ser utilizados en la simulación del comportamiento del material compuesto [36]. Teniendo en la cuenta, que los modelos de la micromecánica definen fenómenos a microescala como la rotura de la fibra, la fisuración de la matriz y el deslizamiento fibra-matriz, un grupo de investigadores han integrado estos micromodelos a modelos de mayor escala.

En general, los modelos planteados en la micromecánica para el análisis del DFM, que parten de la rotura de las fibras basados en el modelo de Cox [19] y/o de la fractura de la matriz basados en el modelo ACK [28], se han integrado a modelos de homogenización mediante elementos RVE (representative volumen elements) o a través de celdas elementales [37]\*. Donde el estado de las variables internas que rigen el comportamiento no lineal de los compuestos y que es definido en los análisis micromecánicos, es introducido a la mecánica de medios continuos para el estudio de fenómenos locales como el DFM, la fisuración y la plasticidad de los componentes [7]. Asimismo, esta técnica ha sido extendida a los compuestos conformados por varias láminas y a los tejidos compuestos [38].

En la figura 4-12 se muestra una celda elemental utilizada inicialmente para el análisis de diferentes modelos micromecánicos [19; 21; 28; 31], a través de la cual se considera el material homogéneo; esta celda tiene una longitud  $2l$  que caracteriza la separación entre las fisuras y esta constituida por dos materiales diferentes, el fisurado (1) y el intacto (2). En cada celda elemental se supone que a lo largo de  $2l_d$ , hay dos zonas que conforman el sector donde se presenta el DFM: (i) la zona

\* Depende de la técnica de homogenización aplicada, para modelos del campo promedio se utilizan elementos RVE, y para modelos de homogenización asintota se usan celdas unitarias o elementales. Véase capítulo 2

central en la que hay una fisura en el ancho del material (1) con una apertura  $2u_g$ , que representa el deslizamiento entre los dos materiales debido a la fractura del material (1); (ii) la zona hacia cada cara de la fisura con una longitud  $l_f$ , en la que los materiales están separados pero hay resistencia al deslizamiento por fricción.

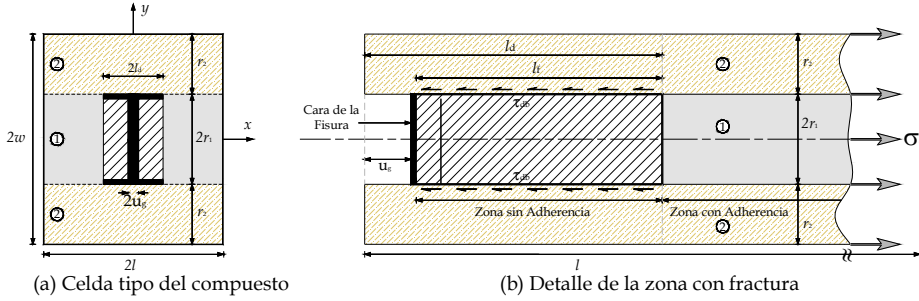


FIGURA 4-12 ESQUEMA DE LA CELDA ELEMENTAL DEL COMPUESTO EN LOS MODELOS MICROMECAÑICOS [37]

El desplazamiento de apertura de la grieta  $u_g$  esta compuesto por dos tipos de contribución [39], una corresponde a la contribución elástica  $u_g^e$ , la cual se relaciona con la aplicación de las tensiones y el proceso de fisuración del material (1), y la otra corresponde a la contribución inelástica (no recuperable)  $u_g^p$ , relacionada con el proceso de la pérdida de adherencia y el correspondiente deslizamiento.

$$(4:20) \quad u_g = u_g^e + u_g^p$$

Considerando lo anterior, para el cálculo de la densidad de energía libre en el análisis de una lámina, se tienen en cuenta la fisuración y el deslizamiento fibra/matriz, de tal forma que:

- i. Con el mecanismo del DFM, se calcula densidad de energía dada por el deslizamiento  $\psi^{db}$  [40], cuando sin la acción de cargas externas, el material (2) se desliza un desplazamiento  $u_g$  con respecto al material (1) [37]. Este desplazamiento  $u_g$  causa las tensiones residuales en los dos materiales e induce a deformaciones inelásticas  $\epsilon_g^p$ .

La medida de la degradación del mecanismo es una variable interna de daño por deslizamiento  $d$ , que define el tamaño de la zona con DFM en relación con el espaciamiento entre las fisuras y las deformaciones inelásticas  $\epsilon_g^p$ .

- ii. Con el mecanismo de fisuración, se determina la densidad de energía elástica del sistema fisurado  $\psi^e$  [39]. La energía elástica depende de las deformaciones elásticas y del tensor constitutivo del material fisurado  $\hat{C}(\mathbb{C}, \mathbf{D})$ .  $\hat{C}$  esta definido por el tensor constitutivo elástico del compuesto  $\mathbb{C}$  y por la variable interna de daño del proceso de fisuración  $\mathbf{D}$ , la cual depende de la densidad de las fisuras y de las propiedades elásticas de los dos materiales componentes [40].

$$\psi^e = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^e : \hat{\mathbb{C}} : \boldsymbol{\epsilon}^e = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_g^p) : \hat{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\epsilon} - \boldsymbol{\epsilon}_g^p)$$

Sumando los dos mecanismos, la densidad de la energía libre total  $\Psi$  es:

$$(4.21) \quad \Psi = \Psi^e + \Psi^{db} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_g^p) : \hat{\mathbb{C}} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_g^p) + \Psi^{db}(\mathbb{C}, (\boldsymbol{\varepsilon}_g^p)^2, d^{-1})$$

de donde se definen las fuerzas asociadas con el estado de variables [39]:

$$(4.22) \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}, \quad \mathbf{Y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}}, \quad \mathbf{y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial d}, \quad \mathbf{X} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_g^p}$$

lo que permite determinar a nivel macroscópico las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ , las variaciones de energía disipada que están asociadas a la fisuración  $\mathbf{Y}$ , a las tensiones residuales por el DFM  $\mathbf{y}$ , y a las tensiones residuales  $\mathbf{X}$  que dependen de las propiedades de la interfaz. De esta forma, para una condición isotérmica, la disipación de energía  $\Xi$  se define como:

$$(4.23) \quad \Xi = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{D}} : \dot{\mathbf{D}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_g^p} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^p + \frac{\partial \Psi}{\partial d} : \dot{d} \geq 0$$

siendo  $\dot{\mathbf{D}}$ ,  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_g^p$  y  $\dot{d}$  las derivadas de las variables internas con respecto al tiempo.

Las leyes de evolución de las variables internas se pueden establecer, partiendo de los resultados obtenidos de los análisis de fragmentación [41] para calcular el estado potencial, pero se requiere amplia información estadística acerca de las propiedades del material (1) en el proceso de falla [37]. Otra forma que proponen Hild et al. para deducir la evolución de las variables es a través de los resultados experimentales [38], sin embargo, esta metodología tiene el inconveniente que para cada tipo de material y participación volumétrica, es necesario realizar una serie de ensayos que permitan identificar la ley de evolución de cada variable interna [1].

Para determinar las leyes de evolución de las variables internas en los materiales compuestos, bajo la estrategia de la homogenización al utilizar celdas elementales o RVE, se han formulado diferentes modelos que proponen el análisis de los compuestos por medio de distintos tipos de celdas, entre otros: celdas con una fibra o con múltiples fibras, celdas con una o varias secciones con daño, celdas con interfaces homogéneas o interfaces no homogéneas [42].

La aproximación de los mecanismos de fallo por medio de la micromecánica requiere del manejo de un buen número de variables internas, donde definir la relación de cada variable con el mecanismo de fallo puede ser una labor compleja, dependiendo de la formulación propuesta. De otra parte, la determinación de los parámetros del compuesto y de sus componentes, a partir de los test experimentales es ardua [18], bien sea por la cantidad de los ensayos requeridos a nivel microscópico o por basarse en ensayos no convencionales. Estas desventajas conllevan a que hallan alternativas complementarias, como la combinación con métodos probabilísticos que permiten utilizar mejor este tipo de modelos [7].

#### 4.3.2 Modelos constitutivos para el tratamiento del DFM

En el estudio de los materiales compuestos por medio de la mecánica del continuo, las investigaciones se han centrado en la formulación de leyes constitutivas, con el

objetivo que desde un enfoque fenomenológico, se simplifique el tratamiento de la no linealidad en materiales compuestos y en sus componentes. A través de los modelos formulados se analiza el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos a nivel macroscópico [36]. Desde este enfoque, los fenómenos que se presentan en el comportamiento de los compuestos son distribuidos, y sus efectos inciden únicamente en la pérdida de rigidez del compuesto [43].

Los modelos constitutivos involucran variables internas para describir los diferentes fenómenos que inciden en el comportamiento de los compuestos, en algunos casos la abundancia de estas variables internas hacen que el análisis numérico no sea sencillo, y en otros casos, conlleva a que a nivel experimental, la determinación de sus valores sea compleja. Sin embargo, los modelos constitutivos son los más usados en las simulaciones hechas con elementos finitos para cálculos de estructuras conformadas con materiales compuestos, ya que proveen resultados satisfactorios con tiempos de cálculo razonables [44].

La simulación de los materiales compuestos a través de modelos constitutivos, parte del principio que el diámetro de las fibras, el espaciamiento entre las fibras y el tamaño de las imperfecciones (microfisuras, poros, entre otros) son lo suficientemente pequeños, tal que el compuesto se puede representar como un material homogéneo. Esto es lo que permite que los fenómenos que ocurren en sus componentes se simulen como fenómenos distribuidos, entre ellos, la plasticidad y el daño. Existen dos metodologías de análisis del compuesto en las que han considerado el DFM, una donde definen el comportamiento del compuesto como un material simple, y otra, en que utilizan las teorías de mezclas para determinar la respuesta del compuesto a través del comportamiento de sus componentes.

#### 4.3.2.1 Modelos constitutivos donde el compuesto es un material simple

En estos modelos básicamente se estudia el material compuesto como un material simple, donde el DFM se introduce al analizar de una forma integral los diferentes modos de daño que se presentan en el compuesto. En estos modelos las variables de daño están definidas y asociadas con la degradación de rigidez de una lámina.

- *Modelo de Ladevèze y Le Dantec y sus extensiones*

El modelo de compuestos laminados propuesto por Ladevèze y Le Dantec [45], introduce el concepto de la pérdida de adherencia fibra-matriz dentro de los modelos de constitutivos para el estudio de los materiales compuestos. Partiendo de la suposición que el daño está asociado a las micro-fisuras paralelas a las fibras, en este modelo se describe el comportamiento de una lámina del laminado unidireccional. Este modelo parte de las siguientes hipótesis [46]:

- El comportamiento de la lámina es homogéneo y ortótropo.
- El comportamiento de la fibra es elástico lineal y frágil a la tracción, mientras que bajo compresión es no lineal elástico y frágil.
- La degradación progresiva del compuesto se refleja por la microfisuración de la matriz y el DFM que afectan el comportamiento del compuesto en la dirección transversal a la fibra, y por la rotura en la fibra incide en la dirección de la fibra.



La función de energía de deformación  $U_e$  corresponde a [47]:

$$(4:24) \quad U_e = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(1-f\phi^d)} \left( \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2}{E_{11}} + \frac{\zeta(\langle -\sigma_{11} \rangle)}{E_{11}} - \left( \frac{\nu_{12}^2}{E_{11}} + \frac{\nu_{21}^2}{E_{22}} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} \right) + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{E_{22}(1-r\phi^d)} + \frac{\langle -\sigma_{22} \rangle^2}{E_{22}} + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}(1-s\phi^d)} \right]$$

$\langle x \rangle = (x + |x|)/2$  es la función de McAully,  $\zeta()$  es una función que involucra el comportamiento no lineal a compresión [48]; con estas dos funciones se diferencia la energía de deformación a tracción y a compresión de acuerdo con la apertura o el cierre de las fisuras.  $E_{11}$  y  $E_{22}$  son los módulos de Young en la dirección axial y transversal a las fibras,  $G_{12}$  es el módulo de corte,  $\nu_{12}$  y  $\nu_{21}$  son las relaciones de Poisson.  $f\phi^d$ ,  $r\phi^d$  y  $s\phi^d$  son las variables de daño por fractura de la fibra, por fisuración transversal a la fibra y por corte, donde  $r\phi^d$  y  $s\phi^d$  son los indicadores del daño debido al DFM.

En este modelo, las variables de daño son uniformes en el espesor de la lámina, por tanto, el daño se supone como una degradación difusa en la lámina [45]. Para acoplar la evolución de los tres daños y definir su relación con la disipación de energía mecánica, se tiene que [46, 49]:

$$(4:25) \quad fY \quad Y = b^r Y + sY \quad Y' = b'^r Y + sY$$

siendo  $Y$  las fuerzas termodinámicas correspondientes a la energía de deformación disipada por unidad de volumen, donde  $fY$ ,  $sY$ ,  $rY$  representan respectivamente, la energía disipada por rotura de la fibra, por daño tangencial y por daño transversal.  $b$  y  $b'$  son los parámetros característicos del compuesto que equilibran la influencia de la energía de disipación por el daño transversal y tangencial. Las fuerzas están definidas por la energía de disipación [47] así:

$$(4:26) \quad rY = \frac{\partial \langle U_e \rangle}{\partial r\phi^d} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{22} \rangle^2}{E_{22}(1-r\phi^d)^2}$$

$$sY = \frac{\partial \langle U_e \rangle}{\partial s\phi^d} = \frac{1}{2} \frac{\langle \sigma_{12}^2 \rangle}{G_{12}(1-s\phi^d)^2}$$

$$fY = \frac{\partial \langle U_e \rangle}{\partial f\phi^d} = \frac{1}{2} \frac{1}{(1-f\phi^d)^2} \left\langle \frac{\langle \sigma_{11} \rangle^2}{E_{11}} + \frac{\zeta(\langle -\sigma_{11} \rangle)}{E_{11}} - \left( \frac{\nu_{12}^2}{E_{11}} + \frac{\nu_{21}^2}{E_{22}} \right) \sigma_{11} \sigma_{22} \right\rangle$$

donde  $\langle x \rangle$  representa el valor medio dentro del espesor de la lámina. Las leyes de evolución de las variables daño [45] están dadas por funciones que se basan en resultados experimentales:

$$(4:27) \quad r\phi^d = r\phi(Y) = r\phi(rY, sY) \quad r\phi^d \leq 1$$

$$s\phi^d = s\phi(Y') = s\phi(rY, sY) \quad s\phi^d \leq 1$$

$$f\phi^d = f\phi(fY) \quad f\phi^d \leq 1$$

Además, Ladevèze y Le Dantec incluyeron el daño y la inelasticidad como parte del criterio de fallo, mediante la formulación de un modelo de plasticidad acoplado al daño. El modelo de plasticidad con endurecimiento isótropo, específicamente introduce las deformaciones inelásticas en el compuesto

producidas por la fisuración y por la fricción del deslizamiento en la interfaz, no obstante, las deformaciones inelásticas no implican plasticidad en la fibra [46].

En este modelo se considera el proceso de fisuración de la matriz y la pérdida de adherencia fibra/matriz dentro del compuesto; pero al estar formulado a la escala de una lámina no involucra los fenómenos que se presentan fuera del plano de la lámina, como la delaminación, tampoco contempla mecanismos bajo estados de carga multiaxial. Frente a esta limitación, Daudeville et al. [46] integraron el modelo de Ladevèze y Le Dantec [45] con el modelo de interfaz interlaminar de Allix y Ladevèze [50], con el fin de relacionar el comportamiento de cada lámina con el comportamiento de la interfaz lámina/lámina, y así, introducir la transferencia de tensiones y desplazamientos fuera del plano entre las láminas.

Posteriormente, Ladevèze et al. [49] adaptaron el modelo para una lámina al espacio tridimensional, y lo acoplaron al modelo de interfaz interlaminar [50] para simular el comportamiento del laminado como resultado del comportamiento de cada una de las láminas que lo componen y su interacción. Ladevèze et al. [49] con este modelo representaron el inicio de las macro-fisuras y su propagación, sin embargo, su aplicación genera costos computacionales altos en tiempo. Además los modelos propuestos por Ladevèze et al. [45-50] requieren una base de datos de ensayos amplia, lo que implica un trabajo experimental dispendioso [43].

- *Modelo de Matzenmiller, Lubliner y Taylor.*

En el modelo propuesto por Matzenmiller et al. [9], se formula un modelo constitutivo de daño anisótropo para representar el comportamiento elástico-frágil de los materiales compuestos reforzados con fibras. En este modelo se enfocan en definir una relación entre el daño del material y las propiedades elásticas de una lámina de un compuesto para determinar estado de tensiones y deformaciones del compuesto. Matzenmiller et al. [9] consideran cuatro modos de fallo: (i) la rotura de la fibra, (ii) el pandeo y la torsión de la fibra, (iii) la fisuración de la matriz bajo tracción y corte, y, (iv) aplastamiento de la matriz por compresión y cortante.

En este modelo el daño se introduce dentro de la ley constitutiva por medio de un tensor complementario para la lámina con daño  $\hat{\mathbb{H}}$  para relacionar el daño con la pérdida de la rigidez del compuesto. El tensor complementario es el resultado de acoplar el tensor de daño  $\mathbb{M}$  con el tensor de los parámetros mecánicos elásticos del compuesto  $\mathbb{H}$ .

$$(4:28) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &\equiv \mathbb{H} : \bar{\boldsymbol{\sigma}} \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &\equiv \mathbb{M} : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \hat{\mathbb{H}} : \boldsymbol{\sigma}$$

El tensor de daño  $\mathbb{M}$  asocia las tensiones del material con daño  $\boldsymbol{\sigma}$  con las tensiones efectivas del material sin daño  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$ . El tensor  $\mathbb{H}$  es el inverso del tensor constitutivo del material compuesto sin daño, con este tensor se determina el tensor de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  en función del tensor de tensiones del material con daño  $\boldsymbol{\sigma}$ .

El modelo fue formulado para el estado plano de tensiones, donde los operadores de las variables de daño  $\phi^d$ , de los efectos del daño  $\mathbb{M}$  y de los parámetros mecánicos elásticos  $\mathbb{H}$ , bajo la notación de Voigt quedan expresados como:

$$(4:29) \quad \phi^d = \begin{bmatrix} \phi_{11}^d \\ \phi_{22}^d \\ \phi_{12}^d \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\phi_{11}^d} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-\phi_{22}^d} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1-\phi_{12}^d} \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_{11}} & \frac{-\nu_{21}}{E_{11}} & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_{22}} & \frac{1}{E_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$$

La evolución de las variables de daño en la dirección axial y transversal del laminado ( $\phi_{11}^d$  y  $\phi_{22}^d$ ) se relacionan con los estados de carga de compresión y de tracción, y  $\phi_{12}^d$  se vincula con el cortante. Los parámetros elásticos de la lámina sin daño son los módulos de Young en la dirección axial y transversal del laminado ( $E_{11}$  y  $E_{22}$ ), el módulo de corte ( $G_{12}$ ) y las relaciones de Poisson ( $\nu_{12}$  y  $\nu_{21}$ ).

Para diferenciar los cuatro mecanismos de daño, el criterio está conformado por dos superficies de fluencia en el espacio de tensiones  $\sigma$  con su correspondiente umbral de daño  $r$ : una superficie  $f_{\parallel}(\sigma_{11}, \phi_{11}^d, r_{\parallel})$ , que define la evolución de las tensiones en la dirección paralela a la fibra y que está asociada a los mecanismos de fallo en las fibras (i y ii); y otra superficie  $f_{\perp}(\sigma_{22}, \phi_{22}^d, \sigma_{12}, \phi_{12}^d, r_{\perp})$ , que define la evolución de las tensiones en la dirección transversal a la fibra y que se relaciona con los mecanismos de fallo en la matriz (iii y iv). En forma análoga, se plantean dos superficies en el espacio de deformaciones  $\epsilon$ ,  $g_{\parallel}(\epsilon, \phi^d, r_{\parallel})$  y  $g_{\perp}(\epsilon, \phi^d, r_{\perp})$ .

La evolución de las variables de daño depende de las fuerzas termodinámicas  $Y$  debidas por la energía de deformación disipada durante el avance del daño.

$$(4:30) \quad Y = \frac{\partial U_e(\epsilon, \phi^d)}{\partial \phi^d}$$

Para garantizar que la disipación de energía interna sea no negativa, en el modelo se determina un potencial de daño  $Q_i(Y, \phi^d)$  por cada superficie  $i$ , tal que la evolución de las variables de daño corresponden a:

$$(4:31) \quad d\phi^d = \sum_i \bar{\gamma}_i(Y, \phi^d) \left( \frac{\partial Q_i}{\partial Y} \otimes \frac{\partial g_i}{\partial \epsilon} \right) d\epsilon \quad i = \{\parallel, \perp\}$$

las funciones de crecimiento  $\bar{\gamma}_i(Y, \phi^d)$  son monótonas crecientes, las cuales son definidas experimentalmente con pruebas uniaxiales.

Matzenmiller et al. [9] no introdujeron de forma explícita el arrancamiento de la fibra y la pérdida de adherencia fibra-matriz. No obstante, al analizar el compuesto desde un enfoque fenomenológico, el DFM se trata como un fenómeno intrínseco dentro del daño. El DFM lo relacionan con de los modos de fallo, de una parte, con el modo (i) porque con la rotura, la fibra se desliza dentro de la matriz, y de otra, con el modo (iii), debido a que las fisuras que se propagan en la dirección de la orientación de la fibra, suscitan la separación entre la fibra y la matriz. Este modelo fue propuesto para una lámina del laminado, por ello no tienen en cuenta los efectos fuera del plano de la lámina y su interacción dentro del laminado.

Los modelos que consideran el compuesto como un material homogéneo como es el caso de los dos tipos de modelos descritos anteriormente, han sido formulados

para facilitar la aplicación e implementación en los códigos de elementos finitos estándares, pero tienen la desventaja que no permiten obtener información específica de la evolución de los fenómenos que se presentan en cada componente, como tampoco de sus efectos en la pérdida de adherencia entre los dos materiales y su influencia en el comportamiento del compuesto.

#### 4.3.2.2 Modelos constitutivos basados en las teorías de mezclas para materiales ortótropos

Como una alternativa, para involucrar los fenómenos que se presentan en los componentes de una forma integral en el material compuesto, un grupo de modelos utilizan las leyes constitutivas para definir el comportamiento mecánico de los componentes, y las integran por medio de las teorías de mezclas al análisis del comportamiento global del compuesto.

Este tipo de modelos hacen posible descomponer las variables de estado del compuesto en función de sus materiales componentes (por ejemplo, las tensiones, las deformaciones y el daño entre otros). Por lo tanto, las leyes constitutivas y los criterios de fallo se formulan al nivel de cada componente, para determinar el comportamiento del compuesto [43].

- *Modelo de Hassan y Batra*

Uno de los modelos que considera el DFM y lo integra a una teoría de mezclas, es el modelo de evolución del daño en compuestos con matrices poliméricas, propuesto por Hassan y Batra [51]. Ellos representan tres modos de daño a través del desarrollo de variables internas escalares, correspondientes al daño en la fibra  ${}^f\phi^d$  (por fractura, pandeo y arrancamiento), a la fisuración en la matriz  ${}^m\phi^d$  y a la pérdida de adherencia fibra-matriz  ${}^{db}\phi^d$ . Con respecto a los ejes principales del compuesto laminado, las variables  ${}^f\phi^d$ ,  ${}^m\phi^d$  y  ${}^{db}\phi^d$  se supone están relacionadas respectivamente con  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  y  $\varepsilon_{12}$ .

La dependencia de los parámetros del material con las variables de daño es determinada a través de una aproximación de la mecánica de materiales con la teoría de mezclas formulada por Herakovich, donde:

- En la dirección axial del laminado  ${}^cE_{11} = {}^fk^f E_{11} (1 - {}^f\phi^d) + {}^mk^m E_{11}$
- En la dirección transversal  $\frac{1}{{}^cE_{22}} = \frac{{}^fk}{{}^fE_{22}} + \frac{{}^mk}{{}^mE_{22} (1 - {}^m\phi^d)}$
- En el plano de corte  $\frac{1}{{}^cG_{12}} = \frac{{}^fk}{{}^fG_{12} (1 - {}^{db}\phi^d)} + \frac{{}^mk}{{}^mG_{12}}$

Siendo  $E_{11}$  y  $E_{22}$  los módulos de Young en la dirección axial y transversal del laminado,  $G_{12}$  el módulo de corte,  $k$  la participación volumétrica, y los superíndices  $c, f, m$  y  $db$  indican el compuesto, la fibra, la matriz y la interfaz.

En el modelo de Hassan y Batra, las variables de daño están en función de la fuerza termodinámica  ${}^nY$  que tiene cada componente

$$(4:32) \quad {}^n\phi^d = {}^n\varphi({}^nY) \quad n = \{m, f, db\}$$

Las funciones que definen el daño  ${}^n\varphi()$  se determinan a partir de las curvas tensión deformación de ensayos uniaxiales con aplicación de carga axial, transversal y excéntrica. Las fuerzas termodinámicas  ${}^nY$  se determinan en función de la disipación de la energía de deformación, tal que:

$$(4:33) \quad {}^nY = -\frac{1}{2} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial {}^n\phi^d} \varepsilon_{ij}$$

En este modelo, también involucran la delaminación, la cual es representada por medio de una superficie de daño que evoluciona en función de las tensiones tangenciales. El modelo de Hassan y Batra tiene como desventaja que no se consideró que el daño afecta las relaciones de Poisson, con lo cual se está sobrestimando los efectos de la interacción entre la fibra y la matriz; además solo atribuye los efectos del DFM al corte, sin considerar la influencia de otros factores.

- *Modelo de Voyiadjis y Park*

Voyiadjis y Park [52] inicialmente presentaron un modelo de daño anisótropo asociado a la plasticidad en la matriz para compuestos con matrices metálicas reforzados con fibras, en el que obtienen el tensor de rigidez elasto-plástico para el compuesto, en función de la evolución de las variables de daño en el compuesto. Voyiadjis y Park combinan tres modelos de daño correspondientes a la fisuración en la matriz, a la rotura en la fibra y a la pérdida de adherencia en la interfaz fibra-matriz, sin embargo, este modelo se limitó al análisis de una lámina simple.

Posteriormente, Voyiadjis y Park [53] extendieron el modelo de daño anisótropo con aplicación tridimensional. En este modelo introducen tres tensores de daño de segundo orden que involucran en forma separada los fenómenos como la fisuración y el crecimiento de vacíos en la matriz  ${}^m\phi^d$ , la fractura de la fibra  ${}^f\phi^d$ , el deslizamiento de la interfaz y la delaminación  ${}^{db}\phi^d$ . Asimismo, en este modelo se establece que el comportamiento de la matriz está definido por el daño y la plasticidad, mientras que el comportamiento de la fibra y de la interfaz está determinado por el daño.

Como se muestra en la figura 4-13, en su modelo Voyiadjis y Park utilizan tres configuraciones una real  $\Omega$  y dos configuraciones ficticias, correspondientes a un material sin daño  $\tilde{\Omega}$  y a un material sin daño en la interfaz fibra-matriz pero con daño en la matriz y la fibra  $\tilde{\tilde{\Omega}}$ . Para interrelacionar los tres espacios, se propone un mapeo en el espacio de tensiones a través de un tensor de efectos del daño global del compuesto  $\mathbb{M}$ , el cual se descompone en dos tensores, uno de efectos del daño en la fibra y en la matriz  $\tilde{\mathbb{M}}$  y otro de efectos del daño en la interfaz  ${}^{db}\mathbb{M}$ .

$$(4:34) \quad \mathbb{M} \equiv \tilde{\mathbb{M}} : {}^{db}\mathbb{M} \quad \Rightarrow \quad M_{ijkl} = \tilde{M}_{ijrs} {}^{db}M_{rskl}$$

Esta descomposición del tensor de efectos del daño global del compuesto permite que las tensiones efectivas del material ficticio sin daño  $\bar{\sigma}$  se puedan relacionar, tanto con las tensiones nominales del material dañado  $\sigma$ , como con las tensiones

efectivas del material ficticio sin daño en la interfaz  $\tilde{\sigma}$ .

$$(4:35) \quad \bar{\sigma} \equiv \tilde{\mathbb{M}} : \sigma \quad \bar{\sigma} \equiv \tilde{\mathbb{M}} : \tilde{\sigma}$$

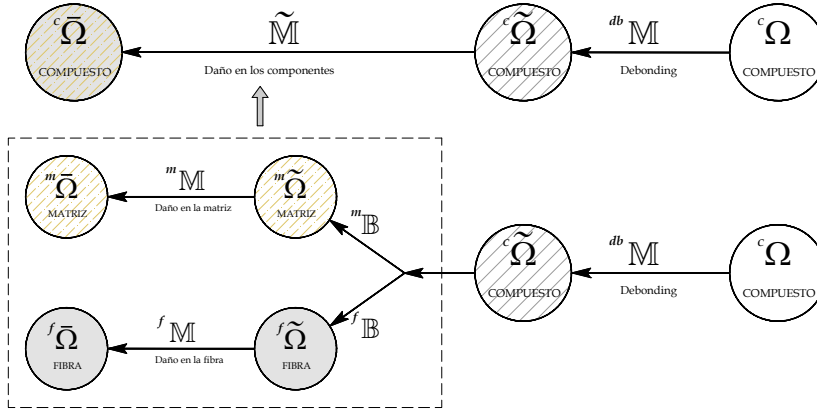


FIGURA 4-13 ESQUEMA REPRESENTATIVO DEL MODELO DE VOYIADJIS Y PARK

Voyiadjis y Park plantean analizar el comportamiento de cada componente por separado, en la configuración de ficticia del material sin daño ( ${}^m\bar{\Omega}$ ,  ${}^f\bar{\Omega}$ ), y definen el comportamiento del compuesto a través de la teoría de mezclas propuesta por Dvorak y Bahei-El-Din [54]. La teoría de mezclas de Dvorak y Bahei-El-Din [54] parte de los principios que cada material componente contribuye en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica, y, que en cada volumen infinitesimal del compuesto participan en conjunto todos sus componentes. Con esta teoría de mezclas, en el espacio ficticio sin daño  ${}^m\bar{\Omega}$ , los tensores de tensiones  $\bar{\sigma}$  y deformaciones  $\bar{\epsilon}$  del compuesto  $c$  dependen del comportamiento de la matriz  $m$  y de la fibra  $f$ :

$$(4:36) \quad \begin{aligned} d^c \bar{\sigma} &\equiv {}^m \bar{k} d^m \bar{\sigma} + {}^f \bar{k} d^f \bar{\sigma} &\Rightarrow & d^c \bar{\sigma}_{ij} = {}^m \bar{k} d^m \bar{\sigma}_{ij} + {}^f \bar{k} d^f \bar{\sigma}_{ij} \\ d^c \bar{\epsilon} &\equiv {}^m \bar{k} d^m \bar{\epsilon} + {}^f \bar{k} d^f \bar{\epsilon} &\Rightarrow & d^c \bar{\epsilon}_{ij} = {}^m \bar{k} d^m \bar{\epsilon}_{ij} + {}^f \bar{k} d^f \bar{\epsilon}_{ij} \end{aligned}$$

${}^m \bar{k}$  y  ${}^f \bar{k}$  son la participación volumétrica de los componentes en el espacio ficticio sin daño. Asimismo, las deformaciones en el espacio ficticio sin daño están conformadas por una parte elástica  $e$  y otra plástica  $p$ , como se señala en (4:37).

$$(4:37) \quad d^c \bar{\epsilon} = d^c \bar{\epsilon}^e + d^c \bar{\epsilon}^p \quad d^m \bar{\epsilon} = d^m \bar{\epsilon}^e + d^m \bar{\epsilon}^p \quad d^f \bar{\epsilon} = d^f \bar{\epsilon}^e$$

Se resalta que esta teoría no considera un estado de isodeformación entre los componentes a diferencia de lo supuesto con la teoría de mezclas clásica.

Las relaciones de las deformaciones del material dañado  $\epsilon$  con las deformaciones del material ficticio sin daño  $\bar{\epsilon}$  [52], y, con las deformaciones del material ficticio sin daño en la interfaz  $\tilde{\epsilon}$  [53], corresponden a:

$$(4:38) \quad \begin{aligned} d^c \bar{\epsilon}^e &\equiv \mathbb{M}^{-1} : d^c \epsilon^e & d^c \tilde{\epsilon} &\equiv d^{db} \mathbb{M}^{-1} : {}^c \epsilon^e + {}^{db} \mathbb{M}^{-1} : d^c \epsilon \\ d^m \bar{\epsilon}^e &\equiv {}^m \mathbb{M}^{-1} : d^m \epsilon^e & d^m \bar{\epsilon} &\equiv d^m \mathbb{M}^{-1} : {}^m \tilde{\epsilon}^e + {}^m \mathbb{M}^{-1} : d^m \tilde{\epsilon} \\ d^f \bar{\epsilon} &\equiv {}^f \mathbb{M}^{-1} : d^f \epsilon \end{aligned}$$

Partiendo de la interacción planteada en la ecuación (4:36), el tensor de efectos del

daño en el compuesto  $\tilde{\mathbb{M}}$  es calculado en función de los tensores de daño ( ${}^m\mathbb{M}$ , y,  ${}^f\mathbb{M}$ ), de los tensores de los factores de concentración de tensiones ( ${}^m\mathbb{B}$ , y,  ${}^f\mathbb{B}$ ), y de la participación volumétrica de los dos materiales en la configuración ficticia sin daño ( ${}^m\bar{k}$  y  ${}^f\bar{k}$ ) [55].

$$(4:39) \quad \tilde{\mathbb{M}} \equiv {}^m\bar{k} {}^m\mathbb{M} : {}^m\mathbb{B} + {}^f\bar{k} {}^f\mathbb{M} : {}^f\mathbb{B} \Rightarrow \tilde{M}_{ijrs} = {}^m\bar{k} {}^mM_{ijpq} {}^mB_{pqrs} + {}^f\bar{k} {}^fM_{ijpq} {}^fB_{pqrs}$$

Los coeficientes de participación volumétrica  ${}^m\bar{k}$  y  ${}^f\bar{k}$  van cambiando de acuerdo con el estado del daño de cada componente, de tal modo que:

$$(4:40) \quad {}^n\bar{k} = \frac{{}^nk(1 - {}^n\phi_{eq}^d)}{{}^mk(1 - {}^m\phi_{eq}^d) + {}^fk(1 - {}^f\phi_{eq}^d)} \Rightarrow {}^n\phi_{eq}^d = \sqrt{{}^n\phi^d : {}^n\phi^d} \quad n = \{m, f\}$$

${}^nk$  corresponde a la participación volumétrica obtenida en la fabricación de cada componente  $n$ ,  $m$  y  $f$  son la matriz y la fibra respectivamente.

El tensor de efectos del daño  ${}^n\mathbb{M}$  se expresa en función del tensor de daño  ${}^n\phi^d$  como se indica en la ecuación (4:41), lo que evidencia que con el modelo de Voyiadjis y Park, las tensiones efectivas pueden no ser simétricas [56].

$$(4:41) \quad {}^nM_{ijkl} = \left( \delta_{ik} - {}^n\phi_{ik}^d \right)^{-1} \delta_{jl} \quad n = \{m, f, db\}$$

$\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker,  $m$ ,  $f$  y  $db$  identifican los componentes: matriz, fibra e interfaz. Asimismo, la ley de evolución de cada tipo de daño se plantea a través de un tensor de cuarto orden de las fuerzas termodinámicas  ${}^n\mathbf{Y}$  como [53]:

$$(4:42) \quad d^n\phi^d \equiv {}^n\mathbf{Y} : d^n\boldsymbol{\sigma} \Rightarrow d^n\phi_{ij}^d = {}^nY_{ijkl} d^n\sigma_{kl} \quad n = \{m, f, db\}$$

Al relacionar el daño y la elasto-plasticidad en la matriz, el modelo de Voyiadjis y Park tiene particular importancia para compuestos con matrices metálicas, porque en un proceso de carga este tipo de compuestos presenta daño y plasticidad, con cargas menores a la de falla [53]. Pero este modelo es computacionalmente costoso, debido a que requiere un gran número de parámetros de los materiales y no existe una metodología específica para encontrar los parámetros desde los datos experimentales [57]; además este modelo no está formulado para estudiar con otro tipo de materiales compuestos, ya que no involucra la plasticidad en la fibra. El modelo de Voyiadjis y Park ha sido la base para el trabajo de otros modelos como el de Raghavan y Ghosh [56] y Barbero et al. [58].

- *Modelo de Barbero, Abdelal y Cáceres*

Barbero et al. [58] partiendo de la combinación de los tres modos de daño de Voyiadjis y Park [53] propusieron un modelo para la evolución del daño en compuestos con matrices poliméricas. En la figura 4-14 se muestra el esquema del modelo, en el que se combinan un modelo de interfaz con los modelos constitutivos de daño isotrópico para la matriz y de la fibra.

Con el objetivo de preservar la simetría del tensor de tensión efectivas proponen calcular el tensor de efectos del daño  ${}^n\mathbb{M}$  en función del tensor de tensión  ${}^n\boldsymbol{\sigma}$  y del tensor de daño de segundo orden  ${}^n\phi^d$ , de la siguiente forma:

$$(4:43) \quad {}^n M_{ijkl} = \frac{\zeta_{ijkl} \langle {}^n \sigma_{kl} \rangle}{1 - {}^n \phi_{ij}^d} + \underbrace{\frac{\zeta_{ijkl} \langle -{}^n \sigma_{kl} \rangle}{1 - c_c {}^n \phi_{ij}^d}}_{\text{Compresión}} + \underbrace{\frac{I_{ijkl} - \zeta_{ijkl}}{2} \left[ \frac{1}{1 - c_s {}^n \phi_{ii}^d} + \frac{1}{1 - c_s {}^n \phi_{ii}^d} \right]}_{\text{Cortante}}$$

siendo  $\zeta_{ijkl}=1$  si  $i=j=k=l=1$ , de otra forma subindicial  $\zeta_{ijkl}=0$ ,  $\langle x \rangle$  es la función de McAully. Además a través de los coeficientes de la fisura cerrada por compresión ( $0 < c_c < 1$ ) y por cortante ( $0 < c_s < 1$ ), diferencian los efectos que producen en las secciones fisuradas la tracción, la compresión y el cortante.

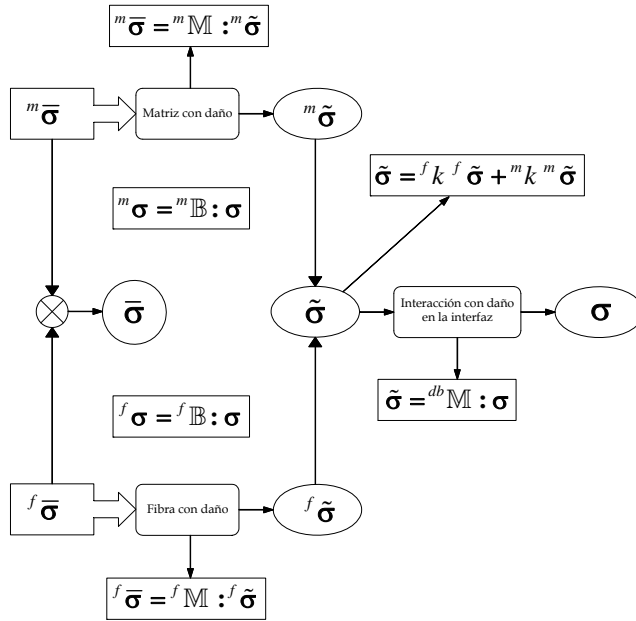


FIGURA 4-14 ESQUEMA REPRESENTATIVO DEL MODELO DE BARBERO ET AL. [43]

Barbero et al. [58] proponen una superficie de daño para limitar el espacio de las fuerzas termodinámicas  $\mathbf{Y}$ , donde una vez se alcanza la superficie de daño, el daño se acumula a lo largo de la normal a la superficie de umbral de daño  ${}^n f$ :

$$(4:44) \quad {}^n f({}^n \mathbf{Y}, {}^n \kappa^d) = \sqrt{{}^n \mathbf{Y} : {}^n \mathbf{J} : {}^n \mathbf{Y}} - ({}^n \kappa^d + {}^n \phi_o) \quad n = \{m, f, db\}$$

siendo  ${}^n \mathbf{Y}$  el tensor de segundo orden del componente  $n$ ;  ${}^n \mathbf{J}$  un tensor de segundo orden, donde sus coeficientes son definidos en términos de la rigidez y de la resistencia de los materiales;  ${}^n \kappa^d$  y  ${}^n \phi_o$  son el parámetro de endurecimiento y el umbral de daño en el espacio de fuerzas.  ${}^n \mathbf{Y}$  como se muestra en la ecuación (4:33) y (4:45) depende de la energía libre  $\Psi$  y del tensor de daño  ${}^n \phi^d$ .

$$(4:45) \quad {}^n \mathbf{Y} = \frac{\partial \Psi}{\partial {}^n \phi^d} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial {}^n \phi^d} [\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}]$$

$\mathbb{C}$  es el tensor constitutivo del espacio con daño, calculado como  $\mathbb{C} = \mathbb{M}^{-1} : \bar{\mathbb{C}} : \mathbb{M}^{-1}$ .

La variación del daño esta controlada por el escalar no negativo denominado



parámetro de consistencia  ${}^n\dot{\mu}$  y la normal a la superficie de umbral de daño  ${}^nf$ .

$$(4:46) \quad d^n\phi^d \equiv {}^n\dot{\mu} \frac{\partial^n f}{\partial^n \mathbf{Y}} \quad \Rightarrow \quad d^n\phi_{ij}^d = {}^n\dot{\mu} \frac{\partial^n f}{\partial^n Y_{ij}} \quad n = \{m, f, db\}$$

Este modelo tiene la ventaja que la evolución del daño es formulado para cada componente y que los parámetros de los materiales requeridos son obtenidos con ensayos estándar. Sin embargo, Barbero et al. [58] advierten que la implementación de este modelo resulta computacionalmente costosa.

Los modelos constitutivos formulados para materiales compuestos ortótropos acá mostrados, aunque son apropiados para el análisis compuesto laminado con un comportamiento específico de los componentes, no se pueden generalizar para aplicarlos en el estudio de materiales compuestos con otro tipo de anisotropía o en compuestos en que los componentes presenten un comportamiento diferente.

#### 4.3.2.3 Modelos constitutivos basados en las teorías de mezclas para materiales compuestos anisótropos

La anisotropía en los materiales componentes del compuesto conlleva a que los fenómenos como la microfisuración o la plasticidad, se presenten en forma direccionada; lo cual a causa de la pérdida de compatibilidad cinemática entre los componentes incide en que ocurran diferentes efectos direccionados en las interfaces como el deslizamiento fibra/matriz o la delaminación [36]. Como una alternativa para involucrar la anisotropía de los materiales componentes y los efectos del DFM en el comportamiento del compuesto, algunos modelos han utilizado la teoría de mezclas clásica complementada con otras herramientas, entre los mas destacables, están los modelos de Oller et al. [36] y de Car et al. [59].

- *Anisotropía y DFM en la teoría de mezclas clásica*

En lo que respecta a la anisotropía del compuesto, en las teorías de mezclas, la anisotropía es la respuesta de la asociación de los comportamientos de cada material componente; no obstante la anisotropía de los componentes es introducida por medio de modelos constitutivos formulados particularmente para un tipo de material o a través de la implementación de herramientas que permitan adaptar los resultados de los modelos constitutivos de materiales isótropos al comportamiento de un material anisótropo.

Los modelos que se recopilan en este párrafo, introducen la anisotropía de los materiales componentes en el análisis de los materiales compuestos utilizando el mapeo de espacios propuesto por Oller et al. [60]. Donde el uso de esta herramienta como complemento de las teorías de mezclas, ha permitido en el análisis del comportamiento del compuesto se introduzca la anisotropía de los materiales componentes para definir la anisotropía del compuesto.

Como se muestra en la figura 4-15, el mapeo de espacios para el n-ésimo material componente del compuesto considera los espacios de tensiones del material anisótropo real  $\boldsymbol{\sigma}$  y de un material isótropo ficticio  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  y los correspondientes espacios de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  y  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ . La transformación del espacio del material

anisótropo real al espacio del material isótropo ficticio, se realiza a través de los tensores simétricos de cuarto orden de tensiones  ${}^n\mathbb{A}^\sigma$  y deformaciones  ${}^n\mathbb{A}^\varepsilon$  [61].

$$(4:47) \quad \begin{aligned} {}^n\bar{\sigma} &\equiv {}^n\mathbb{A}^\sigma : {}^n\sigma &\Rightarrow & {}^n\bar{\sigma}_{ij} = {}^nA_{ijkl}^\sigma {}^n\sigma_{kl} \\ {}^n\bar{\varepsilon} &\equiv {}^n\mathbb{A}^\varepsilon : {}^n\varepsilon &\Rightarrow & {}^n\bar{\varepsilon}_{ij} = {}^nA_{ijkl}^\varepsilon {}^n\varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

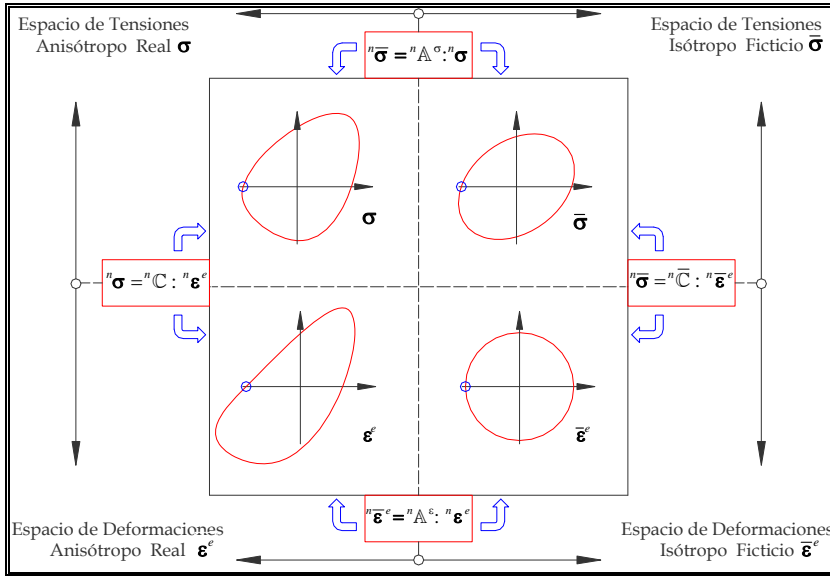


FIGURA 4-15 RELACIÓN ENTRE LOS ESPACIOS ISÓTROPICO FICTICIO Y ANISÓTROPICO REAL EN PEQUEÑAS DEFORMACIONES PARA EL N-ÉSIMO MATERIAL COMPONENTE DEL COMPUESTO [61]

Considerando que el comportamiento mecánico del compuesto corresponde a la combinación de la respuesta de sus componentes, en las teorías de mezclas, el comportamiento de cada componente está definido por la ecuación constitutiva y controlado por la ecuación de cierre. Específicamente, la ecuación constitutiva secante de la teoría de mezclas clásica, está dada como:

$$(4:48) \quad {}^c\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^nk {}^n\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^nk {}^nC_{ijkl} {}^n\varepsilon_{kl} = {}^cC_{ijkl} {}^c\varepsilon_{kl}$$

$\sigma$  es el tensor de tensiones,  $\mathbb{C}$  es el tensor constitutivo,  $\varepsilon^e$  es el tensor de deformaciones elásticas del compuesto  $c$  y del  $n$ -ésimo componente  $n$ .  ${}^nk$  corresponde a la participación volumétrica con la que se relaciona el volumen infinitesimal del  $n$ -ésimo componente  $d^nV$  con el volumen infinitesimal del material compuesto  $d^cV$ , la cual no varía con el cambio de configuración [62].

$$(4:49) \quad {}^nk = \frac{d^nV}{d^cV} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{nc} {}^nk = 1$$

Asimismo, la teoría de mezclas clásica parte de la hipótesis que la adherencia es perfecta entre los componentes [63], por ello la ecuación de cierre está definida por los tensores de deformación  $\varepsilon$  de todos los componentes  $nc$  del compuesto como:

$$(4:50) \quad {}^c\varepsilon_{ij} \equiv {}^1\varepsilon_{ij} = \dots = {}^n\varepsilon_{ij} = \dots = {}^{nc}\varepsilon_{ij}$$

Teniendo en cuenta que con la ecuación de cierre se establecen las condiciones cinemáticas entre los componentes, se evidencia que la teoría de mezclas clásica, no se considera la pérdida de adherencia entre la matriz y la fibra, por lo tanto, no involucra los efectos del DFM dentro del comportamiento del compuesto. Para introducir el DFM en el comportamiento global del material compuesto, los modelos que han utilizado la teoría de mezclas clásica han definido una ecuación de cierre diferente o han realizado una corrección en las propiedades de los componentes manteniendo la ecuación de cierre [36; 59].

- *Modelo de Oller, Oñate, Miquel y Botello*

Oller et al. [36] plantearon un modelo con la teoría de mezclas clásica, en el que analizan el comportamiento de cada componente del compuesto con el modelo constitutivo de daño plástico propuesto por Oller et al. [60], y en el que involucran el DFM a través de las deformaciones plásticas para cumplir con la ecuación de cierre.

$$(4:51) \quad {}^c \varepsilon_{ij} = {}^n \varepsilon_{ij} = {}^n \varepsilon_{ij}^e + {}^n \varepsilon_{ij}^p + {}^n \varepsilon_{ij}^\theta \Rightarrow \begin{matrix} {}^n \varepsilon_{ij}^e = {}^c \varepsilon_{ij} - {}^n \varepsilon_{ij}^p - {}^n \varepsilon_{ij}^\theta \\ {}^c \varepsilon_{ij}^e = {}^c \varepsilon_{ij} - {}^c \varepsilon_{ij}^p - \varepsilon_{ij}^\theta \end{matrix} \quad n \in (1, nc)$$

las deformaciones elásticas  $\varepsilon^e$ , plásticas  $\varepsilon^p$  y de origen térmico  $\varepsilon^\theta$  son diferentes para cada componente, pero se condiciona que las deformaciones totales  $\varepsilon$  sean iguales.

La energía libre de Helmholtz  $\Psi$  por unidad de volumen del compuesto para la teoría de mezclas clásica puede escribirse como:

$$(4:52) \quad {}^c m {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^c \alpha, {}^c \beta) = {}^c m {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, \underbrace{{}^c \varepsilon_{ij}^p, {}^c \alpha, {}^c \beta}_{c\xi}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, \underbrace{{}^n \varepsilon_{ij}^p, {}^n \alpha, {}^n \beta}_{n\xi})$$

en la cual  $c$ ,  $n$  y  $nc$  representan el compuesto, el  $n$ -ésimo componente, y el número de componentes del compuesto,  $m$  es la masa,  $\theta$  es la temperatura,  $\alpha$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\beta$  es el grupo de variables internas de daño y  $\xi$  es el grupo total de variables internas que controlan la evolución de las tensiones.

Siguiendo la metodología propuesta por Lubliner et al. [64] del modelo de daño plástico para un material, en este modelo se define la ecuación constitutiva secante para el compuesto a través de la desigualdad de Clausius-Planck así :

$$(4:53) \quad {}^c \sigma_{ij} = {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^c \xi)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^n \xi)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \sigma_{ij}$$

Además, con la desigualdad de Clausius-Planck, la disipación mecánica  $\Xi_m$  es:

$$(4:54) \quad \Xi_m = {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^c \xi)}{\partial {}^c \xi} \cdot {}^c \dot{\xi} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \cdot {}^n \dot{\xi} \leq 0$$

Con la expresión (4:53) se establece que el tensor constitutivo tangente  ${}^c \mathbb{C}$  es:

$$(4:55) \quad {}^c C_{ijkl} = \frac{\partial {}^c \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = {}^c m \frac{\partial^2 {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^c \xi)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial^2 {}^n \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \theta, {}^n \xi)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl}$$

Por lo tanto, la ecuación constitutiva secante para el material compuesto (4:53) puede ser expresada como:

$$(4:56) \quad {}^c\sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl}({}^n \beta, \theta) {}^n \varepsilon_{kl}^e = {}^c C_{ijkl}({}^n \beta, \theta) {}^c \varepsilon_{kl}^e$$

Con el modelo de Oller et al. [36], al aplicar el modelo de daño plástico en cada componente dentro de la teoría de mezclas clásica, introducen en el análisis de los materiales compuestos, los efectos del DFM a través de la plasticidad, y a la vez involucran con el daño la fisuración o la fractura de los componentes .

- *Modelo de Car, Oller y Oñate*

Car et al. [61] propusieron un modelo “no local material” para introducir el DFM en la teoría de mezclas clásica, se basaron en que la transferencia de esfuerzos entre la fibra y la matriz cambia, cuando la matriz se plastifica, y en que el deslizamiento fibra/matriz es irrecuperable. Por lo tanto, con el propósito controlar el estado de tensiones en la fibra a partir de que la matriz alcance un estado plástico, en este modelo utilizan el modelo constitutivo elasto-plástico formulado por Car et al. [62].

Para introducir el DFM dentro de la formulación de la teoría de mezclas clásica manteniendo la ecuación de cierre, Car et al. [61], realizan una corrección de las propiedades en cada componente. En la configuración espacial plantean que:

$$(4:57) \quad {}^c \mathbf{e}_{ij} \equiv \underbrace{{}^1 r ({}^1 \mathbf{e}_{ij}^e + {}^1 \mathbf{e}_{ij}^p)}_{{}^1 \hat{\mathbf{e}}_{ij}} = \dots = \underbrace{{}^n r ({}^n \mathbf{e}_{ij}^e + {}^n \mathbf{e}_{ij}^p)}_{{}^n \hat{\mathbf{e}}_{ij}} = \dots = \underbrace{{}^{nc} r ({}^{nc} \mathbf{e}_{ij}^e + {}^{nc} \mathbf{e}_{ij}^p)}_{{}^{nc} \hat{\mathbf{e}}_{ij}}$$

Las deformaciones de Almansi  ${}^n \mathbf{e}$  de cada componente son diferentes y se afectan por el factor de proporción por DFM  ${}^n r$ , para que sean equivalentes a las deformaciones del compuesto  ${}^c \mathbf{e}$ . Con esta formulación a través del tensor equivalente de deformaciones del n-ésimo componente  ${}^n \hat{\mathbf{e}}$  se garantiza que se cumpla con la ecuación de cierre para utilizar la formulación de la teoría de mezclas clásica.

Bajo este lineamiento, el estado de tensiones en función del tensor de tensiones de Kirchhoff  ${}^n \boldsymbol{\tau}$ , se define como:

$$(4:58) \quad {}^n \boldsymbol{\tau}_{ij} = {}^n \mathbf{c}_{ijkl} {}^n \hat{\mathbf{e}}_{kl}^e = {}^n \mathbf{c}_{ijkl} ({}^n \hat{\mathbf{e}}_{kl} - {}^n \hat{\mathbf{e}}_{kl}^p) = \underbrace{{}^n r {}^n \mathbf{c}_{ijkl}}_{{}^n \hat{\mathbf{c}}_{ijkl}} ({}^n \mathbf{e}_{kl} - {}^n \mathbf{e}_{kl}^p) = {}^n \hat{\mathbf{c}}_{ijkl} ({}^n \mathbf{e}_{kl} - {}^n \mathbf{e}_{kl}^p)$$

por lo tanto, con el factor  ${}^n r$  se define un nuevo tensor constitutivo  ${}^n \hat{\mathbf{c}}$  del n-ésimo componente, con el cual se calculan las tensiones en función de las deformaciones efectivas de los componentes. La ecuación constitutiva corresponde a:

$$(4:59) \quad {}^n \boldsymbol{\tau} = {}^n \hat{\mathbf{c}} : {}^n \hat{\mathbf{e}}^e = {}^n \hat{\mathbf{c}} : ({}^n \mathbf{e} - {}^n \mathbf{e}^p)$$

en esta ecuación, el movimiento relativo entre la fibra y la matriz se representa a través de las deformaciones plásticas.

La determinación del inicio de este fenómeno se realiza mediante una condición de resistencia, que compara la tensión efectiva de un punto de Gauss con la resistencia de la fibra dentro del compuesto [1]. Debido al mecanismo de transmisión de

tensiones entre la fibra y la matriz, la capacidad de las fibras está limitada por el material menos resistente; lo que implica que la capacidad de la fibra dentro de la matriz  ${}^f f^R$ , corresponda a la menor resistencia nominal de los componentes. Por lo tanto, para un material compuesto por dos fases (fibra y matriz), la resistencia de la fibra dentro de la matriz  ${}^f f^R$  equivale a [59]:

$$(4:60) \quad {}^f f^R = \min \left\{ {}^f f^N, {}^m f^N, 2^{db} f^N / r_f \right\}$$

${}^f f^N$ ,  ${}^m f^N$  y  ${}^{db} f^N$  son las resistencias nominales de: la fibra, la matriz y la interfaz.

Bajo la condición de adherencia perfecta, cuando aparece el fenómeno plástico en la matriz, ocurre el estado máximo de tensiones que se presenta desde la matriz hacia la fibra. A partir de este momento los esfuerzos se transmiten por fenómenos de fricción. Con base en lo anterior, el factor de proporción para la fibra  ${}^f r$  se define en función de la tensión en la dirección longitudinal del refuerzo  ${}^f \tau^l$  y de la capacidad de la fibra dentro de la matriz  ${}^f f^R$  [1].

$$(4:61) \quad {}^f r = \frac{{}^f f^R}{{}^f \tau^l}$$

Con el objetivo de simular las deformaciones irreversibles que se presentan a causa del deslizamiento redefinieron el criterio de fluencia para la fibra componente de tal forma que

$$(4:62) \quad \mathcal{F}^\tau({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g}, {}^f \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{{}^f r} f({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g}) - \mathcal{K}({}^f \boldsymbol{\alpha}) = 0$$

${}^f \mathbf{g}$  es el tensor métrico en la configuración espacial,  ${}^f \boldsymbol{\alpha}$  es el grupo de variables internas de plasticidad que controlan la evolución de la función continua de tensiones  $f$ . A través del factor de proporción  ${}^f r$  se redefine el umbral de tensiones en el que se producen los fenómenos plásticos. La regla de flujo esta dada por:

$$(4:63) \quad \dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}^\tau({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g})}{\partial {}^f \boldsymbol{\tau}}$$

$\mathcal{G}^\tau({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g})$  es la función de potencial plástico y  $\dot{\lambda}$  es el escalar no negativo denominado parámetro de consistencia plástica, el cual debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker [65], dadas por:

$$(4:64) \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \mathcal{F}^\tau({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g}, {}^f \boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \mathcal{F}^\tau({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g}, {}^f \boldsymbol{\alpha}) = 0$$

Asimismo, debe cumplirse con la condición de persistencia expresada por la variación temporal de la función de fluencia.

$$(4:65) \quad \dot{\mathcal{F}}^\tau({}^f \boldsymbol{\tau}, {}^f \mathbf{g}, {}^f \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{{}^f r} \frac{\partial f}{{\partial}^f \boldsymbol{\tau}} {}^f \dot{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\partial \mathcal{K}({}^f \boldsymbol{\alpha})}{{\partial}^f \boldsymbol{\alpha}} {}^f \dot{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

Cabe anotar, que este modelo se puede aplicar en el campo de grandes deformaciones, debido a que su formulación puede ser planteada tanto en la configuración espacial como en la configuración material, siempre que se considere el respectivo transporte de tensores. El modelo de Car et al. [61] introduce el efecto del DFM a la teoría de mezclas clásica de una forma versátil, a través del factor de proporción de la fibra para modificar el comportamiento de la fibra, sin embargo,

no se puede utilizar para otro tipo de compuestos en los que sus componentes presentan comportamientos diferentes al de la elasto-plasticidad. De otra parte, este modelo no diferencia cambios en el factor de proporción de la fibra por ablandamiento o endurecimiento en la matriz, como tampoco tiene en cuenta que con la descarga los efectos del DFM permanecen constantes. En conclusión el modelo de Car et al. [61] requiere algunas modificaciones para que se pueda aplicar de una forma generalizada al análisis de los materiales compuestos.

#### 4.3.3 Análisis general de los modelos que involucran el DFM

En el análisis del comportamiento de los materiales compuestos por medio de la simulación numérica, para la óptima representación de la transferencia y redistribución de esfuerzos entre las fibras y la matriz, se deben tener en cuenta diferentes efectos, entre otros, la interacción entre la matriz, las fibras y la interfaz al haber daño y/o plasticidad. Esto conlleva a que se requiera introducir los mecanismos de pérdida de adherencia de la interfaz y sus efectos en la simulación de los materiales compuestos, como se ha hecho en los modelos citados anteriormente. Con base en los análisis realizados por los diferentes modelos, a continuación se tratan algunos de los aspectos que son relevantes para la formulación del modelo que se propone en este capítulo.

- *Resistencia de la interfaz fibra/matriz al DFM*

Hay una gran dispersión de datos para establecer las propiedades de la interfaz que inciden en la resistencia del compuesto al deslizamiento fibra matriz. Por ello, para determinar la relación entre las condiciones de la interfaz y su influencia en el comportamiento del compuesto, se requiere una calibración experimental extensa y un análisis estadístico riguroso por cada compuesto. Esta dispersión se debe a distintos factores, entre otros: a la diversidad de ensayos propuestos, a la variabilidad en la distribución y composición de los componentes, a que los mecanismos de fallo se presentan combinados (un ejemplo, se ve en la figura 4-7), así como, a las diferencias entre las condiciones de fabricación de las probetas experimentales y de los compuestos manufacturados.

Algunos investigadores a través de la micromecánica han propuesto diversas formulaciones para definir la resistencia a la rotura de la interfaz  $\sigma_{db}$  [28; 32; 31; 34]. A pesar de que estas expresiones son diferentes, las ecuaciones coinciden en que la resistencia de la interfaz esta controlada principalmente por la energía disipada en la interfaz  $\zeta_{db}$ . No obstante, no se ha propuesto una formulación para la resistencia al deslizamiento de la interfaz, debido a la complejidad que implica obtener información experimental a esta escala. Esta dificultad también la presentan los modelos formulados bajo la mecánica de medios continuos, conduciendo a que modelos como el de Voyiadjis y T. Park [52; 53; 55] sean costosos, dado que se requiere un gran número de parámetros de los materiales y no existe una metodología para determinarlos experimentalmente.

Debido a que la resistencia de la interfaz fibra/matriz es crucial para alcanzar la resistencia de los compuestos, se están haciendo grandes esfuerzos enfocados a

tener un mejor control en las propiedades de la interfaz [6].

- *Relación entre los modelos de la mecánica de medios continuos a diferentes escalas*

Los efectos de los mecanismos de daño y/o plasticidad en la matriz y en la fibra, que inciden en el deslizamiento fibra-matriz, pueden ser tratados desde un enfoque fenomenológico, porque es posible simularlos como fenómenos distribuidos, que están influenciados principalmente por las propiedades mecánicas y las proporciones volumétricas de los componentes.

En los modelos de la micromecánica y en los ensayos se ha observado que una vez comienza la pérdida de adherencia en la interfaz, las deformaciones de los componentes del compuesto son distintas (entre ellos, Budianski et al. [32] y Huesh [34]). En la mecánica de medios continuos se tiene que hay dos formas para tratar la diferencia de deformaciones: en los modelos de Voyiadjis y T. Park y Barbero et al., no se considera el estado de isodeformación entre los componentes del compuesto, incluso durante la fase lineal, debido a que utilizan la teoría de mezclas de Dvorak y Bahei-El-Din [54] (véase (4:36)); en lo que respecta a los modelos de Oller et al. [36] y de Car et al. [61], debido a que usan la teoría de mezclas clásica, realizaron una corrección de las propiedades en cada componente para considerar la diferencia entre las deformaciones de los materiales y mantener la ecuación de cierre (obsérvese (4:51) y (4:57)).

En lo referente al estado de deformaciones y su relación con el DFM, Hild et al. [39] al integrar los modelos de la micromecánica a la mecánica de medios continuos, establecieron que el deslizamiento no recuperable está relacionado con la pérdida de adherencia en la interfaz, y en su formulación lo representan con las deformaciones inelásticas del compuesto. Desde la perspectiva de la teoría de mezclas, Oller et al. [36] y Car et al. [61], también consideraron las deformaciones plásticas como deformaciones irreversibles que representan el deslizamiento relativo entre los componentes. En el caso de Car et al. [61], la diferencia está en que el inicio del DFM, específicamente lo atribuyen a la plasticidad en la matriz y su evolución la representan con las deformaciones irreversibles en las fibras. Es relevante tener en cuenta que estos modelos parten del principio que las deformaciones irreversibles entre las fibras y la matriz se deben a la presencia de fuerzas de rozamiento, las cuales son causadas por la pérdida de adherencia.

De otra parte, desde los modelos de la micromecánica y los modelos que utilizan las teorías de mezclas, se observa la interdependencia entre los componentes. Esto evidencia que la pérdida de adherencia, y la consecuente pérdida de transmisión de esfuerzos entre la matriz y la fibra, conllevan a que la capacidad del compuesto esté en función del componente menos resistente, una muestra de esto se aprecia en la figura 4-10. Por ejemplo, Car et al. [61] proponen un factor de proporción por DFM que limita la capacidad de los componentes, y por ende, del compuesto.

- *DFM en la mecánica del medio continuo*

Para simular el comportamiento constitutivo de los compuestos o de los componentes, la mayoría de los modelos de medios continuos que incluyen el

DFM, han utilizado modelos de daño continuo aprovechando su versatilidad y consistencia. En los modelos en los que se analiza el comportamiento del compuesto como el de un material simple, asocian el DFM al daño por corte y a la fisuración transversal a la fibra. Aunque han sido modelos que mostraron aspectos importantes del comportamiento de los laminados, no permiten identificar la evolución de los diferentes fenómenos que se presentan en los componentes, y su influencia en el comportamiento del compuesto.

Los modelos que utilizan la teoría de mezclas tienen como ventajas, que cada fenómeno que ocurre en los componentes se analice por separado, además que su influencia en el comportamiento del compuesto este dada por la ecuación constitutiva d el material compuesto y la ecuación de cierre. Esto conlleva a que con las teorías de mezclas, también se este considerando implícitamente la posibilidad que se presenten mecanismos de fallo combinados.

Los modelos en que se usan las teorías de mezclas para materiales compuestos ortótropos, separan el daño de la matriz, de la fibra y de la interfaz. En el caso de los modelos de Voyiadjis y T. Park [52; 53; 55], y de Barbero et al. [43; 58], involucran el daño de los componentes con el mapeo de tensiones y deformaciones de un espacio sin daño  $\tilde{\Omega}$  a un espacio con daño de los materiales componentes  $\tilde{\Omega}$ , e introducen el DFM al comportamiento del compuesto a través del mapeo del espacio del material con daño  $\tilde{\Omega}$  al espacio del material real  $\Omega$ . Estos modelos han tenido buenos resultados para materiales compuestos ortótropos con matrices metálicas, sin embargo, el mapeo de las tensiones y de las deformaciones entre los tres espacios hace que los costos computacionales sean elevados [58]; además estos modelos no se pueden aplicar a otro tipo de materiales compuestos dado por no considerar la plasticidad en la fibra.

Los modelos que utilizan la teoría de mezclas clásica, consideran la anisotropía de los componentes aplicando el mapeo de espacios propuesto por Oller et al. [60]; por lo tanto, tienen la ventaja que analizan componentes anisótropos a través de las leyes constitutivas y demás herramientas que han sido formuladas para materiales isótropos [66]. Asimismo, estos modelos introducen el DFM como deformaciones irreversibles por medio de la plasticidad. En el modelo de Oller et al. [36], utilizan un modelo constitutivo de daño plástico para los componentes, con el cual, relacionan la pérdida de rigidez del compuesto con el daño en la fibra y/o en la matriz. Car et al. [61], utilizan un modelo constitutivo elasto-plástico, y no consideran el daño en los componentes, por consiguiente este modelo aunque involucra la pérdida de resistencia a través del factor de proporción por DFM, no puede representar la pérdida de rigidez del compuesto.

#### 4.4 Modelo propuesto para introducir el DFM a las teorías de mezclas

Con base en los principios de la mecánica de medios continuos, la formulación constitutiva propuesta en este capítulo, involucra la pérdida de transferencia de esfuerzos entre la fibra y la matriz, una vez el material componente menos



resistente presenta plasticidad o daño; además el DFM resultante se representa a través de deformaciones irreversibles, como reflejo de la presencia de las fuerzas de rozamiento entre las fibras y la matriz. De acuerdo con lo anterior, debido a que dentro del compuesto, el estado de tensiones de los componentes más resistentes depende del estado del componente menos resistente, este modelo es un modelo no local material.

La formulación constitutiva propuesta en este modelo, introduce el fenómeno de deslizamiento entre la fibra y la matriz en la teoría de mezclas clásica y en la teoría de mezclas serie/paralelo, para la simulación de materiales compuestos reforzados con fibras largas, en los que en los componentes se presenta el daño y/o la plasticidad. Por lo tanto, a través de esta propuesta se contempla el estudio del DFM en materiales compuestos por matrices cerámicas, poliméricas y metálicas, las cuales como se muestra en la figura 4-1, tienen un mecanismo de fallo diferente, que de una u otra forma, inducen al deslizamiento entre la fibra y la matriz. La formulación de este modelo corresponde a la generalización del modelo de Car et al. [61], en el cual se introdujo el DFM en la teoría de mezclas clásica para materiales compuestos por matrices y fibras elasto-plásticas.

Con el modelo propuesto, en las ecuaciones constitutivas de los componentes se introduce un comportamiento basado en el movimiento relativo de cuerpo rígido que se presenta entre la fibra y la matriz. Al incluir el DFM en los modelos constitutivos se tiene en cuenta que este fenómeno presenta dos características:

- La reducción de la rigidez global del compuesto es debida a la pérdida de adherencia entre la fibra y la matriz.
- El deslizamiento relativo entre los componentes es irreversiblemente, por tanto puede ser representado a través de las deformaciones permanentes que se presentan en los componentes más resistentes del compuesto, pese a que su estado de tensiones no alcance su resistencia máxima.

#### 4.4.1 Adaptación de la teoría de mezclas clásica con DFM

Los materiales compuestos bajo un estado de tensiones en el que se ha producido el DFM no cumplen con la condición de compatibilidad de la teoría de mezclas clásica, dada a través de la ecuación de cierre (4:50). Debido a que conceptualmente, las deformaciones producidas por el DFM son irreversibles, el deslizamiento fibra/matriz puede representarse a través de las deformaciones plásticas en los componentes con mayor resistencia.

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones*

Para mantener la ecuación de cierre e introducir el DFM, con base en el modelo de Car et al. [61], se plantea hacer una corrección de las propiedades en cada componente, de tal forma que:

$$(4:66) \quad {}^c \varepsilon_{ij} \equiv {}^1 r^1 \varepsilon_{ij} = \dots = {}^k r^k \varepsilon_{ij} = \dots = {}^n r^n \varepsilon_{ij} = \dots = {}^{nc} r^{nc} \varepsilon_{ij}$$

en la cual  $c$ ,  $k$  y  $n$  representan el compuesto, el  $k$ -ésimo componente y el  $n$ -ésimo componente,  $nc$  corresponde al número total de componentes del compuesto. Las deformaciones de cada componente se afectan por el factor de proporción por

DFM  ${}^n r$ , para garantizar que las deformaciones equivalentes  ${}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  sean iguales a las deformaciones del compuesto  ${}^c \boldsymbol{\varepsilon}$ .

En términos de las deformaciones elásticas y plásticas, la ecuación de cierre queda expresada como:

$$(4:67) \quad \underbrace{{}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p}_{{}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} \equiv \underbrace{{}^1 r({}^1 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + {}^1 \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p)}_{{}^1 \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}} = \dots = \underbrace{{}^k r({}^k \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + {}^k \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p)}_{{}^k \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}} = \dots = \underbrace{{}^n r({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p)}_{{}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}} = \dots = \underbrace{{}^{nc} r({}^{nc} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^e + {}^{nc} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^p)}_{{}^{nc} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij}}$$

el k-ésimo componente es el material menos resistente que conforma el compuesto. De otra parte, en este modelo pueden incluirse materiales componentes que no se presenten deformaciones inelásticas por tener un comportamiento frágil, sin embargo se requiere que al menos uno de los componentes del compuesto tenga un comportamiento elasto-plástico.

Con la expresión (4:67) se observa que a través de las deformaciones equivalentes  ${}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ , el DFM se puede incluir en los modelos constitutivos de los componentes, sin afectar los principios de la teoría de mezclas clásica; incluso el DFM se puede relacionar con el comportamiento de materiales componentes que no presenten plasticidad, como es el caso de los materiales frágiles.

- *Función de energía libre y tensor constitutivo del compuesto*

Tomando la expresión planteada por Oller et al. [36], la función de energía libre es:

$$(4:68) \quad {}^c m {}^c \Psi({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\alpha}, {}^c \boldsymbol{\beta}) = {}^c m {}^c \Psi(\underbrace{{}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\alpha}, {}^c \boldsymbol{\beta}}_{{}^c \boldsymbol{\xi}}) = \sum_{n=1}^{nc} \underbrace{{}^n k {}^n m {}^n r}_{n} \Psi(\underbrace{{}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\alpha}, {}^n \boldsymbol{\beta}}_{{}^n \boldsymbol{\xi}})$$

donde  ${}^n \Psi({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi})$  es la energía libre de cada componente,  ${}^n k$  es la participación volumétrica,  $\boldsymbol{\alpha}$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\boldsymbol{\beta}$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\boldsymbol{\xi}$  es el grupo total de variables internas. Los grupos de variables son aplicables de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente del compuesto.

Siguiendo el procedimiento del modelo propuesto por Oller et al. [36] para la formulación con la teoría de mezclas clásica, a través de la desigualdad de Clausius-Planck se define la ecuación constitutiva secante para el compuesto así:

$$(4:69) \quad {}^c \boldsymbol{\sigma}_{ij} = {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} = \sum_{n=1}^{nc} \underbrace{{}^n k {}^n m {}^n r}_{n} \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \boldsymbol{\sigma}_{ij}$$

Asimismo, la disipación mecánica  $\Xi_m$  queda expresada como:

$$(4:70) \quad \Xi_m = {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\xi})}{\partial {}^c \boldsymbol{\xi}} \cdot {}^c \dot{\boldsymbol{\xi}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi})}{\partial {}^n \boldsymbol{\xi}} \cdot {}^n \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq 0$$

Al derivar la expresión (4:69) se obtiene el tensor constitutivo tangente  $\mathbb{C}$  es:

$$(4:71) \quad {}^c C_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = {}^c m \frac{\partial^2 \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n r \frac{\partial^2 \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \\ = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl}$$

- *Ecuación constitutiva*

El estado de tensiones se determina a través de la ecuación constitutiva que rige el comportamiento de cada componente  $n$ , de tal forma que con el DFM equivale a:

$$(4:72) \quad {}^n \sigma_{ij} = {}^n C_{ijkl} {}^n \hat{\varepsilon}_{kl} = {}^n r {}^n C_{ijkl} {}^n \varepsilon_{kl} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4:71) en la expresión (4:69), la ecuación constitutiva secante para todo el compuesto se puede expresar como:

$$(4:73) \quad {}^c \sigma_{ij} = {}^c C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \sigma_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl}$$

considerando que las deformaciones elásticas en el  $n$ -ésimo componente son equivalentes a  ${}^n \hat{\varepsilon}_{ij} = {}^n r ({}^n \varepsilon_{ij} - {}^n \varepsilon_{ij}^p)$ , de la ecuación secante (4:73) se tiene que:

$$\sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n C_{ijkl} {}^n \varepsilon_{kl}^e = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl}^e \\ \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n C_{ijkl} ({}^n \varepsilon_{kl} - {}^n \varepsilon_{kl}^p) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} ({}^c \varepsilon_{kl} - {}^c \varepsilon_{kl}^p) \\ \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl} - \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n C_{ijkl} {}^n \varepsilon_{kl}^p = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl} - \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{ijkl} {}^c \varepsilon_{kl}^p$$

de donde obtiene la deformación inelástica del compuesto

$$(4:74) \quad {}^c \varepsilon_{ij}^p = {}^c C_{ijpq}^{-1} \left( \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n C_{pqkl} {}^n \varepsilon_{kl}^p \right)$$

Reemplazado (4:74) en (4:67) se determina la deformación elástica del compuesto

$$(4:75) \quad {}^c \varepsilon_{ij}^e = {}^c \varepsilon_{ij} - {}^c C_{ijpq}^{-1} \left( \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n C_{pqkl} {}^n \varepsilon_{kl}^p \right)$$

De esta forma, se introduce el DFM en la evolución de las tensiones y de las deformaciones de los componentes esta dada por la ecuación constitutiva bajo la que se rige el comportamiento de cada material componentes, y se establece el comportamiento del compuesto bajo el fenómeno del deslizamiento fibra-matriz.

#### 4.4.2 Adaptación de la teoría de mezclas serie/paralelo con DFM

Como se mencionó en el capítulo anterior, la teoría serie/paralelo propuesta por Rastellini [67], parte de la hipótesis que la contribución de los componentes en la respuesta del compuesto, es proporcional a su participación volumétrica de cada material componente. Asimismo, en esta teoría se establece que los componentes tienen una misma deformación en la dirección en paralelo (condición de isodeformación), y que tienen una misma tensión en la dirección en serie

(condición de isotensión). Considerando estos principios a continuación se introduce el DFM en la formulación detallada de la teoría serie/paralelo.

- *Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación y tensión [67]*

En el análisis de un compuesto y sus componentes, el tensor deformación  $\boldsymbol{\varepsilon}$  se descompone una parte en serie  $\boldsymbol{\varepsilon}_S$  y otra en paralelo  $\boldsymbol{\varepsilon}_P$

$$(4:76) \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_P + \boldsymbol{\varepsilon}_S$$

y el tensor de tensión  $\boldsymbol{\sigma}$  se separa en sus componentes en serie  $\boldsymbol{\sigma}_S$  y en paralelo  $\boldsymbol{\sigma}_P$

$$(4:77) \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_P + \boldsymbol{\sigma}_S$$

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto*

Descomponiendo el compuesto  $c$  en un determinado número de capas  $ncap$ , partiendo de la condición de isodeformación entre las capas y el compuesto, se tiene que el tensor de deformación total del compuesto  ${}^c\boldsymbol{\varepsilon}$  es equivalente a los tensores de deformación total de las capas que lo componen [68].

$$(4:78) \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon} \equiv {}^c_1\boldsymbol{\varepsilon} = \dots = {}^c_j\boldsymbol{\varepsilon} = \dots = {}^c_{ncap}\boldsymbol{\varepsilon}$$

- *Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en cada capa del compuesto*

Dado que en la capa  $t$  del compuesto con DFM, no se cumplen las ecuaciones de compatibilidad de deformaciones, debe hacerse una corrección de las propiedades en los componentes para mantener las ecuaciones de cierre. Teniendo en cuenta que el deslizamiento entre las fibras y la matriz es irrecuperable, y que se puede representar por medio de las deformaciones inelásticas de los componentes con mayor resistencia, de la mismo modo en como se introdujo el DFM en la teoría de mezclas clásica, se define el tensor de deformaciones equivalentes  ${}^n\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  del  $n$ -ésimo componente dependiente del factor de proporción del DFM  ${}^n r$ , de tal forma que:

$$(4:79) \quad \begin{aligned} {}^n\hat{\varepsilon}_{ij} &= ({}^n\hat{\varepsilon}_{ij})_P + ({}^n\hat{\varepsilon}_{ij})_S = {}^n r [({}^n\varepsilon_{ij}^e)_P + ({}^n\varepsilon_{ij}^p)_P] + {}^n r [({}^n\varepsilon_{ij}^e)_S + ({}^n\varepsilon_{ij}^p)_S] \\ &= {}^n r ({}^n\varepsilon_{ij}^e + {}^n\varepsilon_{ij}^p) \end{aligned} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de deformaciones quedan como:

- Comportamiento en paralelo

$$(4:80) \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_P = \underbrace{{}^1r_1\boldsymbol{\varepsilon}_P}_{1\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P} = \dots = \underbrace{{}^k r_k\boldsymbol{\varepsilon}_P}_{k\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P} = \dots = \underbrace{{}^n r_n\boldsymbol{\varepsilon}_P}_{n\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P} = \dots = \underbrace{{}^{nc} r_{nc}\boldsymbol{\varepsilon}_P}_{nc\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P}$$

$$(4:81) \quad {}^c\boldsymbol{\sigma}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n \boldsymbol{\sigma}_P$$

- Comportamiento en serie

$$(4:82) \quad {}^c\boldsymbol{\varepsilon}_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t \underbrace{{}^n r_t \boldsymbol{\varepsilon}_S}_{n\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S}$$

$$(4:83) \quad {}^c\boldsymbol{\sigma}_S = {}^1\boldsymbol{\sigma}_S = \dots = {}^k\boldsymbol{\sigma}_S = \dots = {}^n\boldsymbol{\sigma}_S = \dots = {}^{nc}\boldsymbol{\sigma}_S$$

los índices  $c$ ,  $k$  y  $n$  representan el compuesto, el  $k$ -ésimo componente y el  $n$ -ésimo

componente,  $nc$  corresponde al número total de componentes en cada capa del compuesto. Donde el  $k$ -ésimo componente es el material menos resistente de los componentes de la capa  $t$ , además, se requiere que al menos uno de sus componentes tenga un comportamiento elasto-plástico.

El principio de conservación de masa en cada capa  $t$  se garantiza cumpliendo que:

$$(4:84) \quad {}^n k = \frac{d {}^n V}{d {}^c V} \quad n = \{1, \dots, nc\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{n=nc} {}^n k = 1$$

${}^n k$  es la participación volumétrica del  $n$ -ésimo componente, relaciona su volumen infinitesimal  $d {}^n V$ , con el volumen infinitesimal de la capa  $t$   $d {}^c V$ .

- *Ecuación constitutiva en cada capa del compuesto*

Considerando que el tensor deformación  ${}^n \boldsymbol{\varepsilon}$  esta conformado por una parte recuperable  ${}^n \boldsymbol{\varepsilon}^e$  y otra irre recuperable  ${}^n \boldsymbol{\varepsilon}^p$ , de las ecuaciones se tiene que

$$(4:85) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P &= {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P & \Rightarrow & \quad {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^p = {}^n r ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) \quad n = \{1, \dots, nc\} \\ {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S & \Rightarrow & \quad {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^e + {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^p = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S^e + {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

El estado de tensiones se determina a través de la ecuación constitutiva que rige el comportamiento de cada componente  $n$  y el compuesto  $c$

$$(4:86) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\sigma} &= {}^c \mathbb{C} : {}^c \boldsymbol{\varepsilon}^e = {}^c \mathbb{C} : ({}^c \boldsymbol{\varepsilon} - {}^c \boldsymbol{\varepsilon}^p) \\ {}^n \boldsymbol{\sigma} &= {}^n \mathbb{C} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = {}^n r {}^n \mathbb{C} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon} - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad n = \{1, \dots, nc\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la descomposición de los tensores de deformación y de tensión de las ecuaciones (4:76) y (4:77), la expresión anterior queda dada como:

$$(4:87) \quad \begin{aligned} \begin{bmatrix} {}^c \boldsymbol{\sigma}_P \\ {}^c \boldsymbol{\sigma}_S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^c \mathbb{C}_{PP} & {}^c \mathbb{C}_{PS} \\ {}^c \mathbb{C}_{SP} & {}^c \mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^e \\ {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^e \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} {}^n \boldsymbol{\sigma}_P \\ {}^n \boldsymbol{\sigma}_S \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} {}^n \mathbb{C}_{PP} & {}^n \mathbb{C}_{PS} \\ {}^n \mathbb{C}_{SP} & {}^n \mathbb{C}_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P^e \\ {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^e \end{bmatrix} \quad n = \{1, \dots, nc\} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que las tensiones del compuesto son equivalentes a:

$$(4:88) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\sigma}_P &= {}^c \mathbb{C}_{PP} : {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^c \mathbb{C}_{PS} : {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^e = {}^c \mathbb{C}_{PP} : ({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^c \mathbb{C}_{PS} : ({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \\ {}^c \boldsymbol{\sigma}_S &= {}^c \mathbb{C}_{SP} : {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^e + {}^c \mathbb{C}_{SS} : {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^e = {}^c \mathbb{C}_{SP} : ({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^c \mathbb{C}_{SS} : ({}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^c \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

del mismo modo, las tensiones para cada componente son:

$$(4:89) \quad \begin{aligned} {}^n \boldsymbol{\sigma}_P &= {}^n \mathbb{C}_{PP} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P^e + {}^n \mathbb{C}_{PS} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^e = {}^n r {}^n \mathbb{C}_{PP} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^n r {}^n \mathbb{C}_{PS} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \\ {}^n \boldsymbol{\sigma}_S &= {}^n \mathbb{C}_{SP} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_P^e + {}^n \mathbb{C}_{SS} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^e = {}^n r {}^n \mathbb{C}_{SP} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^n r {}^n \mathbb{C}_{SS} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

Relacionando las ecuaciones (4:81) y (4:83) con estas expresiones se obtiene que:

$$(4:90) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\sigma}_P &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \boldsymbol{\sigma}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n \mathbb{C}_{PP} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n r {}^n \mathbb{C}_{PS} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \\ {}^c \boldsymbol{\sigma}_S &= {}^n r {}^n \mathbb{C}_{SP} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_P^p) + {}^n r {}^n \mathbb{C}_{SS} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}_S^p) \end{aligned}$$

- *Función de energía libre y tensor constitutivo en cada capa del compuesto*

La función de energía libre para cada capa  $t$  del compuesto corresponde a

$$(4:91) \quad {}^c m_t {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \alpha, {}^c \beta) = {}^c m_t {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, \underbrace{{}^c \varepsilon_{ij}^p, {}^c \alpha, {}^c \beta}_{\xi}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n r_t {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, \underbrace{{}^n \varepsilon_{ij}^p, {}^n \alpha, {}^n \beta}_{\xi})$$

${}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$  es la energía libre de cada componente de la capa  $t$ ,  $\alpha$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\beta$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\xi$  es el grupo total de variables internas. Los grupos de variables son aplicables de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente del compuesto.

Bajo la hipótesis de acoplamiento se supone una redistribución interna de la energía libre de los dos comportamientos básicos, tal que la energía libre de la capa  $t$  o sus componentes se descompone en dos partes: una en serie  ${}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$ , y otra en paralelo  ${}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)$ .

$$(4:92) \quad {}^n m_t {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) = {}^n m_t {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) + {}^n m_t {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

con base en lo formulado por Oñate et al. [69] se determina la función de la energía libre en serie y en paralelo, de tal forma que:

$$(4:93) \quad \begin{aligned} {}^c m_t {}^c \Psi_P({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) &\equiv \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n r_t {}^n m_t {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) \\ {}^c m_t {}^c \Psi_S({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) &\equiv \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n r_t {}^n m_t {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) \end{aligned}$$

de este modo, la función de energía libre para cada capa  $t$  puede expresarse como:

$$(4:94) \quad \begin{aligned} {}^c m_t {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) &= {}^c m_t {}^c \Psi_P({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) + {}^c m_t {}^c \Psi_S({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi) \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n r_t {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n r_t {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi) \end{aligned}$$

La ley constitutiva surge de considerar la desigualdad de Clausius-Duhem y el método de Coleman [63; 65], definiendo el tensor de tensiones del compuesto así:

$$(4:95) \quad \begin{aligned} {}^c \sigma_{ij} &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n r_t \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial {}^c \varepsilon_{ij}} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n r_t \frac{\partial {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{ij})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n m_t {}^n r_t \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{ij})_S} \\ &= \underbrace{({}^n \sigma_{ij})_P}_{({}^c \sigma_{ij})_P} + \underbrace{({}^n \sigma_{ij})_S}_{({}^c \sigma_{ij})_S} \end{aligned}$$

Considerando el segundo término de la ecuación (4:95) y su relación con la expresión (4:83), se establece que:

$$(4:96) \quad {}^c m_t \frac{\partial {}^c \Psi_S({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi)}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_S} \equiv {}^n m_t {}^n r_t \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_S} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Con lo cual se satisfacen las ecuaciones (4:81) y (4:83), y se obtiene que el tensor de tensión para la capa  $t$  equivale a:

$$(4:97) \quad {}^c\sigma_{ij} = ({}^c\sigma_{ij})_P + ({}^c\sigma_{ij})_S = \sum_{n=1}^{nc} \left[ {}^n k ({}^n\sigma_{ij})_P \right] + ({}^n\sigma_{ij})_S$$

La disipación mecánica  $\Xi_m$  queda expresada como:

$$(4:98) \quad \begin{aligned} \Xi_m &= {}^c m \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi)}{\partial {}^c \xi} \dot{{}^c \xi} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \dot{{}^n \xi} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi_P({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \dot{{}^n \xi} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial {}^n \xi} \dot{{}^n \xi} \leq 0 \end{aligned}$$

El tensor constitutivo tangente  $\mathbb{C}$  corresponde a:

$$(4:99) \quad \begin{aligned} {}^c C_{ijkl} &= \frac{\partial {}^c \sigma_{ij}}{\partial {}^c \varepsilon_{kl}} = {}^c m \frac{\partial^2 {}^c \Psi({}^c \varepsilon_{ij}, {}^c \xi)}{\partial {}^c \varepsilon_{ij} \partial {}^c \varepsilon_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m {}^n r \frac{\partial^2 {}^n \Psi({}^n \varepsilon_{ij}, {}^n \xi)}{\partial {}^n \varepsilon_{ij} \partial {}^n \varepsilon_{kl}} \\ ({}^c C_{ijkl})_P &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial {}^c \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_P} + \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_S} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k \frac{\partial ({}^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_P} + \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}^n \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_S} \\ ({}^c C_{ijkl})_S &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial {}^c \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_P} + \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_S} \\ &= \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k} \frac{\partial ({}^n \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^n \varepsilon_{kl})_S} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la expresión del tensor constitutivo es:

$$(4:100) \quad \begin{aligned} ({}^c C_{ijkl})_{PP} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_P} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k ({}^n C_{ijkl})_{PP} & ({}^c C_{ijkl})_{PS} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_P}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_S} = \sum_{n=1}^{nc} ({}^n C_{ijkl})_{PS} \\ ({}^c C_{ijkl})_{SP} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_P} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} ({}^n C_{ijkl})_{SP} & ({}^c C_{ijkl})_{SS} &= \frac{\partial ({}^c \sigma_{ij})_S}{\partial ({}^c \varepsilon_{kl})_S} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k} ({}^n C_{ijkl})_{SS} \end{aligned}$$

Al introducir el DFM en el compuesto, las ecuaciones (4:88) quedan escritas como:

$$(4:101) \quad \begin{aligned} {}^c \sigma_P &= {}^c C_{PP} : {}^c \varepsilon_P + {}^c C_{PS} : {}^c \varepsilon_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n C_{PP} : {}^c \varepsilon_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n C_{PS} : {}^c \varepsilon_S \\ {}^c \sigma_S &= {}^c C_{SP} : {}^c \varepsilon_P + {}^c C_{SS} : {}^c \varepsilon_S = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n C_{SP} : {}^c \varepsilon_P + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k} {}^n C_{SS} : {}^c \varepsilon_S \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (4:85), se tiene que estas ecuaciones son coincidentes con las ecuaciones (4:90).

- *Ecuación de equilibrio en el compuesto*

Hecho el análisis de cada capa, se tiene que el tensor de tensión del compuesto  $c$  corresponde a la suma de los tensores de tensiones de las capas del compuesto  $ncap$  acorde con el porcentaje de participación volumétrica de cada capa  ${}^c_k$  [66].

$$(4:102) \quad {}^c\sigma = \sum_{i=1}^{ncap} {}^c_k {}^c\sigma_i = \sum_{i=1}^{ncap} {}^c_k ({}^c\sigma_{P_i} + {}^c\sigma_{S_i})$$

#### 4.4.3 Determinación del factor de proporción por DFM

En este modelo se parte del principio que a causa del DFM, la capacidad de los componentes esta limitada por el componente menos resistente, como se observó en la figura 4-1:

- Si la matriz presenta plasticidad o fisuración, la transferencia de los esfuerzos a las fibras se limita a la capacidad de la matriz, por lo tanto, al comenzar un mecanismo de fallo, no es posible aumentar el estado de tensiones en las fibras.
- Cuando hay rotura o deformaciones plásticas en las fibras, en la matriz adyacente se reduce la trasmisión de esfuerzos conforme se pierde la capacidad de soportar los esfuerzos en las fibras.
- Si en la interfaz ocurre daño o plasticidad, se pierde la adherencia entre los componentes, por tanto la transferencia de esfuerzos se reduce, y comienza a depender de las fuerzas de rozamiento entre las fibras y la matriz.

En los tres casos, en el compuesto y en los materiales que lo componen, no habrá un estado de tensiones mayor al que produjo el daño o la plasticidad en el componente menos resistente, además la reducción de la resistencia del compuesto dependerá del comportamiento no lineal de los materiales que lo componen.

La formulación que introduce el DFM en las teorías de mezclas, se aplica desde que inicia el fenómeno de daño y/o plasticidad en el componente menos resistente del compuesto, debido a que es el momento en que se afecta el mecanismo de transferencia entre las fibras y la matriz por la pérdida de adherencia. A partir de este instante, las deformaciones de los componentes son diferentes, y parte de los esfuerzos entre los componentes, comienzan a transmitirse por la presencia de fuerzas de rozamiento entre las fibras y la matriz, produciendo deformaciones permanentes en el compuesto. Aprovechando que las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, involucran la interdependencia entre los componentes por medio de las deformaciones, estos efectos se pueden representar a través de las deformaciones inelásticas.

En la mecánica del continuo, desde un enfoque fenomenológico, el movimiento relativo entre la fibra y la matriz puede representarse a través de la deformación irre recuperable. La determinación del inicio de este fenómeno se realiza mediante la condición de resistencia, en la cual, se compara en un punto de Gauss PG la tensión de cada material componente con respecto a la correspondiente resistencia nominal. Cuando el estado de tensiones de uno de los componentes ( ${}^k\sigma, {}^k\sigma, {}^k\sigma$ )



alcanza su correspondiente resistencia nominal ( ${}^k f^N, \acute{o}, {}^k f^N$ ), se define que este es el componente menos resistente del compuesto o de la capa  $t$  del compuesto, y que la evolución del DFM dependerá de su comportamiento. Por lo tanto, el material menos resistente es aquel que primero alcanza su resistencia máxima, y no implica que sea el material con menor resistencia.

Una vez, hay daño y/o plasticidad en el  $k$ -ésimo componente, se introduce el factor de proporción por DFM en cada componente del compuesto  ${}^n r$  (si corresponde a la teoría de mezclas clásica), o en cada componente de la capa  $t$  del compuesto  ${}^n r$  (si se trata de la teoría serie/paralelo). Para calcular el factor de proporción por DFM, es necesario establecer la capacidad de cada componente, para ello se determina en cada  $n$ -ésimo componente la resistencia reducida ( ${}^n f^R, \acute{o}, {}^n f^R$ ), la cual como se indica en (4:103), corresponde al menor valor entre su resistencia nominal ( ${}^n f^N, \acute{o}, {}^n f^N$ ), la tensión efectiva del componente menos resistente ( ${}^k f^*, \acute{o}, {}^k f^*$ ) y, en el caso que se introduzca como un factor adicional, la tensión efectiva de la interfaz ( $2^{db} f^*/r_f, \acute{o}, 2^{db} f^*/r_f$ , siendo  $r_f$  el radio de la fibra).

$$(4:103) \quad \begin{aligned} {}^n f^R &= \min \left\{ {}^n f^N, {}^k f^*, 2^{db} f^*/r_f \right\} \quad k \in \{1, \dots, nc\} && \text{Teoría de mezclas clásica} \\ {}^n f^R &= \min \left\{ {}^n f^N, {}^k f^*, 2^{db} f^*/r_f \right\} && \text{Teoría de mezclas serie/paralelo} \end{aligned}$$

Después de definir la resistencia reducida del  $n$ -ésimo componente, se calcula su factor de proporción probable por DFM ( ${}^n r^*, \acute{o}, {}^n r^*$ ) en función de la tensión del componente en la dirección de orientación del refuerzo ( ${}^n f^*, \acute{o}, {}^n f^*$ )

$$(4:104) \quad \begin{aligned} {}^n r^* &= \frac{{}^n f^R}{{}^n f^*} \quad n = \{1, \dots, nc\} && \text{Teoría de mezclas clásica} \\ {}^n r^* &= \frac{{}^n f^R}{{}^n f^*} && \text{Teoría de mezclas serie/paralelo} \end{aligned}$$

Para diferenciar la descarga, del ablandamiento es importante controlar el factor de proporción por DFM de tal forma que el factor siempre debe ser menor o igual al hallado en el incremento de deformación del paso anterior; esta condición garantiza que el efecto del deslizamiento no sea recuperable. Es así como el factor de proporción por DFM ( ${}^n r, \acute{o}, {}^n r$ ) equivale a:

$$(4:105) \quad \begin{aligned} {}^n r^* \leq {}^n r &\Rightarrow {}^n r = {}^n r^* \quad n = \{1, \dots, nc\} && \text{Teoría de mezclas clásica} \\ {}^n r^* \leq {}^n r &\Rightarrow {}^n r = {}^n r^* && \text{Teoría de mezclas serie/paralelo} \end{aligned}$$

Cabe anotar que la tensión efectiva del  $k$ -ésimo componente y de la interfaz, cuando inicia el daño o la plasticidad equivale a la resistencia nominal correspondiente de cada componente, pero cambia acorde con el endurecimiento o ablandamiento que se presente en ellos, haciendo que el efecto del DFM sea evolutivo acorde con el comportamiento del componente menos resistente.

4.4.4 Algoritmos de las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo con DFM

En la figura 4-16 se muestra el diagrama de flujo de la modificación de la teoría de mezclas clásica para un compuesto con DFM en pequeñas deformaciones y en la figura 4-17 se indica el diagrama de la modificación de la teoría de mezclas serie/paralelo para una capa  $t$  conformada por dos componentes. Como se muestra en los dos esquemas, con las dos modificaciones, la capacidad de los componentes del compuesto está en función del componente menos resistente, por lo tanto, es necesario hacer la corrección de las propiedades de los componentes, aplicando al modelo constitutivo de cada componente el correspondiente factor de proporción por DFM ( ${}^n r, \delta, {}^n r$ ).

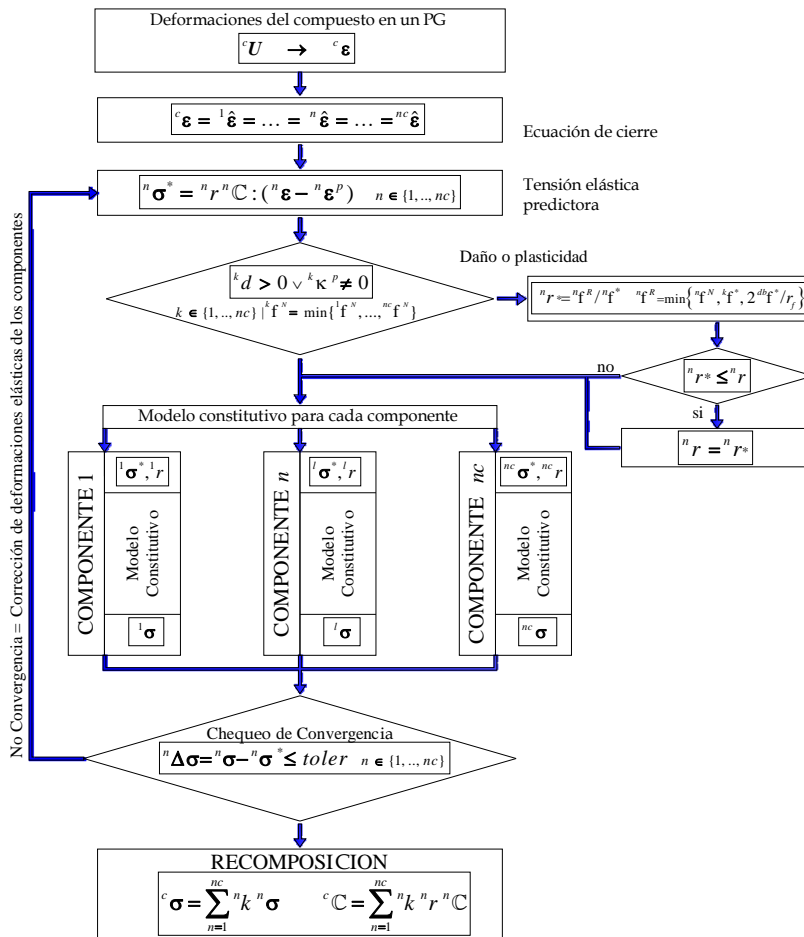


FIGURA 4-16 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA MODIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS PARA UN COMPUESTO CON DFM

Para considerar la anisotropía del compuesto como la resultante de la anisotropía de los componentes, al igual que Oller et al. [36] o Car et al. [61], en esta propuesta junto a las teorías de mezclas se aplica el mapeo de espacios propuesto por Oller et

al. [60], lo que permite usar los modelos constitutivos formulados para materiales isotrópicos en el análisis del comportamiento de los componentes anisótropos.

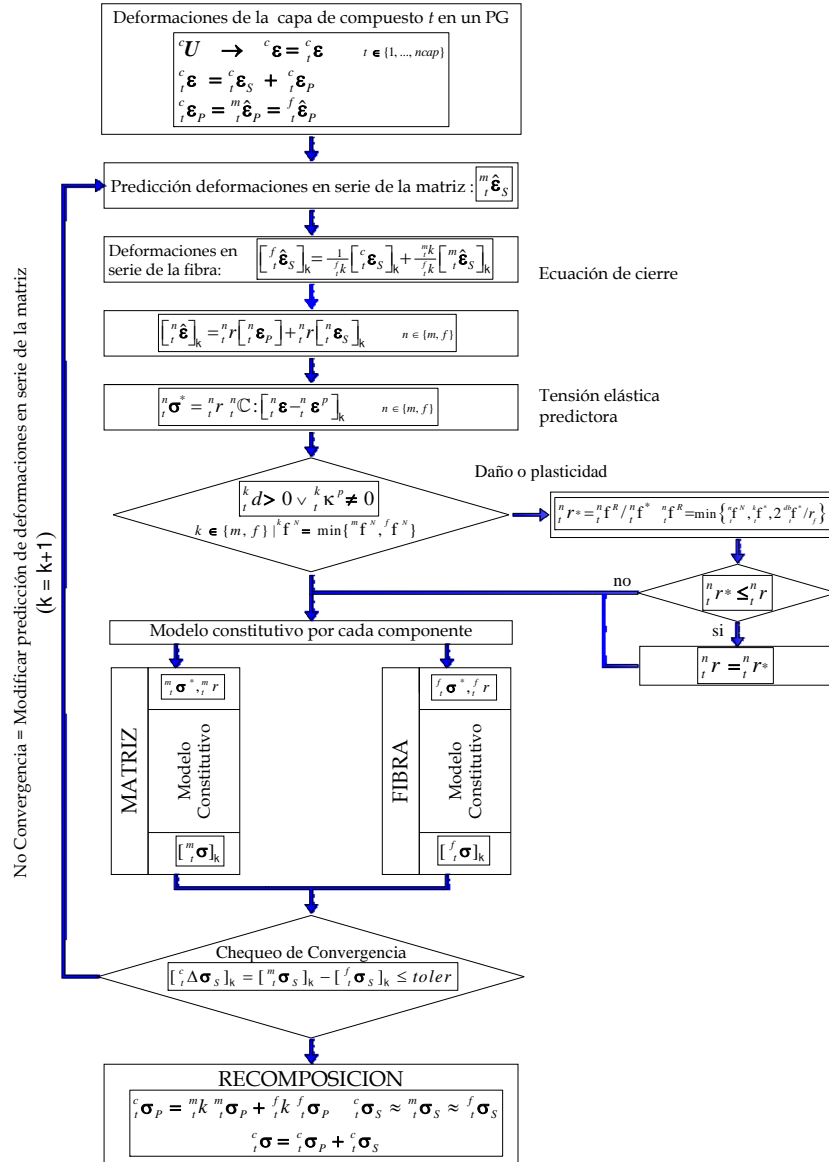


FIGURA 4-17 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA MODIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS SERIE/PARALELO PARA UNA CAPA  $t$  DE UN COMPUESTO CON DFM

#### 4.4.5 Modificación de los modelos constitutivos considerando el DFM

En lo referente a los modelos constitutivos que se pueden utilizar dentro del análisis de los compuestos con DFM, es necesario tener en cuenta que con los

modelos de daño se define la pérdida de rigidez del compuesto por la fisuración en la matriz o fractura en la fibra, y que con los modelos de elasto-plasticidad se representa la plasticidad de la fibra o la matriz; el uso de un determinado modelo depende del comportamiento de cada componente.

Como se mencionó anteriormente, para introducir el DFM en las teorías de mezclas, se debe hacer una corrección de las propiedades, aplicando el factor de proporción por DFM de cada componente ( ${}^n r$ , ó,  ${}^n r$ ) al correspondiente modelo constitutivo. A continuación, como ejemplo se describe la modificación que se hace al modelo elasto-plástico isótropo y al modelo de daño isótropo para involucrar el efecto del DFM en el comportamiento de un material componente.

#### 4.4.5.1 Modelo elasto-plástico isótropo en un proceso isotérmico

De acuerdo con lo determinado en la ecuación (4:73) de modificación en la teoría de mezclas clásica y la ecuación (4:95) de la teoría serie/paralelo para cada componente se tiene que:

$$(4:106) \quad {}^n \boldsymbol{\sigma} = {}^n \mathbb{C} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = {}^n \mathbb{C} : ({}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p) = {}^n r {}^n \mathbb{C} : ({}^n \boldsymbol{\varepsilon} - {}^n \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

- *Energía libre de Helmholtz*

La expresión de energía libre de Helmholtz  ${}^n \Psi$  para un proceso isotérmico corresponde a:

$$(4:107) \quad \begin{aligned} {}^n m {}^n r {}^n \Psi({}^n \boldsymbol{\varepsilon}^e, {}^n \boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2} ({}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : {}^n \boldsymbol{\sigma}) + {}^n m {}^n r {}^n \Psi^p({}^n \boldsymbol{\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} ({}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e : {}^n \mathbb{C} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^e) + {}^n m {}^n r {}^n \Psi^p({}^n \boldsymbol{\alpha}) \end{aligned}$$

${}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es el tensor de deformaciones equivalentes,  ${}^n \boldsymbol{\alpha}$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  ${}^n \Psi^p$  corresponde a la cuota plástica de la energía libre.

La disipación mecánica esta dada en forma general como:

$$(4:108) \quad \Xi_m = \left( {}^n \boldsymbol{\sigma} - {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : {}^n r {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\alpha}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\alpha}} \geq 0$$

como  ${}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es una variación temporal, para garantizar que se cumple la desigualdad de Clausius-Duhem su multiplicador debe ser idénticamente nulo, es decir que:

$$(4:109) \quad \left( {}^n \boldsymbol{\sigma} - {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} \rightarrow {}^n \boldsymbol{\sigma} = {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}}$$

con lo cual se corrobora lo planteado en la ecuación (4:69) de la teoría de mezclas clásica y la ecuación (4:95) de la teoría de mezclas serie/paralelo, en lo que respecta a las tensiones de los componentes. Esto implica que conforme con las expresiones (4:70) y (4:98) de las teorías de mezclas correspondientes, la disipación de mecánica corresponde a:

$$(4:110) \quad \Xi_m = {}^n m {}^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\alpha}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\alpha}} \leq 0$$

- *Criterio de condición de fluencia*

Para introducir el DFM en el modelo constitutivo es necesario modificar el límite de proporcionalidad de cada componente, por lo tanto se redefine el criterio de fluencia para cada componente de tal forma que

$$(4:111) \quad F^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{{}^nr} f({}^n\boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{K}({}^n\kappa^p) = 0 \quad {}^n\boldsymbol{\alpha} \equiv \{{}^n\kappa^p\} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

$\boldsymbol{\alpha}$  es el grupo de variables de estado denominadas variables internas de plasticidad que controlan la evolución de las tensiones,  $F^\sigma$  es la función continua de tensiones,  $\mathcal{K}({}^n\kappa^p)$  es la función de endurecimiento plástico, y  ${}^n\kappa^p$  es el parámetro de de endurecimiento plástico. Con la ecuación (4:111) se observa que se redefine el umbral de tensiones a través del factor de proporción  ${}^nr$ , por lo que se producen las deformaciones irreversibles que se presentan a causa del DFM sin que se alcance la resistencia nominal del componente.

- *Regla de flujo*

La regla de flujo que establece la ley de evolución de las deformaciones plásticas es

$$(4:112) \quad {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = {}^n\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}}$$

$\mathcal{G}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha})$  es la función de potencial plástico y  $\dot{\lambda}$  es parámetro de consistencia plástica, el cual debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker [65]

$$(4:113) \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad F^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) \leq 0 \quad \dot{\lambda} F^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) = 0$$

Además debe cumplirse con la condición de persistencia expresada por la variación temporal de la función de fluencia [70].

$$(4:114) \quad \dot{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \mathcal{K}({}^n\boldsymbol{\alpha})}{\partial {}^n\boldsymbol{\alpha}} : {}^n\dot{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\dot{\boldsymbol{\sigma}} - \dot{\mathcal{K}}({}^n\kappa^p) = 0$$

donde  $\dot{\mathcal{K}}({}^n\kappa^p)$  representa la ley de evolución de la plasticidad en función del parámetro de de endurecimiento plástico  ${}^n\kappa^p$ , y esta dada por:

$$(4:115) \quad \dot{\mathcal{K}}({}^n\kappa^p) = \frac{\partial \mathcal{K}({}^n\kappa^p)}{\partial {}^n\kappa^p} {}^n\dot{\kappa}^p = h_\kappa({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) {}^n\dot{\kappa}^p$$

$${}^n\dot{\kappa}^p = {}^n\dot{\lambda} \left( \mathbf{h}_\kappa({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha})}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \right) = {}^n\dot{\lambda} \mathbf{h}_\kappa({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$$

El tensor de segundo orden  $\mathbf{h}_\kappa({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha})$  y la función escalar  $h_\kappa({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha})$  dependen del estado de tensiones del componente y de las variables internas.

- *Tensor constitutivo elasto-plástico*

Para determinar el tensor constitutivo elasto-plástico tangente  ${}^n\mathbb{C}_T$  se considera la variación temporal de la ecuación constitutiva

$$(4:116) \quad {}^n\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^n\mathbb{C}_T : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

al hacer la variación temporal de la expresión (4:106) se obtiene que

$$(4:117) \quad {}^n\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \underbrace{{}^nr} \dot{\mathbb{C}} : ({}^n\boldsymbol{\varepsilon} - {}^n\boldsymbol{\varepsilon}^p) + {}^nr \mathbb{C} : ({}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$$

$$\dot{\mathbb{C}} = \mathbf{0}$$

Se parte de la hipótesis de plasticidad sin influencia del daño, por lo tanto el tensor constitutivo  ${}^n\mathbb{C}$  se mantiene constante sin presentar variación en el tiempo.

Reemplazando las expresiones (4:112) y (4:117) en la expresión (4:114)

$$(4:118) \quad \dot{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\alpha}) = {}^n r \frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C} : \left( {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n\dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \right) - {}^n\dot{\lambda} h_\kappa \left( \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \right) = 0$$

por lo tanto, el parámetro de consistencia plástica corresponde a:

$$(4:119) \quad {}^n\dot{\lambda} = \frac{{}^n r \frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C} : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C} : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} + h_\kappa \left( \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \right)} = \frac{\frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C} : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C} : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} + h_\kappa \left( \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \right)} \geq 0$$

lo que conlleva a que la expresión (4:117) quede expresada como:

$$(4:120) \quad {}^n\dot{\boldsymbol{\sigma}} = {}^n r \left[ \frac{{}^n\mathbb{C} : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C}}{\frac{\partial F^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} : {}^n\mathbb{C} : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} + h_\kappa \left( \mathbf{h}_\kappa : \frac{\partial \mathcal{G}^\sigma}{\partial {}^n\boldsymbol{\sigma}} \right)} \right] : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow {}^n\dot{\boldsymbol{\sigma}} \equiv {}^n r {}^n\mathbb{C}_T : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

#### 4.4.5.2 Modelo de daño isótropo

En la mecánica de medios continuos, el proceso de crecimiento de las micro-fisuras y los micro- vacíos en los materiales se simula por medio de una variable interna de daño, representada por un escalar, un vector o, un tensor [1], como pasa en los modelos propuestos para el análisis del DFM de Hild et al. [37], Ladevèze y Le Dantec [45], Matzenmiller et al. [9], Hassan y Batra [51], Voyiadjis y Park [52] y Barbero et al. [58].

El modelo de daño isótropo desarrollado por Oliver et al. [71], se fundamenta en la teoría de daño continuo presentada inicialmente por Kachanov [72], siendo una particularización del modelo de daño anisótropo. En este modelo, la degradación del material se desarrolla en todas las direcciones por igual y depende de una variable escalar de daño  ${}^n d$  [63] y la ecuación se define como:

$$(4:121) \quad {}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}} \equiv \left[ (1 - {}^n d) \mathbb{I} \right]^{-1} : {}^n\boldsymbol{\sigma} = (1 - {}^n d)^{-1} {}^n\boldsymbol{\sigma}$$

la variable de daño  ${}^n d$  es una medida de la pérdida de rigidez del material y se tiene que esta dada por  $0 \leq {}^n d \leq 1$ .

El modelo de daño isótropo de igual forma que los modelos de daño anisótropo utilizados por Matzenmiller et al. [9], Voyiadjis y Park [52] y Barbero et al. [58], aplica el concepto de transformación de las tensiones entre el espacio del material ficticio sin daño y el espacio del material real con daño, sin embargo, a diferencia de los otros modelos, el modelo de daño isótropo supone la equivalencia de las deformaciones entre los dos espacios. A continuación se presenta la modificación del modelo isótropo para involucrar el efecto del DFM.

- *Energía libre de Helmholtz*

La expresión de energía libre de Helmholtz  ${}^n\Psi$  para un proceso isotérmico es:

$$(4:122) \quad {}^n m^n r^n \Psi({}^n \boldsymbol{\varepsilon}, {}^n \boldsymbol{\beta}) = {}^n m^n r^n \Psi({}^n \boldsymbol{\varepsilon}, {}^n d) = (1 - {}^n d) {}^n m^n r^n \bar{\Psi}({}^n \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{(1 - {}^n d)}{2} ({}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} : {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}})$$

${}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es el tensor de deformaciones equivalentes,  ${}^n \boldsymbol{\beta}$  es el grupo de variables internas de daño que controlan la evolución de las tensiones,  ${}^n \bar{\Psi}({}^n \boldsymbol{\varepsilon})$  es la energía libre de Helmholtz elástica del material ficticio sin daño y  ${}^n \bar{\mathbb{C}}$  es el tensor constitutivo elástico correspondiente al material no dañado.

La disipación mecánica esta definida de la siguiente forma:

$$(4:123) \quad \Xi_m = \left( {}^n \boldsymbol{\sigma} - {}^n m^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} \right) : {}^n r^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n m^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n d} \dot{d} \geq 0$$

como  ${}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$  es una variación temporal, para garantizar que se cumple la desigualdad de Clausius-Duhem su multiplicador debe ser idénticamente nulo, es decir que teniendo en cuenta la ecuación (4:122) se obtiene que :

$$(4:124) \quad \left( {}^n \boldsymbol{\sigma} - {}^n m^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} \right) = \mathbf{0} \rightarrow {}^n \boldsymbol{\sigma} = {}^n m^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - {}^n d) ({}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = (1 - {}^n d) {}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}$$

Con esto se corrobora lo planteado en la expresiones (4:69) y (4:95) para las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo en lo que respecta a las tensiones de los componentes. La anterior expresión puede ser escrita como:

$$(4:125) \quad {}^n \boldsymbol{\sigma} = (1 - {}^n d) {}^n r ({}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon}) = {}^n r^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon} - {}^n d {}^n r^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon} = {}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}} - {}^n \boldsymbol{\sigma}_d$$

La desigualdad de Clausius-Duhem implica que la disipación de mecánica corresponde a la energía disipada por el daño del material, por lo tanto:

$$(4:126) \quad \Xi_m = {}^n m^n r \frac{\partial {}^n \Psi}{\partial {}^n d} \dot{d} = {}^n m^n r^n \bar{\Psi}({}^n \boldsymbol{\varepsilon}) \dot{d} \leq 0$$

lo que coincide con las expresiones (4:70) y (4:98) de las teorías de mezclas.

- *Criterio de umbral de daño*

Para introducir el DFM en el modelo constitutivo es necesario modificar el límite de proporcionalidad de cada componente, por lo tanto se redefine el criterio de fluencia para cada componente de tal modo que:

$$(4:127) \quad \mathcal{F}^\sigma({}^n \boldsymbol{\sigma}, {}^n \boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{{}^n r} f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}) - \kappa({}^n d) \leq 0 \quad {}^n \boldsymbol{\beta} \equiv \{{}^n d\} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

$\mathcal{F}^\sigma$  es la función continua de tensiones,  $\kappa({}^n d)$  es la función que define la posición del umbral de daño. Por medio de la expresión (4:127) se establece el inicio del daño, además representa una superficie límite en el espacio de las tensiones no dañadas. El valor inicial del umbral de daño,  $\kappa({}^n d_o) = {}^n \kappa_o = {}^n \sigma^{\max}$  es una propiedad del material, que se relaciona con la resistencia a tracción o a compresión, según sea la función de umbral de daño con la que se realice el análisis.

Una expresión equivalente a la (4:127), esta dada por el criterio  $\tilde{\mathcal{F}}^\sigma$ , el cual

depende de una función escalar, invertible y positiva  $G[\chi]$ , y que además tiene una derivada positiva y monótona creciente [70], tal que:

$$(4:128) \quad \tilde{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{{}^nr} G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})] - G[\kappa({}^nd)] \leq 0 \quad {}^n\boldsymbol{\beta} \equiv \{{}^nd\} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Como se observa en las ecuaciones (4:127) y (4:128), a través del factor de proporción  ${}^nr$  se redefine el umbral de tensiones, en el cual se reduce la capacidad del material que se presenta a causa del DFM.

- *Ley de evolución de la variable interna de daño*

La ley de evolución de la variable interna de daño se establece como:

$$(4:129) \quad {}^nd = {}^n\dot{\mu} \frac{\partial \tilde{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta})}{\partial [f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \equiv {}^n\dot{\mu} \frac{1}{{}^nr} \frac{\partial G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \leq 0$$

${}^n\dot{\mu}$  es el parámetro de consistencia de daño, el cual debe cumplir con las condiciones de Kuhn-Tucker [1]

$$(4:130) \quad {}^n\dot{\mu} \geq 0 \quad \tilde{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) \leq 0 \quad {}^n\dot{\mu} \tilde{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) = 0$$

Imponiendo la condición de consistencia de daño de Il'ushim y de las propiedades de la función  $G[\chi]$ , tal como lo presenta Oller [70], se obtiene que:

$$(4:131) \quad \left. \begin{array}{l} F^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) = 0 \rightarrow \frac{1}{{}^nr} f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \kappa({}^nd) \\ \tilde{F}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) = 0 \rightarrow \frac{1}{{}^nr} G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})] = G[\kappa({}^nd)] \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{{}^nr} \frac{\partial G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]} = \frac{\partial G[\kappa({}^nd)]}{\partial \kappa({}^nd)}$$

De la condición de persistencia dada por la variación temporal del umbral de daño se tiene que:

$$(4:132) \quad \dot{\tilde{F}}^\sigma({}^n\boldsymbol{\sigma}, {}^n\boldsymbol{\beta}) = 0 \rightarrow \underbrace{\frac{1}{{}^nr} \frac{\partial G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \dot{f}({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})}_{\dot{G}[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]} - \underbrace{\frac{\partial G[\kappa({}^nd)]}{\partial \kappa({}^nd)} \dot{\kappa}({}^nd)}_{\dot{G}[\kappa({}^nd)]} = 0$$

considerando lo determinado en (4:131) en la ecuación (4:132) se establece que  $\dot{f}({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \dot{\kappa}({}^nd)$ .

Al relacionar la variación temporal del primer término de la expresión (4:132) con (4:129), la variación temporal del daño se define:

$$(4:133) \quad {}^nd = \frac{1}{{}^nr} \dot{G}[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})] = \frac{1}{{}^nr} \frac{\partial G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \dot{f}({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \rightarrow {}^n\dot{\mu} \equiv \dot{f}({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})$$

Por lo tanto, el parámetro de consistencia corresponde a:

$$(4:134) \quad {}^n\dot{\mu} = \dot{f}({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \dot{\kappa}({}^nd) = \frac{\partial f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^n\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^n\dot{\bar{\mathbf{C}}} : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^nr : {}^n\dot{\bar{\mathbf{C}}} : {}^n\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Al integrar en el tiempo la variación temporal de la variable de daño, se halla que:

$$(4:135) \quad {}^nd = \int_t {}^nd = \frac{1}{{}^nr} \int_t \dot{G}[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})] = \frac{1}{{}^nr} G[f({}^n\bar{\boldsymbol{\sigma}})]$$



La disipación mecánica de energía queda expresada como:

$$\begin{aligned}
 \Xi_m &= {}^n m {}^n r {}^n \bar{\Psi}({}^n \boldsymbol{\varepsilon}) {}^n \dot{d} = {}^n m {}^n r {}^n \bar{\Psi}({}^n \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{1}{r} \frac{\partial G[f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \frac{\partial f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^n \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \\
 (4:136) \quad &= {}^n m {}^n r {}^n \bar{\Psi}({}^n \boldsymbol{\varepsilon}) \frac{1}{r} \frac{\partial G[f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \frac{\partial f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^n r {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \leq 0
 \end{aligned}$$

Asimismo, se obtiene que el umbral de daño  $\mathcal{K}({}^n d)$  equivale a:

$$(4:137) \quad \mathcal{K}({}^n d) = \max \left\{ {}^n \mathcal{K}_o, \max \left\{ f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \right\} \right\}$$

- *Tensor constitutivo*

Para determinar el tensor constitutivo de daño  ${}^n \mathbb{C}_T$  tangente, se considera la variación temporal de la ecuación constitutiva secante

$$(4:138) \quad {}^n \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (1 - {}^n d) {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n \dot{d} {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon} = (1 - {}^n d) {}^n r {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - {}^n \dot{d} {}^n r {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon}$$

Reemplazando la variación temporal de la variable de daño de la ecuación (4:133) en la anterior expresión se tiene que:

$$(4:139) \quad {}^n \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = (1 - {}^n d) {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{r} \frac{\partial G[f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \dot{f}({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon}$$

Teniendo en cuenta que la variación temporal de la función del umbral es:

$$(4:140) \quad \dot{f}({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \frac{\partial f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}}} : {}^n \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \frac{\partial f({}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon})}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = {}^n r \frac{\partial f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

sustituyendo esta expresión en (4:139) se obtiene el tensor constitutivo de daño tangente

$$(4:141) \quad {}^n \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} = {}^n r \underbrace{\left[ (1 - {}^n d) {}^n \bar{\mathbb{C}} - \frac{1}{r} \frac{\partial G[f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]}{\partial [f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})]} \left[ {}^n \bar{\mathbb{C}} : {}^n \boldsymbol{\varepsilon} \right] \otimes \left[ \frac{\partial f({}^n \bar{\boldsymbol{\sigma}})}{\partial {}^n \boldsymbol{\varepsilon}} \right]}_{{}^n \mathbb{C}_T} : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \rightarrow {}^n \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \equiv {}^n r {}^n \mathbb{C}_T : {}^n \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

#### 4.4.6 Verificación del modelo propuesto en un elemento finito

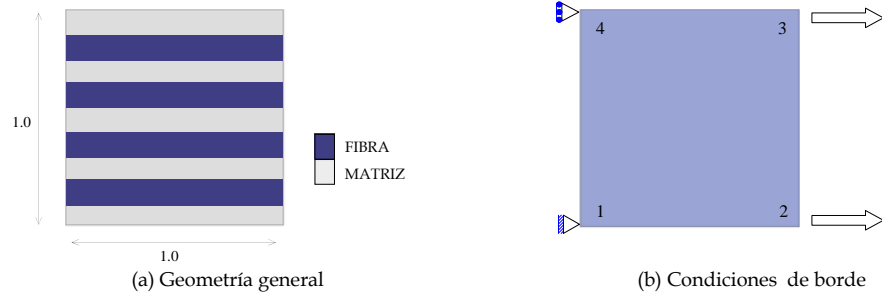


FIGURA 4-18 ESQUEMA REPRESENTATIVO PARA ANALISIS DEL MODELO EN UN ELEMENTO FINITO

Con el objetivo de observar la incidencia de introducir el DFM en las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, aplicando el modelo propuesto, se analiza un elemento finito solicitado a tracción con las dimensiones y condiciones de borde indicadas en la figura 4-18.

#### 4.4.6.1 Características de las configuraciones consideradas para la verificación

Se analizaron 4 configuraciones con el propósito de comparar los comportamientos resultantes al considerar o no el DFM en las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, además se contrastaron con el comportamiento de un elemento conformado por solo matriz. En la tabla 4-1 se indica la nomenclatura utilizada y se señala la participación volumétrica de las fibras y la matriz en el compuesto. Las propiedades de la matriz y de las fibras se muestran en la tabla 4-2.

En esta verificación se aplicó el modelo de daño de isotropo en la matriz del compuesto, mientras que para las fibras se consideró un modelo elasto-plástico. En todos los casos se parte de la hipótesis, que no hay daño inicial en los materiales, además se supuso un estado inicial de adherencia perfecta entre las fibras y la matriz. El proceso de carga se realizó por control de desplazamientos.

Descripción de la Configuración	Participación volumétrica		Nomenclatura
	Matriz	Fibra	
Elemento finito de material simple	100%	-	MATRIZ
Elemento finito de material compuesto analizado con la teoría de mezclas clásica sin considerar DFM	50%	50%	TCSD
Elemento finito de material compuesto analizado con la teoría de mezclas clásica considerando DFM	50%	50%	TCCD
Elemento finito de material compuesto analizado con la teoría de mezclas serie/paralelo sin considerar DFM	50%	50%	SPSD
Elemento finito de material compuesto analizado con la teoría de mezclas serie/paralelo considerando DFM	50%	50%	SPCD

TABLA 4-1 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN

Material	Criterio de límite	$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz}$ MPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$\sigma_t$ MPa	$G_c$ J/m <sup>2</sup>	$G_t$ J/m <sup>2</sup>
Matriz	Mohr-Coulomb	$2.5 \cdot 10^4$	0.20	30.0	3.0	50.0	0.5
Fibra	Von Mises	$1.0 \cdot 10^5$	0.00	435.0	435.0	2000.0	2000.0

TABLA 4-2 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS COMPONENTES DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN

#### 4.4.6.2 Análisis del comportamiento del elemento finito de verificación

- *Resistencia y rigidez*

En la figura 4-19 se observa que las diferentes configuraciones pierden el comportamiento lineal inicial, con el desplazamiento en el que se alcanza la resistencia máxima en el modelo conformado por matriz. Las configuraciones que no consideran el DFM (TCSD y SPSP) tienen una respuesta similar independientemente de la teoría de mezclas utilizada, pierden rigidez en el momento que hay daño en la matriz pero no presentan reducción en su capacidad

de carga. En las configuraciones TCCD y SPCD se evidencia que la capacidad del compuesto se afecta conforme evoluciona el daño en la matriz, debido a que se disminuye su capacidad de transmitir los esfuerzos a las fibras.

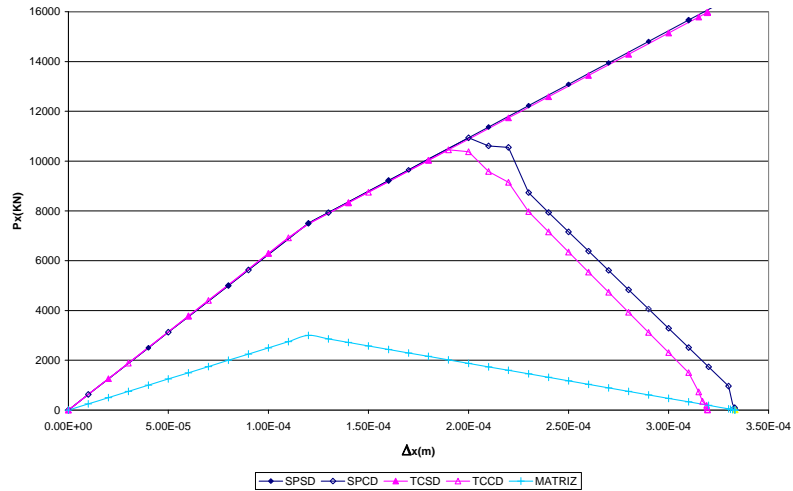


FIGURA 4-19 CURVAS CARGA-DESPLAZAMIENTO DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN

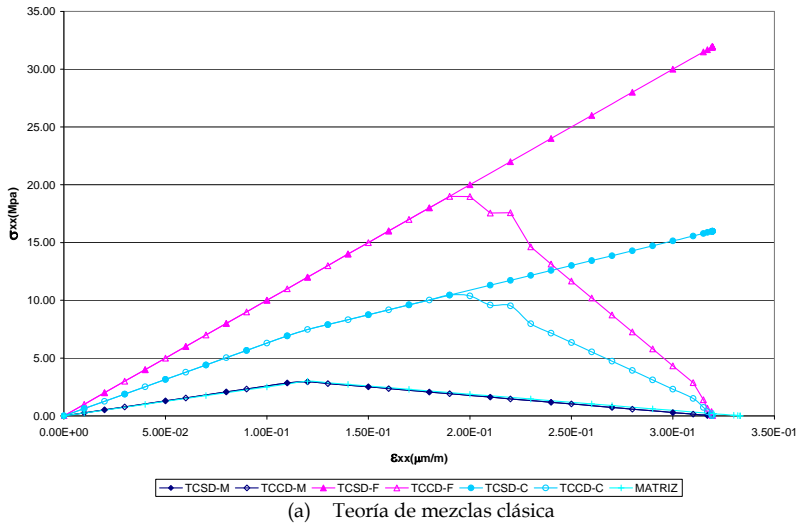
De otra parte, figura 4-19 se observa que en el proceso de pérdida de capacidad del compuesto, la carga máxima soportada difiere entre las dos teorías de mezclas, para las condiciones asignadas en este ejemplo, con la teoría clásica TCCD la respuesta es menor que con la teoría serie/paralelo SPCD.

- *Tensiones y deformaciones en los componentes*

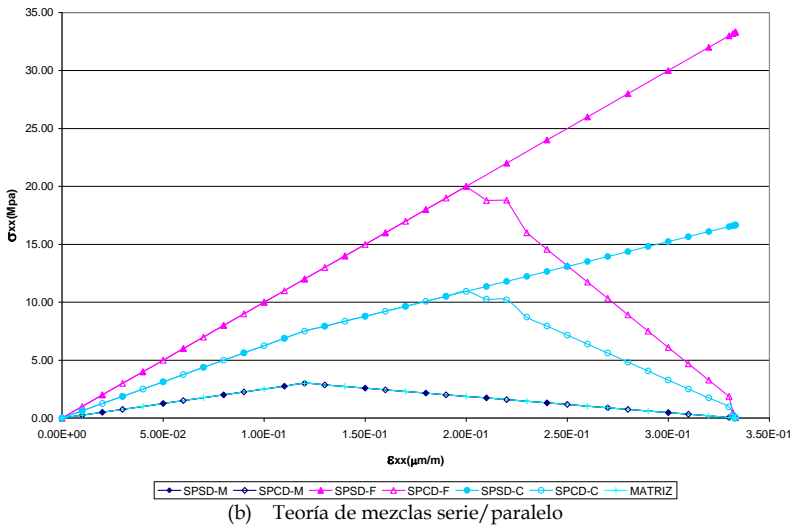
En la figura 4-20 y en la figura 4-21, se presentan las curvas de tensión deformación del nodo 2, para comparar el comportamiento de los componentes del compuesto cuando se considera o no el DFM. En estas figuras los índices M, F y C corresponden a la matriz, a las fibras y al compuesto respectivamente.

Como se ve en la figura 4-20, en la dirección  $x$ , en la matriz se tiene que las curvas de tensión deformación son similares, con la teoría clásica  $TCSO-M \approx TCCD-M$  (a), y con la teoría serie/paralelo  $SPSD-M \approx SPCD-M$ . Esto muestra, que el comportamiento del material menos resistente del compuesto es independiente de si se considera o no el DFM, y que su respuesta influye en el comportamiento de los otros componentes del compuesto si se introduce el DFM.

En lo que respecta al refuerzo en la dirección de orientación de las fibras (*eje x*), en la figura 4-20 se aprecia que en los casos en los que no consideran el DFM, TCSO-F y SPCD-F, las fibras permanecen con un comportamiento lineal, es decir que la rigidez y la capacidad de las fibras no se afectan con el daño en la matriz. Por el contrario, en los casos TCCD-F y SPCD-F, al involucrar el DFM en las teorías de mezclas, el comportamiento de las fibras se reduce proporcionalmente con la evolución del daño en la matriz, sin que las tensiones de las fibras alcancen su resistencia a la tracción.



(a) Teoría de mezclas clásica



(b) Teoría de mezclas serie/paralelo

FIGURA 4-20 TENSIÓN DEFORMACIÓN EN LA DIRECCIÓN DE LAS FIBRAS

En la figura 4-20 con respecto al compuesto, se concluye que en los casos en que no se tiene en cuenta el DFM, TCSD-C y SPCD-C, se pierde la linealidad inicial cuando se alcanza la tensión máxima de la matriz, pero no hay pérdida de resistencia del compuesto, dado que continua con el comportamiento lineal aportado por las fibras. Por el contrario, en los casos con DFM, TCCD-C y SPCD-C, se reduce la resistencia del compuesto, además su comportamiento no lineal corresponde a la evolución del daño en la matriz acorde con el ablandamiento presentado, y a la consecuente reducción de transmisión de esfuerzos de la matriz a las fibras.

En la figura 4-21 se indica el comportamiento transversal a las fibras (*eje y*) de los componentes y del compuesto; donde se muestran las diferencias entre las dos

teorías de mezclas y se evidencia que no hay incidencia de considerar o no el DFM, por lo tanto, transversalmente se tiene que  $TCSD \approx TCCD$  y  $SPSD \approx SPCD$ .

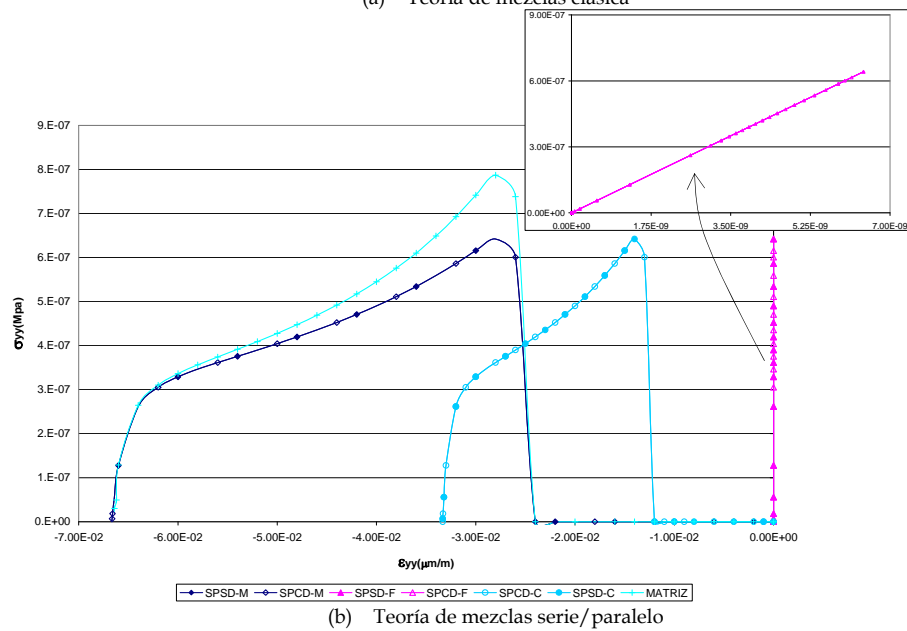
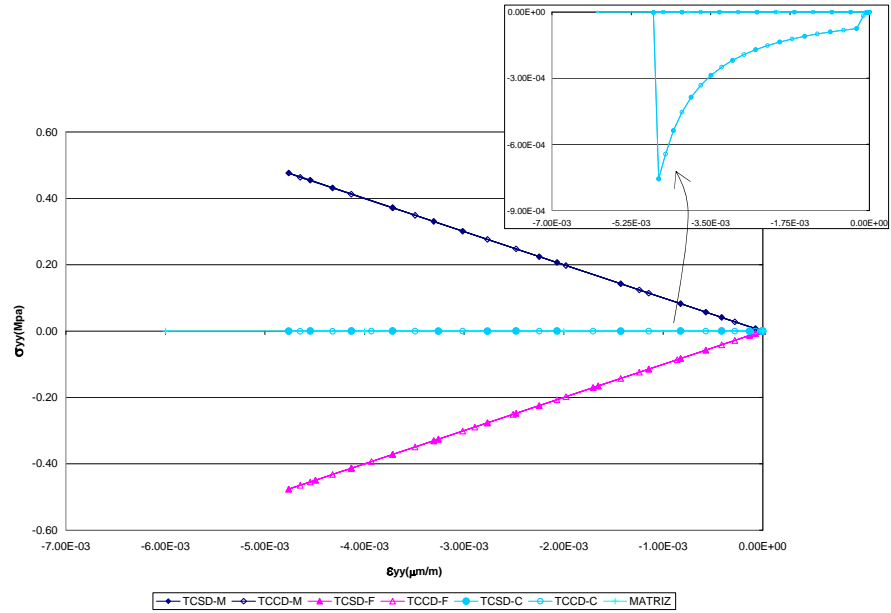


FIGURA 4-21 TENSIÓN DEFORMACIÓN EN LA DIRECCIÓN TRANSVERSAL A LAS FIBRAS

En cada teoría, las tensiones en las fibras y en la matriz son del mismo orden de magnitud. En lo correspondiente a la teoría de mezclas clásica indicado en la figura

4-21 (a), donde en la matriz tiene un comportamiento lineal, con una tensión a tracción que alcanza un 16.7% de la máxima tensión en  $x$ ; asimismo las fibras tienen un comportamiento lineal pero a compresión. Con respecto a la teoría serie/paralelo, en la figura 4-21 (b) se aprecia que el comportamiento en la matriz es no lineal con una tensión máxima equivalente al  $2 \cdot 10^{-5}$ % de la tensión máxima en  $x$ , que en las fibras el comportamiento es lineal; asimismo se ve que en los dos componentes las tensiones son a tracción acorde con las condiciones de compatibilidad de la teoría.

El comportamiento de las fibras y el compuesto cuando se considera el DFM depende de la teoría de mezclas utilizada. En la figura 4-20, con la teoría clásica las tensiones máximas  $\sigma_{xx}$  son menores a las obtenidas con la teoría serie/paralelo, aunque las deformaciones  $\varepsilon_{xx}$  son del mismo orden de magnitud. De otra parte, en la figura 4-21 se aprecia que las tensiones  $\sigma_{yy}$  obtenidas con la teoría clásica son considerablemente mayores a las determinadas con la teoría serie/paralelo, de igual forma, que con la teoría clásica, las deformaciones  $\varepsilon_{yy}$  son un 7% de las obtenidas con la teoría serie/paralelo.

Las diferencias de las respuestas entre las dos teorías se deben a que las ecuaciones de cierre son distintas; en la dirección de las fibras, la condición en ambas teorías es que las deformaciones sean iguales; en cambio, las condiciones difieren en la dirección transversal a las fibras, en la teoría clásica las deformaciones deben ser iguales, mientras que en la teoría serie/paralelo se tiene que las tensiones deben ser iguales y no hay restricciones para las deformaciones.

Para las características específicas del compuesto y las condiciones de frontera del elemento analizado, como se ve en la figura 4-19, las curvas carga desplazamiento tienen una tendencia parecida cuando se considera el DFM, sin embargo, con la teoría serie/paralelo, la respuesta global es mayor que la calculada con la teoría clásica. Esto se debe a que el comportamiento en la dirección transversal a la orientación de las fibras es diferente acorde con las condiciones de compatibilidad y equilibrio dadas por cada teoría de mezclas.

- *Aplicación del modelo propuesto para diferentes tipos de compuestos*

A través del análisis del elemento finito en el que se aplica el modelo propuesto en las teorías de mezclas para introducir el DFM, se observa la influencia del deslizamiento fibra-matriz en el comportamiento del compuesto.

Para esta validación específicamente se observó la influencia el daño de la matriz y su correspondiente reducción de la capacidad de transmisión de esfuerzos en la fibra, conllevando a la pérdida de resistencia del compuesto. No obstante, el DFM afecta el comportamiento de los compuestos de diferente forma, ya que sus efectos dependen del fenómeno que se presente en cada componente (elasto-plasticidad, visco-plasticidad y otros), además de otros factores, entre ellos: las proporciones volumétricas y las propiedades mecánicas de los componentes, las direcciones de orientación de las fibras y las condiciones en que se aplican las cargas.

#### 4.5 Estudio del DFM en micromodelos y en macromodelos a través de las teorías de mezclas

A continuación se muestra un ejemplo de un laminado en hormigón armado solicitado a tracción, en el que se aplica el modelo propuesto a cuatro macromodelos, para considerar el fenómeno de DFM en las teorías de mezclas. Asimismo, se compara el comportamiento obtenido en los macromodelos con el determinado a través de los micromodelos. El objetivo de este análisis es estudiar el fenómeno de transferencia de esfuerzos de la matriz hacia el refuerzo cuando ocurre el deslizamiento en la interfaz fibra-matriz, por medio de los micromodelos, y mostrar la aproximación de los macromodelos en los que se aplicó el modelo propuesto a las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo.

##### 4.5.1 Geometría de la probeta y descripción de las configuraciones

En la figura 4-22 se muestra la geometría de la probeta de hormigón armado solicitada a tracción, la cual tiene doble entalla en la zona central de la pieza, para evidenciar el efecto del DFM. Los micromodelos y los macromodelos se analizaron en el estado plano de tensiones con elementos lineales de 4 nodos, en los que la tracción se aplicó por control de desplazamientos.

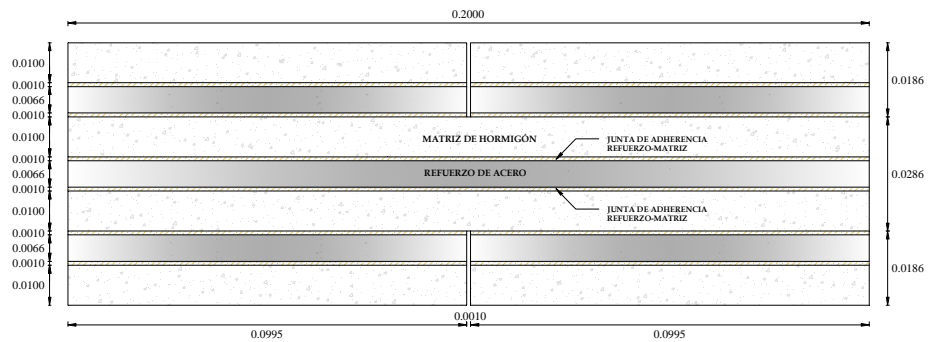


FIGURA 4-22 DIMENSIONES DE LA PIEZA DE HORMIGÓN ARMADO

Las propiedades de los materiales componentes de los micromodelos y de los macromodelos se muestran en la tabla 4-3. En las configuraciones no se tiene en cuenta la relación de Poisson en el refuerzo, para que al involucrar el DFM, no se sobreestimen las tensiones locales de la matriz causadas por las diferencias entre las relaciones de Poisson del hormigón y del acero.

Material	Criterio límite	$E_{xx}=E_{yy}=E_{zz}$ MPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$\sigma_t$ MPa	$G_c$ J/m <sup>2</sup>	$G_t$ J/m <sup>2</sup>
Hormigón	Mohr-Coulomb	$3.5 \cdot 10^4$	0.20	20.0	2.0	25.0	0.25
Acero	Von Mises	$2.1 \cdot 10^5$	0.00	200.0	200.0	1000.0	1000.0
Junta de adherencia	Von Mises	$3.5 \cdot 10^4$	0.20	10.0	10.0	2.0	2.0

TABLA 4-3 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES COMPONENTES

En los micromodelos, tal como se muestra en la figura 4-23, se han discretizado tres fases: el acero que corresponde al refuerzo, el hormigón que equivale a la matriz y la junta de adherencia (interfaz fibra-matriz). Los micromodelos están compuestos por 343 elementos, 392 nodos y 766 grados de libertad. Para considerar el deslizamiento fibra-matriz en los micromodelos, solo se restringieron los extremos de hormigón y los extremos del refuerzo se dejaron libres. La configuración del mallado de los macromodelos se indica en la figura 4-24, los cuales están constituidos por dos materiales compuestos.

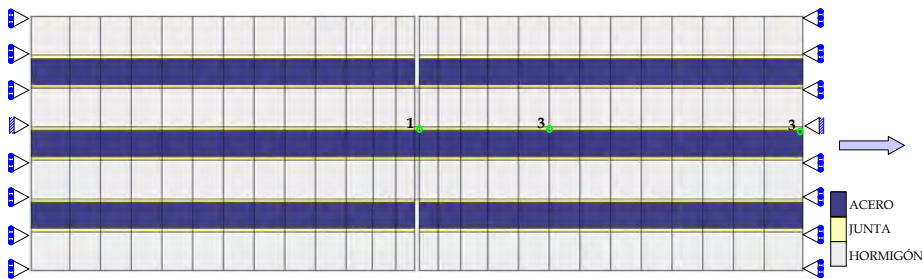


FIGURA 4-23 ESQUEMA REPRESENTATIVO DE LOS MICROMODELOS

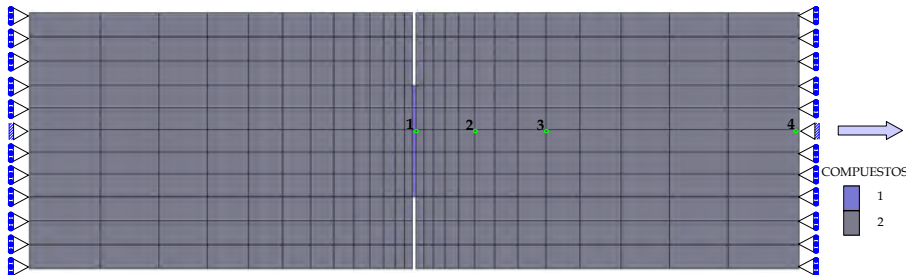


FIGURA 4-24 ESQUEMA REPRESENTATIVO DEL MACROMODELO DE LAS TEORÍAS DE MEZCLAS

Material compuesto	Matriz (Hormigón)	Refuerzo (Acero a 0°)	Junta de adherencia
1	77.0	23.0	0
2	70.0	30.0	0

TABLA 4-4 PARTICIPACIÓN VOLUMÉTRICA DE LOS COMPONENTES EN LOS COMPUESTOS

En la tabla 4-4 se muestran los porcentajes volumétricos en los que participan los componentes en cada material compuesto. Los macromodelos están conformados por 291 elementos, 336 nodos y 644 grados de libertad. En la tabla 4-5 se indican las coordenadas de nodos mostrados en la figura 4-23 y en la figura 4-24.

Nodo	Micromodelo (Hormigón)	Micromodelo (Acero)	Macromodelos
1	0.1005,0.03633	0.1005,0.03733	0.1005,0.03588
2	-	-	0.1208,0.03588
3	0.1502,0.03633	0.1502,0.03733	0.1537,0.03588
4	0.2000,0.03633	0.2000,0.03733	0.2000,0.03588

TABLA 4-5 COORDENADAS DE LOS NODOS DE LOS MICROMODELOS Y MACROMODELOS



#### 4.5.2 Descripción de los modelos constitutivos aplicados

Para determinar el efecto del DFM en el comportamiento del compuesto producido por los mecanismos de fallo indicados en la figura 4-1, se consideraron diferentes tipos de comportamiento de los materiales simples, como se indica a continuación:

- En los macromodelos y los micromodelos, las fibras representadas por el acero, se analizó como un material elasto-plástico con el algoritmo de Euler.
- El hormigón, correspondiente a la matriz del compuesto, se estudió bajo dos fenómenos en los macromodelos y los micromodelos. Uno en el que se utilizó modelo de daño de isotropo bajo la consideración que la matriz es un material frágil (MD), y otro, en el que la matriz se asumió como un material dúctil (MP) por lo que se aplicó el modelo elasto-plástico.
- Adicionalmente en los micromodelos, para la simulación de la junta de adherencia entre el hormigón y el acero, se tuvieron en cuenta dos tipos de comportamiento, uno en el que se supuso la junta frágil (ID) y se analizó con el modelo de daño de isotropo, y otro, en que la junta se estudió como un material dúctil (IP) con el modelo elasto-plástico.

En la tabla 4-6 se identifican los modelos constitutivos considerados en los micromodelos. En la tabla 4-7 se señalan los modelos constitutivos aplicados a los macromodelos, los cuales fueron analizados con la teoría de mezclas clásica (TC) y con la teoría de mezclas serie/paralelo (SP). En los 8 casos se ha considerado la hipótesis, que no hay daño, ni plasticidad inicial en los materiales, además se supuso un estado inicial de adherencia perfecta entre las fibras y la matriz.

Micromodelo	Interfaz matriz-fibra	Matriz	Fibra
IP-MP	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
IP-MD	Modelo elasto-plástico	Modelo de daño	Modelo elasto-plástico
ID-MP	Modelo de daño	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
ID-MD	Modelo de daño	Modelo de daño	Modelo elasto-plástico

TABLA 4-6 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DE LOS MICROMODELO

Macromodelo	Teoría de Mezclas	Matriz	Fibra
TC-MP	Teoría clásica	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
SP-MP	Teoría serie/paralelo	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
TC-MD	Teoría clásica	Modelo de daño	Modelo elasto-plástico
SP-MD	Teoría serie/paralelo	Modelo de daño	Modelo elasto-plástico

TABLA 4-7 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DE LOS MACROMODELOS

#### 4.5.3 Análisis con respecto al proceso de carga

- *Resistencia y rigidez*

En la figura 4-25 se identifica que los micromodelos presentan una mayor rigidez que los macromodelos, y que las cargas máximas son del mismo orden de

magnitud. Comparando los macromodelos se identifica que cuando se considera la matriz elasto-plástica, la carga máxima con la teoría serie/paralelo SP-MP es mayor un 1.1% con respecto a la determinada con la teoría clásica TC-MP. Cuando en la matriz hay daño se tiene que con la teoría serie/paralelo SP-MD la carga máxima es menor un 1.7% con respecto a la obtenida con la teoría clásica TC-MD. Pese a estas diferencias, es evidente que el ablandamiento del compuesto conserva la misma tendencia para las dos teorías de mezclas de acuerdo con el comportamiento considerado en la matriz.

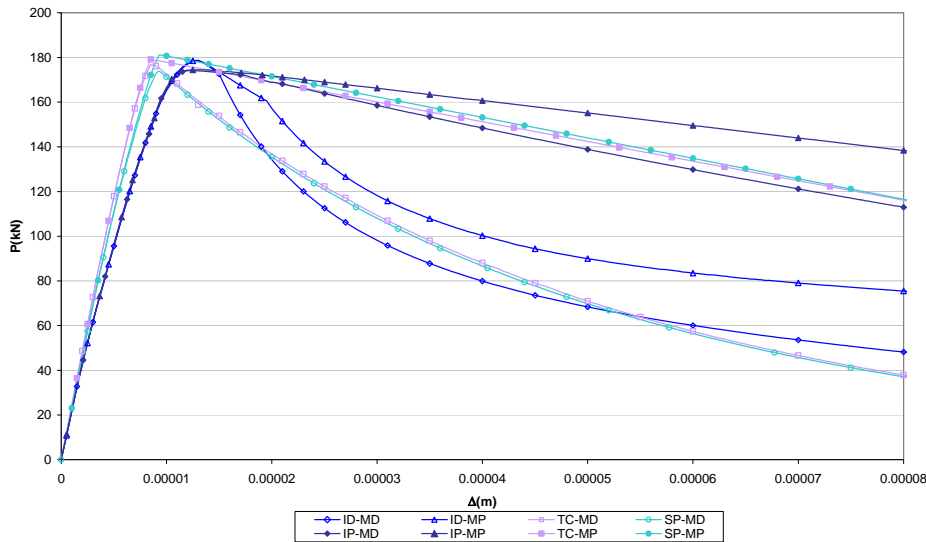


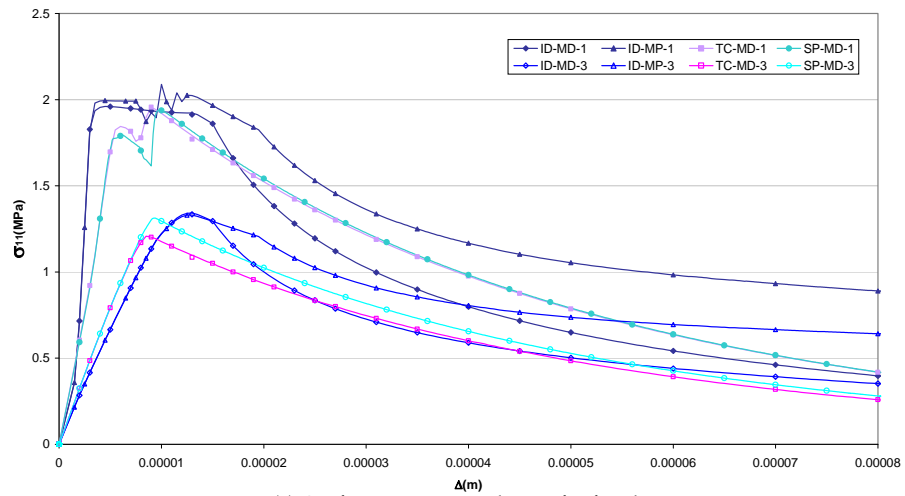
FIGURA 4-25 P- $\Delta$  DE LOS MACROMODELOS Y LOS MICROMODELOS

El comportamiento de los micromodelos está dominado por el material menos resistente que en este caso corresponde a la interfaz, esto muestra que el material menos resistente no necesariamente es el componente con menor resistencia. Asimismo se corrobora que el funcionamiento mecánico de un material compuesto depende en gran medida del comportamiento de la interfaz de fibra-matriz, como lo han mencionado diferentes investigadores [1; 58;73].

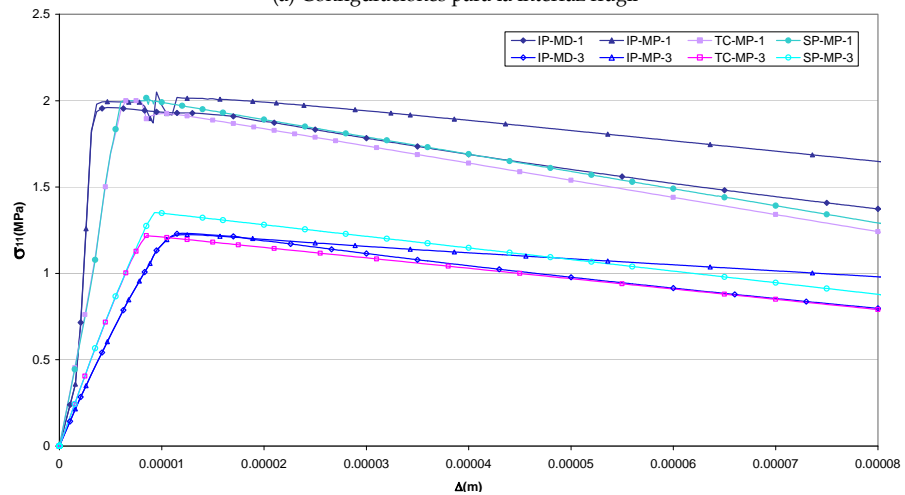
Los micromodelos con una interfaz dúctil (IP-MD y IP-MP), pueden ser representados por las teorías de mezclas considerando la matriz elasto-plástica (TC-MP y SP-MP). Asimismo, se observa que en los micromodelos en los que la interfaz es frágil (ID-MD y ID-MP), su comportamiento puede ser simulado por las teorías de mezclas tomando la matriz frágil (TC-MD y SP-MD). De otra parte, en la figura 4-25 se ve que en los compuestos con interfaz frágil (ID), el ablandamiento es no lineal y la pérdida de rigidez es mayor, que en los compuestos con interfaz dúctil (IP), donde el ablandamiento es lineal; es decir que en los compuestos, los efectos irreversibles producidos por el DFM son mayores cuando la interfaz es frágil. De igual forma se aprecia que en los compuestos con la matriz dúctil (MP) el ablandamiento es menor que los compuestos con la matriz frágil (MD).

- *Tensiones principales en los materiales*

Para observar la evolución de las tensiones principales en la matriz y en las fibras con respecto al desplazamiento aplicado, se seleccionaron dos nodos en los micromodelos y en los macromodelos, uno en la zona media entre las entallas (1) y otro en la zona central de uno de los lados (3), los cuales se señalan en la figura 4-23 y en la figura 4-24. Es de anotar que aunque los nodos de los macromodelos y los micromodelos son cercanos, las coordenadas son distintas, por lo tanto, si bien el comportamiento es aproximado entre ellos, la rigidez en los nodos es diferente.



(a) Configuraciones para la interfaz frágil

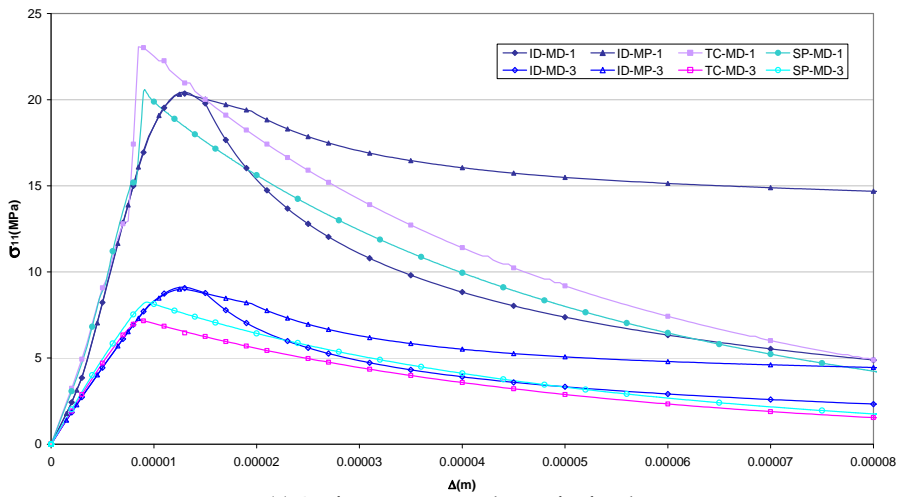


(b) Configuraciones para la interfaz dúctil

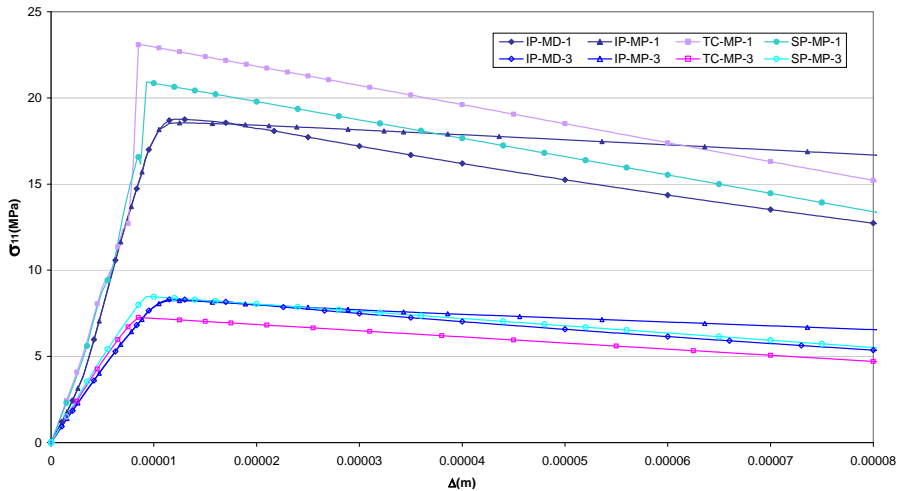
FIGURA 4-26 TENSIONES PRINCIPALES EN LA MATRIZ

En la figura 4-26 y en la figura 4-27 se muestra que para la matriz y la fibra el comportamiento entre los micromodelos y los macromodelos es parecido. La diferencia en el comportamiento de la matriz, esta en la relación con la pérdida de resistencia, cuando la interfaz es frágil (figura 4-26 (a)), el ablandamiento es no

lineal, mientras que si es dúctil (figura 4-26 (b)), el ablandamiento es lineal. Cerca de la entalla se tiene que las tensiones máximas de los micromodelos son un poco mayores a la de los micromodelos, mientras que en el nodo (3) las tensiones máximas de los macromodelos SP-MD-3 y SP-MP-3 son un 1% mayores de los micromodelos.



(a) Configuraciones para la interfaz frágil



(b) Configuraciones para la interfaz dúctil

FIGURA 4-27 TENSIONES PRINCIPALES EN LA FIBRA

Las tensiones principales en el nodo (1) en los macromodelos son bastante similares para las dos teorías de mezclas (TC-MD-1 $\approx$ SP-MD-1, y TC-MP-1 $\approx$ SP-MP-1), con la teoría de mezclas clásica las tensiones son un 1% mayores. En el nodo (3) las tensiones principales determinadas con la teoría clásica son aproximadamente un 9% menores a las obtenidas con la teoría de mezclas serie/paralelo (TC-MD-3 $<$ SP-MD-3, y TC-MP-3 $<$ SP-MP-3).

En lo que respecta al comportamiento de las fibras, en la figura 4-27 se tiene que las tensiones principales cerca de las entallas con la teoría de mezclas clásica son mayores que las obtenidas con los micromodelos, TC-MD-1 un 13% y TC-MP-1 un 22%. Con la teoría de mezclas serie/paralelo, la tensión máxima de SP-MD-1 es similar a la de los micromodelos con interfaz frágil, y la tensión máxima SP-MP-1 es mayor un 11% con respecto a los micromodelos con interfaz dúctil. En la figura 4-27 se aprecia que para las fibras en la zona media la evolución de las tensiones es parecida entre los macromodelos y los micromodelos, pero con la teoría clásica (TC-MD-3 y TC-MP-3) las tensiones máximas son menores un 8% de las halladas con la teoría serie/paralelo (SP-MD-3 y SP-MP-3).

- *Distribución de tensiones para un desplazamiento de  $1.25 \cdot 10^{-5}m$*

A continuación se analiza la distribución de las tensiones en los materiales componentes para un desplazamiento  $1.25 \cdot 10^{-5}m$ . Con este desplazamiento se produce la mayor abertura en las entallas de los micromodelos, y es donde se intersectan las curvas carga desplazamiento de los cuatro micromodelos después de alcanzar la carga máxima. Además, hasta este desplazamiento, los micromodelos presentan un comportamiento similar según el tipo de matriz, ID-MD  $\approx$  IP-MD y ID-MP  $\approx$  IP-MP.

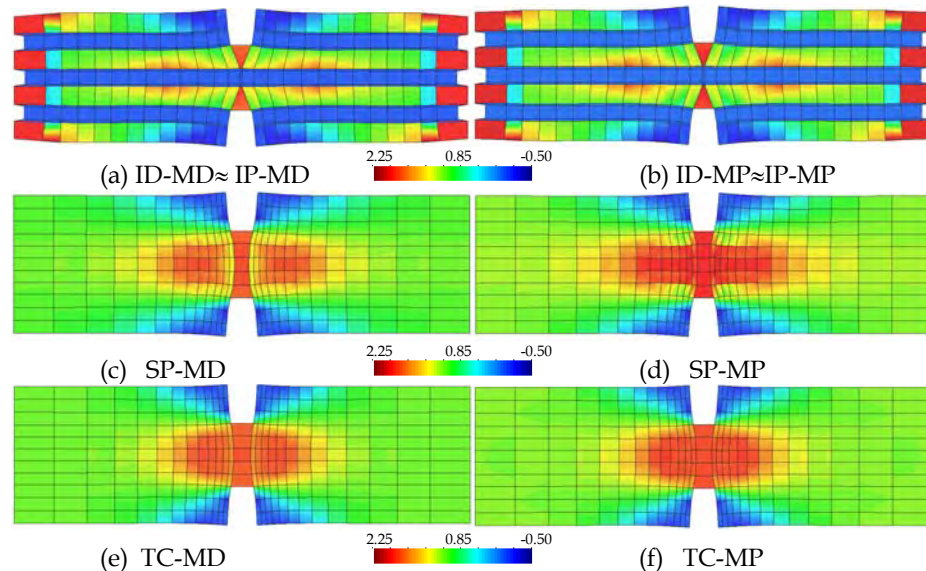


FIGURA 4-28 TENSIONES XX EN LA MATRIZ PARA UN  $\Delta=1.25 \cdot 10^{-5}M$  DEFORMADA 1:1000

En la figura 4-28 se observa la distribución de tensiones de la matriz en la dirección de las fibras ( ${}^m\sigma_{xx}$ ); en todos los casos, las tensiones máximas se presentan en la zona entre las entallas. En los macromodelos, en los modelos con la matriz elasto-plástica (SP-MP, TC-MP), la zona con altas tensiones de tracción es más extensa que en los casos en que la matriz es susceptible al daño (SP-MD, TC-MD). Con la teoría serie/paralelo, las tensiones se concentran en los elementos del centro de la

pieza, con la teoría de mezclas clásica las tensiones máximas se distribuyen conforme al ancho de la zona con entallas.

La distribución de tensiones en la matriz en la dirección transversal a las fibras ( ${}^m\sigma_{yy}$ ) se muestra en la figura 4-29; en la zona entre las entallas se observa que cuando la matriz es elasto-plástica las tensiones son altas (ID-MP $\approx$ IP-MP, SP-MP y TC-MP), pero si la matriz presenta daño, las tensiones son nulas (ID-MD $\approx$ IP-MD, SP-MD y TC-MD). Para los casos con matriz frágil, las tensiones son mayores en los elementos adyacentes a la zona de las entallas, de igual forma, las tensiones máximas con la teoría clásica son menores que las calculadas con la teoría serie/paralelo (TC-MD $<$ SP-MD). En los modelos con la matriz dúctil, las tensiones máximas son mayores en los micromodelos (ID-MP $\approx$ IP-MP) que en los macromodelos (TC-MP y SP-MP); asimismo, con la teoría clásica se obtienen tensiones mayores que con la teoría serie/paralelo (TC-MP $>$ SP-MP).

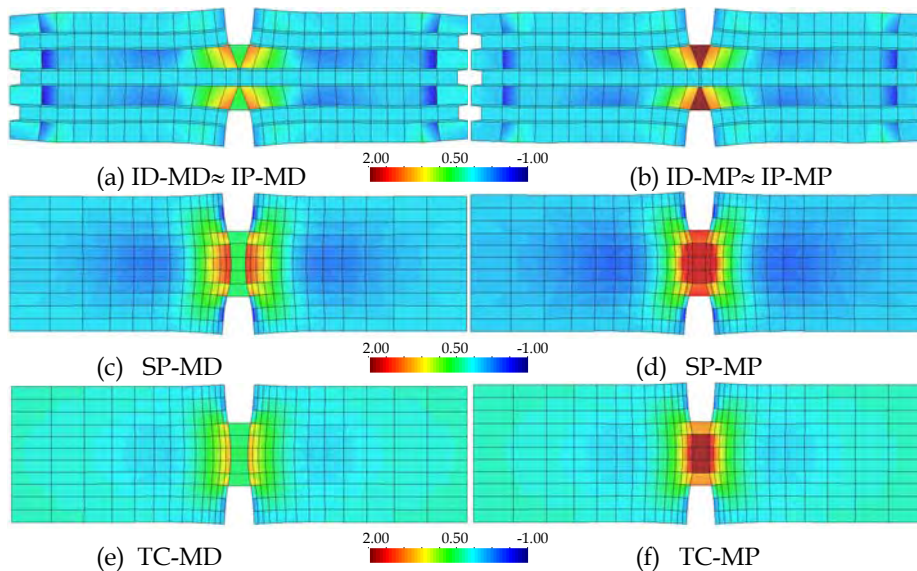


FIGURA 4-29 TENSIONES YY EN LA MATRIZ PARA UN  $\Delta=1.25*10^{-5}$ M DEFORMADA 1:1000

En lo que respecta a la distribución de las tensiones de corte en la matriz ( ${}^m\sigma_{xy}$ ) mostrada en la figura 4-30, se observa que el efecto de corte en el hormigón de los micromodelos está mejor representado por la teoría de mezclas serie/paralelo (SP-MD y SP-MP) en magnitud y en el área de distribución, y que con la teoría de clásica (TC-MD y TC-MP) las tensiones son muy pequeñas. Además, las tensiones de corte no presentan diferencias con el tipo de matriz considerado.

En la figura 4-31 se muestra la distribución de las tensiones de las fibras en la dirección de su eje ( ${}^f\sigma_{xx}$ ); se observa que con la matriz susceptible al daño, las tensiones en las fibras son menores con respecto a las tensiones dadas cuando la matriz es elasto-plástica. Las tensiones máximas con la teoría de mezclas clásica (TC-MD y TC-MP) son mayores que las obtenidas con la teoría serie/paralelo (SP-

MD y SP-MP); en la zona entre las entallas, con la teoría clásica, las tensiones se concentran en los elementos centrales, mientras que con la teoría serie/paralelo, las tensiones se distribuyen entre todos sus los elementos.

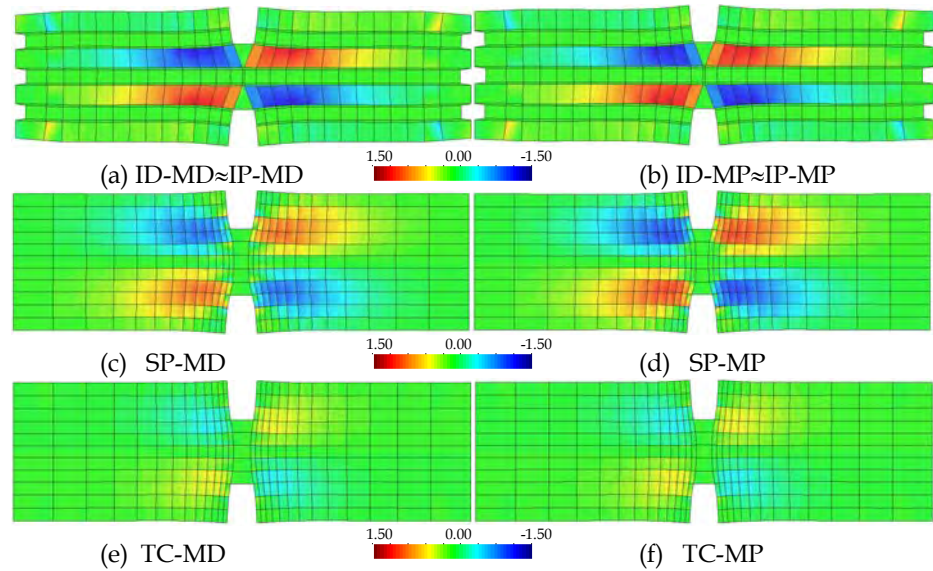


FIGURA 4-30 TENSIONES XY EN LA MATRIZ PARA UN  $\Delta=1.25 \cdot 10^{-5}M$  DEFORMADA 1:1000

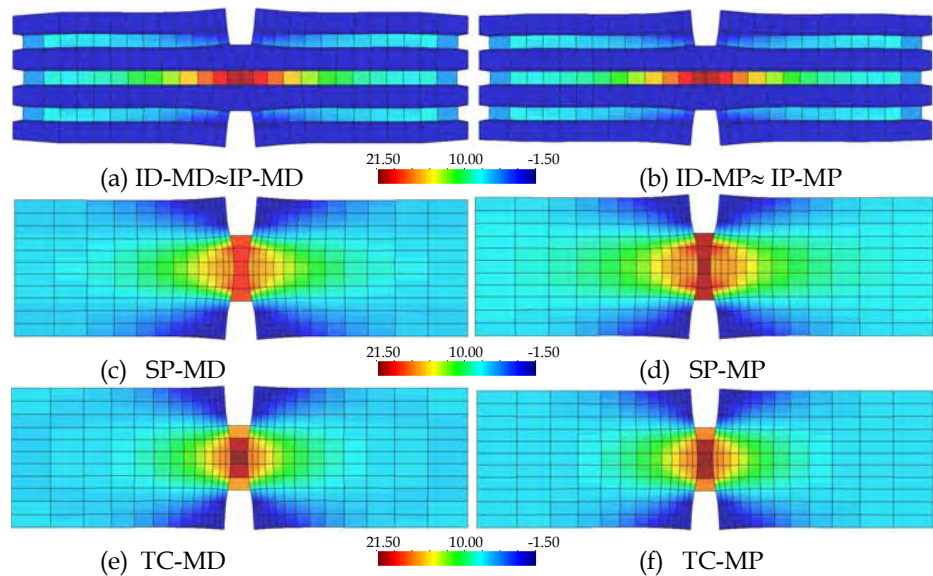


FIGURA 4-31 TENSIONES XX EN LAS FIBRAS PARA UN  $\Delta=1.25 \cdot 10^{-5}M$  DEFORMADA 1:1000

En la figura 4-32 se observa la distribución de tensiones de las fibras en ( $\sigma_{yy}$ ), las máximas tensiones se presentan en la barra central en los micromodelos en la zona entalla, al igual como se refleja en los macromodelos SP-MP, TC-MD y TC-MP.

Con la teoría serie/paralelo se tiene que para la matriz frágil SP-MD, las tensiones de las fibras en la entalla son nulas y no reflejan lo que pasa en los micromodelos. Las tensiones de los micromodelos son bastante parecidas, aunque cuando la matriz es dúctil las tensiones son un poco mayores ( $ID-MP \approx IP-MP$ ). Con la teoría clásica (TC-MD y TC-MP) las tensiones máximas son 4 veces mayores de las dadas en los micromodelos; asimismo, como sucede con  $^f\sigma_{xx}$ , las tensiones  $^f\sigma_{yy}$  obtenidas con la teoría clásica son mayores que las calculadas con la teoría serie/paralelo.

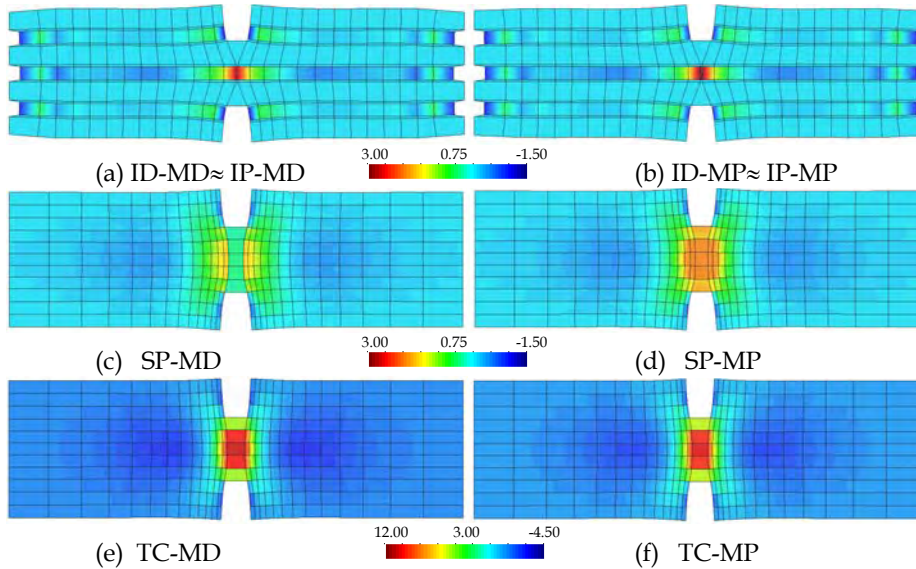


FIGURA 4-32 TENSIONES  $\sigma_{yy}$  EN LAS FIBRAS A SU EJE PARA UN  $\Delta=1.25 \cdot 10^{-5} \text{m}$  DEFORMADA 1:1000

De acuerdo con las gráficas analizadas se puede ver que con las teorías de mezclas, aunque no se representa exactamente el comportamiento de los componentes, los macromodelos son una buena aproximación del comportamiento de los materiales compuestos, con costos computacionales menores. Asimismo, se muestra que con el modelo propuesto para introducir el DFM en las teorías de mezclas, se está mejorando la representación del comportamiento del material compuesto, y que los efectos del DFM quedan introducidos en el comportamiento de los componentes desde un enfoque fenomenológico.

#### 4.5.4 Análisis con respecto a la descarga

En la figura 4-33 se presentan las curvas carga desplazamiento de los 8 modelos analizados anteriormente, en los cuales la carga se aplica hasta un desplazamiento de  $4.5 \cdot 10^{-5} \text{m}$ , y luego, se descarga.

En las simulaciones en que se considera la interfaz susceptible al daño, se tiene que los modelos TC-MD y SP-MD quedan con un desplazamiento permanente un 5% y un 4% mayor del obtenido en el modelo ID-MP. Aunque este desplazamiento es un poco mayor al del micromodelo, el fenómeno del DFM queda representado



adecuadamente con las dos teorías. En el caso de del micromodelo ID-MD, el desplazamiento se recupera totalmente (curva punteada) porque al estar regido el comportamiento de la matriz y de la interfaz por un modelo constitutivo de daño, con la descarga el micromodelo sólo muestra la pérdida de rigidez del sistema producida por el daño en los componentes y no quedan desplazamientos permanentes. No obstante, este micromodelo no representa el comportamiento real de descarga de una probeta en que haya daño en la interfaz y en la matriz, dado que el desplazamiento no se recupera totalmente al retirar la carga, porque las aberturas de las fisuras se reducen con la descarga pero no se cierran (una fisura se cierra sólo si se aplica una carga de compresión).

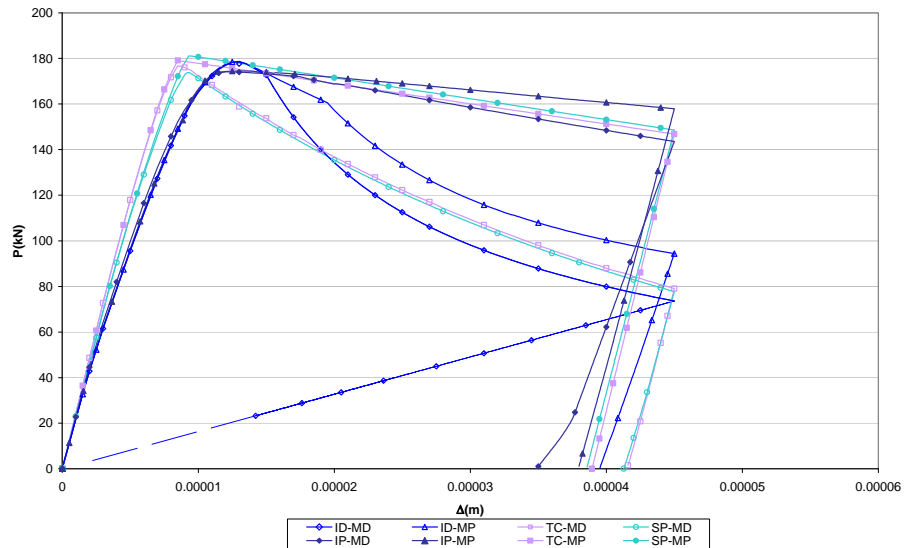


FIGURA 4-33 P-Δ DE LOS MACROMODELOS Y LOS MICROMODELOS CON UNA DESCARGA

En lo que respecta a las configuraciones en que se considera la interfaz dúctil, en la figura 4-33 se ve que en el proceso de carga, el comportamiento de los macromodelos TC-MP y SP-MP es parecido al del micromodelo IP-MD; en cambio en la descarga, el comportamiento de estos macromodelos se aproxima mejor al presentado en el micromodelo IP-MP, debido a que la descarga es lineal. El desplazamiento permanente de IP-MP es menor un 2% con respecto TC-MP y es menor un 1% del obtenido SP-MP. El comportamiento no lineal de IP-MD se debe básicamente al daño en la matriz y a su pérdida de resistencia. De acuerdo con lo mostrado en la figura 4-33 se observa que el modelo propuesto que introduce el DFM a las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, representa adecuadamente el proceso de carga y descarga en un compuesto con DFM.

#### 4.5.5 Análisis con respecto a ciclos de carga y descarga

Para estudiar de una forma mas detallada los ciclos de carga y descarga, se analizan dos simulaciones en las que se aplica el modelo de DFM con la teoría

clásica, TC-MD y TC-MP en relación con una interfaz frágil y otra dúctil respectivamente. Para este caso, dada la similitud entre los comportamientos obtenidos entre las teorías de mezclas serie/paralelo y clásica, se utilizó sólo la teoría de mezclas clásica, considerando que tiene menores costos computacionales por tener sólo una ecuación de cierre.

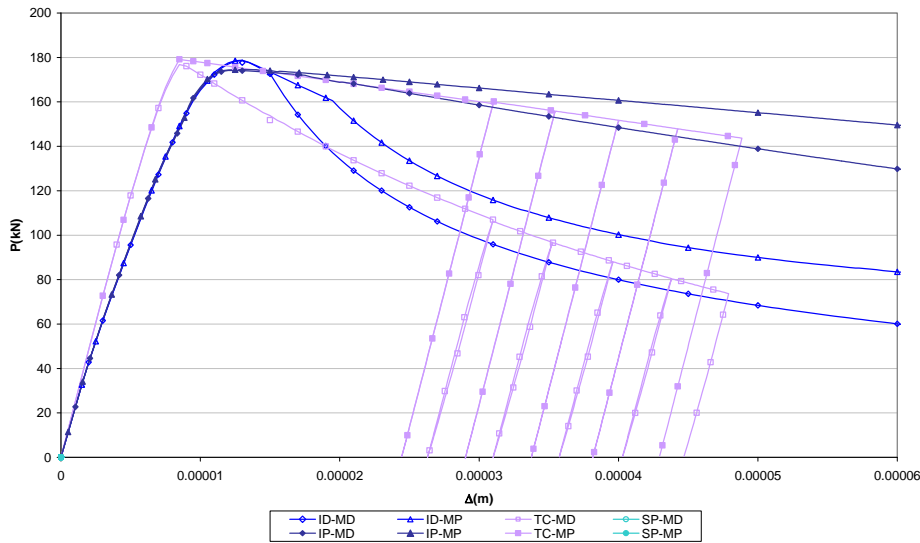


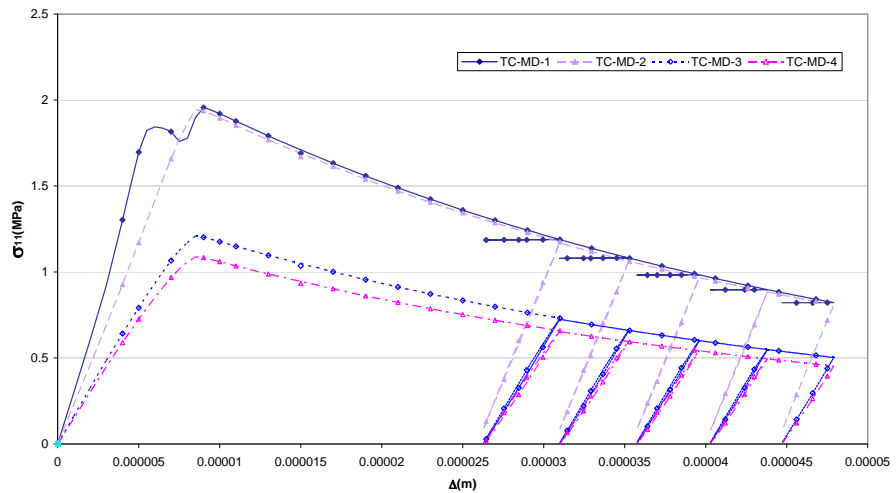
FIGURA 4-34 P- $\Delta$  DE LOS MACROMODELOS CON CARGAS Y DESCARGAS

En la figura 4-34 se observa que la configuración con la matriz frágil TC-MD presenta una rigidez de descarga diferente a la de la carga, en cambio TC-MP conserva la rigidez de carga y de descarga. Aunque físicamente la diferencia de rigidez mostrada en TC-MD tiene la explicación en que frente a la descarga el material se relaja y con la carga se vuelve a tensionar; hay una razón para que este comportamiento se presente con la teoría de mezclas clásica, de acuerdo con el análisis de la matriz y las fibras en los cuatro nodos indicados en la figura 4-24.

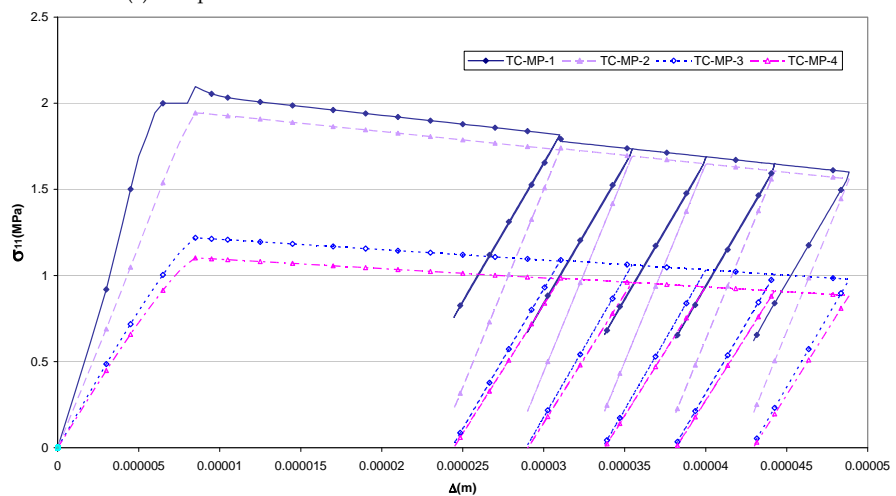
En la figura 4-35 se muestra el comportamiento de las tensiones en la matriz con respecto a los incrementos y decrementos del desplazamiento aplicado en el extremo de la probeta. En los dos macromodelos con la descarga, se aprecia que en los nodos (3) y (4) no hay tensiones "residuales" y la rigidez de descarga entre los dos nodos es similar. En los nodos (1) y (2), el comportamiento de descarga es diferente, de una parte quedan tensiones "residuales" a pesar que la descarga en la probeta es total, y de otra, hay un cambio de rigidez entre la descarga y la recarga. El caso más notorio es en el modelo TC-MD, donde el nodo (1) pierde total rigidez, ya que con la descarga se reduce el desplazamiento deformaciones pero la tensión no cambia; en cambio en el modelo TC-MP, para el nodo(1) solo hay una mayor pérdida de rigidez con respecto a la de los otros nodos, lo cual coincide con lo descrito por Boudon-Cussac et. al [2].

En forma análoga a lo indicado en la matriz, en la figura 4-36 se muestra el

comportamiento de las fibras en los 4 nodos. Se observa que el comportamiento entre los nodos (3) y (4) es similar y que hay descarga total; mientras que los nodos (1) y (2) no se descargan totalmente, en este caso quedan mayores tensiones residuales en TC-MP que en TC-MD, con lo cual es evidente que el comportamiento de la matriz afecta la descarga en la fibra. Para el nodo (1) del modelo TC-MD, las fibras se descarga con sólo su rigidez, al no tener restricción de la matriz para la reducción del desplazamiento (fisuras abiertas), pero bajo una condición de recarga, la rigidez aumenta por la resistencia de la matriz al aumento del desplazamiento. Para TC-MP en el nudo (1) las fibras se carga y se descarga linealmente, con una rigidez similar a la del nodo (2), pero las “tensiones residuales” son mayores y de igual proporción a como sucede con la matriz.

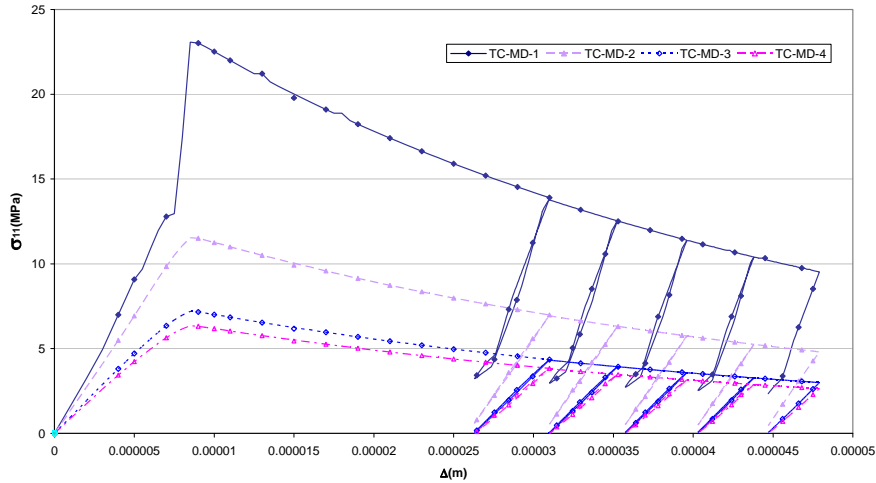


(a) Comportamiento en la matriz considerando daño en la matriz TC-MD

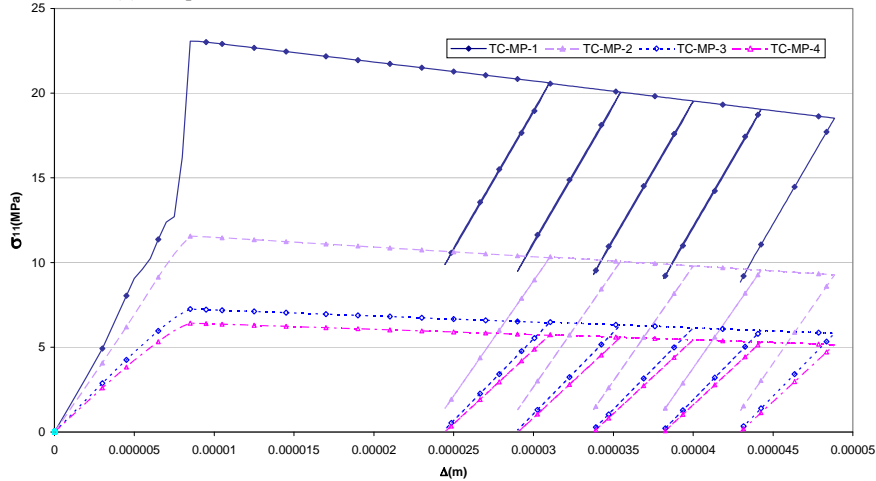


(b) Comportamiento de la matriz considerando elasto-plasticidad en la matriz TC-MP

FIGURA 4-35 TENSIONES PRINCIPALES EN LA MATRIZ



(a) Comportamiento de las fibras considerando daño en la matriz TC-MD



(b) Comportamiento de las fibras considerando elasto-plasticidad en la matriz TC-MP

FIGURA 4-36 TENSIONES PRINCIPALES EN LAS FIBRAS

De este análisis se muestra que el modelo propuesto, también permite simular el comportamiento de un material compuesto bajo ciclos de carga y descarga considerando los efectos del DFM.

#### 4.6 Conclusiones del capítulo 4

Los compuestos reforzados con fibras, poseen un comportamiento no lineal complejo. Además de la heterogeneidad y de la alta anisotropía, debido a la no linealidad de la matriz y de las fibras, el comportamiento de los compuestos está sujeto a la pérdida de adherencia de la interfaz fibra-matriz, la cual conduce al deslizamiento relativo entre sus componentes (DFM). Dado que la pérdida de adherencia en la interfaz conlleva a que se degraden las propiedades mecánicas del

compuesto, principalmente su rigidez, y a que la transferencia de esfuerzos entre las fibras y la matriz se reduzca, es necesario estudiar el fenómeno de DFM para establecer su influencia en el comportamiento del compuesto.

El comportamiento de las estructuras reforzadas con materiales compuestos reforzados con fibras largas (FRP) es definido a través de diferentes técnicas que se usan en la simulación numérica, las cuales se seleccionan buscando tener precisión en la respuesta. Debido a que el DFM afecta el comportamiento del compuesto, en la simulación numérica se requiere considerar los mecanismos de pérdida de adherencia fibra-matriz, para introducir este fenómeno microestructural dentro del análisis global de la estructura. En la actualidad hay diferentes técnicas en las que se ha introducido el DFM dentro de las modelizaciones de materiales compuestos, entre ellas están modelos basados en la micromecánica, modelos constitutivos basados en la mecánica de medios continuos y los modelos de homogenización.

Debido a las ventajas que presentan las teorías de mezclas en el análisis de los compuestos, y a la necesidad de considerar el fenómeno microestructural de movimiento relativo entre las fibras y la matriz, se propone una formulación para introducir el DFM en las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo. Este planteamiento, se basa en el movimiento de cuerpo rígido que se da entre las fibras y la matriz, y se fundamenta en dos principios: (i) en la reducción de la rigidez del compuesto debido a la pérdida de adherencia entre las fibras y la matriz, y (ii) en que el deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz es irrecuperable.

Con el modelo propuesto, se aprovechan las ventajas que ofrecen la técnica de las teorías de mezclas, junto con las herramientas que la complementan. Es así como hay tres aspectos relevantes:

- Con las teorías de mezclas, en los macromodelos no se requiere particularizar un espacio específico para los componentes del compuesto, lo que hace que haya un mallado menos restringido por la distribución y orientación de los componentes, conllevando a que los mallados sean menos densos.
- Con el mapeo de espacios, como herramienta complementaria, los materiales componentes anisótropos del compuesto se analizan con los modelos constitutivos isótropos, lo que implica el uso formulaciones sencillas y con menores costos computacionales.
- Con la selección de los modelos constitutivos que mejor representen el comportamiento de cada componente del compuesto se obtiene una aproximación más precisa del comportamiento del compuesto.

En los ensayos experimentales y en la micromecánica se ha mostrado que el deslizamiento entre las fibras y la matriz ocurre cuando las deformaciones entre los componentes son diferentes. Teniendo en cuenta que el DFM se presenta al perderse la compatibilidad de deformaciones entre los componentes del compuesto, con el fin de mantener las ecuaciones de cierre de las teorías de mezclas, para introducir el DFM en el modelo propuesto se realiza una corrección de las propiedades en cada componente del compuesto. Además con el propósito

de considerar el cambio en la transferencia de esfuerzos entre la fibra y la matriz, en la formulación planteada, los modelos constitutivos definen el comportamiento de cada componente limitando su capacidad acorde con el avance del DFM.

A través del modelo propuesto, el fenómeno del DFM y su influencia en el comportamiento de los materiales compuestos se representa adecuadamente con las teorías de mezclas. Dado que las teorías de mezclas como gestores de modelos constitutivos, permiten el uso de cualquier modelo constitutivo que represente mejor el comportamiento de un determinado material componente del compuesto, en el modelo propuesto se introducen los diferentes mecanismos de fallo que producen el DFM en los materiales compuestos, como lo son la rotura en las fibras, la fisuración de la matriz y la fisuración en la interfaz. El mecanismo de fallo que se genere depende del comportamiento de cada uno de los componentes del compuesto, no obstante, el fallo comienza en el material menos resistente.

Desde un enfoque fenomenológico, con este modelo quedan introducidos los efectos del DFM en la formulación constitutiva de las teorías de mezclas, con lo cual se tienen macromodelos que simulan con una buena aproximación el comportamiento de los compuestos al estar sujetos a acciones que inducen el DFM, y que además demanda menores costos computacionales a los requeridos con los micromodelos. En las simulaciones en las que se aplicó el modelo propuesto, se evidencia la redistribución en la transferencia esfuerzos entre las fibras y la matriz al afectarse la interacción por daño o plasticidad de uno de ellos; asimismo se observa la incidencia del mecanismo de fallo que genera el DFM del compuesto en el comportamiento global de la estructura, en particular en la pérdida de resistencia y de rigidez.

Las comparaciones entre los micromodelos y los macromodelos muestran que con el modelo propuesto se obtiene una buena aproximación del mecanismo que induce el DFM. Sin embargo, es conveniente que se pueda contrastar los resultados obtenidos de las simulaciones con resultados experimentales en probetas conformadas por un determinado número de fibras. Esto con el propósito de mejorar las formulaciones planteadas para representar de una forma más precisa los efectos del DFM en los materiales compuestos. No obstante, actualmente no es posible obtener la información necesaria para la simulación, debido a que a nivel experimental hay una limitación tecnológica. Los ensayos en los que se registra el avance progresivo del DFM (pull-out y push-out), corresponden a probetas de una sola fibra embebida en una matriz, las cuales son muestras preparadas en laboratorio, que no alcanzan a reflejar los mecanismos que se generan en los compuestos manufacturados. De otra parte, si se quisiera ensayar un compuesto conformado por varias fibras, no existe la instrumentación para medir la interacción entre las fibras que presentan DFM y las adyacentes en las que la adherencia es perfecta.

Comparando las dos teorías de mezclas, se aprecia que aunque con la teoría serie/paralelo se obtiene una mejor precisión que con la teoría clásica, con la teoría serie/paralelo hay mayores costos computacionales porque se deben cumplir los

estados de isodeformación y de isotensión, mientras que con la teoría clásica sólo se impone estado de isodeformación. El gran potencial del modelo propuesto está en que se tiene en cuenta que el DFM afecta el comportamiento de los compuestos de diferente forma, ya que sus efectos dependen del fenómeno que se presente en cada componente (elasto-plasticidad, visco-plasticidad y otros), además de otros factores, entre ellos: las proporciones volumétricas y las propiedades mecánicas de los componentes, las direcciones de orientación de las fibras y las condiciones en que se aplican las cargas. Esto además permite que con el modelo propuesto se puedan considerar en las simulaciones los efectos del DFM en los materiales compuestos solicitados bajo ciclos de carga y descarga.

#### 4.7 Bibliografía del capítulo 4

- [1] E. Car, S. Oller, E. Oñate. Tratamiento Numérico de Materiales Compuestos. Monografía CIMNE No.57. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería - CIMNE, Barcelona, España, 2000.
- [2] D. Boudon-Cussac, F. Hild, G. Pijaudier-Cabot. Tensile damage in concrete: analysis of experimental technique. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 125 (8) 1999 906-913.
- [3] L. Mishnaevsky. Computational mesomechanics of composites : numerical analysis of the effect of microstructures of composites on their strength and damage resistance. John Wiley & sons. Chichester, UK, 2007.
- [4] A. G. Evans. Overview No. 125 Design and life prediction issues for high-temperature engineering ceramics and their composites. *Acta Materialia* 45 (1) (1997) 23-40.
- [5] N. Oya, H. Hamada. Mechanical properties and failure mechanisms of carbon fibre reinforced thermoplastic laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 28 ( 9-10) (1997) 823-832.
- [6] J. Rösler, H. Harders, M. Bäker. Mechanical behaviour of engineering materials : metals, ceramics, polymers, and composites. Springer N.Y. , USA, 2007.
- [7] L. Mishnaevsky, P. Brøndsted. Micromechanical modeling of damage and fracture of unidirectional fiber- reinforced composites: A review. *Computational Materials Science* 44 (4) (2009) 1351-1359
- [8] M.W. Hyer. Stress analysis of fiber-reinforced composite materials. Contributions on fibers, matrices, interfaces, and manufacturing by S.R. White. DEStech Publications, Inc. PA, USA, 2009.
- [9] A. Matzenmiller, J. Lubliner, R.L. Taylor. A constitutive model for anisotropic damage in fiber-composites. *Mechanics of Materials*, 20 (2) (1995) 125-152.
- [10] D. Hull, *An Introduction on Composite Materials*, Oxford Press, London, England, 1996
- [11] J.M. Vázquez-Rodríguez, P.J. Herrera-Franco, P.I. González-Chi. Analysis of the interface between a thermoplastic fiber and a thermosetting matrix using photoelasticity. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38 (3)(2007) 819-827
- [12] A. Kelly, W.R. Tyson. Tensile properties of fiber-reinforced metals: copper/tungsten and copper/molybdenum. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 (6) (1965) 329-350.
- [13] S. Feih, K. Wonsyld, D. Minzari, P. Westermann, H. Lilholt. Testing procedure for the single fiberfragmentation test. Risø National Laboratory. Roskilde, Denmark, 2004.
- [14] A.C. Johnson, F.M. Zhao, S.A. Hayes, F.R. Jones Influence of a matrix crack on stress transfer to an  $\alpha$ -alumina fibre in epoxy resin using FEA and photoelasticity. *Composites Science and Technology*. 66 (13) (2006) 2023-2029.
- [15] H. Li, Y. Jia, G. Mamtimin, W. Jiang, L. An. Stress transfer and damage evolution simulations of fiber-reinforced polymer-matrix composites. *Materials Science and*

- Engineering A 425 (1-2) (2006) 178–184.
- [16] J.L. Chaboche, F. Feyel, Y. Monerie. Interface debonding models: a viscous regularization with a limited rate dependency. *International Journal of Solids and Structures*, 38 (18) (2001) 3127-3160.
- [17] E.J. Barbero. *Introduction to composite materials design*. Taylor & Francis. PA, USA, 1999.
- [18] N.M. Hassan, R.C. Batra. Modeling damage in polymeric composites. *Composites Part B: Engineering*, 39 (1) (2008) 66-82.
- [19] H.L. Cox The elasticity and strength of paper and other fibrous materials. *British Journal of Applied Physics*. 3 (3) (1952) 73-79.
- [20] C.H. Hsueh. Evaluation of interfacial shear strength, residual clamping stress and coefficient of friction for fiber-reinforced ceramic composites *Acta Metallurgica et Materialia*. 38 (3) (1990) 403-409.
- [21] C.H. Hsueh. Evaluation of Interfacial Properties of Fiber-Reinforced Ceramic Composites Using a Mechanical Properties Microprobe. *Journal of the American Ceramic Society* 76 (12) (1993) 3041-3050.
- [22] X.-F. Zhou, H.D. Wagner Stress concentrations caused by fiber failure in two-dimensional composites. *Composites Science and Technology*. 59 (7) (1999) 1063-1071
- [23] A.M. Sastry, S.L. Phoenix, Load redistribution near non-aligned fibre breaks in a two-dimensional unidirectional composite using break-influence superposition, *Journal of Material Science Letters*. 12 (1993) 1596–1599.
- [24] I.J. Beyerlein, S.L. Phoenix. Stress concentrations around multiple fiber breaks in an elastic matrix with local yielding or debonding using quadratic influence superposition. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 44 (12) (1996) 1997-2039.
- [25] Z. Xia, T. Okabe, W.A. Curtin. Shear-lag versus finite element models for stress transfer in fiber-reinforced composites. *Composites Science and Technology* 62 (9) (2002) 1141-1149.
- [26] M. Shuster, D. Sherman, A. Siegmund, M. Narkis, C.-M. Jennewein, P. Eyerer. Stress distribution in and around a spherically ended fiber embedded in a polymer matrix. *Polymer Composites* 17 (4) (1996) 568-577.
- [27] L. Mishnaevsky. *Computational mesomechanics of composites : numerical analysis of the effect of microstructures of composites on their strength and damage resistance*. John Wiley & sons. Chichester, UK, 2007.
- [28] J. Aveston, G.A. Cooper, A. Kelly. Single and multiple fracture. In: *The Properties of Fiber Composites*, Conference on Proceedings. National Physical Laboratory, IPC Science and Technology Press, Guildford. (1971) 15–26.
- [29] J. Aveston, A. Kelly. Theory of multiple fracture of fibrous composites. *Journal of Material Science Letters*. 8 (1973) 352–362.
- [30] B. Budiansky, A.G. Evans, J.W. Hutchinson. Matrix fracture in fiber-reinforced ceramic. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 34 (2) (1986) 167–189.
- [31] J.W. Hutchinson, H.M. Jensen. Models of fiber debonding and pullout in brittle composites with friction. *Mechanics of Materials*. 9 (2) (1990) 139–163.
- [32] B. Budiansky, A.G. Evans, J.W. Hutchinson. Fiber-matrix debonding effects on cracking in aligned fiber ceramic composites. *International Journal of Solids and Structures* 32 (3-4) (1995) 315–328.
- [33] Y.-C. Chiang. On fiber debonding and matrix cracking in fiber-reinforced ceramics. *Composites Science and Technology* 61 (12) (2001) 1743-1756.
- [34] C.H. Hsueh Crack-wake interfacial debonding criteria for fiber-reinforced ceramic composites. *Acta Materialia*, 44 (6) (1996) 2211-2216.
- [35] D.B. Marshall, B.N. Cox, A.G. Evans. The Mechanics of Matrix Cracking in Brittle-Matrix Fiber Composites. *Acta Metallurgica*. 33 (11) (1985) 2013-2021.
- [36] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel, S. Botello. A plastic damage constitutive model for composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (17) (1996) 2501-2518.



- [37] F. Hild, A. Burr, F.A. Leckie. Matrix cracking and debonding of ceramic-matrix composites. *International Journal of Solids and Structures* 33 (8) (1996) 1209-1220.
- [38] F. Hild, A. Burr, P. Feillard On the mechanical behavior of fiber-reinforced composites *Composite Structures*, 39 (3-4) (1997) 273-282.
- [39] D. Boudon-Cussac, F. Hild, G. Pijaudier-Cabot. Tensile damage in concrete: analysis of experimental technique. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 125 (8) (1999) 906-913.
- [40] A. Burr, F. Hild, F. A. Leckie. Isochronous analysis of the behaviour of ceramic-matrix composites under thermomechanical cyclic loading conditions. *Composites Science and Technology*, 61 (15) (2001) 2231-2238.
- [41] P. Feillard, G. Désarmot, J.P. Favre. Theoretical aspects of the fragmentation test *Composites Science and Technology*, 50 (2) (1994) 265-279 .
- [42] H.W. Wang, H.W. Zhou, L. Mishnaevsky Jr., P. Brøndsted, L.N. Wang Single fibre and multifibre unit cell analysis of strength and cracking of unidirectional composites. *Computational Materials Science*, 46 (4) (2009) 810-820.
- [43] G.F. Abdelal, A. Caceres, E.J. Barbero. A micro-mechanics damage approach for fatigue of composite materials. *Composite Structures*, 56 (4) (2002) 413-422.
- [44] A. Thionnet. From Fracture to Damage Mechanics: A behavior law for microcracked composites using the concept of Crack Opening Mode. *Composite Structures*, 92 (3) (2010) 780-794.
- [45] P. Ladevèze, E. Le Dantec. Damage modelling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology* 43 (3) (1992) 257-267.
- [46] L. Daudeville, O. Allix, P. Ladevèze Delamination analysis by damage mechanics: Some applications. *Composites Engineering*, 5 (1) (1995) 17-24.
- [47] P. Ladevèze, O. Allix, L. Gornet, D. Lévêque, L. Perret, A computational damage mechanics approach for laminates: Identification and comparison with experimental results. In: *Damage Mechanics in Engineering Materials*. G.Z. Voyiadjis, J.W. Wu, J.L. Chaboche (Eds.), Elsevier, (1998) 481-500.
- [48] O. Allix, P. Ladevèze, E Vittecoq. Modelling and identification of the mechanical behaviour of composite laminates in compression. *Composites Science and Technology*, 51 (1) (1994) 35-42.
- [49] P. Ladevèze, O. Allix, J.-F. Deü, D. Lévêque A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183 (1-2) (2000) 105-122.
- [50] O. Allix, P. Ladevèze. Interlaminar interface modelling for the prediction of delamination *Composite Structures* 22 (4) (1992) 235-242.
- [51] N.M. Hassan, R.C. Batra. Modeling damage in polymeric composites. *Composites Part B: Engineering*, 39 (1) (2008) 66-82.
- [52] G.Z. Voyiadjis, T. Park. Anisotropic damage of fiber reinforced MMC using an overall damage analysis. *Journal Engineering Mechanics ASCE* 121 (11) (1995) 1209-1217.
- [53] T. Park, G.Z. Voyiadjis. Damage analysis and elasto-plastic behavior of metal matrix composites using the finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 56(5) (1997) 623-646.
- [54] G.J. Dvorak, Y.A. Bahei-El-Din. Elastic-plastic behavior of fibrous composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 27 (1) (1979) 51-72.
- [55] G.Z. Voyiadjis, T. Park. Local and interfacial damage analysis of metal matrix composites using the finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, 56 (4) (1997) 483-511.
- [56] P. Raghavan, S. Ghosh. A continuum damage mechanics model for unidirectional composites undergoing interfacial debonding *Mechanics of Materials*, 37 (9) (2005) 955-979.
- [57] E.J. Barbero, P. Lonetti. Damage model for composites defined in terms of available data. *Mechanics of Composite Materials and Structures*, 8 (4) (2001) 299-315
- [58] E.J. Barbero, G.F. Abdelal, A. Caceres. A micromechanics approach for damage

- modeling of polymer matrix composites. *Composite Structures*, 67 (4) (2005) 427-436.
- [59] E. Car, F. Zalamea, S. Oller, J. Miquel, E. Oñate. Numerical simulation of fiber reinforced composites-Two procedures. *International Journal of Solids and Structures*, 39 (7) (2002) 1967-1986.
- [60] S. Oller, S. Botello, J. Miquel, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations* 12 (3) (1995) 245-262.
- [61] E. Car, S. Oller, E. Oñate. A large strain plasticity for anisotropic materials-composite material application. *International Journal of Plasticity* 17 (11) (2001) 1437-1463.
- [62] E. Car, S. Oller, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 185 (2-4) (2000) 245-277.
- [63] S. Oller. *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería-CIMNE, Barcelona, España, 2003.
- [64] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, E. Oñate A plastic-damage model for concrete *International Journal of Solids and Structures*, 25(3) (1989) 299-326.
- [65] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, New York, USA, 1990.
- [66] M. Molina, "Estudio numérico de la adherencia de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado", Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, (2009).
- [67] F. Rastellini. *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España, (2006).
- [68] M. Molina, J. Cruz, S. Oller, A. Barbat, L. Gil., Estudio numérico-experimental de la interfaz hormigón-epoxi-FRP para una estructura reforzada sometida a doble cortadura, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. In press. Vol 28 N°1 (2012).
- [69] E. Oñate, L. Neamtu, S. Oller. Generalization of a classical mixing theory for analysis of composite materials. In . *International Conference on Advances in Computational Engineering Science (ICES'97)*. Eds N.S. Atluri y G. Yagawa. Georgia, USA: Tech. Science Press (1997).
- [70] S. Oller *Fractura Mecánica. Un Enfoque Global*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Ediciones UPC. Barcelona España. 2001.
- [71] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In. *Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures, Vol 2*. 945-958. Eds. N. Bicanic and H. Mang. Zell Am See, Austria. 1990.
- [72] L. M. Kachanov. Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk. USSR Otd. Tekh Nauk*, 8 (1958) 26-31.
- [73] L.C. Hollaway. A review of the present and future utilisation of FRP composites in the civil infrastructure with reference to their important in-service properties. *Construction and Building Materials* 24 (12) (2010) 2419-2445.

# Capítulo 5

---

## Tratamiento numérico de grandes deformaciones en compuestos reforzados

---

El fallo de las estructuras se debe al fallo de los materiales que la componen, o al fallo por inestabilidad asociada a grandes desplazamientos y/o grandes deformaciones, no obstante, también la acción conjunta de estos dos fenómenos puede causar el colapso de una estructura [1]. De acuerdo con lo anterior, es importante que en la simulación numérica de los compuestos, al analizar una estructura se considere la no linealidad de los materiales componentes junto a la no linealidad cinemática, para que esta herramienta permita al diseñador optimizar sus análisis en la búsqueda de un uso eficiente y seguro de los materiales compuestos [2].

La optimización de las simulaciones numéricas para representar el comportamiento de las estructuras de materiales compuestos y sus procesos de producción adquiere cada vez más importancia en la fase de diseño de estructuras compuestas, ya que reduce los costos de la producción de prototipos para ensayos. La teoría de mezclas serie/paralelo desarrollada por Rastellini [3], se presenta como una alternativa de optimización para reducir costos computacionales en las simulaciones de materiales compuestos. Esta teoría considera la configuración interna del compuesto para predecir su comportamiento con cualquier tipo de no linealidad constitutiva, es decir, particulariza el comportamiento no lineal de cada uno de los materiales componentes del compuesto y garantiza que el comportamiento del compuesto sea el resultado de la participación conjunta de sus componentes [4].

Teniendo en cuenta que desde un punto de vista mecánico-numérico, se presentan tres tipos de no linealidades: constitutiva, por grandes deformaciones y/o por grandes desplazamientos [5]. La teoría serie/paralelo ha sido formulada para el campo de pequeñas deformaciones, sin embargo, actualmente aún no ha sido adaptada para el campo de grandes deformaciones, como tampoco, se ha aplicado a problemas de no linealidad por grandes desplazamientos. Debido a las ventajas que presenta la teoría serie/paralelo, con respecto a la teoría de mezclas clásica para analizar el comportamiento de los materiales compuestos, se hace evidente la necesidad de extender la teoría al campo de grandes deformaciones.

Acorde con lo anterior, en este capítulo se propone un modelo para adaptar la formulación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones, teniendo en cuenta que la cinemática no lineal en las deformaciones finitas para materiales compuestos a nivel numérico tiene un campo de trabajo bastante amplio por desarrollar.

### 5.1 Importancia de grandes deformaciones en los materiales compuestos

Los materiales compuestos en las aplicaciones de ingeniería frecuentemente son utilizados para soportar elevadas condiciones carga [6]. Para la optimización de los diseños, se debe identificar la carga con la que una estructura comienza a ser inestable, considerando que la magnitud de la carga depende de la configuración geométrica de la estructura, especialmente de su esbeltez, y que esta gobernada principalmente, por el comportamiento de los materiales que la componen.

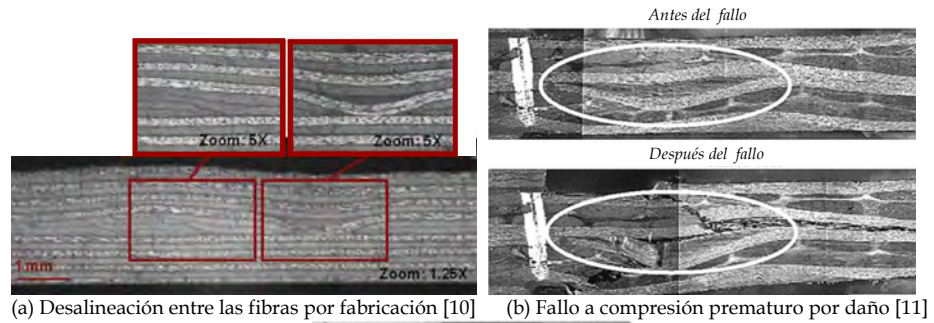
El comportamiento no lineal es el causante de que las estructuras pierdan su estabilidad. Básicamente hay dos tipos de inestabilidad en una estructura [1]: (i) la pérdida de estabilidad causada por no linealidades geométricas que se producen en la estructura ante la presencia de un fenómeno inelástico como la plasticidad o el creep, y , (ii) la inestabilidad originada por el comportamiento no lineal de los materiales y que es independiente de la presencia de no linealidades geométricas, como sucede con el fenómeno de la fractura.

En los últimos años, el comportamiento no lineal material de los compuestos ha sido ampliamente investigado a través de la mecánica de medios continuos, donde se han formulado modelos como las teorías de mezclas clásica o la teoría serie/paralelo, que utilizan modelos constitutivos para simular apropiadamente el comportamiento de sus componentes, y a la vez, establecen el comportamiento del compuesto. No obstante, gran parte de estas investigaciones se han enfocado al campo de pequeñas deformaciones, aunque se ha hecho evidente que los materiales compuestos también pueden estar sujetos a no linealidades geométricas, especialmente por su esbeltez.

En las estructuras de hormigón armado reforzadas con polímeros reforzados con fibras largas (FRP) por ejemplo existe la preocupación acerca del desempeño de un miembro estructural cuando se producen defectos en la fabricación (ver figura 5-1 (a) y (b)) o errores en la instalación del refuerzo y las fibras del FRP resultan con una alineación diferente a la del diseño. Dependiendo del grado de desalineación de las fibras, la diferencia entre la resistencia y la rigidez del laminado instalado con respecto a lo definido en el diseño puede conllevar a que se reduzca el desempeño del elemento reforzado, e incluso hacerlo inaceptable [7; 8]. La reducción de rigidez y resistencia del laminado se debe a que por la tendencia de las fibras a alinearse en la dirección de las mayores tensiones, se genera una no linealidad cinemática en el compuesto que cambia su configuración geométrica y puede modificar la forma en como se distribuyen las cargas entre las fibras, y afectar a la matriz del compuesto por restringir la re-orientación de la fibra, como

se observa en la figura 5-1 (b). En la figura 5-1 (c) se muestran los efectos que produce la alineación de las fibras en un laminado solicitado a tracción, donde la matriz se fractura y hay rotura en las fibras más tensionadas, sin llegar a alcanzar la capacidad máxima que tiene el laminado cuando las fibras están orientadas en la dirección de la carga.

Aparte de analizar la capacidad de desempeño de un elemento reforzado por el cambio de orientación de las fibras, en el caso de los defectos de fabricación o errores de instalación, se tiene que con un mejor conocimiento de la re-orientación de las fibras, el diseñador podrá adaptar y maximizar la capacidad estructural del FRP para aumentar la resistencia del elemento reforzado y haya un mejor control en sus mecanismos de fallo. En este mismo sentido, un reto de la investigación de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones corresponde al estudio del comportamiento de los textiles compuestos como refuerzo en las estructuras. Los textiles compuestos han mostrado que tienen excelentes propiedades mecánicas para la producción de productos de alta resistencia [9], además son más flexibles que los laminados para adaptarse a diferentes tipos de contornos; sin embargo, por su propia estructura ante grandes desplazamientos tiende a cambiar su configuración debido a la alineación de las fibras.



(a) Desalineación entre las fibras por fabricación [10] (b) Fallo a compresión prematuro por daño [11]

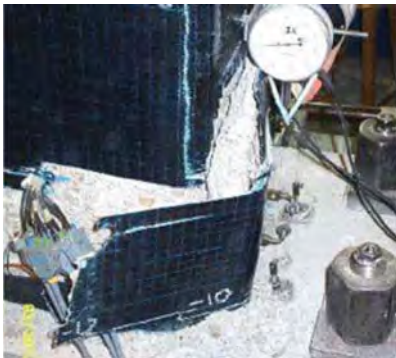


(c) Fallo a tracción por desalineación de 10° de las fibras con respecto a la dirección de la carga [7]

FIGURA 5-1 DESALINEACIÓN DE LAS FIBRAS Y FALLOS

Un caso especial de los materiales compuestos solicitados a grandes deformaciones

corresponde al comportamiento de los materiales compuestos cuasi-frágiles, que como el hormigón, pueden estar solicitados a altas deformaciones cuando están bajo altas presiones hidrostáticas y conservar su integridad [12], sin embargo, en ausencia de presiones hidrostáticas, estos materiales con altas deformaciones fallan originando el colapso del elemento estructural. Como se señala en la figura 5-2, este tipo comportamiento se evidencia, al comparar la respuesta de un pilar de hormigón encamisado con FRP (altamente confinado) y otro sin encamisado (con bajo confinamiento). Donde, siempre que no haya rotura en el FRP [13], la rigidez del encamisado es la que controla la capacidad del hormigón a soportar altas deformaciones [14; 15; 16], por lo tanto controla la capacidad del pilar de soportar grandes desplazamientos horizontales ( $U_x$ ) y verticales ( $U_y$ ). Pese que se encuentra un buen número de investigaciones experimentales, a nivel numérico este tipo de fenómeno ha sido poco estudiado, una de estas investigaciones es la de Parvin y Wang [14] en la que proponen la aplicación de los elementos finitos en el campo de las grandes deformaciones para simular el comportamiento de las columnas confinadas por el refuerzo con FRP, y otra, es la de Bažan et al. [12] que tratan el comportamiento del hormigón confinado a nivel constitutivo.



*Deriva*  $U_{xult}/L_c = 6.0\%$



*Deriva*  $U_{xult}/L_c = 2.5\%$

(a) Daño los pilares con y sin encamisado con CFRP ante carga cíclica horizontal [15]



*Aplastamiento*  $U_{yult}/L_c = 10.1\%$



*Aplastamiento*  $U_{yult}/L_c = 2.7\%$

(b) Daño en los pilares con y sin encamisado con GFRP ante una carga axial monótonica [16]

FIGURA 5-2 MODOS DE FALLO EN LA BASE DE LOS PILARES

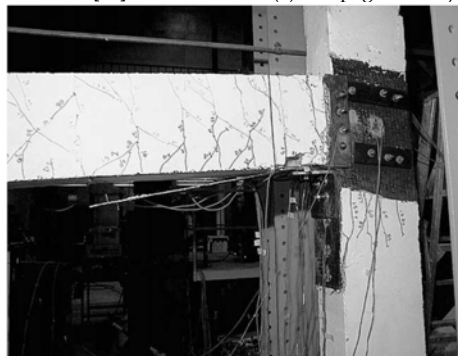
Al igual que otro tipo de estructuras bajo fuerzas dinámicas, las estructuras con

materiales compuestos deben estar diseñadas y construidas para resistir grandes movimientos. Dependiendo de la rigidez y resistencia de la estructura, este tipo de comportamiento se puede presentar durante un sismo, especialmente en las uniones viga-columna y en las bases de los pilares. En la figura 5-3 se muestran diferentes tipos de daños que ocurren en las uniones viga-columna reforzadas con materiales compuestos al estar solicitadas a grandes rotaciones y desplazamientos, como se aprecia si el diseño y/o la instalación del refuerzo no han sido adecuados, las uniones llegan a perder el refuerzo o se presentan rótulas plásticas en las zonas aledañas que causen el colapso. Frente a las grandes rotaciones y desplazamientos, tanto el elemento reforzado como el refuerzo requieren un estudio detallado de su comportamiento para así mejorar su diseño y las técnicas de instalación; sin embargo mientras que desde un enfoque experimental hay un abundante número de investigaciones, dentro de las más recientes están la de Alsayed et al. [17] y Li y Chua [18], desde el enfoque de la simulación numérica la información es escasa. A nivel numérico son pocas las investigaciones que estudian el comportamiento de los elementos reforzados en el campo de los grandes desplazamientos, una de ellas es la investigación de Parvin y Wu [19], en la que utilizan los elementos finitos en el campo de los grandes desplazamientos para simular cuatro configuraciones de uniones viga-columna con diferentes orientaciones del refuerzo.



(a) Rotura del refuerzo con CFRP [17]

(b) Despegue del tejido con GFRP [18]



(c) Rótula plástica en el extremo de la viga y despegue del laminado [20]

FIGURA 5-3 MODOS DE FALLO EN LAS UNIONES VIGA-COLUMNA REFORZADAS

El estudio de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones también es importante para otros sectores de la industria diferentes a la

construcción, como la aeronáutica, el equipamiento industrial y automoción, ya que los grandes movimientos y grandes deformaciones pueden ser parte de las solicitaciones de la pieza o estructura fabricada en sí misma, o presentarse como parte del proceso de fabricación. Uno de los casos de solicitaciones a grandes deformaciones durante la producción corresponde al formado de las capas de los compuestos textiles, donde durante el proceso de estampado, el tejido está solicitado a grandes deformaciones por corte, lo que puede conducir a dos mecanismos de fallo: el wrinkling\* fuera del plano y el deslizamiento en el plano del tejido [21], por ello la mayoría de las investigaciones que han estudiado este fenómeno, han sido conducidas hacia los estados deformables de los tejidos compuestos [9]. A nivel experimental se han realizado ensayos como el "Bias extension test" o el "Trellising - shear test", en los que se estudia el comportamiento del textil en un estado deformable con la correspondiente reorientación de las fibras como se aprecia en la figura 5-4.

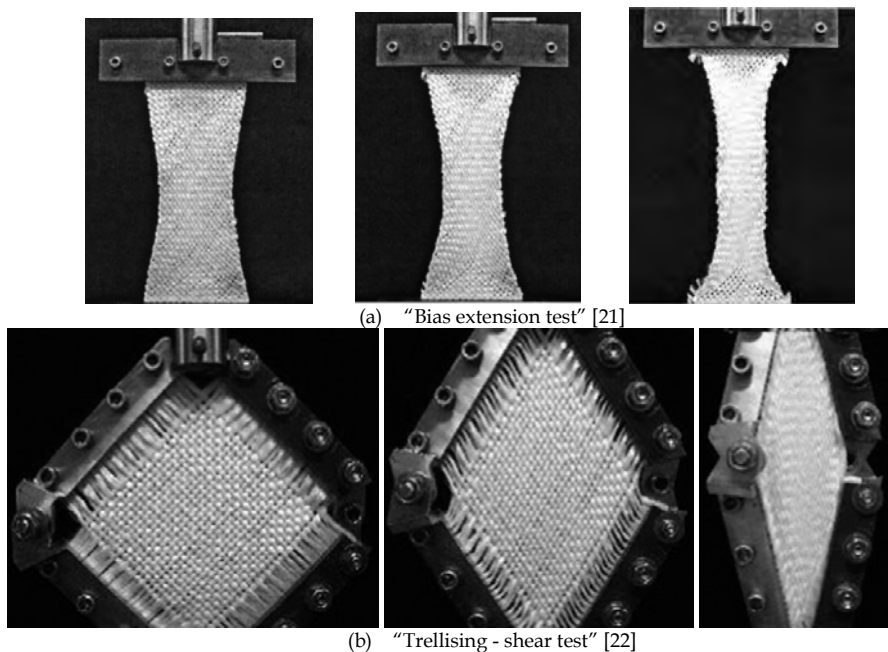


FIGURA 5-4 ENSAYOS EN UN TEJIDO PARA ESTUDIAR LAS GRANDES DEFORMACIONES CORTANTES

En la simulación numérica hay modelos propuestos en los que tratan de modelizar el comportamiento de los tejidos; uno de ellos es el modelo de Flores et al. [23] en el que proponen representar la arquitectura de los tejidos para simular la interacción fibra-matriz y considerar las grandes variaciones que hay en las deformaciones sin tener que acudir a formulaciones dadas en el campo de grandes

\* Wrinkling: Defecto que se produce durante la operación de moldeo de la preforma o del preimpregnado debido a la inadaptabilidad de los tejidos a adoptar la superficie del molde, provocando un pliegue en el tejido y un incremento local de espesor o de la fracción de fibra. (Concepto de la Asociación Española de Materiales compuestos [www.aemac.org](http://www.aemac.org))



deformaciones, para ello combinan elementos lineales que representan los hilos de fibra con elementos 3D que definen la geometría externa e incorporan las propiedades de la matriz; otro de los modelos es el de Xue et al. [24] donde plantean un modelo constitutivo en el que integran la micro-mecánica y a macro-mecánica, para predecir las propiedades mecánicas de los tejidos compuestos solicitados a grandes deformaciones durante el proceso de termoformado, basándose en la respuesta de la microestructura de los materiales.

Otro aspecto que ha sido estudiado en estructuras de materiales compuestos solicitadas a altas deformaciones, corresponde a la respuesta y al daño de los compuestos bajo fuerzas de impacto, como el impacto de proyectiles, la caída de objetos pesados, o impactos durante su instalación. El impacto puede llegar a afectar el desempeño del elemento estructural reduciendo su rigidez, resistencia y estabilidad debido a que induce a altas concentraciones de tensión en la zona adyacente al área impactada y produce generalmente un daño localizado en el compuesto [25]. Como se puede ver en la figura 5-5, el tipo y grado de daño (fisuración en la matriz, rotura en las fibras, delaminación y deslizamiento) y el nivel de deformación que produce una fuerza de impacto en los laminados depende de la composición y de la configuración del compuesto [26]. Dada la dificultad que surge para predecir el daño inducido y su efecto en la capacidad de carga de la estructura impactada, se ha estudiado el fenómeno a través de diferentes ensayos experimentales como los de Shyr y Pan [26], y los de Sayer et al. [27], asimismo se han realizado diferentes simulaciones numéricas [25; 28], pero aún está en desarrollo la aplicación de herramientas numéricas que permitan simular con precisión la respuesta no lineal cinemática del material compuesto frente a este tipo de cargas.

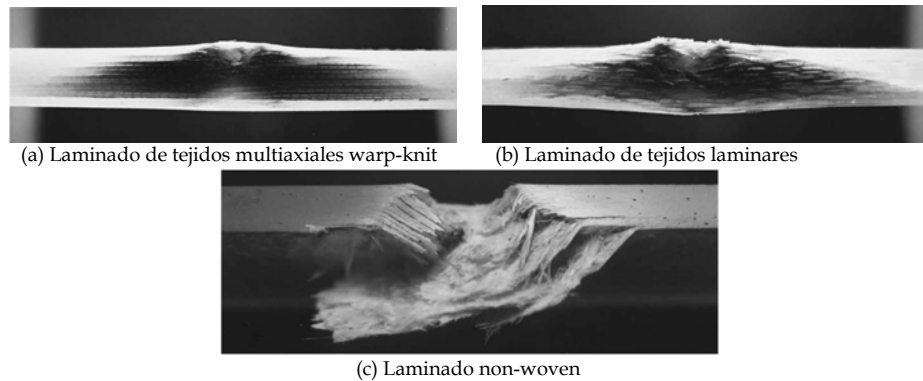


FIGURA 5-5 DAÑO EN LAMINADOS DE FIBRA DE VIDRIO POR IMPACTO [26]

Los diferentes casos tratados muestran que el diseñador debe contar con una herramienta que le permita analizar el comportamiento de los compuestos bajo no linealidades constitutivas, por grandes deformaciones y por grandes desplazamientos, para que pueda optimizar en sus diseños el uso de los compuestos de una forma eficiente y segura. Por ahora el estudio de los materiales compuestos de la no linealidad por grandes deformaciones y por grandes

desplazamientos es un campo de investigación a nivel experimental y a nivel numérico que esta en desarrollo.

### 5.2 Parámetros generales en la configuración material y espacial

Para efectos de compresión de la simbología utilizada en este capítulo, se considera pertinente hacer una breve reseña del tensor gradiente de deformación, del tensor de deformaciones y de la transformación de tensores entre la configuración material y la espacial.

- *Tensor de deformaciones en la configuración material y espacial*

Como se observa en la en la figura 5-6, considerando que un sólido continuo puede ser representado en tres dominios:  $\Omega_0$  situado en el espacio en la configuración material o referencial,  $\tilde{\Omega}$  dado en la configuración intermedia, y  $\Omega$  definido en la configuración espacial o actual; se tiene que un punto  $P$  situado en la configuración material con coordenadas  $\mathbf{X}$ , le corresponde un punto  $\tilde{p}$  con coordenadas  $\tilde{\mathbf{x}}$  en la configuración intermedia, asimismo, en la configuración espacial está representado por un punto  $p$  con coordenadas  $\mathbf{x}$ . Así el movimiento del sólido se describe en función de la configuración material y del tiempo [5],

$$(5:1) \quad \mathbf{x} \equiv x(\mathbf{X}, t)$$

donde el tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ , es el que contiene información del movimiento relativo entre la configuración espacial y la material a lo largo del tiempo  $t$ , de todas las partículas materiales en el entorno diferencial de una dada [29], y se define como:

$$(5:2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad \Rightarrow \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j}$$

y su determinante corresponde al determinante Jacobiano  $J$ .

$$(5:3) \quad J = J(\mathbf{X}, t) = \det(\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) = \det \mathbf{F}$$

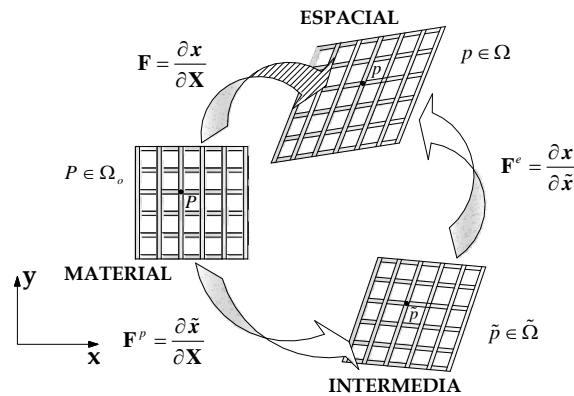


FIGURA 5-6 ESQUEMA DE LAS CONFIGURACIONES CINEMÁTICAS DE UN SÓLIDO EN EL ESPACIO [5]

Asimismo, tal y como se indica en la figura 5-6, el tensor gradiente de deformación

$\mathbf{F}$  a través de la descomposición multipliativa queda definido por un componente elástico  $\mathbf{F}^e$ , y otro, inelástico o permanente  $\mathbf{F}^p$  [5; 30].

$$(5.4) \quad \mathbf{F} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$$

El tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  es el tensor material de deformación [31], el cual está definido como

$$(5.5) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{G}) \quad \Rightarrow \quad E_{IJ} = \frac{1}{2}(C_{IJ} - G_{IJ})$$

siendo  $\mathbf{C}$  el tensor derecho de deformación de Cauchy-Green y  $\mathbf{G}$  el tensor métrico material, de tal forma que:

$$(5.6) \quad \mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad C_{IJ} = F_{Ii}^T F_{iJ} = F_{iI} F_{iJ}$$

$$(5.7) \quad \mathbf{G} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad G_{IJ} = \delta_{IJ} \rightarrow \begin{cases} \delta_{IJ} = 0 & I \neq J \\ \delta_{IJ} = 1 & I = J \end{cases}$$

El tensor de Almansi  $\mathbf{e}$  corresponde al tensor espacial de deformación, y corresponde a

$$(5.8) \quad \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{b}^{-1}) \quad \Rightarrow \quad e_{ij} = \frac{1}{2}(g^{ij} - b_{ij}^{-1})$$

siendo  $\mathbf{b}$  el tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green y  $\mathbf{g}$  el tensor métrico material [30].

$$(5.9) \quad \begin{aligned} \mathbf{b} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad \Rightarrow \quad b_{ij} = F_{iI} F_{jI}^T = F_{iI} F_{jI} \\ \mathbf{b}^{-1} &= \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \Rightarrow \quad b_{ij}^{-1} = F_{iI}^{-T} F_{jI}^{-1} = F_{iI}^{-1} F_{jI}^{-1} \end{aligned}$$

En el espacio euclidiano el tensor métrico  $\mathbf{g}$  equivale al tensor identidad de segundo orden  $\mathbf{I}$  [32].

$$(5.10) \quad \mathbf{g} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad g^{ij} = g_{ij}^{-1} \rightarrow \begin{cases} g_{ij} = \delta_{ij} = 0 & i \neq j \\ g_{ij} = \delta_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$$

- Transformación de espacios de tensores

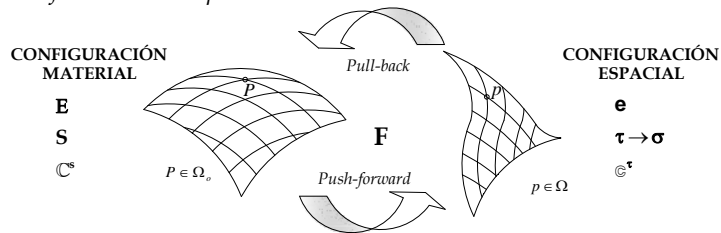


FIGURA 5-7 RELACIÓN DE LAS VARIABLES MECÁNICAS ENTRE LAS CONFIGURACIONES

Con el fin de representar la evolución de los diferentes mecanismos que se generan en problemas de grandes deformaciones, en el análisis numérico se requiere el cambio de configuración de la material a la espacial o viceversa, por ello las operaciones de transporte de tensores push-forward y pull-back son esenciales en la resolución de este tipo de problemas, sin embargo, su implementación debe hacerse de tal forma que el coste computacional sea el menor posible, dado que al

tener problemas no lineales, las operaciones de transporte deben realizarse en cada iteración hasta conseguir el equilibrio de cada incremento de carga [33]. En la figura 5-7 se ilustran las transformaciones tensoriales que se utilizan entre las configuraciones que se detallan a continuación.

- Transformación del espacio de deformaciones

La transformación de los tensores de deformación entre las configuraciones material y espacial, se realiza por medio de las operaciones planteadas por la cinemática para los tensores covariantes *pull-back*  $\underline{\phi}$  y *push-forward*  $\underline{\phi}$  [30].

La operación *pull-back*  $\underline{\phi}$  que transforma el tensor de Almansi  $\mathbf{e}$  en el tensor Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  es

$$(5:11) \quad \mathbf{E} = \underline{\phi}(\mathbf{e}) = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{F} \quad \Rightarrow \quad E_{IJ} = F_{iI}^T e_{ij} F_{jJ} = F_{iI} F_{jJ} e_{ij}$$

de igual forma, la operación *push-forward*  $\underline{\phi}$  transforma el tensor de Green-Lagrange en el tensor de Almansi corresponde a

$$(5:12) \quad \mathbf{e} = \underline{\phi}(\mathbf{E}) = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad \Rightarrow \quad e_{ij} = F_{iI}^{-T} E_{IJ} F_{jJ}^{-1} = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} E_{IJ}$$

- Transformación del espacio de tensiones

La transformación de los tensores de tensión entre las configuraciones, se hace a través de las operaciones establecidas por la cinemática para tensores contravariantes: *pull-back*  $\bar{\phi}$  y *push-forward*  $\bar{\phi}$  [32].

La operación *pull-back*  $\bar{\phi}$  que transforma el tensor de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  en el tensor Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  equivale a

$$(5:13) \quad \mathbf{S} = \bar{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad \Rightarrow \quad S_{iI} = F_{iI}^{-1} \tau_{ij} F_{jJ}^{-T} = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} \tau_{ij}$$

asimismo, que la operación *push-forward*  $\bar{\phi}$  transforma el tensor de Piola-Kirchhoff en el tensor de Kirchhoff esta dada por

$$(5:14) \quad \boldsymbol{\tau} = \bar{\phi}(\mathbf{S}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad \Rightarrow \quad \tau_{ij} = F_{iI} S_{IJ} F_{jJ}^T = F_{iI} F_{jJ} S_{IJ}$$

Teniendo en cuenta que el tensor de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  se relaciona el tensor de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  a través del determinante Jacobiano  $J$  [34] se tiene que

$$(5:15) \quad \boldsymbol{\sigma} = J^{-1} \boldsymbol{\tau} = J^{-1} \bar{\phi}(\mathbf{S}) = J^{-1} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$$

- Transformación del tensor constitutivo [35]

De otra parte la transformación del tensor constitutivo esta dada por la operación *pull-back*  $\bar{\phi}$  que transforma el tensor espacial  $\mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}}$  en el tensor material  $\mathbb{C}^{\mathbf{s}}$  es

$$(5:16) \quad \mathbb{C}^{\mathbf{s}} = \bar{\phi}(\mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}}) \quad \Rightarrow \quad C_{ijkl}^{\mathbf{s}} = F_{iI}^{-1} F_{jJ}^{-1} F_{kK}^{-1} F_{lL}^{-1} c_{ijkl}^{\boldsymbol{\tau}}$$

la operación *push-forward*  $\bar{\phi}$  transforma el tensor material  $\mathbb{C}^{\mathbf{s}}$  en el tensor de espacial  $\mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}}$  corresponde a

$$(5:17) \quad {}^n \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}} = \bar{\phi}({}^n \mathbb{C}^{\mathbf{s}}) \quad \Rightarrow \quad {}^n c_{ijkl}^{\boldsymbol{\tau}} = F_{iI} F_{jJ} F_{kK} F_{lL} C_{ijkl}^{\mathbf{s}}$$

### 5.3 Modelos constitutivos de materiales compuestos en grandes deformaciones

Varias formulaciones estándar han surgido para analizar a una escala macroscópica el comportamiento de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones. En el desarrollo de este capítulo se tratará brevemente una descripción de los modelos constitutivos que han sido propuestos para estudiar los materiales compuestos reforzados con fibras en el campo de grandes deformaciones, sin embargo se hace énfasis en que estos modelos han sido propuestos con enfoques diferentes al del modelo que se propone en este capítulo.

Los modelos constitutivos que se han propuesto para simular el comportamiento mecánico de los compuestos reforzados con fibras en el campo de grandes deformaciones, son una muestra de la necesidad que existe para encontrar una aplicación efectiva de modelos que permitan simular con precisión la respuesta del material compuesto, de tal forma que represente su comportamiento no lineal de una forma integral.

- *Modelos constitutivos donde el compuesto se considera un material simple*

Inicialmente algunos investigadores han tratado los materiales compuestos como materiales homogéneos anisótropos, y no han diferenciado el comportamiento de cada componente del compuesto. Algunas de estas formulaciones como las de Bonet y Burton [36], Lu y Papadopoulos [37] y Holzapfel y Gasser [38], se basan en la descomposición aditiva de un tensor de deformaciones, en el que se supone que se pueden simular las no linealidades a través de múltiples pequeños pasos linealizados, lo que generalmente conduce a un rendimiento computacional bajo.

La anisotropía del material compuesto la consideran a través de la formulación de la energía libre, de tal forma que queda conformada por una componente isótropa  ${}^c\psi_{iso}$ , y otra ortogonal  ${}^c\psi_{ort}$

$$(5:18) \quad {}^c\psi = {}^c\psi_{iso} + {}^c\psi_{ort} = \psi_{iso}({}^c\mathbf{C}) + {}^c\psi_{ort}({}^c\mathbf{C})$$

donde  ${}^c\mathbf{C}$  corresponde al tensor derecho de deformación de Cauchy-Green del compuesto.

Consecuentemente, para el modelo hiper-elástico de Bonet y Burton [36], el tensor Piola-Kirchhoff  ${}^c\mathbf{S}$  es descompuesto en dos tensores, uno isótropo  ${}^c\mathbf{S}_{iso}$  y otro ortogonal  ${}^c\mathbf{S}_{ort}$

$$(5:19) \quad {}^c\mathbf{S} = {}^c\mathbf{S}_{iso} + {}^c\mathbf{S}_{ort} \quad \Rightarrow \quad {}^c\mathbf{S}_{iso} = 2 \frac{\partial {}^c\psi_{iso}}{\partial {}^c\mathbf{C}}; \quad {}^c\mathbf{S}_{ort} = 2 \frac{\partial {}^c\psi_{ort}}{\partial {}^c\mathbf{C}}$$

correspondientes a un tensor de Cauchy isótropo  ${}^c\boldsymbol{\sigma}_{iso}$  y otro ortogonal  ${}^c\boldsymbol{\sigma}_{ort}$

$$(5:20) \quad {}^cJ {}^c\boldsymbol{\sigma} = \bar{\boldsymbol{\phi}}({}^c\mathbf{S}) = {}^c\mathbf{F} \cdot ({}^c\mathbf{S}_{iso} + {}^c\mathbf{S}_{ort}) \cdot {}^c\mathbf{F}^T = {}^cJ ({}^c\boldsymbol{\sigma}_{iso} + {}^c\boldsymbol{\sigma}_{ort})$$

Con el propósito de reducir costos computacionales, en este modelo establecido bajo una configuración material, utilizan el mapeo de tensores para transformar a la configuración material el tensor de tensiones y el tensor constitutivo que han

sido hallados en la configuración espacial, así tienen la ventaja que determinan el tensor constitutivo del material con parámetros experimentales sencillos.

El modelo viscoelástico de Holzapfel y Gasser [38], formulado para compuestos reforzados con fibras conformados por matrices blandas, además de considerar un tensor de tensiones isótropo y otro ortogonal, adiciona el tensor de tensiones producidas por la visco-elasticidad  ${}^c\mathbf{S}_{vis}$ , que depende de la evolución de las variables internas  $\mathbf{q}_n$ , siendo  $n$  el identificador de las  $nvar$  variables  $n = \{1, 2, \dots, nvar\}$ .

$$(5:21) \quad {}^c\mathbf{S} = {}^c\mathbf{S}_{iso} + {}^c\mathbf{S}_{ort} + {}^c\mathbf{S}_{vis} \Rightarrow {}^c\mathbf{S}_{iso} = 2 \frac{\partial {}^c\psi_{iso}}{\partial {}^c\mathbf{C}}; {}^c\mathbf{S}_{ort} = 2 \frac{\partial {}^c\psi_{ort}}{\partial {}^c\mathbf{C}}; {}^c\mathbf{S}_{vis} = \sum_{n=1}^{nvar} {}^c\mathbf{S}_{vis-n}$$

Este modelo está totalmente planteado y formulado para desarrollarse en la configuración de referencia, lo que hace que el cálculo del tensor constitutivo y de los tensores de tensión sea bastante costoso.

Al igual que sucede con otros materiales anisótropos en el campo de grandes deformaciones, las simulaciones de materiales compuestos que utilizan formulaciones aditivas, muestran generalmente una convergencia lenta conforme se incrementan las deformaciones o la anisotropía [39]. Además no consideran el comportamiento que puede tener cada material componente.

- *Modelos constitutivos para compuestos que consideran sólo las fibras*

Los modelos constitutivos que consideran que el comportamiento del compuesto se define con la superposición del comportamiento de las fibras, han sido formulados para compuestos reforzados tipo tela y materiales fibrosos. En los modelos propuestos se determina el comportamiento del compuesto como el efecto aditivo de todos los grupos de fibras que lo componen, donde el número de grupos de fibras  $nd$  depende de las orientaciones de las fibras dentro del compuesto.

Entre estos modelos están los modelos de Thije et al. [39], Khan et al. [40] y Badel et al. [41], los cuales utilizan la descomposición polar del gradiente de deformación del material, teniendo en cuenta que el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  se puede separar en un tensor de rotación del compuesto  $\mathbf{R}$  y en el tensor derecho de estiramiento o tensor material de estiramiento  $\mathbf{U}$  [30].

$$(5:22) \quad \mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$$

Con el fin de desarrollar estos modelos bajo formulaciones de Lagrange actualizadas [42], diferentes autores utilizan el tensor co-rotado de Cauchy  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  (propuesto por Green-Naghdi [31]), para hacer los cálculos de las tensiones desde una configuración local; luego teniendo en cuenta que el tensor co-rotado de Cauchy debe ser invariante parten del principio de rotación de cuerpo rígido, para transformar este tensor  $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$  en el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ .

$$(5:23) \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{R} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{R}^T$$

A través de esta transformación en los modelos de Thije et al. [39], Khan et al. [40] y Badel et al. [41] se involucra la reorientación de las fibras. Bažant et al. [12] utilizaron esa misma metodología para definir el comportamiento del hormigón

confinado bajo altas deformaciones.

El modelo de Thije et al. [39] se basa en el modelo de elasto-plasticidad de Huétink [42], en el que divide el tensor material de estiramiento de cada grupo de fibras  ${}^f\mathbf{U}_{nf}$ , en un tensor elástico reversible  ${}^f\mathbf{U}_{nf}^e$  y otro plástico irreversible  ${}^f\mathbf{U}_{nf}^p$ .

$${}^f\mathbf{F}_{nf} = {}^f\mathbf{R}_{nf} \cdot {}^f\mathbf{U}_{nf}^e \cdot {}^f\mathbf{U}_{nf}^p$$

Luego a través de la energía libre  ${}^f\psi$  se determina el tensor local  ${}^f\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{nf}$  en función del tensor derecho de deformación elástico de Cauchy-Green  ${}^f\mathbf{C}_{nf}^e$ , garantizando que  ${}^f\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{nf}$  no cambia con la rotación.

$$(5:24) \quad {}^f\psi_{nf} = \psi({}^f\mathbf{C}_{nf}^e) \Rightarrow {}^f\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{nf} = 2 {}^f\rho_{nf} {}^f\mathbf{U}_{nf}^e \cdot \frac{\partial {}^f\psi}{\partial {}^f\mathbf{C}_{nf}^e} \cdot [{}^f\mathbf{U}_{nf}^e]^T$$

$${}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf} = {}^f\mathbf{R}_{nf} \cdot {}^f\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{nf} \cdot {}^f\mathbf{R}_{nf}^T$$

Los modelos de Khan et al. [40] y Badel et al. [41] relacionan el tensor local  ${}^f\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{nf}$  con un tensor  ${}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^\nabla$ , que representa una derivada objetiva del tensor de Cauchy [32].

$${}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^\nabla = ({}^f\mathbf{R}_{nf} \cdot {}^f\dot{\boldsymbol{\sigma}}_{nf} \cdot {}^f\mathbf{R}_{nf}^T) = {}^f\mathbf{R}_{nf} \cdot \frac{d}{dt} ({}^f\mathbf{R}_{nf}^T \cdot {}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf} \cdot {}^f\mathbf{R}_{nf}) \cdot {}^f\mathbf{R}_{nf}^T$$

El modelo de Khan et al. [40] plantean un modelo hipo-elástico para tejidos compuestos, mientras Badel et al. [41] proponen un modelo hipo-elástico para compuestos fibrosos. Aunque la ley constitutiva hipo-elástica no es conservativa [32], al desarrollarse bajo el concepto de derivadas objetivas, permite de una forma sencilla definir en una configuración Euleriana el tensor  ${}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^\nabla$  como el incremento de tensiones de cada grupo de fibras  $nf$

$$(5:25) \quad {}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^\nabla = {}^f\mathbb{C}_{nf}^\nabla \cdot {}^f\mathbf{d}_{nf} \Rightarrow {}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^{i+1} = {}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^i + {}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}^\nabla$$

siendo  ${}^f\mathbb{C}_{nf}^\nabla$  el tensor de constantes elásticas orientado en la dirección del grupo de fibras y  ${}^f\mathbf{d}_{nf}$  el tensor de velocidad deformación que es objetivo.

Aunque los modelos de materiales compuestos que utilizan la ley hipo-elástica se proponen para un comportamiento elástico de las fibras, plantean la posibilidad de extender la aplicación de sus ecuaciones constitutivas con derivadas objetivas a comportamientos no lineales, como la plasticidad o la visco-elasticidad, cuando las deformaciones elásticas sean pequeñas con respecto a las inelásticas.

Los modelos de Thije et al. [39] y Khan et al. [40] parten de la hipótesis que todas las fibras tienen la misma deformación, asimismo establecen que el tensor de tensiones del compuesto corresponde a la suma de los tensores de tensiones de cada grupo de fibras  $nf$  acorde con su fracción volumétrica  ${}^fk_{nf}$ .

$$(5:26) \quad {}^c\boldsymbol{\sigma} = \sum_{nf=1}^{nd} {}^fk_{nf} {}^f\boldsymbol{\sigma}_{nf}$$

Este tipo de modelos, tienen la ventaja que permiten involucrar las rotaciones que

pueden tener las fibras orientadas en distintas direcciones ante el cambio de configuración producido por las cargas, sin embargo tienen algunas limitaciones en su aplicación a materiales compuestos laminados dado que parten de la hipótesis que todas las fibras tienen las mismas deformaciones independientemente de su orientación, de otra parte, tampoco tienen en cuenta el aporte de la matriz en el comportamiento del compuesto.

- *Modelos constitutivos para compuestos que consideran las fibras y la matriz*

En la literatura se encuentran también modelos propuestos para el análisis de materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones que diferencian el comportamiento de cada material componente, y son formulados para determinar un comportamiento no lineal específico del compuesto, como la elasto-plasticidad, la visco-elasticidad y la visco-plasticidad, entre otros. Estas formulaciones, consideran que el comportamiento del material compuesto equivale a la superposición del comportamiento de la matriz y del aporte de las fibras en la dirección que están orientadas.

Estos modelos para el análisis no lineal de los materiales en el campo de grandes deformaciones utilizan la descomposición multiplicativa de los gradientes de deformación de las fibras y de la matriz; por ejemplo, en el modelo elasto-plástico de Klinkel et al. [43] se plantea un gradiente elástico y otro plástico para cada componente, asimismo Nedjar [44] y Nguyen et al. [45] en sus modelos viscoelásticos establecen un gradiente elástico y otro viscoso.

$$(5:27) \quad {}^n \mathbf{F} = {}^n \mathbf{F}^e \cdot {}^n \mathbf{F}^p \quad n = \{c, m, f\}$$

siendo  $n$  el compuesto  $c$ , la matriz  $m$ , o la fibra  $f$ ,  $\mathbf{F}^e$  el gradiente elástico y  $\mathbf{F}^p$  el gradiente de deformación inelástico, el cual corresponde al componente plástico en el modelo de Klinkel et al. [43] y al componente viscoso en los modelos visco-elásticos [44; 45].

Klinkel et al. [43] y Nedjar [44] parten del principio que los tensores gradientes de los componentes están relacionados con el gradiente de deformación del compuesto de la siguiente forma:

$$(5:28) \quad {}^c \mathbf{F} = {}^m \mathbf{F}^e \cdot {}^m \mathbf{F}^p \quad {}^f \mathbf{F} = {}^f \mathbf{M} \cdot {}^c \mathbf{F} = {}^f \mathbf{F}^e \cdot {}^f \mathbf{F}^p$$

${}^f \mathbf{M} = P_f \otimes P_f$  está relacionado con el vector unidad  $P_f$  que indica la dirección del conjunto de fibras en la configuración material.

La energía libre en estos modelos queda planteada en términos de la matriz y de los  $nd$  grupos de fibras, los cuales son agrupados de acuerdo con las  $nd$  orientaciones que tengan las fibras dentro del compuesto.

$$(5:29) \quad {}^c \psi = {}^m \psi + {}^f \psi = {}^m \psi_{eq}({}^m \mathbf{C}) + {}^m \psi_{neq}({}^m \mathbf{C}^e) + \sum_{nf=1}^{nd} ({}^f \psi_{eq}({}^f \mathbf{C}_{nf}) + {}^f \psi_{neq}({}^f \mathbf{C}_{nf}^e))$$

$\psi_{eq}$  corresponde a la energía libre en equilibrio termo-dinámico y  $\psi_{neq}$  es la energía libre que no está en equilibrio. A través de la ecuación de la energía libre los tensores de Piola-Kirchhoff de la matriz y de las fibras quedan definidos como



$$\begin{aligned}
 {}^m\mathbf{S} &= {}^m\mathbf{S}_{eq} + {}^m\mathbf{S}_{neq} \Rightarrow {}^m\mathbf{S}_{eq} = 2 \frac{\partial {}^m\psi_{eq}}{\partial {}^m\mathbf{C}}; & {}^m\mathbf{S}_{neq} &= 2 [{}^m\mathbf{F}^p]^{-1} \cdot \frac{\partial {}^m\psi_{neq}}{\partial {}^m\mathbf{C}^e} \cdot [{}^m\mathbf{F}^p]^{-T} \\
 {}^f\mathbf{S} &= {}^f\mathbf{S}_{eq} + {}^f\mathbf{S}_{neq} \Rightarrow {}^f\mathbf{S}_{eq} = 2 \frac{\partial {}^f\psi_{eq}}{\partial {}^f\mathbf{C}}; & {}^f\mathbf{S}_{neq} &= \frac{2}{{}^f\lambda_p^2} \left[ \frac{\partial {}^f\psi_{neq}}{\partial {}^f\mathbf{C}^e} : {}^f\mathbf{M} \right] \cdot {}^f\mathbf{M}
 \end{aligned}$$

siendo  ${}^f\lambda_p$  la variable escalar interna de las fibras para control de la elongación por plasticidad o por viscosidad de las fibras, según sea el modelo.

A diferencia de los anteriores modelos, Nguyen et al. [45] parten del principio que los tensores gradientes de deformación son iguales para el compuesto y sus componentes

$$(5:30) \quad {}^c\mathbf{F} = {}^m\mathbf{F}^e \cdot {}^m\mathbf{F}^p = {}^f\mathbf{F}^e \cdot {}^f\mathbf{F}^p$$

En este modelo se plantea la energía libre en función de los invariantes del compuesto  $c$ , de la matriz  $m$  y de las fibras  $f$ , de tal forma que:

- El aporte de la energía libre en equilibrio de la matriz  ${}^m\psi_{eq}$  esta dado por los primeros tres invariantes del tensor derecho de deformación elástico de Cauchy-Green del compuesto  ${}^c\mathbf{C}$

$$I_1 = {}^c\mathbf{C} : \mathbf{I} \quad I_2 = \frac{1}{2} ({}^c\mathbf{C}^2 : \mathbf{I}) \quad I_3 = \det({}^c\mathbf{C})$$

- El aporte de la energía libre no equilibrada en la matriz  ${}^m\psi_{neq}$  esta dado por los primeros tres invariantes del tensor derecho elástico de deformación de Cauchy-Green de la matriz  ${}^m\mathbf{C}^e$

$${}^m I_1 = {}^m\mathbf{C}^e : \mathbf{I} \quad {}^m I_2 = \frac{1}{2} ({}^m\mathbf{C}^e)^2 : \mathbf{I} \quad {}^m I_3 = \det({}^m\mathbf{C}^e)$$

- El aporte de la energía libre en equilibrio de las fibras  ${}^f\psi_{eq}$  esta dado por seis invariantes que están en función de del tensor derecho de deformación elástico de Cauchy-Green del compuesto  ${}^c\mathbf{C}$ , y del tensor  ${}^f\mathbf{M}_{nf}$  de cada grupo de fibras. Tomando dos grupos ( $nd=2$ ) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 I_4 &= {}^c\mathbf{C} : {}^f\mathbf{M}_1; & I_5 &= {}^c\mathbf{C}^2 : {}^f\mathbf{M}_1; & I_6 &= {}^c\mathbf{C} : {}^f\mathbf{M}_2; & I_7 &= {}^c\mathbf{C}^2 : {}^f\mathbf{M}_2; \\
 I_8 &= \text{tr}({}^c\mathbf{C} : {}^f\mathbf{M}_1 : {}^f\mathbf{M}_2); & I_9 &= {}^f\mathbf{M}_1 : {}^f\mathbf{M}_2
 \end{aligned}$$

- El aporte de la energía libre no equilibrada de las fibras  ${}^f\psi_{neq}$  esta dado por seis invariantes del tensor derecho elástico de deformación de Cauchy-Green de las fibras  ${}^f\mathbf{C}^e$ , y del tensor  ${}^f\tilde{\mathbf{M}}_{nf}$  que considera la deformada y la orientación de cada grupo de fibras en una configuración intermedia  $\tilde{\Omega}$  (ver figura 5-6). Para dos grupos ( $nd=2$ ) los invariantes son:

$$\begin{aligned}
 {}^f I_4 &= {}^f\mathbf{C}^e : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_1; & {}^f I_5 &= [{}^f\mathbf{C}^e]^2 : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_1; & {}^f I_6 &= {}^f\mathbf{C}^e : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_2; & {}^f I_7 &= [{}^f\mathbf{C}^e]^2 : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_2; \\
 {}^f I_8 &= \text{tr}({}^f\mathbf{C}^e : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_1 : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_2); & {}^f I_9 &= {}^f\tilde{\mathbf{M}}_1 : {}^f\tilde{\mathbf{M}}_2
 \end{aligned}$$

La energía libre en términos de la matriz y los  $nd$  grupos de fibras del compuesto queda expresada como:

$$(5:31) \quad \begin{aligned} {}^c\psi = & {}^m\psi_{eq}(I_1, I_2, I_3) + \sum_{nf=1}^{nd} {}^f\psi_{eq}(I_4, I_5, I_6, I_7, I_8, I_9)_{nf} \\ & + {}^m\psi_{neq}({}^mI_1, {}^mI_2, {}^mI_3) + \sum_{nf=1}^{nd} {}^f\psi_{neq}({}^fI_4, {}^fI_5, {}^fI_6, {}^fI_7, {}^fI_8, {}^fI_9)_{nf} \end{aligned}$$

En los modelos de Klinkel et al. [43], Nedjar [44] y Nguyen et al. [45], el tensor de Piola-Kirchhoff del compuesto corresponde a la contribución de la matriz y de los  $nd$  grupos de fibras, de tal forma que:

$$(5:32) \quad {}^c\mathbf{S} = 2 \frac{\partial {}^c\psi}{\partial {}^c\mathbf{C}} = {}^m\mathbf{S}_{eq} + \sum_{nf=1}^{nd} ({}^f\mathbf{S}_{eq})_{nf} + {}^m\mathbf{S}_{neq} + \sum_{nf=1}^{nd} ({}^f\mathbf{S}_{neq})_{nf}$$

Como se puede apreciar para estos modelos, la anisotropía del compuesto la inducen a través del aporte unidireccional de cada grupo de fibras; sin embargo al no diferenciar el porcentaje del aporte de cada componente acorde con su proporción volumétrica, se puede estar a sobreestimando el comportamiento del compuesto en una determinada dirección o subestimándolo en otra.

Teniendo en cuenta la influencia que pueden tener la no linealidad cinemática en el comportamiento del compuesto, es importante que se desarrollen ecuaciones constitutivas que estudien el comportamiento de los materiales compuestos en el campo de grandes deformaciones, para que en los análisis se consideren de una forma integral y complementaria los efectos de la no linealidad material junto con la geométrica.

#### 5.4 Teoría de mapeo de espacios en grandes deformaciones

Debido a las diferencias en el comportamiento entre los componentes, a su interacción y a la forma en como están distribuidos en el compuesto, los materiales compuestos tienen un comportamiento no lineal aún para bajas tensiones, además tienen una elevada anisotropía, lo que conduce a que su modelización numérica sea compleja [46]. Uno de los aspectos con mayor complejidad en la formulación de las ecuaciones constitutivas bajo régimen de grandes deformaciones corresponde a analizar la anisotropía de manera adecuada debido a los cambios cinemáticos. Los materiales compuestos están caracterizados por tener una elevada anisotropía, además se encuentran habitualmente sometidos a sollicitaciones que conducen a grandes deformaciones [47].

En este apartado se hace una descripción de la formulación del mapeo de espacios en el régimen de grandes deformaciones para aplicarlo como complemento a las teorías de mezclas, ya que es una herramienta que permite agilizar el análisis numérico del comportamiento los materiales compuestos introduciendo la anisotropía de sus componentes para definir la anisotropía del compuesto.

El mapeo de espacios propuesto por Oller et al. [48] fue formulado bajo la cinemática de los pequeños movimientos; luego esta teoría fue generalizada para el

campo de grandes deformaciones por Car et al. [33], lo que la hace una potente herramienta de las teorías de mezclas para obtener la no linealidad y la anisotropía del compuesto como el resultado de la participación e interacción de cada uno de los componentes con su correspondiente ecuación constitutiva.

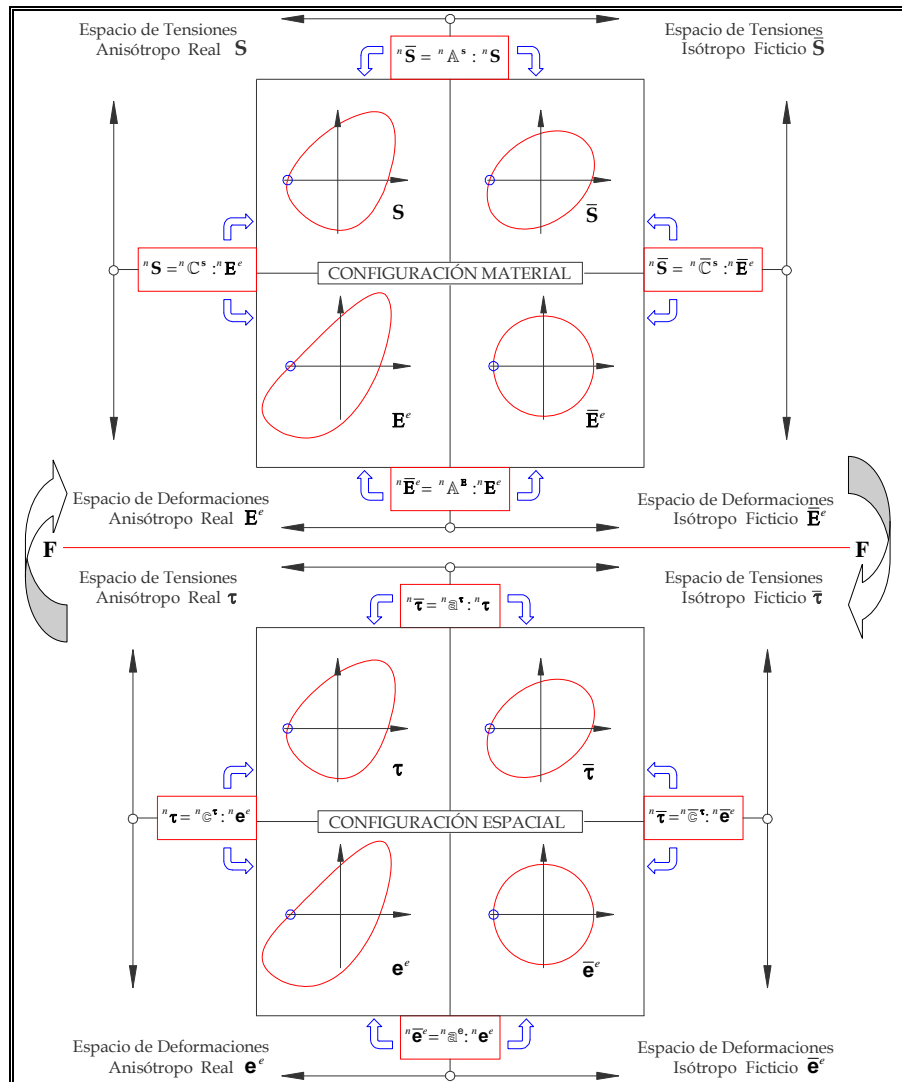


FIGURA 5-8 RELACIÓN ENTRE LOS ESPACIOS ISÓTROPICO FICTICIO Y EL ANISÓTROPICO REAL EN LAS CONFIGURACIONES MATERIAL Y ESPACIAL PARA UN N-ÉSIMO COMPONENTE. [49]

De forma análoga al campo de pequeñas deformaciones, se tiene que los tensores de transformación del espacio de tensiones identificados como  $\mathbb{A}^s$  en la configuración material y  $\mathbb{A}^{\boldsymbol{\tau}}$  en la espacial, transforman de forma lineal el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  y el de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  de un espacio anisótropo real  $\Omega$  a otro isotrópico ficticio  $\bar{\Omega}$  o viceversa.

$$(5.33) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{S}} &\equiv \mathbb{A}^s : \mathbf{S} &\Rightarrow \bar{S}_{IJ} &= A_{IJKL}^s S_{KL} \\ \bar{\boldsymbol{\tau}} &\equiv \mathbb{a}^\tau : \boldsymbol{\tau} &\Rightarrow \bar{\tau}_{ij} &= a_{ijkl}^\tau \tau_{kl} \end{aligned}$$

Los tensores de transformación del espacio de deformaciones referenciados como  $\mathbb{A}^B$  en la configuración material y  $\mathbb{a}^e$  en la espacial, linealmente transforman el tensor de deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  y el de Almansi  $\mathbf{e}$ .

$$(5.34) \quad \begin{aligned} \bar{\mathbf{E}} &\equiv \mathbb{A}^B : \mathbf{E} &\Rightarrow \bar{E}_{IJ} &= A_{IJKL}^B E_{KL} \\ \bar{\mathbf{e}} &\equiv \mathbb{a}^e : \mathbf{e} &\Rightarrow \bar{e}_{ij} &= a_{ijkl}^e e_{kl} \end{aligned}$$

Las relaciones entre los tensores constitutivos para la configuración material y espacial quedan expresados como:

$$(5.35) \quad \begin{aligned} \mathbb{C}^s &= (\mathbb{A}^s)^{-1} : \bar{\mathbb{C}}^s : \mathbb{A}^B &\Rightarrow \mathbf{C}_{MNRs}^s &= (A_{IJMN}^s)^{-1} \bar{C}_{IJKL}^s A_{KLRS}^B \\ \mathbb{C}^\tau &= (\mathbb{a}^\tau)^{-1} : \bar{\mathbb{C}}^\tau : \mathbb{a}^e &\Rightarrow \mathbf{c}_{mnr s}^\tau &= (a_{ijmn}^\tau)^{-1} \bar{c}_{ijkl}^\tau a_{klrs}^e \end{aligned}$$

En el contexto de las deformaciones finitas, los tensores de transformación de tensiones y deformaciones en la configuración espacial no permanecen constantes, dado que se redefinen en cada cambio de configuración [50]. Por ello es necesario definirlos a través del *push-forward*  $\bar{\Phi}$  de los tensores de transformación a la configuración material.

$$(5.36) \quad \begin{aligned} \mathbb{a}^\tau &= \bar{\Phi}(\mathbb{A}^s) &\Rightarrow \mathbf{a}_{ijkl}^\tau &= F_{il} A_{IJKL}^s F_{Kk}^{-1} F_{Ll}^{-T} F_{Jj}^T = F_{il} F_{jJ} F_{Kk}^{-1} F_{Ll}^{-1} A_{IJKL}^s \\ \mathbb{a}^e &= \bar{\Phi}(\mathbb{A}^B) &\Rightarrow \mathbf{a}_{ijkl}^e &= F_{il}^{-T} A_{IJKL}^B F_{Kk}^T F_{Ll} F_{Jj}^{-1} = F_{li}^{-1} F_{jJ}^{-1} F_{kK} F_{Ll} A_{IJKL}^B \end{aligned}$$

En la configuración material y en la espacial, la relación entre los espacios de tensiones y deformaciones esta dada por la ley de Hooke generalizada [33]. En la figura 5-8 se indica el mapeo de los espacios de tensiones y deformaciones para un  $n$ -ésimo material componente  $n$  del compuesto.

## 5.5 Teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones

El modelo de extensión de la teoría clásica al campo de grandes deformaciones propuesto por Car et al. [51] permite analizar problemas no lineales de materiales compuestos en deformaciones finitas. Al igual que la teoría serie/paralelo, la teoría clásica asociada al mapeo de espacios, establece el comportamiento del compuesto definiendo el comportamiento de sus componentes con los modelos constitutivos formulados para materiales isótropos; sin embargo presenta ciertas limitaciones al condicionar un estado de isodeformación entre los componentes. A continuación se muestra su formulación por ser la base del desarrollo del modelo propuesto para extender la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones.

### 5.5.1 Formulación de la teoría de mezclas clásica en la configuración material

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones*

Se debe verificar que el compuesto y sus componentes cumplan con la condición de isodeformación en la configuración material y espacial [46]. La condición de

compatibilidad del tensor de Green Lagrange  $\mathbf{E}$  esta dada por:

$$(5:37) \quad {}^c E_{IJ} \equiv {}^1 E_{IJ} = \dots = {}^n E_{IJ} = \dots = {}^{nc} E_{IJ}$$

- *Función de energía libre*

Partiendo de la expresión planteada por Oller et al. [52], la energía libre de Helmholtz  $\Psi$  por unidad de volumen del compuesto se puede plantear como:

$$(5:38) \quad \begin{aligned} {}^c m_o {}^c \Psi({}^c E_{ij}^e, \theta, {}^c \alpha^s, {}^c \beta^s) &= {}^c m_o {}^c \Psi(\underbrace{{}^c E_{ij}, \theta, {}^c E_{ij}^p, {}^c \alpha^s, {}^c \beta^s}_{c\xi^s}) \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m_o {}^n \Psi(\underbrace{{}^c E_{ij}, \theta, {}^n E_{ij}^p, {}^n \alpha^s, {}^n \beta^s}_{n\xi^s}) \end{aligned}$$

en la cual  $c$ ,  $n$  y  $nc$  representan el compuesto, el  $n$ -ésimo componente, y el número de componentes del compuesto;  $\mathbf{E}^e$ ,  $\mathbf{E}^p$ ,  $m_o$  y  $\theta$  corresponden a los tensores de Green- Lagrange elástico e inelástico, a la masa en la configuración material y a la temperatura;  $\alpha^s$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\beta^s$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\xi^s$  es el grupo total de variables internas en la configuración material. Estos grupos de variables se introducen de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente del compuesto.

La contribución de cada  $n$ -ésimo componente en el comportamiento del compuesto  $c$ , esta definida por el coeficiente de participación volumétrica  ${}^n k$ :

$$(5:39) \quad {}^n k = \frac{d {}^n V}{d {}^c V} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{nc} {}^n k = 1$$

${}^n k$  relaciona en la configuración material, el volumen infinitesimal del  $n$ -ésimo componente  $d {}^n V$ , con el volumen infinitesimal del compuesto  $d {}^c V$ .

- *Ecuación constitutiva*

Aplicando el método de Coleman a la desigualdad de Clausius-Duhem [46; 53], se obtiene la ecuación constitutiva en la configuración material, con la cual se determina el segundo tensor de Piola Kirchhoff  $\mathbf{S}$  del compuesto así:

$$(5:40) \quad \begin{aligned} {}^c \mathbf{S} &= {}^c m_o \frac{\partial {}^c \Psi({}^c \mathbf{E}, {}^c \xi^s)}{\partial \mathbf{E}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m_o \frac{\partial {}^n \Psi({}^n \mathbf{E}, {}^n \xi^s)}{\partial \mathbf{E}} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \mathbf{S} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k ({}^n \mathbb{C}^s : {}^n \mathbf{E}^e) \end{aligned}$$

De igual forma que para el campo de pequeñas deformaciones una vez obtenida la ecuación de la energía libre se determina la expresión de la ecuación constitutiva, en la cual el estado de tensión del compuesto equivale a la sumatoria de la contribución proporcional del tensor de tensiones de cada sustancia componente.

Siguiendo el procedimiento, al considerar la variación de las tensiones con respecto a las deformaciones, se obtienen los tensores constitutivos tangentes en la configuración material  $\mathbb{C}^s$ .

$$(5:41) \quad {}^c \mathbb{C}^s = {}^c m_o \frac{\partial^2 {}^c \Psi({}^c \mathbf{E}, {}^c \xi^s)}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \mathbb{C}^s$$

## 5.5.2 Formulación de la teoría de mezclas clásica en la configuración espacial

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones*

En la configuración espacial, la condición de compatibilidad del tensor de Almansi  $\mathbf{e}$  corresponde a:

$$(5:42) \quad {}^c \mathbf{e}_{ij} \equiv {}^1 \mathbf{e}_{ij} = \dots = {}^n \mathbf{e}_{ij} = \dots = {}^{nc} \mathbf{e}_{ij}$$

- *Función de energía libre*

Partiendo de la expresión planteada por Oller et al. [52], la energía libre de Helmholtz  $\psi$  por unidad de volumen del compuesto se puede plantear como:

$$(5:43) \quad \begin{aligned} {}^c m^c \psi({}^c \mathbf{e}_{ij}^e, \theta, {}^c \alpha^\tau, {}^c \beta^\tau) &= {}^c m^c \psi(\underbrace{{}^c \mathbf{e}_{ij}^e, \theta, {}^c \mathbf{e}_{ij}^p, {}^c \alpha^\tau, {}^c \beta^\tau}_{{}^c \xi^\tau}) \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k^{}^n m^{}^n \psi(\underbrace{{}^c \mathbf{e}_{ij}^e, \theta, {}^n \mathbf{e}_{ij}^p, {}^n \alpha^\tau, {}^n \beta^\tau}_{{}^n \xi^\tau}) \end{aligned}$$

en la cual  $c$ ,  $n$  y  $nc$  representan el compuesto, el  $n$ -ésimo componente, y el número de componentes del compuesto;  $\mathbf{e}^e$ ,  $\mathbf{e}^p$ ,  $m$  y  $\theta$  corresponden respectivamente a los tensores de Almansi elástico e inelástico, a la masa y a la temperatura;  $\alpha^\tau$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\beta^\tau$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\xi^\tau$  es el grupo total de variables internas en la configuración espacial. Estos grupos de variables se introducen de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente del compuesto.

Asimismo el factor de proporción volumétrica del  $n$ -ésimo componente  ${}^n k$  debe cumplir que:

$$(5:44) \quad {}^n k = \frac{d^n v}{d^c v} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{nc} {}^n k = 1$$

${}^n k$  relaciona en la configuración espacial, el volumen infinitesimal del  $n$ -ésimo componente  $d^n v$ , con el volumen infinitesimal del compuesto  $d^c v$ .

- *Ecuación constitutiva*

De igual forma, en la configuración espacial se define la expresión de la ecuación constitutiva a través de la ecuación de la energía libre, donde el tensor de del compuesto Kirchhoff  ${}^c \boldsymbol{\tau}$  equivale a la sumatoria de la contribución proporcional de los tensores de Kirchhoff de cada componente [50].

$$(5:45) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\tau} &= {}^c m \frac{\partial {}^c \psi({}^c \mathbf{e}, {}^c \xi^\tau)}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n m \frac{\partial {}^n \psi({}^n \mathbf{e}, {}^n \xi^\tau)}{\partial \mathbf{e}} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \boldsymbol{\tau} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k ({}^n \mathbb{C}^\tau : \mathbf{e}^e) = {}^c J^c \boldsymbol{\sigma} \end{aligned}$$

Al considerar la variación de las tensiones con respecto a las deformaciones, se obtiene el tensor constitutivo tangente en la configuración espacial  $\mathbb{C}^\tau$ .

$$(5:46) \quad {}^c \mathbb{C}^{\tau} = {}^c m \frac{\partial^2 {}^c \psi({}^c \mathbf{e}, {}^c \xi^{\tau})}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \mathbb{C}^{\tau}$$

### 5.5.3 Factor de proporción volumétrica para la teoría de mezclas clásica

De acuerdo con la definición de los tensores derecho e izquierdo de Cauchy-Green (( 5:5) y ( 5:9)) y la ecuación de cierre de cada configuración, se tiene que la ecuación de cierre también es una función de los gradientes de deformación [47]

$$(5:47) \quad {}^c \mathbf{F} \equiv {}^1 \mathbf{F} = \dots = {}^n \mathbf{F} = \dots = {}^{nc} \mathbf{F}$$

Esta hipótesis se cumple sólo si se aplica la teoría de mezclas clásica para materiales con comportamiento en paralelo [54]. Es decir que esta hipótesis es válida sólo para materiales compuestos reforzados con fibras largas, y que no se cumple para materiales compuestos con fibras cortas. Para solucionar este inconveniente existen dos alternativas, definir otra ecuación de cierre que permita simular de una forma más conveniente los fenómenos que se producen en el material o hacer una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la ecuación de cierre [33].

Bajo la ecuación de continuidad se relaciona los volúmenes infinitesimales del compuesto en la configuración espacial  $d^c v$  y la configuración espacial  $d^c V$

$$(5:48) \quad \frac{d^c v}{d^c V} = \det {}^c \mathbf{F} = {}^c J \quad \Rightarrow \quad d^c V = \frac{1}{{}^c J} d^c v$$

de igual forma, se establece en el  $n$ -ésimo componente la relación entre los volúmenes infinitesimales en las configuraciones espacial  $d^n v$  y material  $d^n V$

$$(5:49) \quad \frac{d^n v}{d^n V} = \det {}^n \mathbf{F} = {}^n J \quad \Rightarrow \quad d^n V = \frac{1}{{}^n J} d^n v$$

Remplazando la expresión ( 5:48) y ( 5:49) en la ecuación ( 5:39) se tiene que el coeficiente de proporción volumétrica equivale a:

$$(5:50) \quad {}^n k = \frac{d^n V}{d^c V} = \frac{{}^c J}{{}^n J} \frac{d^n v}{d^c v}$$

Al cumplirse la ecuación ( 5:47) se tiene que  ${}^c J = {}^1 J = \dots = {}^n J = \dots = {}^{nc} J$ , por lo tanto, en la teoría de mezclas clásica el coeficiente de participación de cada componente se mantiene constante en las configuraciones material y espacial [33].

$$(5:51) \quad {}^n k = \frac{d^n V}{d^c V} = \frac{d^n v}{d^c v}$$

### 5.5.4 Algoritmo general de la teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones

En la figura 5-9 se muestra el diagrama de flujo esquemático del modelo de extensión de la teoría clásica al campo de grandes deformaciones propuesto por Car et al. [33] para el análisis de problemas no lineales en deformaciones finitas de un material compuesto.

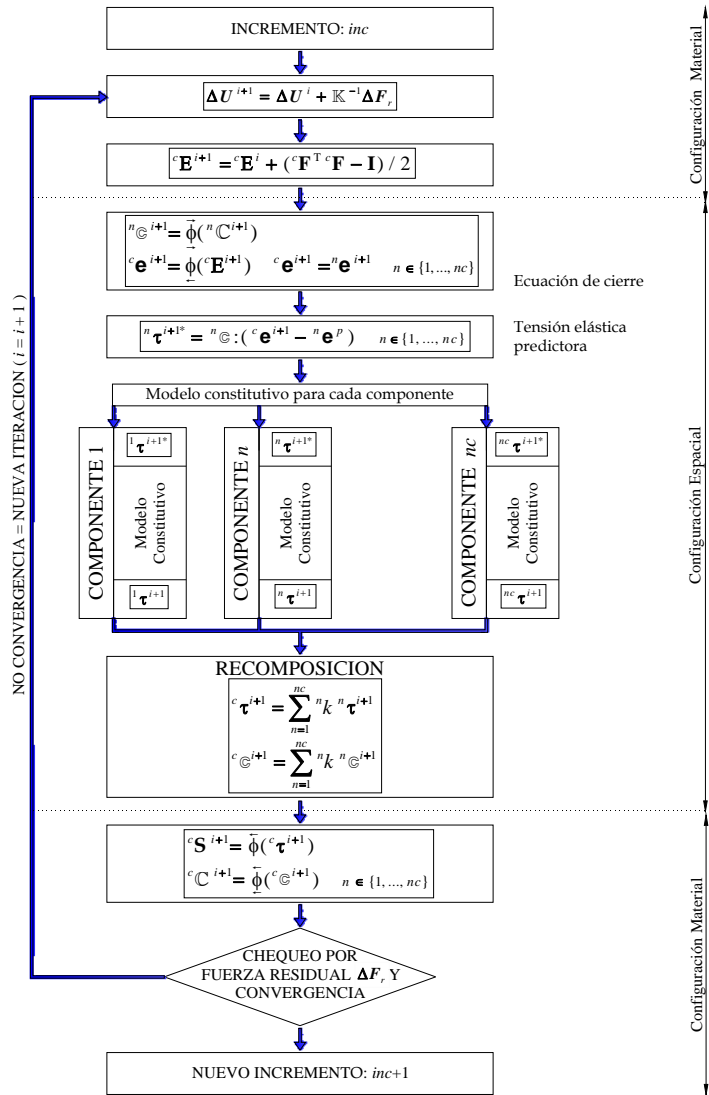


FIGURA 5-9 ESQUEMA GENERAL DE SOLUCIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS CLASICA PARA UN COMPUESTO EN EL CAMPO DE GRANDES DEFORMACIONES. [46]

### 5.5.5 Teoría de mezclas clásica y la anisotropía en grandes deformaciones

Car, Oller y Oñate [33] propusieron el análisis de materiales compuestos anisótropos en deformaciones finitas introduciendo la teoría de mapeo de espacios a la extensión de la teoría de mezclas clásica en el campo de grandes deformaciones. Es así como a través de este modelo logra representar el efecto de la alineación de fase del refuerzo en la dirección del mayor esfuerzo al que esta sometido el material compuesto [51].



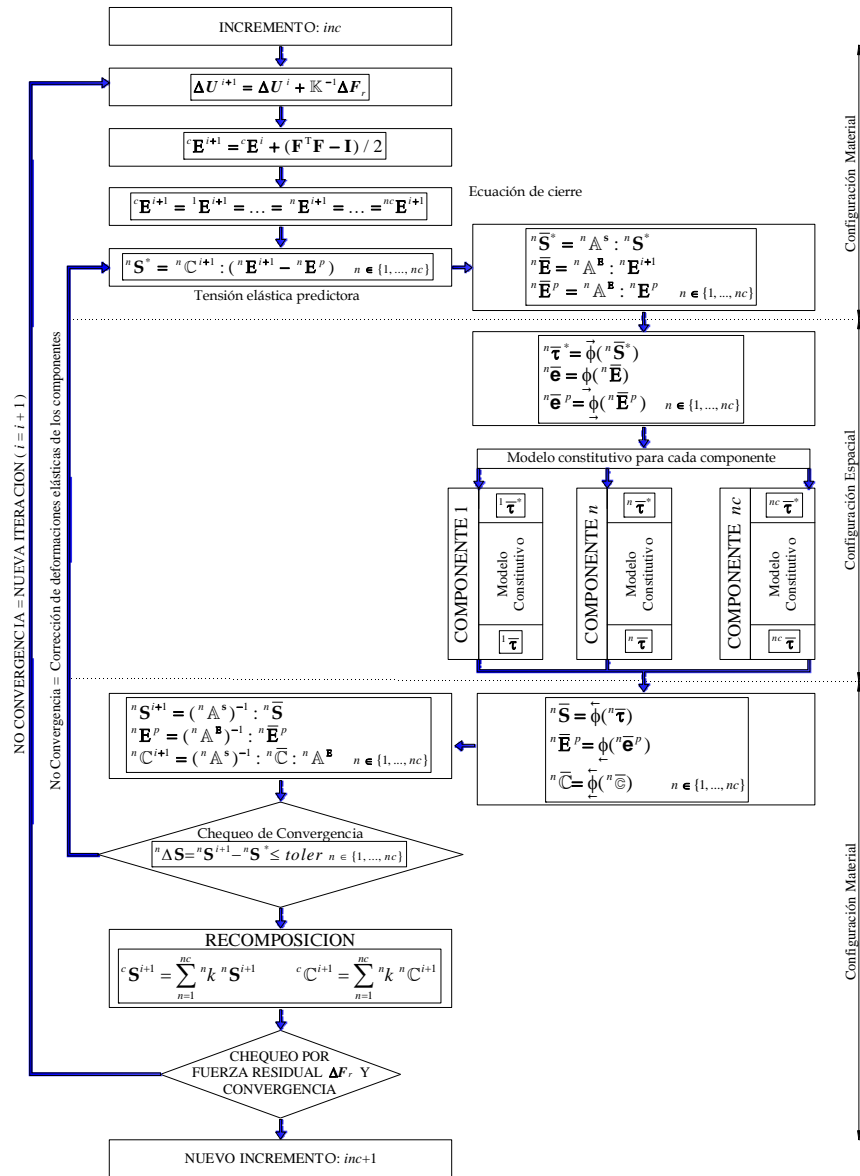


FIGURA 5-10 ESQUEMA 1 DE SOLUCIÓN DE LA MODIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS PARA UN COMPUESTO ANISÓTRPO EN GRANDES DEFORMACIONES. [55]

En la figura 5-10 y figura 5-11 se muestran, dos esquemas propuestos para la implementación de la teoría de mapeo de espacios en la teoría de mezclas clásica considerando el análisis del régimen de grandes deformaciones. En la primera figura 5-10, el tensor predictor de tensión de los componentes se determina en la configuración material [33], luego en esta configuración se hace la transformación al espacio ficticio isótropo, para posteriormente transportar los tensores resultantes

a la configuración espacial. En la figura 5-11, el tensor de deformación y los tensores de transformación se transportan a la configuración espacial, después se determina el tensor predictor de tensión de los componentes, luego se hace la transformación de los tensores al espacio ficticio isótropo [47].

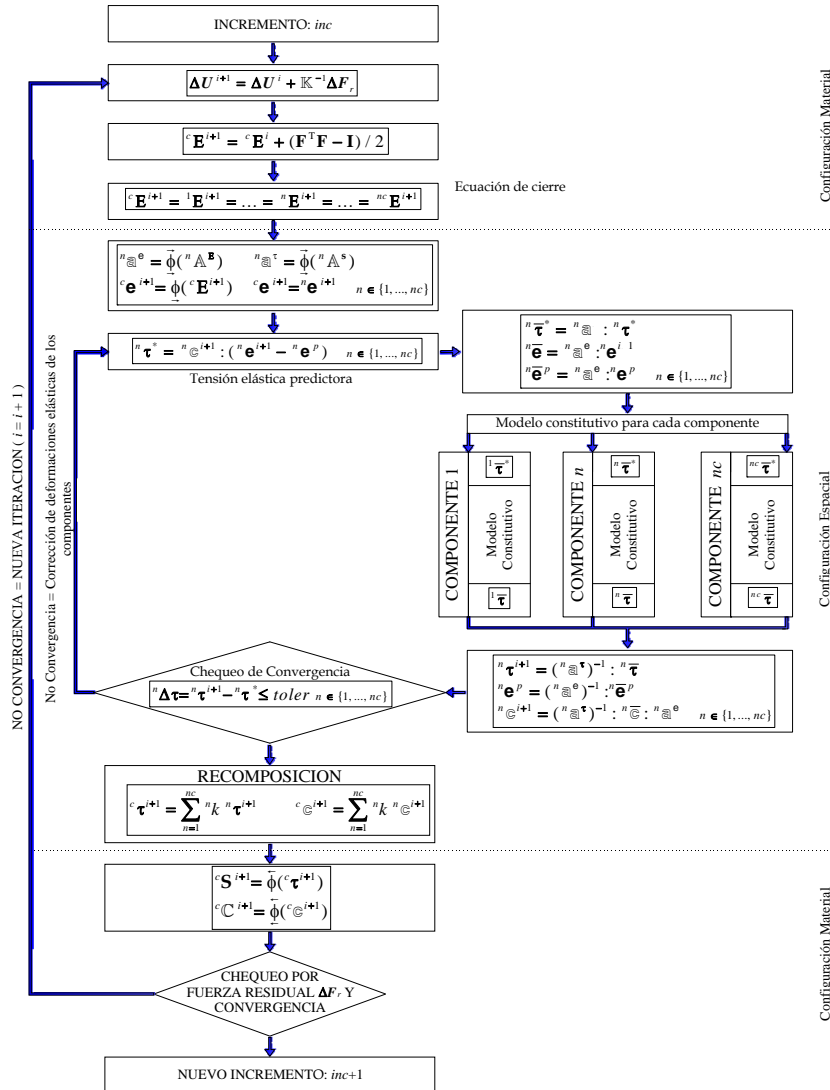


FIGURA 5-11 ESQUEMA 2 DE SOLUCIÓN DE LA MODIFICACIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS PARA UN COMPUESTO ANISÓTRPO EN GRANDES DEFORMACIONES. [55]

De otra parte, de acuerdo con lo explicado, en las dos metodologías de análisis mostradas, se observa que el análisis de equilibrio de las fuerzas residuales se hace en la configuración material y que el cálculo de la ecuación constitutiva de cada componente se hace en la configuración espacial en el espacio isótropo ficticio.

Lo anterior muestra que el mapeo de espacios para el análisis del comportamiento de materiales anisótropos en el campo de grandes deformaciones, como complemento de la teoría de mezclas clásica, es una herramienta versátil que permite determinar el comportamiento de los compuestos considerando diferentes no linealidades geométricas y materiales de los componentes. Sin embargo, al igual que en pequeñas deformaciones, la teoría de mezclas clásica formulada en grandes deformaciones, al partir de la hipótesis de isodeformación, sólo es válida cuando todos los componentes del compuesto trabajan en paralelo [46]. Para que no haya esta limitación y así poder utilizar la teoría de mezclas clásica de una forma más generalizada, existen dos alternativas: definir una ecuación de cierre distinta o realizar una corrección en las propiedades de cada componente y mantener la ecuación de cierre para cumplir con la condición de isodeformación [33].

## 5.6 Modelo propuesto para la extensión de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones

Los estudios experimentales complementados con simulaciones realizadas con elementos finitos, han surgido como técnica de apoyo para los investigadores, debido a que permiten analizar la evolución del fenómeno de forma integral y se evitan sobre-costes; con los ensayos se verifica el comportamiento resultante de las simulaciones, y con las simulaciones se puede contemplar la variación de diferentes parámetros que inciden en el comportamiento del compuesto, sin que esto implique nuevos ensayos. No obstante, se deben mejorar las herramientas numéricas existentes y proponer nuevos modelos que permitan simular con precisión la respuesta no lineal cinemática del material compuesto junto con la no linealidad material de sus componentes.

En este capítulo se propone extender la teoría serie/paralelo propuesta por Rastellini [3] al campo de grandes deformaciones, como una alternativa para analizar problemas no lineales de materiales compuestos en deformaciones finitas. Es importante recalcar que una de las ventajas de extender la teoría serie /paralelo para deformaciones finitas con respecto a la teoría clásica corresponde a que se establece que los componentes tienen una misma deformación en la dirección en paralelo (condición de isodeformación), y que tienen una misma tensión en la dirección en serie (condición de isotensión), esto permite que se estudie el comportamiento de diferentes materiales compuestos sin la limitación de condicionar un estado de isodeformación en todas las direcciones en los componentes del compuesto.

### 5.6.1 Formulación de la teoría serie/paralelo en la configuración material

Para extender la aplicación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones se propone a la formulación existente la implementación de ecuaciones que evolucionen con la cinemática no lineal. Por ello, se requiere formular la teoría de mezclas serie/paralelo, tanto en la configuración material

como en la espacial, garantizando la compatibilidad entre las dos configuraciones. A continuación se presenta la formulación en la configuración material.

- *Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación y tensión*

De acuerdo con lo propuesto por Rastellini et al. [4] en el análisis de un compuesto y sus componentes, el tensor deformación de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  se descompone una parte en serie  $\mathbf{E}_S$  y otra en paralelo  $\mathbf{E}_P$ :

$$(5:52) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_P + \mathbf{E}_S$$

de igual forma, el segundo tensor de Piola Kirchhoff  $\mathbf{S}$  se separa en sus componentes en serie  $\mathbf{S}_S$  y en paralelo  $\mathbf{S}_P$ :

$$(5:53) \quad \mathbf{S} = \mathbf{S}_P + \mathbf{S}_S$$

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto*

Por facilidad del planteamiento de la formulación desarrollada, se descompone el compuesto  $c$  en un determinado número de capas  $ncap$ , tal que cada capa  $t$  esta conformada por un número de componentes  $nc$ , donde las fibras que la componen están orientadas en una dirección específica.

En lo referente a la ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto, existe una condición de isodeformación entre las capas y el compuesto [56]. Se parte de la hipótesis que las capas que coexisten en un punto están en paralelo y tienen la misma deformación; por tanto, el tensor deformación de Green-Lagrange del compuesto  ${}^c\mathbf{E}$  es equivalente a los tensores de deformación de Green-Lagrange de las capas que lo componen.

$$(5:54) \quad {}^c\mathbf{E} \equiv {}^c_1\mathbf{E} = \dots = {}^c_j\mathbf{E} = \dots = {}^c_{ncap}\mathbf{E}$$

- *Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en cada capa del compuesto*

Teniendo en cuenta la formulación presentada por Martínez et al. [57] para un material compuesto por dos componentes, a continuación se formulan las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad para una capa  $t$  del compuesto conformada por varios materiales en la configuración material.

- Comportamiento en paralelo

$$(5:55) \quad {}^c_t\mathbf{E}_P = {}^1_t\mathbf{E}_P = \dots = {}^n_t\mathbf{E}_P = \dots = {}^{nc}_t\mathbf{E}_P$$

$$(5:56) \quad {}^c_t\mathbf{S}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n_t\mathbf{S}_P$$

- Comportamiento en serie

$$(5:57) \quad {}^c_t\mathbf{E}_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n_t\mathbf{E}_S$$

$$(5:58) \quad {}^c_t\mathbf{S}_S = {}^1_t\mathbf{S}_S = \dots = {}^n_t\mathbf{S}_S = \dots = {}^{nc}_t\mathbf{S}_S$$

${}^n k_o$  corresponde al factor de participación volumétrica del n-ésimo componente en

la configuración material. Para garantizar el principio de conservación de masa en cada capa  $t$  del compuesto, se debe cumplir que:

$$(5:59) \quad {}^n k_o = \frac{d^n V}{d^c V} \quad n = \{1, \dots, nc\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{n=nc} {}^n k_o = 1$$

${}^n k_o$  relaciona en la configuración material el volumen infinitesimal del  $n$ -ésimo componente de la capa  $t$   $d^n V$ , con el volumen infinitesimal de la capa  $t$   $d^c V$ .

- *Ecuación constitutiva en cada capa del compuesto*

Considerando que el tensor de Green-Lagrange  ${}^n \mathbf{E}$  esta conformado por una parte elástica  ${}^n \mathbf{E}^e$  y otra irrecuperable  ${}^n \mathbf{E}^p$ , de las ecuaciones (5:55) y (5:57) se define que:

$$(5:60) \quad \begin{aligned} {}^c \mathbf{E}_P &= {}^n \mathbf{E}_P & \Rightarrow & \quad {}^c \mathbf{E}_P^e + {}^c \mathbf{E}_P^p = {}^n \mathbf{E}_P^e + {}^n \mathbf{E}_P^p & \quad n = \{1, \dots, nc\} \\ {}^c \mathbf{E}_S &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n \mathbf{E}_S & \Rightarrow & \quad {}^c \mathbf{E}_S^e + {}^c \mathbf{E}_S^p = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o ({}^n \mathbf{E}_S^e + {}^n \mathbf{E}_S^p) \end{aligned}$$

El estado de tensiones en la configuración de referencia se determina a través de la ecuación constitutiva que rige el comportamiento de cada componente  $n$  y el compuesto  $c$ .

$$(5:61) \quad {}^n \mathbf{S} = {}^n \mathbb{C}^s : {}^n \mathbf{E}^e = {}^n \mathbb{C}^s : ({}^n \mathbf{E} - {}^n \mathbf{E}^p) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

Considerando la descomposición del tensor deformación de Green-Lagrange y del segundo tensor de Piola Kirchhoff indicadas en (5:52) y (5:53), la expresión anterior queda dada como:

$$(5:62) \quad \begin{bmatrix} {}^n \mathbf{S}_P \\ {}^n \mathbf{S}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^n \mathbb{C}_{PP}^s & {}^n \mathbb{C}_{PS}^s \\ {}^n \mathbb{C}_{SP}^s & {}^n \mathbb{C}_{SS}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^n \mathbf{E}_P^e \\ {}^n \mathbf{E}_S^e \end{bmatrix} \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

$$\begin{aligned} {}^n \mathbb{C}_{PP}^s &= \frac{\partial^n \mathbf{S}_P}{\partial^n \mathbf{E}_P} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial^n \mathbf{E}_P \partial^n \mathbf{E}_P} & {}^n \mathbb{C}_{PS}^s &= \frac{\partial^n \mathbf{S}_P}{\partial^n \mathbf{E}_S} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial^n \mathbf{E}_P \partial^n \mathbf{E}_S} \\ {}^n \mathbb{C}_{SP}^s &= \frac{\partial^n \mathbf{S}_S}{\partial^n \mathbf{E}_P} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial^n \mathbf{E}_S \partial^n \mathbf{E}_P} & {}^n \mathbb{C}_{SS}^s &= \frac{\partial^n \mathbf{S}_S}{\partial^n \mathbf{E}_S} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial^n \mathbf{E}_S \partial^n \mathbf{E}_S} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que para el compuesto el segundo tensor de Piola Kirchhoff es:

$$(5:63) \quad \begin{aligned} {}^c \mathbf{S}_P &= {}^c \mathbb{C}_{PP}^s : {}^c \mathbf{E}_P^e + {}^c \mathbb{C}_{PS}^s : {}^c \mathbf{E}_S^e = {}^c \mathbb{C}_{PP}^s : ({}^c \mathbf{E}_P - {}^c \mathbf{E}_P^p) + {}^c \mathbb{C}_{PS}^s : ({}^c \mathbf{E}_S - {}^c \mathbf{E}_S^p) \\ {}^c \mathbf{S}_S &= {}^c \mathbb{C}_{SP}^s : {}^c \mathbf{E}_P^e + {}^c \mathbb{C}_{SS}^s : {}^c \mathbf{E}_S^e = {}^c \mathbb{C}_{SP}^s : ({}^c \mathbf{E}_P - {}^c \mathbf{E}_P^p) + {}^c \mathbb{C}_{SS}^s : ({}^c \mathbf{E}_S - {}^c \mathbf{E}_S^p) \end{aligned}$$

asimismo, considerando la expresión (5:55) para cada componente se obtiene que:

$$(5:64) \quad \begin{aligned} {}^n \mathbf{S}_P &= {}^n \mathbb{C}_{PP}^s : {}^n \mathbf{E}_P^e + {}^n \mathbb{C}_{PS}^s : {}^n \mathbf{E}_S^e = {}^n \mathbb{C}_{PP}^s : ({}^n \mathbf{E}_P - {}^n \mathbf{E}_P^p) + {}^n \mathbb{C}_{PS}^s : ({}^n \mathbf{E}_S - {}^n \mathbf{E}_S^p) \\ {}^n \mathbf{S}_S &= {}^n \mathbb{C}_{SP}^s : {}^n \mathbf{E}_P^e + {}^n \mathbb{C}_{SS}^s : {}^n \mathbf{E}_S^e = {}^n \mathbb{C}_{SP}^s : ({}^n \mathbf{E}_P - {}^n \mathbf{E}_P^p) + {}^n \mathbb{C}_{SS}^s : ({}^n \mathbf{E}_S - {}^n \mathbf{E}_S^p) \end{aligned}$$

Considerando las ecuaciones (5:56) y (5:58) con las anteriores ecuaciones se obtiene el segundo tensor de Piola Kirchhoff del compuesto en función de los segundos tensores de Piola Kirchhoff de los componentes.

$$(5:65) \quad \begin{aligned} {}^c_t\mathbf{S}_P &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n \mathbf{S}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n \mathbf{C}_{PP} : ({}^c_t\mathbf{E}_P - {}^n_t\mathbf{E}_P^p) + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n \mathbf{C}_{PS} : ({}^n_t\mathbf{E}_S - {}^n_t\mathbf{E}_S^p) \\ {}^c_t\mathbf{S}_S &= {}^n \mathbf{C}_{SP} : ({}^c_t\mathbf{E}_P - {}^n_t\mathbf{E}_P^p) + {}^n \mathbf{C}_{SS} : ({}^n_t\mathbf{E}_S - {}^n_t\mathbf{E}_S^p) \end{aligned}$$

- *Función de energía libre y tensor constitutivo en cada capa del compuesto*

La función de la energía libre para cada capa  $t$  del compuesto corresponde a:

$$(5:66) \quad {}^c_m_o {}^c_t\Psi({}^c_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^c_t\boldsymbol{\alpha}^s, {}^c_t\boldsymbol{\beta}^s) = {}^c_m_o {}^c_t\Psi(\underbrace{{}^c_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^c_t\boldsymbol{\alpha}^s}_{\xi^s}, \underbrace{{}^c_t\boldsymbol{\beta}^s}_{\zeta^s}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o {}^n \Psi({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, \underbrace{{}^n_t\boldsymbol{\alpha}^s, {}^n_t\boldsymbol{\beta}^s}_{\zeta^s})$$

${}^n \Psi({}^n_t\mathbf{E}_{ij}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s)$  es la energía libre de cada  $n$ -ésimo componente de la capa  $t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^s$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\boldsymbol{\beta}^s$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\boldsymbol{\xi}^s$  es el grupo total de variables internas. Los grupos de variables son aplicables de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente.

De las expresiones (5:52), (5:55) y (5:57) el tensor de deformación de la capa  $t$  es:

$$(5:67) \quad \begin{aligned} {}^c_t\mathbf{E} &= {}^c_t\mathbf{E}_P + {}^c_t\mathbf{E}_S = {}^n_t\mathbf{E}_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n \mathbf{E}_S \Rightarrow {}^c_t\mathbf{E}_{IJ} = {}^c_t(\mathbf{E}_{IJ})_P + {}^c_t(\mathbf{E}_{IJ})_S = {}^n_t(\mathbf{E}_{IJ})_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n_t(\mathbf{E}_{IJ})_S \\ \frac{\partial {}^c_t\mathbf{E}_{IJ}}{\partial {}^n_t(\mathbf{E}_{KL})_P} &= I_{IJKL} & \frac{\partial {}^c_t\mathbf{E}_{IJ}}{\partial {}^n_t(\mathbf{E}_{KL})_S} &= {}^n k_o I_{IJKL} \end{aligned}$$

Bajo esta hipótesis de acoplamiento se supone una redistribución interna de la energía libre de los dos comportamientos básicos, tal que la energía libre de la capa  $t$  o los componentes puede descomponerse, una parte en serie  ${}^n_t\Psi_S({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s)$ , y otra en paralelo  ${}^n_t\Psi_P({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s)$ .

$$(5:68) \quad {}^n m_o {}^n_t\Psi({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s) = {}^n m_o {}^n_t\Psi_P({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s) + {}^n m_o {}^n_t\Psi_S({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

De acuerdo con la ecuación (5:66) y con base en lo formulado por Oñate et al. [58], se determina la función de la energía libre en serie y en paralelo, de tal forma que:

$$(5:69) \quad \begin{aligned} {}^c_m_o {}^c_t\Psi_P({}^c_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^c_t\boldsymbol{\xi}^s) &\equiv \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o {}^n_t\Psi_P({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s) \\ {}^c_m_o {}^c_t\Psi_S({}^c_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^c_t\boldsymbol{\xi}^s) &\equiv \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o {}^n_t\Psi_S({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s) \end{aligned}$$

La ley constitutiva surge de considerar la desigualdad de Clausius-Duhem y el método de Coleman [46; 53], conduciendo a que el segundo tensor de Piola Kirchhoff corresponde a:

$$(5:70) \quad \begin{aligned} {}^c_t\mathbf{S}_{IJ} &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o \frac{\partial {}^n_t\Psi({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s)}{\partial {}^c_t\mathbf{E}_{IJ}} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o \frac{\partial {}^n_t\Psi_P({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s)}{\partial ({}^n_t\mathbf{E}_{IJ})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n m_o \frac{\partial {}^n_t\Psi_S({}^n_t\mathbf{E}_{IJ}, {}^n_t\boldsymbol{\xi}^s)}{\partial ({}^n_t\mathbf{E}_{IJ})_S} \\ &= \underbrace{({}^c_t\mathbf{S}_{IJ})_P}_{({}^c_t\mathbf{S}_{IJ})_P} + \underbrace{({}^n_t\mathbf{S}_{IJ})_S}_{({}^c_t\mathbf{S}_{IJ})_S} \end{aligned}$$

Con el segundo término de la ecuación ( 5:70) y su relación con la expresión ( 5:58), se define que:

$$(5:71) \quad {}^c m_o \frac{\partial {}^c \Psi_S({}^c E_{IJ}, {}^c \xi^s)}{\partial ({}^c E_{KL})_S} \equiv {}^n m_o \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n E_{IJ}, {}^n \xi^s)}{\partial ({}^n E_{KL})_S} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Con lo cual se cumple con las ecuaciones ( 5:56) y ( 5:58) y se obtiene que el segundo tensor de Piola Kirchhoff para la capa  $t$  equivale a:

$$(5:72) \quad {}^c S_{IJ} = ({}^c S_{IJ})_P + ({}^c S_{IJ})_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o ({}^n S_{IJ})_P + ({}^n S_{IJ})_S$$

La disipación mecánica  $\Xi_m$  queda expresada como:

$$(5:73) \quad \begin{aligned} \Xi_m = & {}^c m_o \frac{\partial {}^c \Psi({}^c E_{IJ}, {}^c \xi^s)}{\partial {}^c \xi^s} \dot{{}^c \xi^s} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o \frac{\partial {}^n \Psi({}^n E_{IJ}, {}^n \xi^s)}{\partial {}^n \xi^s} \dot{{}^n \xi^s} \\ = & \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o \frac{\partial {}^n \Psi_P({}^n E_{IJ}, {}^n \xi^s)}{\partial {}^n \xi^s} \dot{{}^n \xi^s} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o \frac{\partial {}^n \Psi_S({}^n E_{IJ}, {}^n \xi^s)}{\partial {}^n \xi^s} \dot{{}^n \xi^s} \leq 0 \end{aligned}$$

El tensor constitutivo tangente  $\mathbb{C}^s$  corresponde a:

$$(5:74) \quad \begin{aligned} {}^c C_{IJKL}^s &= \frac{\partial {}^c S_{IJ}}{\partial {}^c E_{KL}} = {}^c m_o \frac{\partial {}^2 {}^c \Psi({}^c E_{IJ}, {}^c \xi^s)}{\partial {}^c E_{IJ} \partial {}^c E_{KL}} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n m_o \frac{\partial {}^2 {}^n \Psi({}^n E_{IJ}, {}^n \xi^s)}{\partial {}^n E_{IJ} \partial {}^n E_{KL}} \\ ({}^c C_{IJKL}^s)_P &= \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_P}{\partial {}^c E_{KL}} = \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_P}{\partial ({}^c E_{KL})_P} + \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_P}{\partial ({}^c E_{KL})_S} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o \frac{\partial ({}^n S_{IJ})_P}{\partial ({}^n E_{KL})_P} + \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}^n S_{IJ})_P}{\partial ({}^n E_{KL})_S} \\ ({}^c C_{IJKL}^s)_S &= \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_S}{\partial {}^c E_{KL}} = \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_S}{\partial ({}^c E_{KL})_P} + \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_S}{\partial ({}^c E_{KL})_S} \\ &= \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}^n S_{IJ})_S}{\partial ({}^n E_{KL})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k_o} \frac{\partial ({}^n S_{IJ})_S}{\partial ({}^n E_{KL})_S} \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión del tensor constitutivo queda dada como:

$$(5:75) \quad \begin{aligned} ({}^c C_{IJKL}^s)_{PP} &= \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_P}{\partial ({}^c E_{KL})_P} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o ({}^n C_{IJKL}^s)_{PP} & ({}^c C_{IJKL}^s)_{PS} &= \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_P}{\partial ({}^c E_{KL})_S} = \sum_{n=1}^{nc} ({}^n C_{IJKL}^s)_{PS} \\ ({}^c C_{IJKL}^s)_{SP} &= \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_S}{\partial ({}^c E_{KL})_P} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} ({}^n C_{IJKL}^s)_{SP} & ({}^c C_{IJKL}^s)_{SS} &= \frac{\partial ({}^c S_{IJ})_S}{\partial ({}^c E_{KL})_S} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k_o} ({}^n C_{IJKL}^s)_{SS} \end{aligned}$$

Re-escribiendo las expresiones ( 5:63) se tiene que el segundo tensor de Piola Kirchhoff del compuesto es:

$$(5:76) \quad \begin{aligned} {}^c S_P &= {}^c C_{PP}^s : {}^c E_P + {}^c C_{PS}^s : {}^c E_S = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_o {}^n C_{PP}^s : {}^c E_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n C_{PS}^s : {}^c E_S \\ {}^c S_S &= {}^c C_{SP}^s : {}^c E_P + {}^c C_{SS}^s : {}^c E_S = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n C_{SP}^s : {}^c E_P + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}^n k_o} {}^n C_{SS}^s : {}^c E_S \end{aligned}$$

Considerando las expresiones ( 5:60) se tiene que las anteriores ecuaciones son equivalentes a las formulaciones ( 5:65).

- *Ecuación de equilibrio en el compuesto*

Hecho el análisis de cada capa, se tiene que el segundo tensor de Piola Kirchhoff del compuesto  $c$  corresponde a:

$$(5:77) \quad {}^c\mathbf{S} = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k_o {}^t\mathbf{S} = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k_o ({}^c\mathbf{S}_p + {}^c\mathbf{S}_s)$$

### 5.6.2 Formulación de la teoría serie/paralelo en la configuración espacial

La teoría de mezclas serie/paralelo para el análisis de un material compuesto se formula en la configuración espacial.

- *Definición de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación y tensión*

En el análisis de un compuesto y sus componentes, el tensor deformación de Almansi  $\mathbf{e}$  se descompone una parte en serie  $\mathbf{e}_s$  y otra en paralelo  $\mathbf{e}_p$ :

$$(5:78) \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_p + \mathbf{e}_s$$

y el tensor de Kirchhoff  $\boldsymbol{\tau}$  se separa en sus componentes en serie  $\boldsymbol{\tau}_s$  y en paralelo  $\boldsymbol{\tau}_p$ :

$$(5:79) \quad \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_s$$

- *Ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto*

En lo que respecta a la ecuación de compatibilidad de deformaciones en el compuesto, en la configuración espacial también existe una condición de isodeformación entre las capas y el compuesto; por lo tanto, el tensor deformación de Almansi del compuesto  ${}^c\mathbf{e}$  es equivalente a los tensores de deformación de Almansi de las capas que lo componen.

$$(5:80) \quad {}^c\mathbf{e} \equiv {}^c_1\mathbf{e} = \dots = {}^c_j\mathbf{e} = \dots = {}^c_{ncap}\mathbf{e}$$

- *Ecuaciones de equilibrio y compatibilidad en cada capa del compuesto*

Cada capa  $t$  del compuesto esta conformada por un número de componentes  $nc$ , donde las fibras que la componen están orientadas en una dirección específica. Para que el compuesto este en equilibrio, en cada capa  $t$  se debe cumplir con las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad.

- Comportamiento en paralelo

$$(5:81) \quad {}^c_t\mathbf{e}_p = {}^1_t\mathbf{e}_p = \dots = {}^n_t\mathbf{e}_p = \dots = {}^{nc}_t\mathbf{e}_p$$

$$(5:82) \quad {}^c_t\boldsymbol{\tau}_p = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n_t\boldsymbol{\tau}_p$$

- Comportamiento en serie

$$(5:83) \quad {}^c_t\mathbf{e}_s = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n_t\mathbf{e}_s$$

$$(5:84) \quad {}^c_t\boldsymbol{\tau}_s = {}^1_t\boldsymbol{\tau}_s = \dots = {}^n_t\boldsymbol{\tau}_s = \dots = {}^{nc}_t\boldsymbol{\tau}_s$$

${}^n k_t$  es el factor de participación volumétrica de un  $n$ -ésimo componente en la



configuración espacial, relaciona el volumen infinitesimal del  $n$ -ésimo componente de la capa  $t$   $d_t^n v$ , con el volumen infinitesimal de la capa  $t$   $d_t^c v$ . Para garantizar el principio de conservación de masa en cada capa  $t$  del compuesto, se cumple que:

$$(5:85) \quad {}^n k = \frac{d_t^n v}{d_t^c v} \quad n = \{1, \dots, nc\} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{nc} {}^n k = 1$$

- *Ecuación constitutiva en cada capa del compuesto*

Considerando que el tensor de Almansi  ${}^n \mathbf{e}$  esta conformado por una parte elástica  ${}^n \mathbf{e}^e$  y otra irrecuperable  ${}^n \mathbf{e}^p$ , de las ecuaciones (5:81) y (5:83) se tiene que

$$(5:86) \quad \begin{aligned} {}^c \mathbf{e}_P &= {}^n \mathbf{e}_P & \Rightarrow & \quad {}^c \mathbf{e}_P^e + {}^c \mathbf{e}_P^p = {}^n \mathbf{e}_P^e + {}^n \mathbf{e}_P^p \quad n = \{1, \dots, nc\} \\ {}^c \mathbf{e}_S &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \mathbf{e}_S & \Rightarrow & \quad {}^c \mathbf{e}_S^e + {}^c \mathbf{e}_S^p = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k ({}^n \mathbf{e}_S^e + {}^n \mathbf{e}_S^p) \end{aligned}$$

El estado de tensiones en la configuración de referencia se determina a través de la ecuación constitutiva que rige el comportamiento de cada componente  $n$  y del compuesto  $c$ :

$$(5:87) \quad {}^n \boldsymbol{\tau} = {}^n \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^n \mathbf{e}^e = {}^n \mathbb{C}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e} - {}^n \mathbf{e}^p) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

Considerando la descomposición del tensor deformación de Almansi y del tensor de Kirchhoff indicadas en (5:78) y (5:79), la expresión anterior queda dada como:

$$(5:88) \quad \begin{bmatrix} {}^n \boldsymbol{\tau}_P \\ {}^n \boldsymbol{\tau}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^n \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} & {}^n \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} \\ {}^n \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} & {}^n \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^n \mathbf{e}_P^e \\ {}^n \mathbf{e}_S^e \end{bmatrix} \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

$$\begin{aligned} {}^n \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial {}^n \boldsymbol{\tau}_P}{\partial {}^n \mathbf{e}_P} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial {}^n \mathbf{e}_P \partial {}^n \mathbf{e}_P} & {}^n \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial {}^n \boldsymbol{\tau}_P}{\partial {}^n \mathbf{e}_S} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial {}^n \mathbf{e}_P \partial {}^n \mathbf{e}_S} \\ {}^n \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial {}^n \boldsymbol{\tau}_S}{\partial {}^n \mathbf{e}_P} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial {}^n \mathbf{e}_S \partial {}^n \mathbf{e}_P} & {}^n \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} &= \frac{\partial {}^n \boldsymbol{\tau}_S}{\partial {}^n \mathbf{e}_S} = \frac{\partial^2 {}^n \Psi}{\partial {}^n \mathbf{e}_S \partial {}^n \mathbf{e}_S} \end{aligned}$$

Se tiene entonces que el tensor de Kirchhoff del compuesto es:

$$(5:89) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\tau}_P &= {}^c \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^c \mathbf{e}_P^e + {}^c \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^c \mathbf{e}_S^e = {}^c \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^c \mathbf{e}_P - {}^c \mathbf{e}_P^p) + {}^c \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^c \mathbf{e}_S - {}^c \mathbf{e}_S^p) \\ {}^c \boldsymbol{\tau}_S &= {}^c \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^c \mathbf{e}_P^e + {}^c \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^c \mathbf{e}_S^e = {}^c \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^c \mathbf{e}_P - {}^c \mathbf{e}_P^p) + {}^c \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^c \mathbf{e}_S - {}^c \mathbf{e}_S^p) \end{aligned}$$

de la misma forma, considerando la condición de isodeformación (5:81), las expresiones para cada componente equivalen a:

$$(5:90) \quad \begin{aligned} {}^n \boldsymbol{\tau}_P &= {}^n \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^n \mathbf{e}_P^e + {}^n \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^n \mathbf{e}_S^e = {}^n \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e}_P - {}^n \mathbf{e}_P^p) + {}^n \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e}_S - {}^n \mathbf{e}_S^p) \\ {}^n \boldsymbol{\tau}_S &= {}^n \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^n \mathbf{e}_P^e + {}^n \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} : {}^n \mathbf{e}_S^e = {}^n \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e}_P - {}^n \mathbf{e}_P^p) + {}^n \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e}_S - {}^n \mathbf{e}_S^p) \end{aligned}$$

Introduciendo las ecuaciones (5:82) y (5:84) con las anteriores ecuaciones se obtiene la relación entre el tensor de Kirchhoff del compuesto y los tensores de Kirchhoff de los componentes.

$$(5:91) \quad \begin{aligned} {}^c \boldsymbol{\tau}_P &= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \boldsymbol{\tau}_P = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \mathbb{C}_{PP}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e}_P - {}^n \mathbf{e}_P^p) + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k {}^n \mathbb{C}_{PS}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^n \mathbf{e}_S - {}^n \mathbf{e}_S^p) \\ {}^c \boldsymbol{\tau}_S &= {}^n \mathbb{C}_{SP}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^c \mathbf{e}_P - {}^c \mathbf{e}_P^p) + {}^n \mathbb{C}_{SS}^{\boldsymbol{\tau}} : ({}^c \mathbf{e}_S - {}^c \mathbf{e}_S^p) \end{aligned}$$

- *Función de energía libre y tensor constitutivo en cada capa del compuesto*

La función de energía libre para cada capa  $t$  del compuesto queda expresada como

$$(5:92) \quad {}^c m_t {}^c \psi({}^c \mathbf{e}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\alpha}^\tau, {}^c \boldsymbol{\beta}^\tau) = {}^c m_t {}^c \psi(\underbrace{{}^c \mathbf{e}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\alpha}^\tau}_{{}^c \boldsymbol{\xi}^\tau}, \underbrace{{}^c \boldsymbol{\beta}^\tau}_{{}^n \boldsymbol{\xi}^\tau}) = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n \psi({}^n \mathbf{e}_{ij}, \underbrace{{}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\alpha}^\tau}_{{}^n \boldsymbol{\xi}^\tau}, {}^n \boldsymbol{\beta}^\tau)$$

${}^n \psi({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)$  es la energía libre de cada  $n$ -ésimo componente de la capa  $t$ ,  $\boldsymbol{\alpha}^\tau$  es el grupo de variables internas de plasticidad,  $\boldsymbol{\beta}^\tau$  es el grupo de variables internas del daño, y  $\boldsymbol{\xi}^\tau$  es el grupo total de variables internas. Los grupos de variables son aplicables de acuerdo con la ecuación constitutiva de cada componente.

De las expresiones (5:78), (5:81) y (5:83) el tensor de deformación de la capa  $t$  es:

$$(5:93) \quad {}^c \mathbf{e} = {}^c \mathbf{e}_P + {}^c \mathbf{e}_S = {}^n \mathbf{e}_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n \mathbf{e}_S \Rightarrow {}^c \mathbf{e}_{ij} = {}^c (\mathbf{e}_{ij})_P + {}^c (\mathbf{e}_{ij})_S = {}^n (\mathbf{e}_{ij})_P + \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n (\mathbf{e}_{ij})_S$$

$$\frac{\partial {}^c \mathbf{e}_{ij}}{\partial {}^n (\mathbf{e}_{kl})_P} = I_{ijkl} \quad \frac{\partial {}^c \mathbf{e}_{ij}}{\partial {}^n (\mathbf{e}_{kl})_S} = {}^n k_t I_{ijkl}$$

Bajo esta hipótesis de acoplamiento se supone una redistribución interna de la energía libre de los dos comportamientos básicos, tal que la energía libre de la capa  $t$  o los componentes puede descomponerse, una parte en serie  ${}^n \psi_S({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)$ , y otra en paralelo  ${}^n \psi_P({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)$ .

$$(5:94) \quad {}^n m_t {}^n \psi({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau) = {}^n m_t {}^n \psi_P({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau) + {}^n m_t {}^n \psi_S({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau) \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

De acuerdo con la ecuación (5:92) y con base en lo formulado por Oñate et al. [58], se determina la función de energía libre en serie y en paralelo, de tal forma que:

$$(5:95) \quad {}^c m_t {}^c \psi_P({}^c \mathbf{e}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\xi}^\tau) \equiv \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n \psi_P({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)$$

$${}^c m_t {}^c \psi_S({}^c \mathbf{e}_{ij}, {}^c \boldsymbol{\xi}^\tau) \equiv \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t {}^n \psi_S({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)$$

La ley constitutiva surge de considerar la desigualdad de Clausius-Duhem y el método de Coleman [46; 53], donde el tensor de Kirchhoff corresponde a:

$$(5:96) \quad {}^c \boldsymbol{\tau}_{ij} = \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t \frac{\partial {}^n \psi({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)}{\partial {}^c \mathbf{e}_{ij}}$$

$$= \sum_{n=1}^{nc} {}^n k_t {}^n m_t \underbrace{\frac{\partial {}^n \psi_P({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)}{\partial ({}^n \mathbf{e}_{ij})_P}}_{({}^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}^n m_t \underbrace{\frac{\partial {}^n \psi_S({}^n \mathbf{e}_{ij}, {}^n \boldsymbol{\xi}^\tau)}{\partial ({}^n \mathbf{e}_{ij})_S}}_{({}^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}$$

$$= \quad ({}^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P \quad + \quad ({}^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S$$

Con el segundo término de la ecuación (5:96) y su relación con la expresión (5:84),

se define que:

$$(5:97) \quad {}_i^c m \frac{\partial {}_i^c \psi_S({}_i^c \mathbf{e}_{ij}, {}_i^c \xi^\tau)}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_S} \equiv {}_i^c m \frac{\partial {}_i^n \psi_S({}_i^n \mathbf{e}_{ij}, {}_i^n \xi^\tau)}{\partial ({}_i^n \mathbf{e}_{kl})_S} \quad n = \{1, \dots, nc\}$$

Con lo cual se satisfacen las ecuaciones (5:82) y (5:84) y se obtiene que el tensor de Kirchhoff para la capa  $t$  equivale a:

$$(5:98) \quad {}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij} = ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P + ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k ({}_i^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_P + ({}_i^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_S$$

La disipación mecánica  $\Xi_m$  queda expresada como:

$$(5:99) \quad \begin{aligned} \Xi_m &= {}_i^c m \frac{\partial {}_i^c \psi({}_i^c \mathbf{e}_{ij}, {}_i^c \xi^\tau)}{\partial {}_i^c \xi^\tau} \cdot {}_i^c \dot{\xi}^\tau = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}_i^n \psi({}_i^n \mathbf{e}_{ij}, {}_i^n \xi^\tau)}{\partial {}_i^n \xi^\tau} \cdot {}_i^n \dot{\xi}^\tau \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}_i^n \psi_P({}_i^n \mathbf{e}_{ij}, {}_i^n \xi^\tau)}{\partial {}_i^n \xi^\tau} \cdot {}_i^n \dot{\xi}^\tau + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial {}_i^n \psi_S({}_i^n \mathbf{e}_{ij}, {}_i^n \xi^\tau)}{\partial {}_i^n \xi^\tau} \cdot {}_i^n \dot{\xi}^\tau \leq 0 \end{aligned}$$

El tensor constitutivo tangente  $\mathbb{C}^\tau$  corresponde a:

$$(5:100) \quad \begin{aligned} {}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau &= \frac{\partial {}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij}}{\partial {}_i^c \mathbf{e}_{kl}} = {}_i^c m \frac{\partial^2 {}_i^c \psi({}_i^c \mathbf{e}_{ij}, {}_i^c \xi^\tau)}{\partial {}_i^c \mathbf{e}_{ij} \partial {}_i^c \mathbf{e}_{kl}} = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n m \frac{\partial^2 {}_i^n \psi({}_i^n \mathbf{e}_{ij}, {}_i^n \xi^\tau)}{\partial {}_i^n \mathbf{e}_{ij} \partial {}_i^n \mathbf{e}_{kl}} \\ ({}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_P &= \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial {}_i^c \mathbf{e}_{kl}} = \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_P} + \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_S} \\ &= \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k \frac{\partial ({}_i^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \mathbf{e}_{kl})_P} + \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial ({}_i^n \mathbf{e}_{kl})_S} \\ ({}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_S &= \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial {}_i^c \mathbf{e}_{kl}} = \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_P} + \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_S} \\ &= \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{\partial ({}_i^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \mathbf{e}_{kl})_P} + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}_i^n k} \frac{\partial ({}_i^n \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial ({}_i^n \mathbf{e}_{kl})_S} \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión del tensor constitutivo queda dada como:

$$(5:101) \quad \begin{aligned} ({}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{PP} &= \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_P} = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k ({}_i^n \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{PP} & ({}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{PS} &= \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_P}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_S} = \sum_{n=1}^{nc} ({}_i^n \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{PS} \\ ({}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{SP} &= \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_P} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} ({}_i^n \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{SP} & ({}_i^c \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{SS} &= \frac{\partial ({}_i^c \boldsymbol{\tau}_{ij})_S}{\partial ({}_i^c \mathbf{e}_{kl})_S} = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}_i^n k} ({}_i^n \mathbf{C}_{ijkl}^\tau)_{SS} \end{aligned}$$

Re-escribiendo las expresiones (5:89) se tiene que el segundo tensor de Piola Kirchhoff del compuesto equivale a:

$$(5:102) \quad \begin{aligned} {}_i^c \boldsymbol{\tau}_P &= {}_i^c \mathbb{C}_{PP}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_P^e + {}_i^c \mathbb{C}_{PS}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_S^e = \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n k {}_i^n \mathbb{C}_{PP}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_P^e + \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n \mathbb{C}_{PS}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_S^e \\ {}_i^c \boldsymbol{\tau}_S &= {}_i^c \mathbb{C}_{SP}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_P^e + {}_i^c \mathbb{C}_{SS}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_S^e = \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} {}_i^n \mathbb{C}_{SP}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_P^e + \frac{1}{nc} \sum_{n=1}^{nc} \frac{1}{{}_i^n k} {}_i^n \mathbb{C}_{SS}^\tau : {}_i^c \mathbf{e}_S^e \end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones son correspondientes a las expresiones ( 5:91).

- *Ecuación de equilibrio en el compuesto*

Hecho el análisis de cada capa, se tiene que el tensor de Kirchhoff del compuesto  $c$  corresponde a la suma de los tensores de Kirchhoff de las capas del compuesto  $ncap$  acorde con el porcentaje de participación volumétrica de cada capa  ${}^c k$ .

$$(5:103) \quad {}^c \boldsymbol{\tau} = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k_t {}^c \boldsymbol{\tau} = \sum_{t=1}^{ncap} {}^c k_t ({}^c \boldsymbol{\tau}_p + {}^c \boldsymbol{\tau}_s)$$

Desarrollada la formulación de la teoría serie/paralelo en la configuración de material y en la configuración espacial, se concluye que la teoría serie/paralelo en el campo no lineal por grandes deformaciones, al igual que en el campo de pequeñas deformaciones, corresponde a un gestor de modelos constitutivos en el que las ecuaciones de compatibilidad y equilibrio definidas para el material compuesto, son evolutivas dado que son dependientes de las variables internas que rigen el comportamiento de los componentes.

### 5.6.3 Algoritmo de la teoría de mezclas serie/paralelo formulada en grandes deformaciones

El cálculo numérico de problemas con grandes deformaciones se trata la formulación lagrangeana total, o lagrangeana actualizada. La elección de utilizar una u otra formulación en lo que respecta al nivel constitutivo depende de la configuración en la cual se conoce de forma explícita el tensor constitutivo, y en lo correspondiente a la verificación de equilibrio, la selección de la formulación depende entre otros, de la forma en como se define el proceso de aplicación carga o de desplazamiento.

Con el fin de hacer más versátil la aplicación de la teoría serie/paralelo en el análisis no lineal con deformaciones finitas se propone utilizar una resolución mixta. En la figura 5-12 se indica un esquema de solución para una material compuesto conformado por un determinado numero de capas  $ncap$ , donde cada capa  $t$  tiene dos componentes. En esta propuesta, luego de transportar el tensor de deformación de la capa  $t$  a la configuración espacial, se determina el tensor de Almansi de cada componente, donde también se define el tensor predictor de Kirchhoff de cada componente. Aunque no se indica en el esquema, con la teoría serie/paralelo en el análisis del comportamiento los componentes, se utiliza la teoría de mapeo de espacios para considerar la anisotropía propia de cada componente utilizando los modelos constitutivos planteados e implementados para materiales isotropos.

Una vez se cumple con la condición de convergencia en el análisis de los componentes, se hace la recomposición del tensor de Kirchhoff y del tensor constitutivo de la capa  $t$  en la configuración espacial. Luego, tanto el tensor de tensión como el tensor constitutivo la capa  $t$ , se transportan a la configuración material.

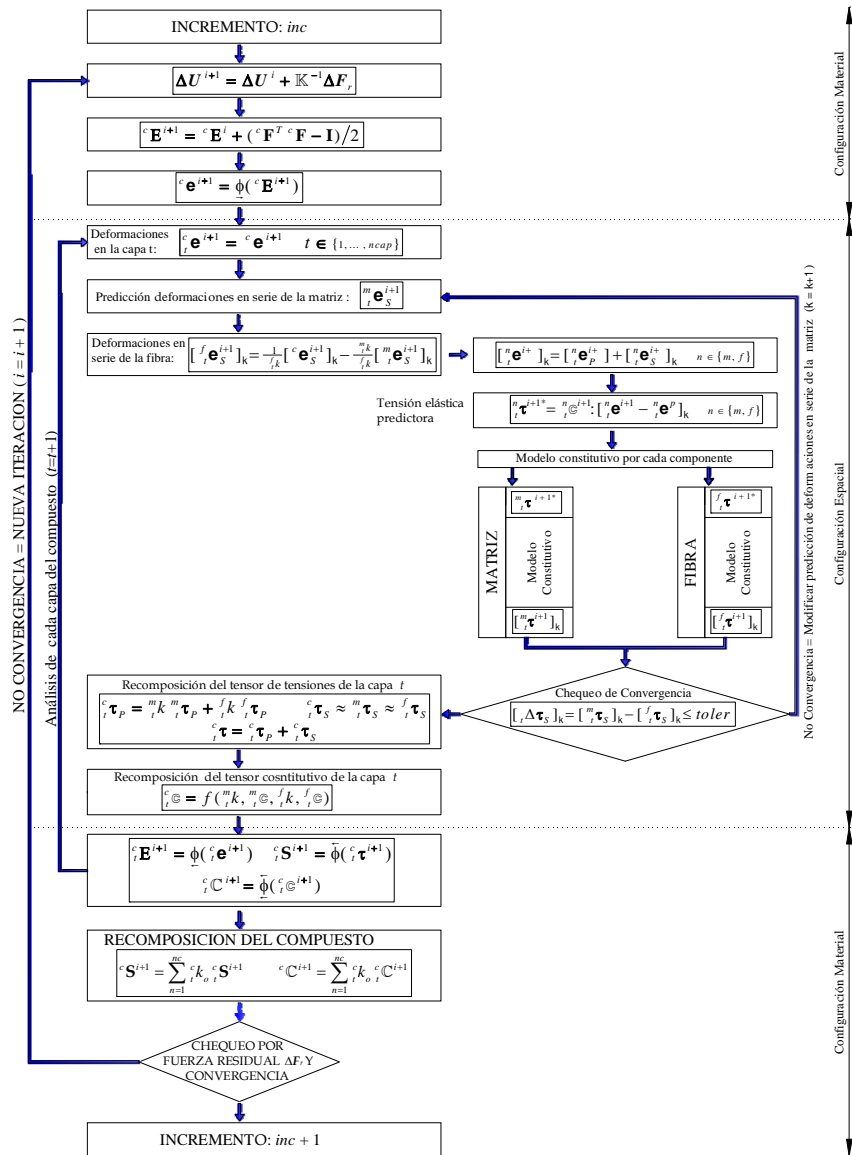


FIGURA 5-12 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DE LA TEORÍA DE MEZCLAS SERIE/PARALELO EN GRANDES DEFORMACIONES.

Después de analizadas todas las capas del compuesto, se realiza la recomposición de los correspondientes tensores del material compuesto. Posteriormente, se hace el análisis de equilibrio de las fuerzas residuales en el compuesto en la configuración material. Este proceso se efectúa en forma iterativa hasta que se cumple con los requisitos de convergencia de equilibrio de fuerzas residuales.

#### 5.6.4 Tensor gradiente de deformación

Dadas las ecuaciones de compatibilidad entre las capas del compuesto se tiene que los tensores de deformación de las capas son iguales al tensor de deformación del compuesto. Lo anterior conlleva a que el gradiente de deformación de cada capa  ${}^c\mathbf{F}$  sea equivalente al tensor gradiente de deformación del compuesto  ${}^c\mathbf{F}$ .

$$(5:104) \quad {}^c\mathbf{F} \equiv {}^c_1\mathbf{F} = \dots = {}^c_t\mathbf{F} = \dots = {}^c_{ncap}\mathbf{F}$$

Considerando las ecuaciones de equilibrio y de compatibilidad de los componentes en serie y en paralelo de los tensores de deformación en cada capa  $t$ , se tiene que los componentes y del compuesto no tienen las mismas deformaciones, lo que implica que el tensor gradiente de deformación del  $n$ -ésimo componente  ${}^n\mathbf{F}$  es diferente al el tensor gradiente de deformación de la capa  $t$  del compuesto  ${}^c\mathbf{F}$ ,

$$(5:105) \quad {}^c\mathbf{F} \neq {}^1\mathbf{F} \neq \dots \neq {}^n\mathbf{F} \neq \dots \neq {}^{nc}\mathbf{F}$$

por lo tanto, los determinantes Jacobianos de los componentes y de la capa  $t$  también son diferentes.

$$(5:106) \quad {}^cJ \neq {}^1J \neq \dots \neq {}^nJ \neq \dots \neq {}^{nc}J$$

Estas desigualdades se cumplen para diferentes tipos de materiales compuestos, incluso para aquellos que no tienen un comportamiento en paralelo.

Dado que los gradientes de los componentes son diferentes al gradiente de deformación del compuesto, es necesario determinarlos, con el fin de hacer los *pull-back* y *push-forward* de las variables que sean necesarios para realizar el análisis constitutivo de cada material componente en el campo de grandes deformaciones.

De acuerdo con lo indicado en la figura 5-12, se debe tener en cuenta que en la resolución de cada punto de Gauss (PG), el gradiente de deformación de la capa  $t$  compuesto  ${}^c\mathbf{F}$  y su correspondiente tensor de Green-Lagrange  ${}^c\mathbf{E}$  han sido calculados previamente, y que los tensores de deformación de Almansi de los materiales componentes  ${}^n\mathbf{e}$  se determinan en forma iterativa hasta que se cumple con las condiciones de equilibrio y de compatibilidad impuestas por la teoría de mezclas serie/paralelo.

- *Tensor de rotación de la capa  $t$  del compuesto y de sus componentes*

Con base en el movimiento relativo de cuerpo rígido que se da entre fibra y matriz, se parte de la hipótesis que para una capa  $t$  del compuesto, en cada punto de Gauss PG los materiales componentes tienen la misma rotación que la del material compuesto, por tanto el tensor de rotación de cada componente es equivalente al tensor de rotación del compuesto.

$$(5:107) \quad {}^c\mathbf{R} \equiv {}^1\mathbf{R} = \dots = {}^n\mathbf{R} = \dots = {}^{nc}\mathbf{R}$$

Considerando los fundamentos de la descomposición polar del gradiente de deformación [31], el tensor de rotación de la capa  $t$  del compuesto  ${}^c\mathbf{R}$  se obtiene a través del gradiente de deformación de la capa  $t$  compuesto  ${}^c\mathbf{F}$  y del respectivo

tensor derecho de estiramiento o tensor material de estiramiento  ${}^c\mathbf{U}$ .

$$(5:108) \quad {}^c\mathbf{F} = {}^c\mathbf{R} \cdot {}^c\mathbf{U}$$

Con el objetivo de obtener el tensor derecho de estiramiento de la capa  $t$  del compuesto  ${}^c\mathbf{U}$ , se parte de la relación que existe entre el tensor derecho de deformación de Cauchy-Green  ${}^c\mathbf{C}$  y el tensor de Green-Lagrange  ${}^c\mathbf{E}$ , indicada en la ecuación (5:5), de tal forma que:

$$(5:109) \quad {}^c\mathbf{C} = {}^c\mathbf{U}^2 = 2{}^c\mathbf{E} + \mathbf{I}$$

una vez se determina el tensor derecho de deformación de Cauchy-Green  ${}^c\mathbf{C}$ , se evalúan sus eigenvalores  ${}^c\lambda_1^2$ ,  ${}^c\lambda_2^2$  y  ${}^c\lambda_3^2$  y los correspondientes eigenvectores  ${}^c\mathbf{N}_1$ ,  ${}^c\mathbf{N}_2$  y  ${}^c\mathbf{N}_3$ , dado que permiten expresar el tensor derecho de deformación de Cauchy-Green [30] como:

$$(5:110) \quad {}^c\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1}^3 {}^c\lambda_{\alpha}^2 {}^c\mathbf{N}_{\alpha} \otimes {}^c\mathbf{N}_{\alpha}$$

y por ende, el tensor derecho de estiramiento  ${}^c\mathbf{U}$  corresponde a:

$$(5:111) \quad {}^c\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1}^3 {}^c\lambda_{\alpha} {}^c\mathbf{N}_{\alpha} \otimes {}^c\mathbf{N}_{\alpha}$$

Teniendo el gradiente de deformación  ${}^c\mathbf{F}$  y el tensor derecho de estiramiento  ${}^c\mathbf{U}$ , el tensor de rotación de la capa  $t$  del compuesto y sus componentes equivale a:

$$(5:112) \quad {}^c\mathbf{R} = {}^n\mathbf{R} = {}^c\mathbf{F} \cdot {}^c\mathbf{U}^{-1}$$

- *Gradiente de deformación de los componentes de la capa  $t$  del compuesto*

Con el propósito de determinar el gradiente de deformación del  $n$ -ésimo material componente de la capa  $t$  compuesto  ${}^n\mathbf{F}$ , primero se debe calcular el tensor izquierdo de estiramiento o tensor espacial de estiramiento del mismo  ${}^n\mathbf{v}$ .

Para hallar el tensor izquierdo de estiramiento  ${}^n\mathbf{v}$  se tiene en cuenta la relación que hay entre el tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green del  $n$ -ésimo componente  ${}^n\mathbf{b}$  y el correspondiente tensor de deformación de Almansi  ${}^n\mathbf{e}$ , señalada en la ecuación (5:8), de tal forma que:

$$(5:113) \quad {}^n\mathbf{b} = {}^n\mathbf{v}^2 = (\mathbf{I} - 2{}^n\mathbf{e})^{-1}$$

luego de calcular el tensor izquierdo de estiramiento  ${}^n\mathbf{b}$ , se evalúan sus eigenvalores  ${}^n\bar{\lambda}_1^2$ ,  ${}^n\bar{\lambda}_2^2$  y  ${}^n\bar{\lambda}_3^2$  y los respectivos eigenvectores  ${}^n\mathbf{n}_1$ ,  ${}^n\mathbf{n}_2$  y  ${}^n\mathbf{n}_3$ , ya que el tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green [30] equivale a:

$$(5:114) \quad {}^n\mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^3 {}^n\bar{\lambda}_{\alpha}^2 {}^n\mathbf{n}_{\alpha} \otimes {}^n\mathbf{n}_{\alpha}$$

lo que conlleva a hallar el tensor el tensor izquierdo de estiramiento  ${}^n\mathbf{v}$  como:

$$(5:115) \quad {}^n\mathbf{v} = \sum_{\alpha=1}^3 {}^n\bar{\lambda}_{\alpha} {}^n\mathbf{n}_{\alpha} \otimes {}^n\mathbf{n}_{\alpha}$$

Finalmente, de acuerdo con los fundamentos de la descomposición polar del gradiente de deformación [31], el gradiente de deformación del n-ésimo material componente de la capa  $t$   ${}^n\mathbf{F}$  se determina a través del tensor de rotación de la capa  $t$  del compuesto  ${}^c\mathbf{R}$  y del tensor izquierdo de estiramiento  ${}^n\mathbf{v}$ .

$$(5:116) \quad {}^n\mathbf{F} = {}^n\mathbf{v} \cdot {}^c\mathbf{R}$$

- *Algoritmo del tensor gradiente de deformación de los componentes de la capa  $t$*

En la figura 5-13 se indica un esquema de solución para determinar el tensor gradiente de deformación de los componentes en cada capa  $t$  del compuesto.

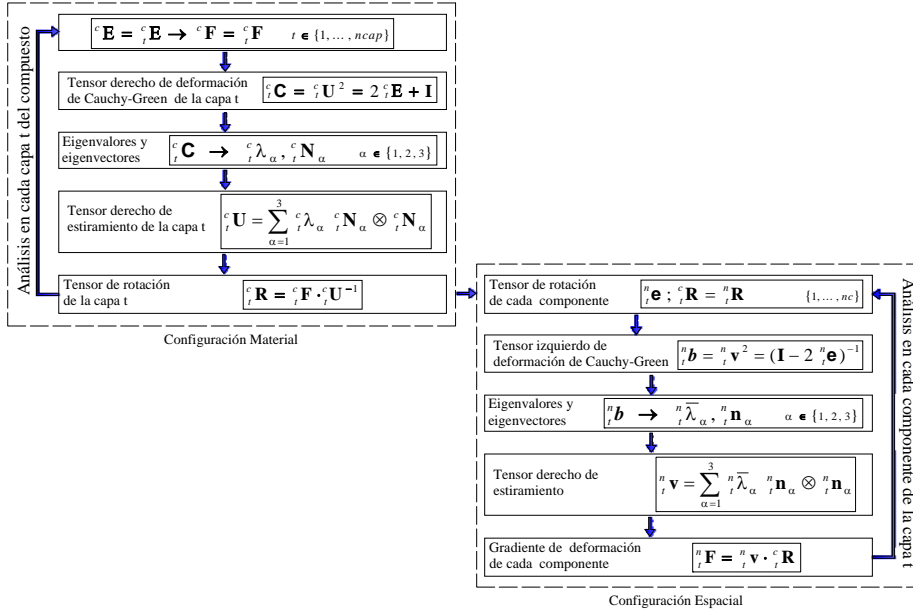


FIGURA 5-13 ESQUEMA DE SOLUCIÓN DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN DE LOS COMPONENTES DE LA CAPA  $t$  PARA LA TEORÍA DE MEZCLAS SERIE/PARALELO EN GRANDES DEFORMACIONES.

### 5.6.5 Factor de proporción volumétrica en la configuración espacial

Bajo la ecuación de continuidad se relaciona los volúmenes infinitesimales de la capa  $t$  compuesto en la configuración espacial  $d_t^c v$  y la configuración espacial  $d_t^c V$

$$(5:117) \quad \frac{d_t^c v}{d_t^c V} = \det {}^c\mathbf{F} = {}^c J \quad \Rightarrow \quad d_t^c V = \frac{1}{{}^c J} d_t^c v$$

de igual forma, se establece en el n-ésimo componente la relación entre los volúmenes infinitesimales en las configuraciones espacial  $d_t^n v$  y material  $d_t^n V$

$$(5:118) \quad \frac{d_t^n v}{d_t^n V} = \det {}^n\mathbf{F} = {}^n J \quad \Rightarrow \quad d_t^n V = \frac{1}{{}^n J} d_t^n v$$

Remplazando la expresión (5:117) y (5:118) en la ecuación (5:85) se tiene que el factor de proporción en la configuración espacial  ${}^n k$  depende del factor de



proporción en la configuración material  ${}^n k_o$  y de la relación entre el Jacobiano del n-ésimo componente  ${}^n J$  y el Jacobiano del compuesto  ${}^c J$

$$(5:119) \quad {}^n k = \frac{d {}^n v}{d {}^c v} = \frac{{}^n J}{d {}^c J} \frac{d {}^n V}{d {}^c V} = \frac{{}^n J}{d {}^c J} {}^n k_o \quad n = \{c, 1, \dots, nc\}$$

Dado que los determinantes Jacobianos de los materiales componentes y del compuesto son diferentes, se evidencia que en la teoría de mezclas serie/paralelo los factores de participación de cada componente varían para la configuración espacial, acorde con la relación de la evolución de las deformaciones del n-ésimo componente y del compuesto.

### 5.6.6 Verificación del algoritmo propuesto en un elemento finito

Con el objetivo de observar la incidencia de extender la teoría de mezclas serie/paralelo al campo de grandes deformaciones para el estudio de un material compuesto, con el modelo propuesto se analiza un elemento finito solicitado a compresión y a cortante con las condiciones de borde indicadas en la figura 5-14.

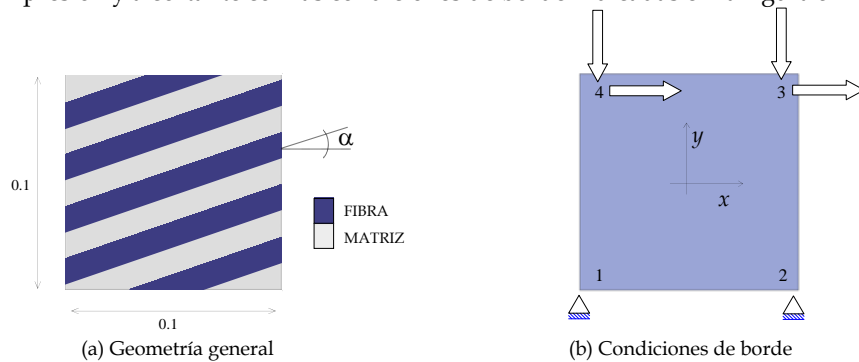


FIGURA 5-14 ESQUEMA REPRESENTATIVO PARA ANALISIS DEL MODELO EN UN ELEMENTO FINITO

- *Características de las configuraciones consideradas para la verificación*

Se analizan 8 configuraciones en las que se varía el ángulo de orientación de la fibra para analizar los efectos de la orientación de la fibra en el campo de las deformaciones finitas, asimismo se estudia un elemento conformado sólo por la matriz del compuesto. Cinco de estos casos se comparan con configuraciones analizadas en el campo de pequeñas deformaciones, con el fin de contrastar el comportamiento obtenido en los dos campos.

Material	Criterio de límite	$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz}$ GPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$G_f$ J/m <sup>2</sup>
Matriz (Hormigón)	Von Mises	25	0.20	30.0	50.0
Fibra (Acero)	Von Mises	100	0.00	270.0	2000.0

TABLA 5-1 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES COMPONENTES UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN

En la tabla 5-1 se señalan las propiedades de la matriz y de la fibra, en los que se aplicó el modelo elasto-plástico. En la tabla 5-2 se identifican las configuraciones

analizadas, indicando la orientación de la fibra y la participación volumétrica de los componentes. En todos los casos se parte de la hipótesis, que la adherencia es perfecta entre los componentes. El proceso de carga se hizo por control de desplazamientos.

Descripción de la Configuración	$\alpha$	Participación volumétrica		Nomenclatura de las configuraciones	
		Matriz	Fibra	Pequeñas Deformaciones	Grandes Deformaciones
Elemento finito de material simple	-	100%	-	-	GD-MM
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 0°	0°	60%	40%	-	GD-0
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 30°	30°	60%	40%	PD-30	GD-30
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 45°	45°	60%	40%	PD-45	GD-45
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 60°	60°	60%	40%	-	GD-60
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 90°	90°	60%	40%	PD-90	GD-90
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 120°	120°	60%	40%	-	GD-120
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 135°	135°	60%	40%	PD-135	GD-135
Elemento finito de material compuesto con la fibra orientada a 150°	150°	60%	40%	PD-150	GD-150

TABLA 5-2 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN

- *Análisis del comportamiento de las configuraciones del elemento finito de verificación*
- Resistencia y rigidez en los campos de pequeñas y grandes deformaciones

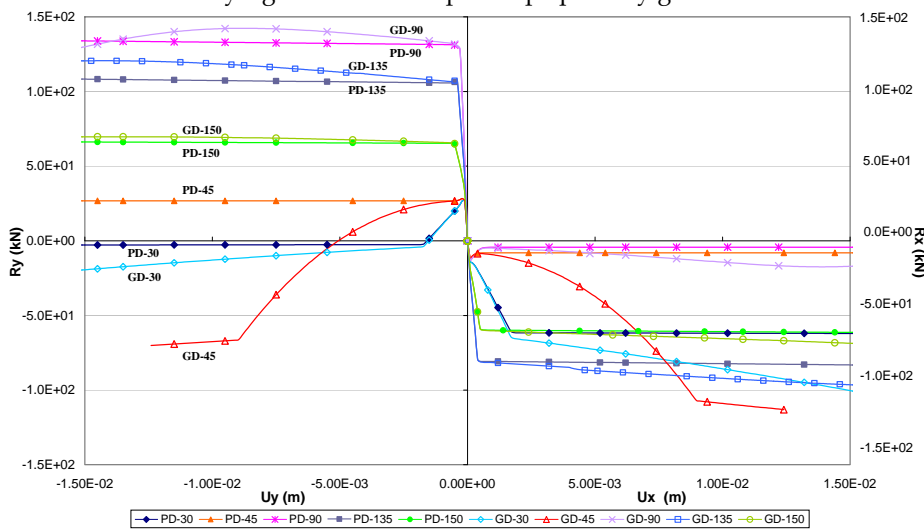


FIGURA 5-15 CURVAS CARGA-DESPLAZAMIENTO EN EL NODO 3 DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN EN GRANDES Y PEQUEÑAS DEFORMACIONES (GD Y PD)

En la figura 5-15 se observan las diferencias entre reacciones y desplazamientos al realizar el análisis con la teoría de mezclas serie/paralelo

en el campo de pequeñas deformaciones PD y en el de grandes deformaciones GD. Tanto para la carga de compresión (Ry) como para la carga de corte (Rx) es evidente que la magnitud de estas diferencias dependen de la orientación de la fibra con respecto a la orientación de la carga, sin embargo en todos los casos el comportamiento para los dos campos es similar hasta que comienza la fluencia. Es así como, por ejemplo para PD-150 y GD-150 las curvas son parecidas, mientras que para PD-30 y GD-30 las diferencias son considerables.

Rel. entre campos	GD-30 vs. PD-30	GD-45 vs. PD-45	GD-90 vs. PD-90	GD-135 vs. PD-135	GD-150 vs. PD-150
Dirección Eje x	43.6%	90.0%	27.3%	10.7%	6.4%
Dirección Eje y	85.9%	140.3%	1.9%	5.4%	2.3%

TABLA 5-3 RELACIÓN ENTRE LAS REACCIONES OBTENIDAS EN LOS CAMPOS DE GRANDES Y DE PEQUEÑAS DEFORMACIONES (GD Y PD) DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN

En la tabla 5-3 se señala la relación entre las reacciones máximas obtenidas en los dos campos, donde se aprecia que la mayor diferencia es para cuando la fibra esta orientada 45° (GD-45 y PD-45) y la menor diferencia corresponde a 150° (GD-150 y PD-150). Es evidente que el aumento de capacidad en los casos analizados en el campo GD se debe al efecto de reorientación de las fibras .

– Resistencia y rigidez para diferentes orientaciones de la fibra

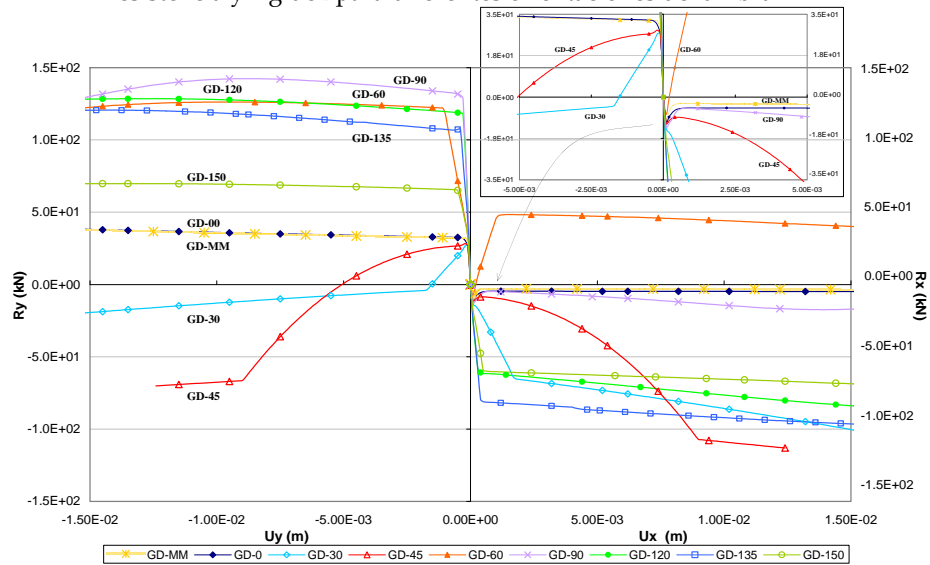


FIGURA 5-16 CURVAS CARGA-DESPLAZAMIENTO EN EL NODO 3 DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN CON DIFERENTES ORIENTACIONES DE LA FIBRA

En la figura 5-16 se observa la incidencia de la orientación de la fibra en el campo de grandes deformaciones GD con la teoría de mezclas serie/paralelo. Para las condiciones de frontera dadas, si la fibra se orienta a 0° se tiene que el comportamiento del compuesto esta gobernado por el comportamiento de la matriz; cuando la fibra esta orientada a 90° (GD-90), en la dirección x pierde la

resistencia cuando plastifica la matriz y presenta endurecimiento por la reorientación de las fibras, en cambio en la dirección  $y$  no depende del comportamiento de la matriz y alcanza la mayor carga máxima entre las configuraciones analizadas. En los casos en que la fibra está orientada a  $30^\circ$  (GD-30) y a  $45^\circ$  (GD-45), pese a que en la dirección  $x$  se obtienen las cargas altas, se observa que en la dirección  $y$  se invierte el sentido de la carga luego de que la matriz se plastifica, además GD-45 no se presenta un comportamiento plástico bi-lineal como en los otros casos. Cuando la fibra se orienta a  $60^\circ$  (GD-60) y a  $120^\circ$  (GD-120), en la dirección en  $y$  la carga máxima alcanzada es similar, mientras que en la dirección  $x$ , en GD-60 la carga se invierte una vez se alcanza la resistencia de la matriz. Si bien en el comportamiento de GD-150 no incide la plasticidad en la matriz, las cargas resistentes no son altas. Cuando la fibra se orienta a  $135^\circ$  GD-130 las cargas soportadas en ambas direcciones son altas.

En la tabla 5-4 se muestran las cargas máximas que soporta cada configuración, con las condiciones borde dadas GD-135 tiene la mayor carga y GD-0 tiene la mínima con un valor cercano a la carga del caso GD-MM.

Configuración Variable	GD-MM	GD-0	GD-30	GD-45	GD-60	GD-90	GD-120	GD-135	GD-150
Carga máxima Rmax (kN)	37.90	38.33	101.83	133.05	133.97	142.89	153.13	154.31	98.30
Rmax/Rmax-135	24.6	24.8	66.0	86.2	86.8	92.6	99.2	100.0	63.7

TABLA 5-4 CARGAS MÁXIMAS CON DIFERENTES ORIENTACIONES DE LA FIBRA

Debido a que la dirección de las cargas totales es diferente para cada configuración, en la figura 5-17 se muestran las cargas totales normalizadas con respecto a la mayor carga de los casos analizados (Rmax-135). En esta figura, se aprecia que para las condiciones de borde aplicadas al elemento, la orientación de la fibra menos eficiente es GD-0, ya que apenas alcanza un 24.8% de Rmax-135. GD-150 y GD-30 llegan a un 64% y un 66% de la capacidad máxima que puede resistir el laminado. GD-60 consiguen un 86.8% y GD-90 un 92.6%, pero en los dos casos hay ablandamiento después de 0.016m. Las configuraciones más eficientes corresponden a GD-120 y GD-135.

De otra parte, en la figura 5-17 se observa la aproximación entre GD-0 y GD-MM, lo que evidencia que GD-0 está gobernado por la plasticidad en la matriz. El comportamiento de GD-30 y GD-45 inicialmente está dominado por la plasticidad de la matriz, luego por la alineación de las fibras, la rigidez se recupera y aumenta hasta que hay plasticidad en las fibras. El comportamiento de GD-60, GD-90, GD-120 y GD-135 está gobernado principalmente por el efecto de plasticidad en las fibras.

Con las configuraciones analizadas se evidencia que la capacidad del material compuesto en el campo de grandes deformaciones está afectada por las condiciones de borde, la orientación de las fibras y la rigidez del sistema dada por las propiedades mecánicas de los materiales componentes.

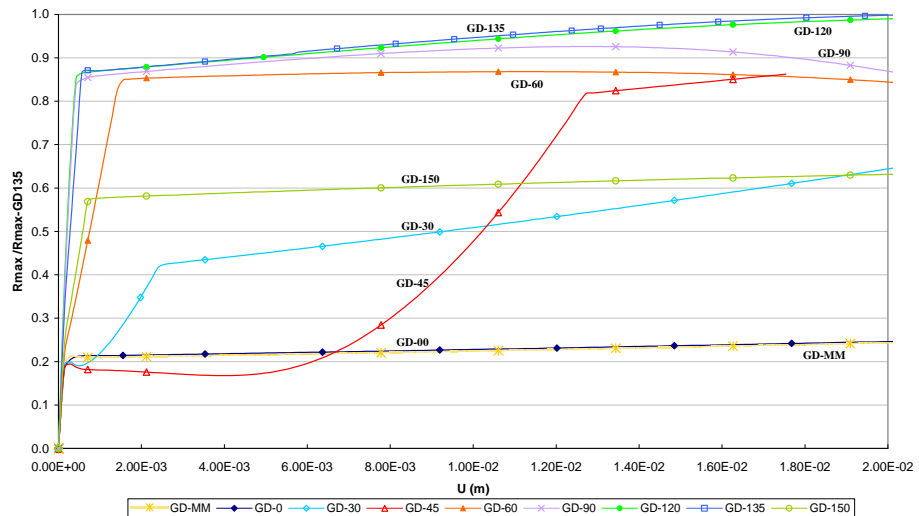


FIGURA 5-17 CURVAS CAPACIDAD-DESPLAZAMIENTO  $U$  EN EL NODO 3 DEL ELEMENTO FINITO DE VERIFICACIÓN CON DIFERENTES ORIENTACIONES DE LA FIBRA

- *Aplicación del modelo propuesto para diferentes tipos de compuestos*

A través del análisis de lo que sucede en un elemento finito en el que se involucra la teoría de mezcla serie/paralelo en el campo de grandes deformaciones, se observaron las diferencias existentes con respecto a los análisis realizados en el campo de pequeñas deformaciones. En esta validación en el campo de grandes deformaciones se mostró la influencia de la orientación de las fibras en el comportamiento no lineal del compuesto, así como la incidencia de la plasticidad en la matriz y en las fibras.

De igual forma se observó que cuando los compuestos están solicitados en el campo de grandes deformaciones, su comportamiento además de depender del fenómeno que se presente en cada componente (daño, plasticidad y otros), esta sujeto a otros factores dados por la no linealidad cinemática, como lo es la alineación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones.

### 5.7 Simulaciones con la adaptación de la teoría serie/paralelo en grandes deformaciones

A continuación se estudian dos ejemplos en los que se aplica la adaptación de la teoría serie/paralelo en el campo de deformaciones finitas y se hace una comparación con los resultados obtenidos con micromodelos.

#### 5.7.1 Lámina solicitada a tracción

Las fibras en un material compuesto tienden a alinearse en la dirección de las mayores tensiones y a mantenerse alineadas en esta dirección [59]; si la alineación produce un cambio de configuración considerable en el compuesto reforzado,

cambia la distribución de las cargas, y afecta el comportamiento de la matriz tanto por la re-orientación de las fibras, como por su tendencia a mantenerse alineadas en la dirección de la carga. A través de la implementación de la teoría serie/paralelo en el campo de grandes deformaciones, por el desarrollo de la formulación, intrínsecamente se está teniendo en cuenta la reorientación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones, por lo tanto, se pueden analizar sus efectos en el comportamiento de los compuestos y las estructuras que conforman.

Con el fin de observar el comportamiento de un material compuesto frente a la alineación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones, a continuación se analizan diferentes configuraciones de una lámina inclinada a  $80^\circ$  solicitada a tracción. El material compuesto que la conforma tiene las fibras orientadas a  $80^\circ$  conforme a la inclinación de la lámina, es decir, que las fibras están desalineadas con respecto a la dirección de la carga  $10^\circ$ . Asimismo, se seleccionó una lámina con una relación  $L/h$  cercana a 10 (9.85), teniendo en cuenta que la esbeltez es uno de los principales factores que inciden en el comportamiento no lineal geométrico.

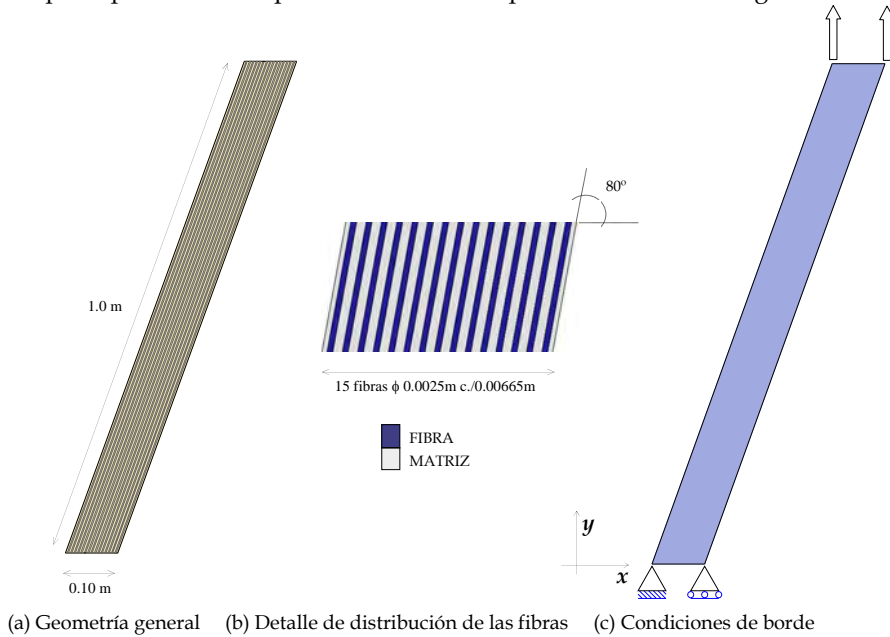


FIGURA 5-18 ESQUEMA DE LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

La geometría y las condiciones de borde de la lámina se indican en la figura 5-18. Este tipo de configuraciones en que las láminas se ensayan a tracción con un ángulo de inclinación han sido utilizadas por Yang et al. [7] para estudiar los efectos de la desalineación de las fibras con respecto a la dirección de la carga en la degradación de la resistencia y en la rigidez de laminados compuestos por polímeros reforzados con fibras largas (FRP).

- *Características de las configuraciones solicitadas a tracción*

En las diferentes configuraciones analizadas se consideró un comportamiento

elástico en los materiales componentes del compuesto para observar el efecto de la alineación de las fibras en dirección de la carga aplicada, independientemente de la no linealidad constitutiva material que tengan los componentes. La tracción en la lámina de las configuraciones se hizo por control de desplazamientos verticales.

En la tabla 5-5 se señalan las propiedades de las matrices y de la fibra utilizadas en las configuraciones analizadas. En ningún caso se tiene en cuenta la relación de Poisson en el refuerzo, para no se sobreestimar las tensiones locales de la matriz causadas por las diferencias entre las relaciones de Poisson con las fibras.

Matriz	Tipo de matriz	$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz}$ GPa	$\nu$
Matriz metálica	Matriz~M	70.0	0.20
Matriz Cerámica	Matriz~C	25.0	0.20
Matriz polimérica	Matriz~P	12.0	0.20
Matriz epóxica	Matriz~E	7.0	0.20
Fibra de carbono	-	150.0	0.00

TABLA 5-5 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES COMPONENTES UTILIZADOS PARA EL ANÁLISIS DE LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

Con el fin de observar el comportamiento obtenido al aplicar la teoría serie/paralelo en el campo de grandes deformaciones, se compara el comportamiento de un micromodelo con el obtenido en 3 macromodelos que tienen diferente mallado. En la tabla 5-6 se señalan las 4 configuraciones analizadas, indicando el número de elementos, de nodos y de grados de libertad, la orientación de la fibra y la participación volumétrica de los componentes.

Descripción de la Configuración	No. de elementos	No. de nodos	No. de grados de libertad	Tipo de matriz	Participación volumétrica		Nomenclatura de las configuraciones
					Matriz	Fibra	
Macromodelo de 40 elementos con la fibra orientada a 80°	40	63	119	Matriz~P	62.5%	37.5%	SP-40
Macromodelo de 80 elementos con la fibra orientada a 80°	80	105	199	Matriz~P	62.5%	37.5%	SP-80
Macromodelo de 1860 elementos con la fibra orientada a 80°	1860	1952	3839	Matriz~P	62.5%	37.5%	SP-1860
Micromodelo de 1860 elementos con la fibra orientada a 80°	1860	1952	3839	Matriz~P	62.5%	37.5%	MM-1860

TABLA 5-6 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES CON DIFERENTES MALLADOS PARA EL ANÁLISIS DE LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

De otra parte, con un mallado de 80 elementos se analizan macromodelos en los que tomaron 3 diferentes tipos de matrices para observar la incidencia del orden de magnitud del módulo de Young de la matriz en el comportamiento no lineal cinemático de las fibras. Los macromodelos son analizados con la teoría serie/paralelo y con la adaptación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones. Además se comparan con el comportamiento obtenido con un macromodelo compuesto por solo fibra. En la tabla 5-7 se identifican las 7 configuraciones estudiadas, indicando el tipo de matriz del compuesto y la participación volumétrica de los componentes.

Descripción de la Configuración	No. de elementos	Tipo de matriz	Participación volumétrica		Nomenclatura de las configuraciones	
			Matriz	Fibra	Pequeñas Deformaciones	Grandes Deformaciones
Macromodelo de 80 elementos con la fibra orientada a 80° y la matriz metálica	80	Matriz~M	62.5%	37.5%	SP-80-M-PD	SP-80-M
Macromodelo de 80 elementos con la fibra orientada a 80° y la matriz cerámica	80	Matriz~C	62.5%	37.5%	SP-80-C-PD	SP-80-C
Macromodelo de 80 elementos con la fibra orientada a 80° y la matriz epóxica	80	Matriz~E	62.5%	37.5%	SP-80-E-PD	SP-80-E
Macromodelo de 80 elementos con solo fibra orientada a 80°	80	-		100%		SP-80-F

TABLA 5-7 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES CON DIFERENTES MATRICES PARA EL ANÁLISIS DE LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

En la figura 5-19 se muestra el mallado del micromodelo y de los macromodelos. El micromodelo y los macromodelos se analizaron en el estado plano de tensiones con elementos lineales de 4 nodos. En todos los casos se parte de la hipótesis, que la adherencia es perfecta entre los componentes del compuesto.

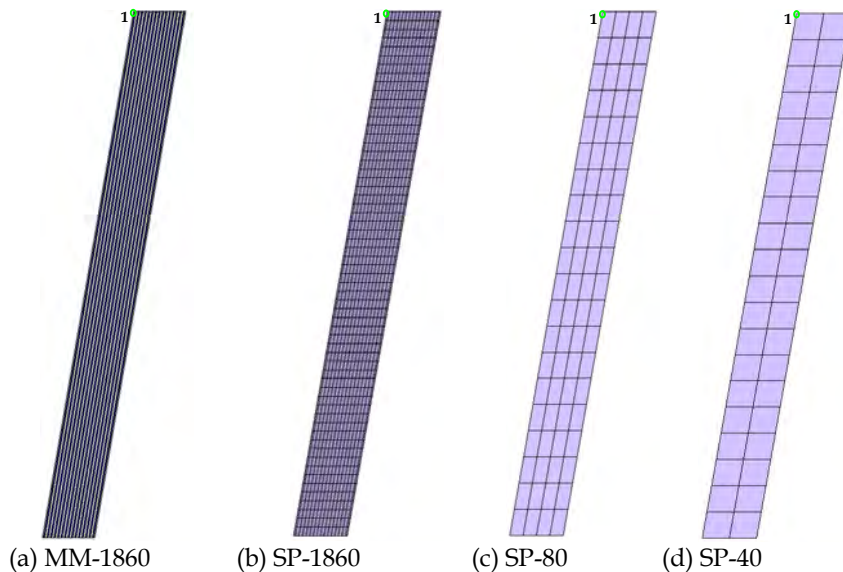


FIGURA 5-19 MALLADOS DEL MICROMODELO Y DE LOS MACROMODELOS PARA EL ANÁLISIS DE LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

- *Análisis del comportamiento de la lámina solicitada a tracción*
  - Mallado para una lámina solicitada a tracción

En la figura 5-20 se muestran las curvas carga desplazamiento para los mallados analizados con la teoría serie/paralelo adaptada al campo de grandes deformaciones SP-40, SP-80 y SP-1860 y se comparan con el micromodelo MM-1860. En esta figura se aprecia que los macromodelos SP-40, SP-80 y SP-1860 presentan una rigidez similar a pesar de tener diferente densidad de mallado, asimismo que tienen una rigidez aproximada a la del micromodelo MM-1860



hasta 0.08m, para desplazamientos mayores el micromodelo aumenta su rigidez con una proporción menor a la de los macromodelos, alcanzando una diferencia del 6% para un desplazamiento  $U_y$  de 0.10m.

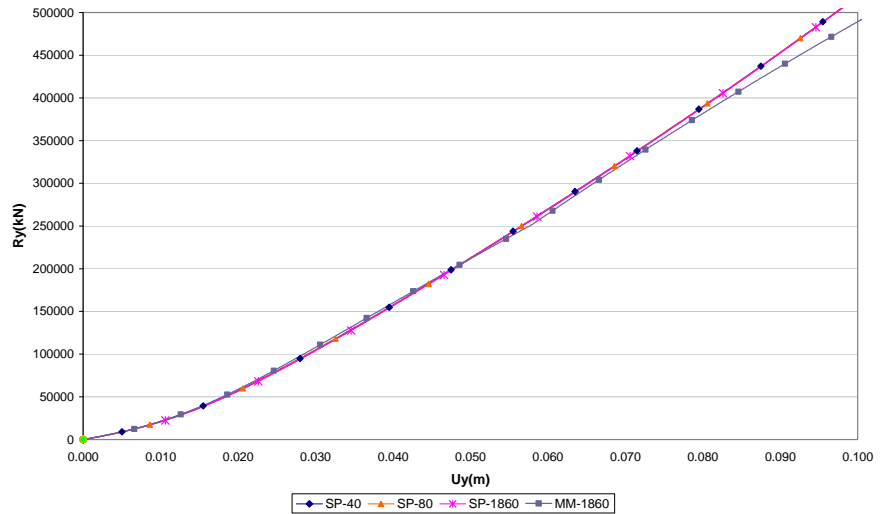


FIGURA 5-20 CURVAS CARGA  $R_Y$  - DESPLAZAMIENTO  $U_Y$  EN LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

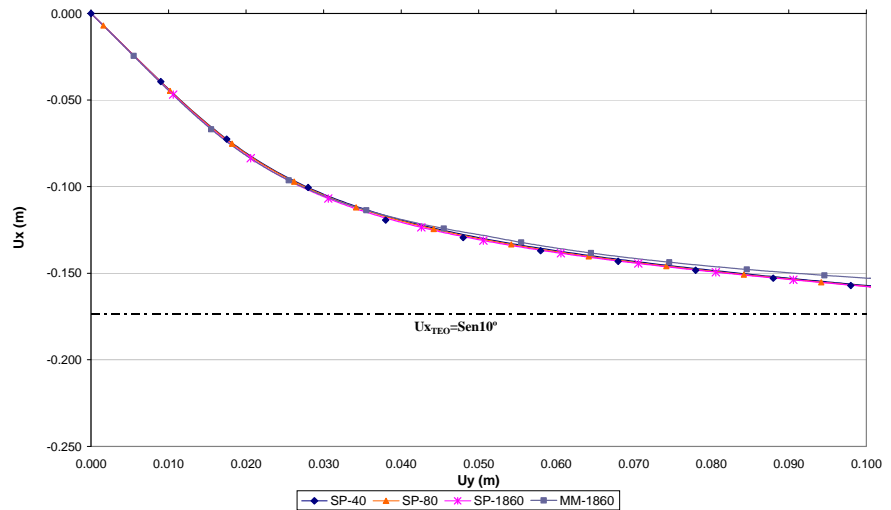


FIGURA 5-21 CURVAS DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL ( $U_X$ ) -DESPLAZAMIENTO VERTICAL ( $U_Y$ ) EN LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

En la figura 5-21 se muestra el desplazamiento horizontal en el nodo de la esquina superior izquierda de la lámina, identificado como 1 en la figura 5-19. En esta figura se aprecia que debido a su propia configuración geométrica, al aplicarse el desplazamiento vertical, la lámina se desplaza horizontalmente hasta que alcanza una posición estable frente a la dirección de la carga aplicada, esta posición no necesariamente corresponde a la distancia que las

fibras teóricamente tendrían desplazarse para quedar completamente alineadas con la carga,  $U_{X_{TEO}}=0.174m$ . Se observa que las curvas de los macromodelos SP-40, SP-80 y SP-1860 son parecidas a la obtenida en el micromodelo; sin embargo, se tiene que después de 0.08m el incremento entre los desplazamientos horizontales empieza a diferenciarse, donde MM-1860 se desplaza horizontalmente menos que los macromodelos, es así como para un desplazamiento vertical de 0.10m la diferencia es de un 3%.

De acuerdo con la figura 5-20 se evidencia que para la lámina inclinada a tracción analizada en el campo de grandes deformaciones, la rigidez inicial se va incrementando como muestra del proceso de alineación de las fibras en la dirección de la carga. Al contrastarse la figura 5-20 con la figura 5-21 se tiene que este aumento de rigidez está en función del cambio de posición de la lámina, de tal forma que la proporción del incremento de la rigidez va disminuyendo en la medida que la lámina alcanza la posición de estabilidad. Esta posición de estabilidad refleja la tendencia de las fibras a mantener su orientación en la dirección de la carga.

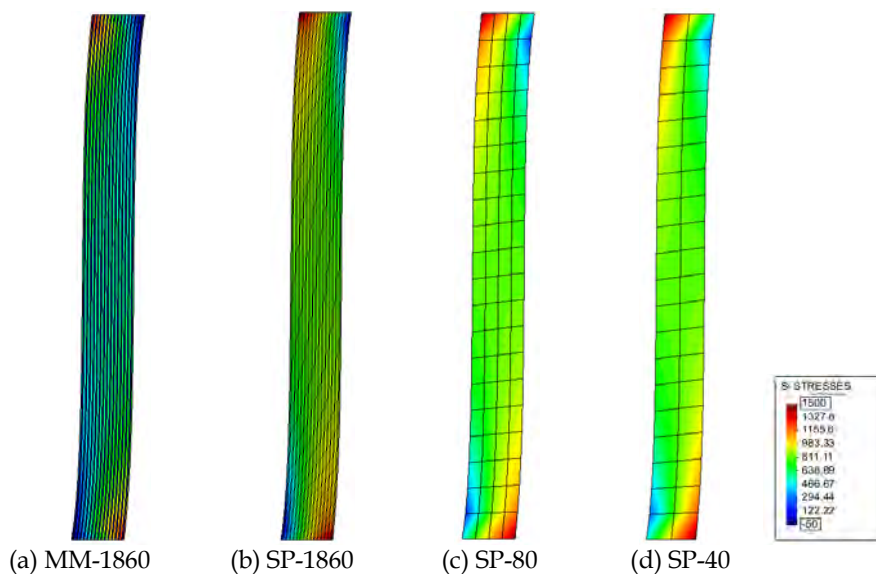


FIGURA 5-22 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES PRINCIPALES EN LA MATRIZ PARA UN  $U_Y$  EN EL NODO 1 DE 0.06M. DEFORMADA 1:1

En la figura 5-22 y en la figura 5-23 se aprecia que las deformadas de los diferentes mallados son parecidas a la deformada obtenida en el micromodelo MM-1860. En lo que respecta a la distribución de las tensiones principales de la fibra y de la matriz, se tiene que la distribución en los macromodelos es similar a la del micromodelo; aunque hay pequeñas diferencias se evidencia que entre mas denso es el mallado, la distribución de las tensiones es más parecida a la del micromodelo, como sucede con SP-1860. La configuración menos densa SP-40 (2.15% de la malla de SP-1860) es la que presenta mayores diferencias en la

distribución de tensiones, sin embargo permite que la distribución de tensiones refleje el comportamiento del micromodelo con un coste computacional bajo.

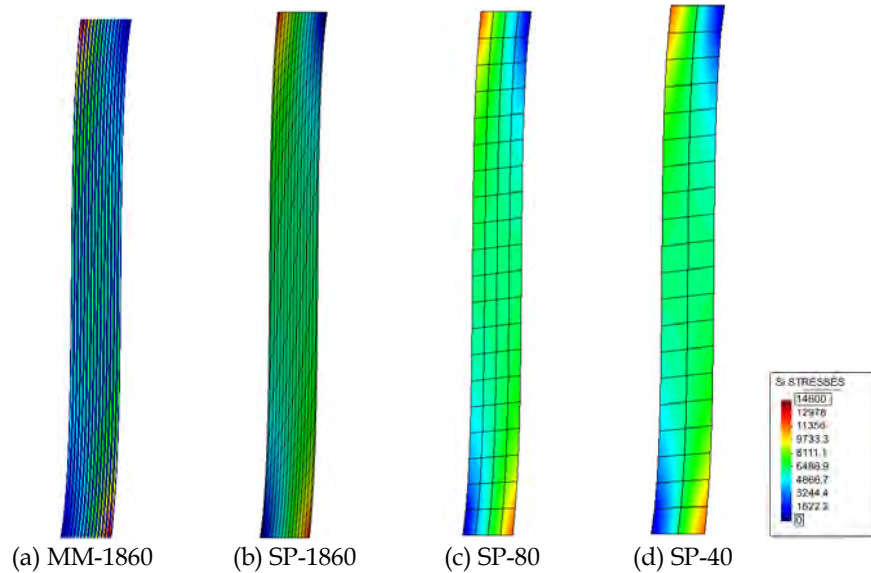


FIGURA 5-23 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES PRINCIPALES EN LAS FIBRAS PARA UN  $\bar{U}_Y$  EN EL NODO 1 DE 0.06M. DEFORMADA 1:1

Frente a la diferencia que presentan los macromodelos del micromodelo después de 0.08m se comparan los contornos de desplazamiento vertical en el extremo superior de la lámina entre el macromodelo SP-1860 con el micromodelo MM-1860 mostrados en la figura 5-24. Se observa que para MM-1860 los contornos de desplazamiento son dentados, mientras que en el macromodelo SP-1860 los contornos de los desplazamientos son continuos, aunque tiene la misma densidad de mallado del micromodelo.

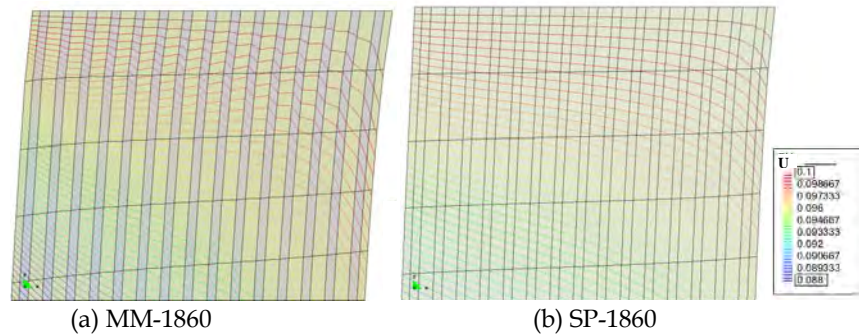


FIGURA 5-24 CONTORNOS DE DESPLAZAMIENTO VERTICAL PARA UN  $\bar{U}_Y$  EN EL NODO 1 DE 0.10M

Los contornos dentados de desplazamiento en el micromodelo evidencia que hay deslizamientos elásticos entre las fibras y la matriz producidos por el

cambio drástico de configuración de las fibras y la restricción que impone la matriz, efecto que no puede capturarse con la adaptación de la teoría de mezclas serie/paralelo al campo de grandes deformaciones por las mismas condiciones de compatibilidad y equilibrio establecidas en la teoría.

En general con este análisis se concluye que los macromodelos SP40 y SP80 representan en una forma aproximada el comportamiento del micromodelo MM-1860, a pesar que tienen una densidad de mallado bastante menor (2.15% y 4.30% respectivamente), esto implica una considerable reducción de costes computacionales para el análisis de materiales compuestos en el campo de deformaciones finitas.

– Rigidez en los campos de pequeñas y grandes deformaciones

En la figura 5-25 se observan las diferencias en la relación carga desplazamiento de las configuraciones simuladas en el campo de pequeñas deformaciones PD y en el de grandes deformaciones GD con la teoría de mezclas serie/paralelo.

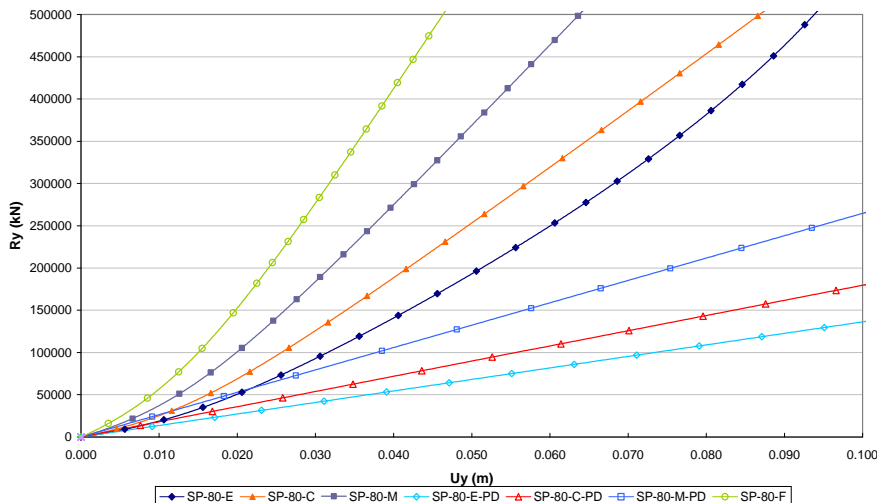


FIGURA 5-25 CURVAS CARGA  $R_y$  - DESPLAZAMIENTO  $U_y$  EN LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

En lo que respecta a la relación entre la carga a tracción ( $R_y$ ) y el desplazamiento  $U_y$ , se tiene que se produce un comportamiento no lineal en el campo de grandes deformaciones GD (SP-80-E, SP-80-C, SP-80-M y SP-80-F), lo que difiere del comportamiento lineal dado en el campo de pequeñas deformaciones PD (SP-80-E-PD, SP-80-C-PD y SP-80-M-PD). Asimismo, se ve que la magnitud de las cargas es mayor en el campo de grandes deformaciones que en el campo de pequeñas deformaciones.

Para los casos dados en el campo de GD, SP-80-E, SP-80-C, SP-80-M y SP-80-F, se aprecia que la rigidez del sistema tiende a aumentar debido al cambio de orientación de las fibras por su tendencia a alinearse en la dirección de las

mayores tensiones; el caso más evidente es SP-80-E a causa de la baja rigidez de la matriz. Para el campo de PD, en las configuraciones SP-80-E-PD, SP-80-C-PD y SP-80-M-PD la rigidez de los sistemas no cambia.

En los macromodelos analizados en el campo de GD, el comportamiento no lineal, la mayor magnitud de las cargas a tracción y el aumento de rigidez muestran que con la adaptación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones se está involucrando los efectos de la alineación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones.

- Desplazamientos en los campos de pequeñas y grandes deformaciones
- En la figura 5-26 se muestra la relación entre el desplazamiento horizontal del nodo 1 y el desplazamiento vertical. En esta figura se observa que en los casos dados bajo el campo de GD (SP-80-E, SP-80-C, SP-80-M y SP-80-F) tienen una relación no lineal entre los desplazamientos, mientras que en los casos del campo de PD (SP-80-E-PD, SP-80-C-PD y SP-80-M-PD) la relación es lineal.

En las simulaciones SP-80-E, SP-80-C, SP-80-M y SP-80-F se aprecia que al aplicar el desplazamiento vertical, se produce un desplazamiento horizontal hasta que alcanza una posición estable frente a la dirección de la carga aplicada. Una vez el sistema se estabiliza, la variación del desplazamiento horizontal es imperceptible, esto se debe a la tendencia de las fibras a orientarse en la dirección en que esta aplicada la carga.

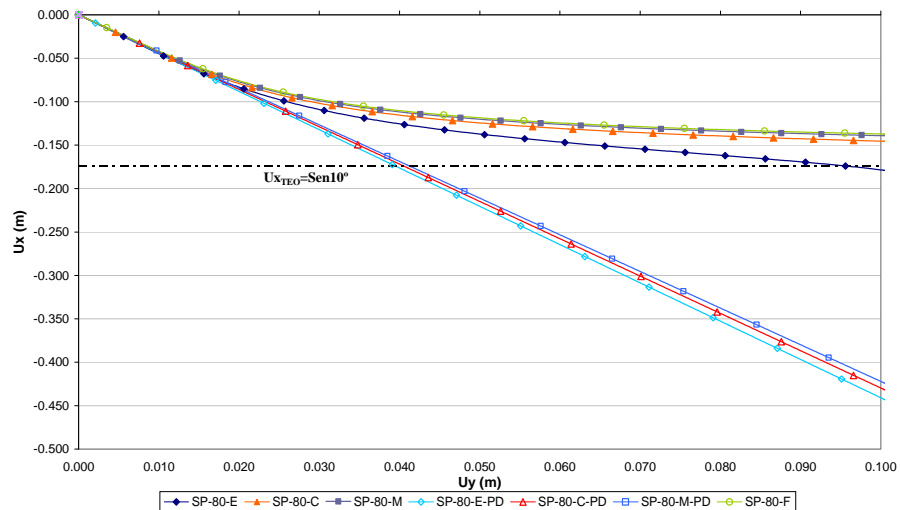


FIGURA 5-26 CURVAS DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL (UX) -DESPLAZAMIENTO VERTICAL (UY) EN LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN

La posición estable del caso SP-80-E ( $U_{XSP-80-E} \approx 0.18m$ ) tiene un desplazamiento superior al desplazamiento de estabilidad teórico  $U_{XTEO}$ , los otros macromodelos con módulos de elasticidad más altos presentan tendencias de desplazamiento menores, es así como SP-80-C se aproxima a 0.147m y SP-80-M

tiende a 0.140m. Los desplazamientos de estabilidad de los macromodelos son mayores la tendencia de SP-80-F ( $U_{XSP-80-F}=0.138m$ ), sin embargo, SP-80-M y SP-80-C muestran un comportamiento aproximado a este caso, pese a la diferencia de rigideces vista en la figura 5-25.

En las configuraciones SP-80-E-PD, SP-80-C-PD y SP-80-M-PD se observa que al aplicar el desplazamiento vertical se produce un desplazamiento horizontal, en el que la relación es lineal, es decir, que para los macromodelos en el campo de pequeñas deformaciones no hay una posición de estabilidad.

El comportamiento de las configuraciones muestra que en el campo de grandes deformaciones, el proceso de estabilidad de la lámina el comportamiento esta influenciado por el proceso de alineación de las fibras en dirección de la carga, tal y como sucedería en un ensayo de un material compuesto solicitado a tracción, en el que las fibras que tienen una orientación diferente a la de la aplicación de la carga tienden a alinearse en la dirección de las mayores tensiones. Esta tendencia se puede observar en la figura 5-27, que corresponde al fallo de un laminado  $0^\circ/10^\circ$  con una inclinación de  $10^\circ$ , ensayado por Yang et. al. [7], en el que se presenta el fallo por corte durante la alineación del laminado solicitado a tracción.

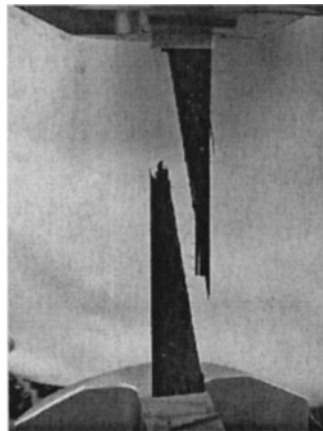


FIGURA 5-27 FALLO EN UNA LÁMINA A TRACCIÓN CON UN ANGULO DE DESALINEACIÓN DE LAS FIBRAS DE  $10^\circ$  [7]

– Comparaciones en los campos de pequeñas y grandes deformaciones

En el campo de GD hay un aumento en la rigidez del sistema hasta que la lámina alcanza una posición estable, esto muestra que se esta involucrando el proceso de alineación de las fibras en la dirección de la carga. En el campo de PD, al no capturarse el efecto de la alineación de las fibras, la rigidez del sistema no cambia.

En la figura 5-28 se muestra que las deformadas de SP-80-E, SP-80-C y SP-80-M tienen un comportamiento parecido, para estas configuraciones el desplazamiento horizontal está en función del proceso de orientación de las

fibras, debido a que una vez se alinean, mantienen su orientación en la dirección de la carga. Aunque inicialmente estas configuraciones están solicitadas a flexo-tracción, luego de que se alinean las fibras, las láminas sólo quedan solicitadas a tensiones de tracción. En cambio, las deformadas de SP-80-E-PD, SP-80-C-PD y SP-80-M-PD señalan que las configuraciones durante todo el proceso de carga están solicitadas a flexo-tracción, debido a que no hay una posición de estabilidad del sistema ante la dirección de la carga aplicada.

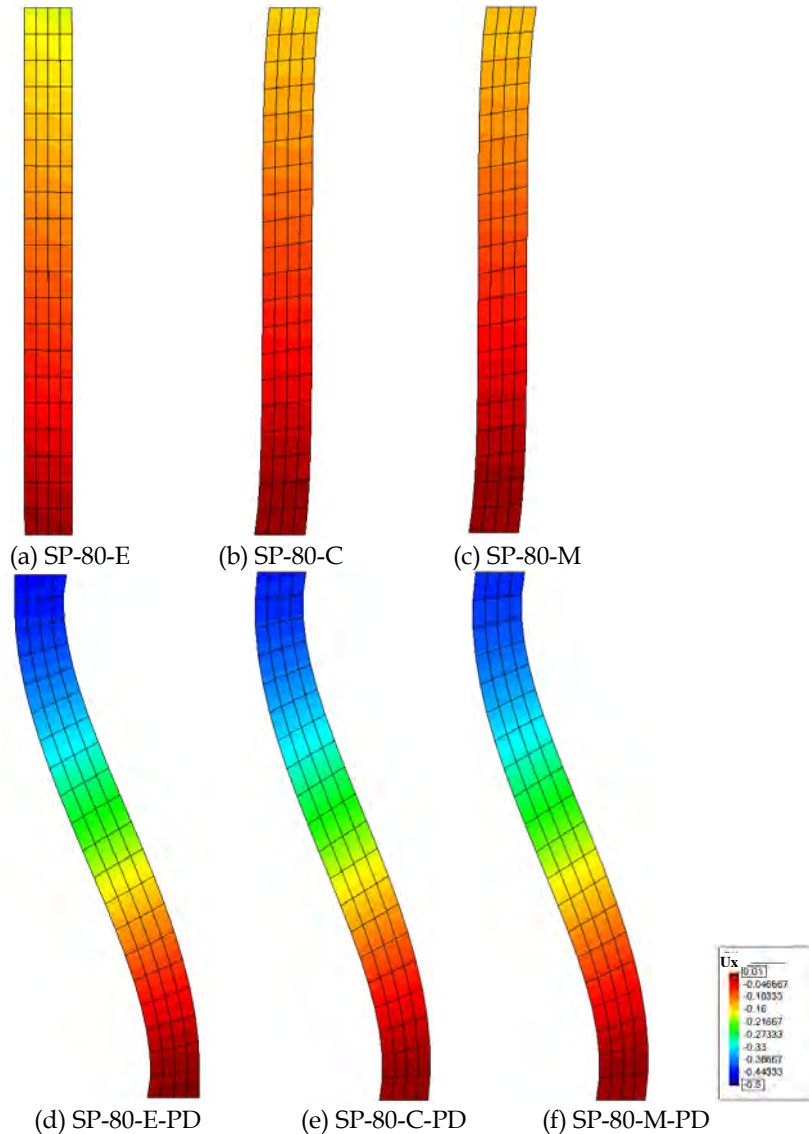


FIGURA 5-28 DISTRIBUCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES EN LA LÁMINA SOLICITADA A TRACCIÓN PARA UN  $U_y$  EN EL NODO 1 DE 0.10M. DEFORMADA 1:1

Con lo observado en figura 5-28 se corrobora que cuando se consideran no linealidades cinemáticas en el compuesto hay un cambio de distribución de las cargas, en este caso se presenta un cambio de un estado de flexo-tracción a un estado de tracción.

En la tabla 5-8 se indican las relaciones porcentuales de las reacciones y de los desplazamientos horizontales obtenidos para un desplazamiento vertical de 0.10m. Se tiene que los desplazamientos en el campo de GD están por debajo de un 50% de los desplazamientos definidos en el campo de PD. En lo que respecta a las cargas, se señala que en el campo de PD las cargas son bastante menores a las obtenidas en el campo de GD. Estas diferencias se presentan porque en el campo de pequeñas deformaciones no hay aumento en la rigidez de las configuraciones al no involucrarse el efecto de alineación de las fibras.

Al comparar las relaciones entre SP-80-E y SP-80-E-PD, SP-80-C y SP-80-C-PD, y, SP-80-M y SP-80-M-PD, se observa que entre más elevado sea el módulo de elasticidad de la matriz, mayor es la diferencia entre los desplazamientos  $U_x$  de los dos campos y menor es la diferencia porcentual entre las cargas.

Variable \ Rel. entre los campos	SP-80-E .vs. SP-80-E-PD	SP-80-C.vs. SP-80-C-PD	SP-80-M.vs. SP-80-M-PD
Desplazamiento horizontal $U_x$	40.5%	33.9%	32.9%
Reacción $R_y$	419.3%	328.7%	320.8%

TABLA 5-8 RELACIONES PORCENTUALES ENTRE LOS CAMPOS DE GRANDES Y DE PEQUEÑAS DEFORMACIONES PARA UN  $U_y$  DE 0.10M EN EL NODO 1

De acuerdo con lo anterior se deduce que con la adaptación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones se está capturando el fenómeno de alineación de las fibras del material compuesto en la dirección de las mayores tensiones en un caso de no linealidad cinemática en el que hay un cambio drástico de la configuración geométrica.

### 5.7.2 Lámina solicitada a flexo-compresión

En muchos casos el objetivo del análisis no lineal de una estructura es determinar la carga máxima que puede soportar antes de que se presente su inestabilidad o su colapso [60]; además su respuesta puede ser muy diferente si se presentan o no, las no linealidades en los materiales que la componen. Por ello es importante que se considere simultáneamente la no linealidad cinemática a la que está solicitada una estructura y la no linealidad constitutiva de los materiales. La implementación de la teoría serie/paralelo en el campo de grandes deformaciones permite estudiar estructuras en las que su configuración geométrica cambia drásticamente considerando la no linealidad de cada material componente del compuesto.

Con el propósito de mostrar el comportamiento no lineal de un material compuesto frente al cambio drástico de una configuración geométrica y al comportamiento no lineal de sus componentes, a continuación se analiza una



lámina solicitada a flexo-compresión con el modelo propuesto. Considerando que la carga con la que una estructura comienza a ser inestable depende de su geometría, especialmente de su esbeltez [1], para este ejemplo se seleccionó una viga esbelta con una relación  $L/h$  de 10. Asimismo, con el fin de observar el efecto de la rigidez de los materiales componentes en el proceso de pandeo, las fibras que conforman el material compuesto de la lámina se consideraron con una orientación inicial de  $0^\circ$ , para así tener una rigidez alta en la dirección de la carga de compresión, y una rigidez baja en dirección de la carga de corte. La geometría y las condiciones de borde de la lámina se indican en la figura 5-29.

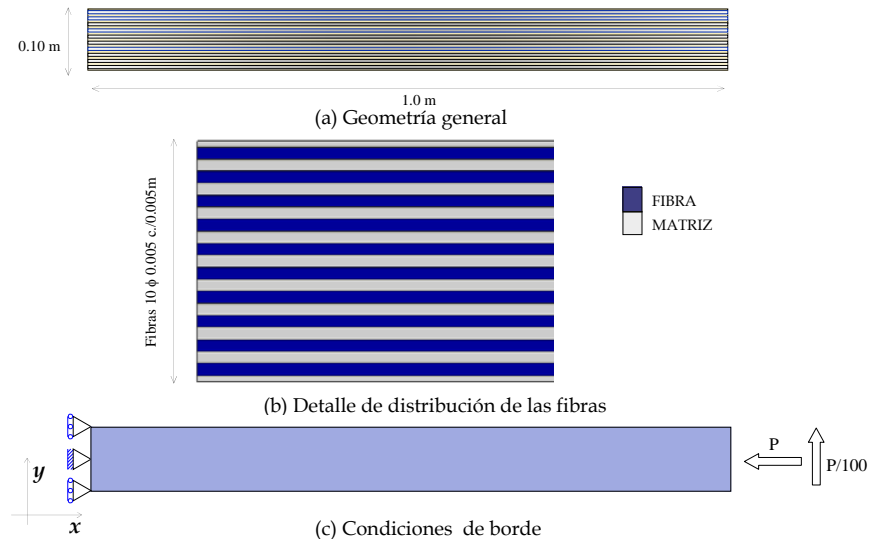


FIGURA 5-29 ESQUEMA DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEJO-COMPRESIÓN

- *Características de las configuraciones solicitadas a flexo-compresión*

Los micromodelos y los macromodelos realizados para la lámina solicitada a flexo-compresión se analizaron en el estado plano de tensiones con elementos lineales de 4 nodos. El efecto de flexo-compresión en la lámina de las configuraciones se hizo por control de carga.

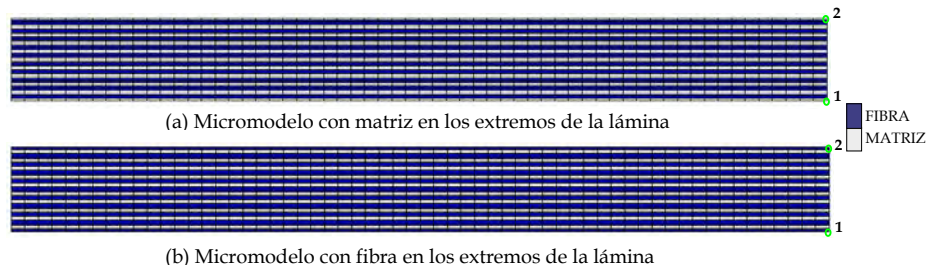


FIGURA 5-30 ESQUEMA REPRESENTATIVO DE LOS MICROMODELOS PARA EL ANÁLISIS DE LA LÁMINA A FLEJO-COMPRESIÓN

Para observar el efecto de la distribución de las fibras y la matriz en el comportamiento del laminado, como se aprecia en la figura 5-30, con un mismo porcentaje de participación volumétrica, los micromodelos se discretizaron con dos distribuciones diferentes: una en que la matriz está en los extremos del laminado, y otra, en el que los extremos corresponden a fibras. Los micromodelos están compuestos por 1260 elementos, 1342 nodos y 2660 grados de libertad. La configuración del mallado de los macromodelos se indica en la figura 5-31, está conformada por 40 elementos, 63 nodos y 122 grados de libertad.

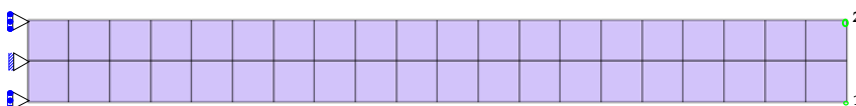


FIGURA 5-31 ESQUEMA REPRESENTATIVO DE LOS MACROMODELOS PARA EL ANÁLISIS DE LA LÁMINA A FLEXO-COMPRESIÓN

En la tabla 5-9 se señalan las propiedades de la matriz y de la fibra utilizadas en las configuraciones analizadas y su participación volumétrica.

Material	Criterio de límite	Participación volumétrica	$E_{xx} = E_{yy} = E_{zz}$ GPa	$\nu$	$\sigma_c$ MPa	$\sigma_t$ MPa	$G_f$ J/m <sup>2</sup>
Matriz polimérica	Mohr-Coulomb	50%	12	0.30	87.5	87.5	36.0
Fibra de Carbono	Von Mises	50%	152	0.00	2300.0	2300.0	2000.0

TABLA 5-9 PROPIEDADES MECÁNICAS DE LOS MATERIALES SIMPLES UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE UNA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN

- *Descripción de los modelos constitutivos aplicados a los materiales componentes*

Con el objetivo de observar las ventajas de aplicar la teoría serie/paralelo en el campo de grandes deformaciones involucrando no linealidades constitutivas de los materiales componentes, considerando dos tipos de matriz, uno frágil y otro dúctil. Para determinar el efecto de considerar la no linealidad constitutiva de los materiales en el comportamiento del compuesto solicitado en el campo de grandes deformaciones, se consideraron diferentes tipos de comportamiento en el análisis de los materiales simples, como se indica a continuación:

- En los macromodelos y los micromodelos, la fibra se analizó como un material elasto-plástico con el algoritmo de Euler.
- La matriz del compuesto, se estudió bajo dos fenómenos en los macromodelos y los micromodelos. Uno en el que se utilizó modelo de daño isotrópico bajo la consideración que la matriz es un material frágil, y otro, en el que la matriz se tomó como un material dúctil en el que se aplicó el modelo elasto-plástico.

En la tabla 5-10 se identifican los modelos constitutivos considerados en los micromodelos, también se especifica el material componente de los extremos. En la tabla 5-11 se señalan los modelos constitutivos aplicados a los macromodelos, los cuales fueron analizados con la teoría de mezclas serie/paralelo en el campo de pequeñas deformaciones (PD) y su adaptación a las grandes deformaciones (GD).

Micromodelos	Material en los extremos	Matriz	Fibra
MP-M	Matriz	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
MD-M	Matriz	Modelo de daño isótropo	Modelo elasto-plástico
MP-F	Fibra	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
MD-F	Fibra	Modelo de daño isótropo	Modelo elasto-plástico

TABLA 5-10 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DE LOS MICROMODELOS

Macromodelos	Campo de análisis	Matriz	Fibra
SP-MP	Grandes deformaciones	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
SP-MD	Grandes deformaciones	Modelo de daño isótropo	Modelo elasto-plástico
SP-MP-PD	Pequeñas deformaciones	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
SP-MD-PD	Pequeñas deformaciones	Modelo de daño	Modelo elasto-plástico

TABLA 5-11 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DE LOS MACROMODELOS ANALIZADOS CON LA TEORÍA DE MEZCLAS SERIE/PARALELO

Adicionalmente con el propósito de comparar el comportamiento resultante entre las teorías de mezclas adaptadas al campo de grandes deformaciones (GD), se estudiaron dos macromodelos con la teoría de mezclas clásica TC-MD y TC-MP correspondientes respectivamente a los macromodelos SP-MD y SP-MP. En la tabla 5-12 se señalan los modelos constitutivos aplicados a los macromodelos analizados con la teoría de mezclas clásica.

Macromodelos	Campo de análisis	Matriz	Fibra
TC-MP	Grandes deformaciones	Modelo elasto-plástico	Modelo elasto-plástico
TC-MD	Grandes deformaciones	Modelo de daño isótropo	Modelo elasto-plástico

TABLA 5-12 NOMENCLATURA DE LAS CONFIGURACIONES DE LOS MACROMODELOS ANALIZADOS CON LA TEORÍA DE MEZCLAS CLÁSICA

En los 10 casos se ha considerado la hipótesis, que hay adherencia inicial perfecta entre las fibras y la matriz.

- *Análisis del comportamiento de las configuraciones de la lámina solicitada a flexo-compresión*

– Rigidez y resistencia de los micromodelos y de los macromodelos

En la figura 5-32 se muestra el desplazamiento horizontal del nodo 1 con respecto a la carga de compresión aplicada a la lámina. El nodo 1 como se observa en la figura 5-30 y figura 5-31 corresponde al nodo de la esquina inferior del extremo libre de la lámina.

Los micromodelos que están conformados por un mismo tipo de material en los extremos de la lámina, tienen un comportamiento similar hasta que se alcanza la carga máxima, independientemente de si la matriz es frágil o dúctil, MD-M $\approx$ MP-M y MD-F $\approx$ MP-F. Por el contrario, el comportamiento de pérdida de rigidez de los micromodelos depende del tipo de matriz; los micromodelos

que tienen un matriz frágil MD-M y MD-F son los que presentan mayor pérdida de rigidez con un comportamiento de ablandamiento inicial diferente; los micromodelos con una matriz dúctil MP-M y MP-F tienen menor pérdida de rigidez con un comportamiento de ablandamiento parecido; la diferencia de pérdida de rigidez entre los micromodelos con matriz dúctil y frágil es aproximada a un 27%. En los macromodelos el nodo 1 presenta una relación de desplazamiento horizontal similar de acuerdo con el campo en que se hizo el análisis, SP-MD-PD≈SP-MP-PD y SP-MD≈SP-MP.

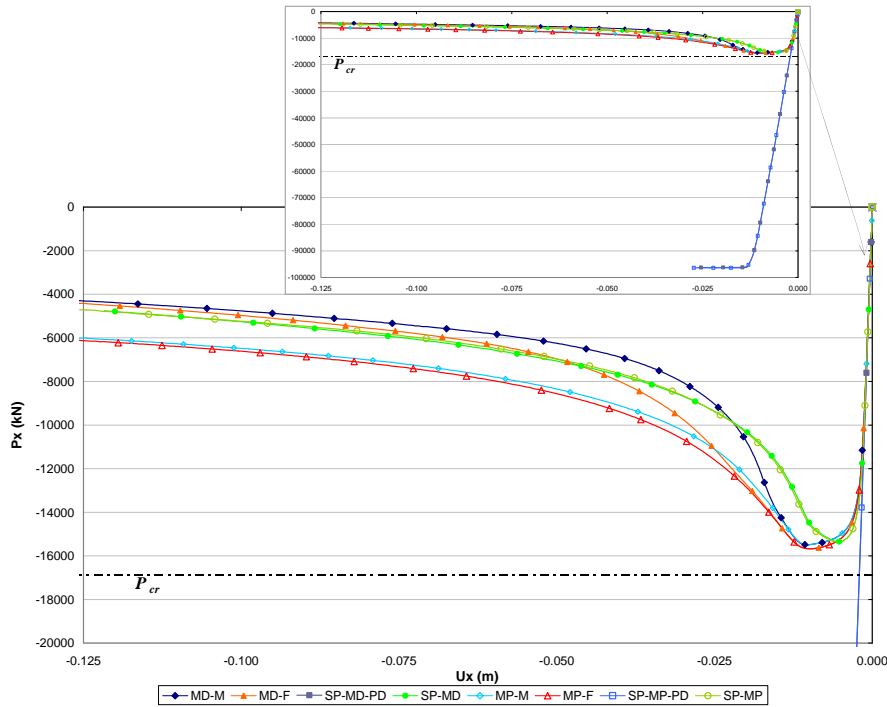


FIGURA 5-32 CURVAS CARGA  $P_x$  - DESPLAZAMIENTO  $U_x$  DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN †

Los macromodelos analizados en el campo de PD, SP-MD-PD y SP-MP-PD, tienen cargas máximas que difieren entre un 615% y un 623% la magnitud de

† Teniendo en cuenta que en este ejemplo, la viga es esbelta y está solicitada a flexo-compresión, se comparan las cargas máximas de los macromodelos con la carga crítica  $P_{cr}$  definida en la teoría de Euler[60], sin considerar la desviación que produce la carga de corte.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 c E_o I}{4l^2} = \frac{\pi^2 ({}^m k_o {}^m E_o + {}^f k_o {}^f E_o) I}{4l^2} = 16860 \text{ kN}$$

$$P_{\max}^{SP-MD} = 15350 \text{ kN}, P_{\max}^{SP-MP} = 15368 \text{ kN}, P_{\max}^{SP-MD-PD} = 96256 \text{ kN}, P_{\max}^{SP-MP-PD} = 96427 \text{ kN}$$

Las cargas máximas de los macromodelos estudiados en el campo de GD se aproximan al valor de la carga crítica  $P_{cr}$ , sólo difieren un 8%. A diferencia de la teoría de Euler, con los macromodelos SP-MD y SP-MP, aparte de considerar la no linealidad geométrica, también se está involucrando la no linealidad de los materiales y los efectos que produce la carga de corte. Las cargas máximas de los macromodelos en el campo de PD se alejan un 570% de la carga crítica aproximadamente, esto se debe a que en los macromodelos SP-MD-PD y SP-MP-PD solo se considera la no linealidad de los materiales.

las carga máxima obtenidas en los micromodelos, además estos sistemas no presentan ablandamiento. Los macromodelos estudiados en el campo de GD, SP-MD y SP-MP, presentan una carga máxima parecida a la de los micromodelos (99%), sin embargo, ocurre con un desplazamiento  $U_x$  menor. La pérdida de rigidez de SP-MD y SP-MP está entre los ablandamientos dados en los micromodelos, aproximándose mejor a MD-F.

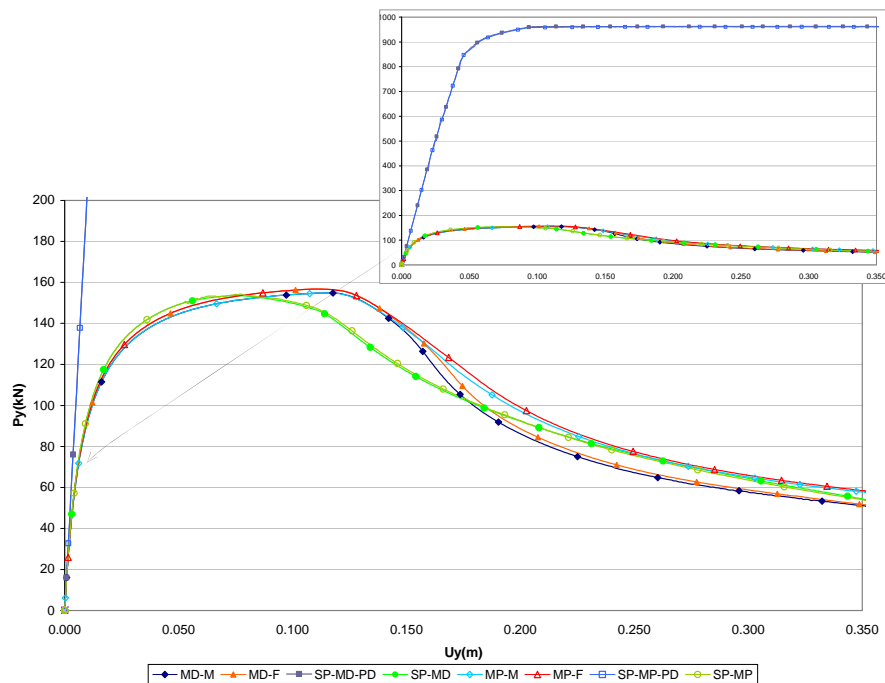


FIGURA 5-33 CURVAS CARGA PY - DESPLAZAMIENTO  $U_y$  DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEJO-COMPRESIÓN

En la figura 5-33 se muestra el desplazamiento vertical del nodo 1 con respecto a la carga de corte aplicada a la lámina. Al igual que sucede en la dirección en  $x$ , en los micromodelos que están conformados por un mismo tipo de material en los extremos de la lámina, tienen un comportamiento similar hasta que se alcanza la carga máxima, independientemente de si la matriz es frágil o dúctil, MD-M $\approx$ MP-M y MD-F $\approx$ MP-F. El comportamiento de pérdida de rigidez de los micromodelos depende del tipo de matriz; los micromodelos que tienen un matriz frágil MD-M y MD-F son los que presentan mayor ablandamiento, aunque la diferencia entre los dos tipos de matriz es menor que en  $x$  (11.9%).

Los macromodelos estudiados en el campo de GD, SP-MD y SP-MP, presentan una carga máxima parecida a la de los micromodelos (99%); el proceso de pérdida de rigidez está entre los procesos de ablandamiento de los micromodelos, pero a diferencia de lo que sucede en  $x$ , en la dirección  $y$  es más parecido al comportamiento del micromodelo MP-M y MP-F.

Los macromodelos analizados en el campo de PD, SP-MD-PD y SP-MP-PD, presentan cargas máximas en  $y$  que difieren entre un 614% y un 622% las cargas máximas determinadas en los micromodelos, tampoco en la dirección  $y$  no presentan ablandamiento. Al comparar este comportamiento con el mostrado en la figura 5-32, se observa que pese a que el desplazamiento  $U_x$  llega apenas los 0.026m, el desplazamiento  $U_y$  alcanza los 0.35m, esto muestra que para este caso en el campo de pequeñas deformaciones, al no involucrar la alineación de las fibras, ni al considerar el cambio de configuración del sistema, se sobre-estima la rigidez de la lámina en  $x$ , y se sub-estima su rigidez en  $y$ .

- Tensiones principales de los micromodelos y de los macromodelos

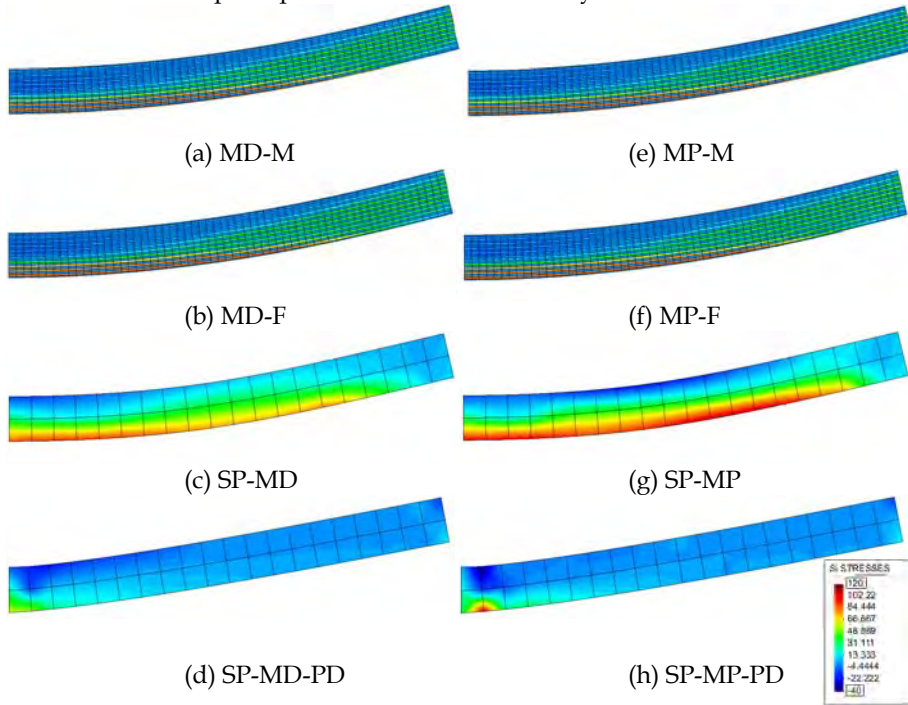


FIGURA 5-34 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES PRINCIPALES EN LA MATRIZ DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEJO-COMPRESIÓN PARA UN  $U_x$  EN EL NODO 2 DE 0.025M. DEFORMADA 1:1

En la figura 5-34 y en la figura 5-35 se muestran las tensiones principales  $\sigma_1$  en la matriz y en las fibras para un desplazamiento del nodo 2 de 0.025m. Se observa que la distribución de las tensiones para ambos materiales en los micromodelos es parecida, aunque las tensiones de MD-F y MP-F son levemente mayores. Los macromodelos SP-MD y SP-MP representan adecuadamente la distribución de tensiones de los micromodelos, aunque tienen pequeñas diferencias, SP-MD presenta menores tensiones de tracción y de compresión a las del macromodelo SP-MP. Los macromodelos estudiados en el campo de GD, SP-MD y SP-MP, conservan un mismo orden de magnitud de las tensiones dadas en los micromodelos para los dos materiales, donde se evidencia que el comportamiento de la matriz es el que predomina en el modo

de fallo de la lámina y que las fibras presentan tensiones máximas cercanas al 92% de su tensión de fluencia.

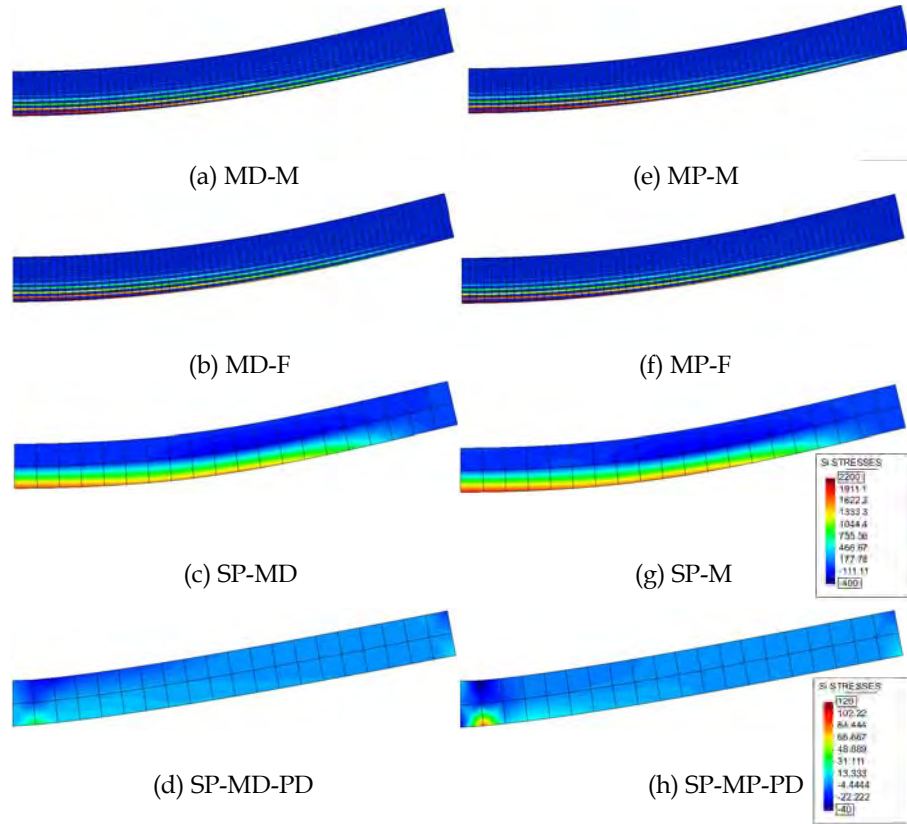


FIGURA 5-35 DISTRIBUCIÓN DE TENSIONES PRINCIPALES EN LAS FIBRAS DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN PARA UN UX EN EL NODO 2 DE 0.025M. DEFORMADA 1:1

Los macromodelos analizados en el campo de PD, SP-MD-PD y SP-MP-PD, presentan una distribución de tensiones diferente a la distribución de los micromodelos, las tensiones principales se concentran en la zona del apoyo o aledaña al apoyo, y son de un menor orden de magnitud. Para la matriz, las tensiones máximas de SP-MD-PD y SP-MP-PD son un 50% y un 33% las tensiones máximas de los micromodelos, y para las fibras las tensiones máximas de SP-MD-PD y SP-MP-PD son un 1.5% y un 4.2% las tensiones a tracción de los micro-modelos, y a compresión corresponden a un 12.2% y a un 22.2% respectivamente. En SP-MD-PD, las tensiones principales en la matriz se concentran en la zona del apoyo; mientras que en las fibras se concentran entre los elementos de apoyo y los aledaños. En SP-MP-PD, las máximas tensiones principales para los dos materiales se concentran en los elementos aledaños a los elementos de apoyo. Para la lámina a flexo-compresión analizada con los macromodelos en el campo de PD, se tiene que las tensiones principales en la fibra conservan un mismo orden de magnitud de las tensiones principales de la matriz.

En este caso acorde con lo enunciado por Bažant y Cedolin [1], es evidente que el cambio drástico de la geometría de la viga introduce no linealidades que aumentan considerablemente las tensiones de los materiales componentes, principalmente las de las fibras, efectos que se consideran con la extensión de la teoría serie/paralelo al campo de las deformaciones finitas. El aumento de las tensiones en los materiales componentes explica la gran diferencia que hay entre las cargas máximas de los macromodelos estudiados en el campo de grandes deformaciones (GD) y los analizados en el campo de pequeñas deformaciones (PD).

– Deformadas de los micromodelos y de los macromodelos

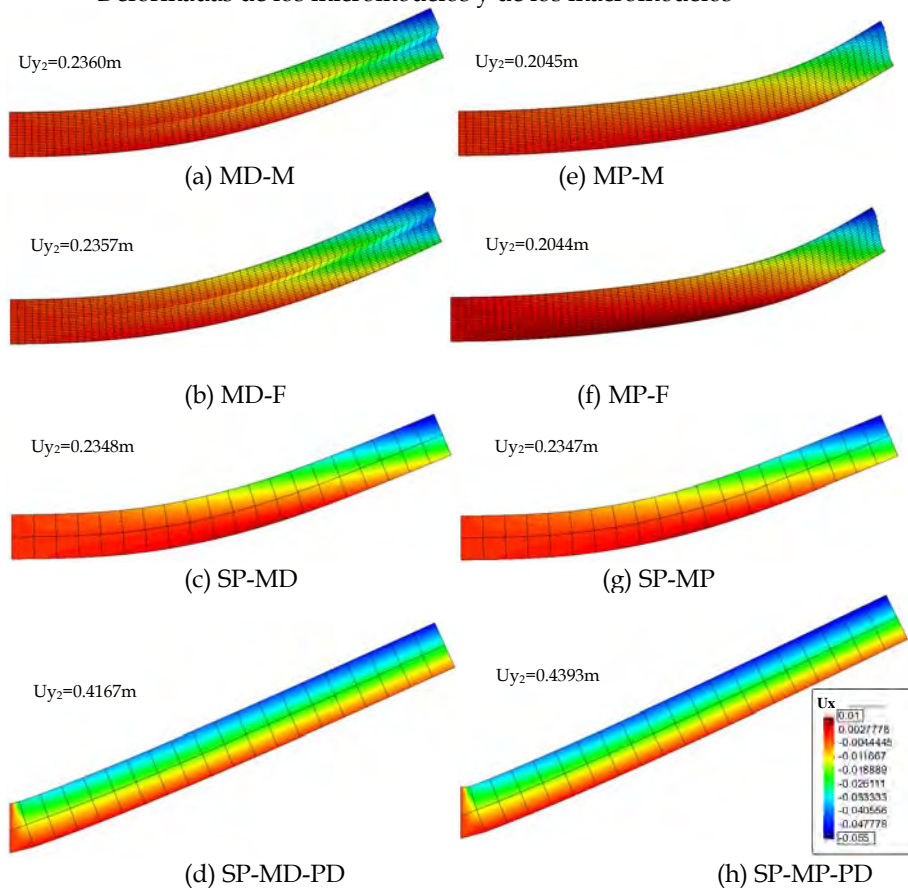


FIGURA 5-36 DISTRIBUCIÓN DE DESPLAZAMIENTOS HORIZONTALES EN LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN PARA UN  $U_x$  EN EL NODO 2 DE 0.05M. DEFORMADA 1:1

En la figura 5-36 se muestra la deformada y la distribución de desplazamientos en  $x$  de la lámina a flexo-compresión para las diferentes configuraciones cuando en el nodo 2 hay un desplazamiento de 0.05m. El nodo 2 como se observa en la figura 5-30 y en la figura 5-31 corresponde al nodo de la esquina



superior del extremo libre de la lámina.

En los macromodelos SP-MD-PD y SP-MP-PD se aprecia la deformación se concentra en los elementos cercanos al apoyo, mientras que en los macromodelos SP-MD y SP-MP la deformación se distribuye entre todos los elementos de una forma similar a la de los micromodelos.

En lo que respecta a las deformadas se evidencia que el comportamiento de ablandamiento de los micromodelos esta regido por el tipo de matriz que esta conformado el compuesto, cuando la matriz es frágil (MD-M y MD-F) se presenta delaminación en la zona central de la lámina, mientras que si la matriz es dúctil (MP-M y MP-F) se presentan pequeños deslizamientos entre las fibras que conducen a que el extremo libre de la lámina pierda su forma rectilínea. Entre los micromodelos compuestos por un mismo tipo de matriz no hay diferencias perceptibles entre las dos distribuciones, MD-M $\approx$ MD-F y MP-M $\approx$ MP-F, es decir que la distribución de las fibras no afecta la deformada global del sistema.

Los macromodelos analizados en el campo de GD tienen deformadas similares, SP-MD $\approx$ SP-MP, y son más parecidas a la deformada de los micromodelos con matriz dúctil. La distribución de desplazamientos en  $x$  se parece más a la de los micromodelos con matriz frágil, incluso el desplazamiento en  $y$  del nodo 2 es del mismo orden de magnitud. Es de resaltar que si bien a través de la adaptación de la teoría serie/paralelo, no se ha involucrado el fenómeno de delaminación o el de deslizamiento, con la baja densidad de la malla de los macromodelos (3.17%) se muestra un comportamiento bastante aproximado al dado en los micromodelos y a un coste computacional bastante menor.

Los macromodelos estudiados en el campo de PD (SP-MD-PD, SP-MP-PD) muestran que la deformada y la distribución de desplazamientos son diferentes a las dadas en los micromodelos, incluso el orden de magnitud de los desplazamientos en  $y$  es bastante mayor al obtenido en los micromodelos, SP-MD-PD es superior un 76% a MD-M y MD-F, y SP-MP-PD es mayor un 114% a MP-M y MP-F.

De acuerdo con estos resultados, es evidente que con los macromodelos estudiados en el campo de grandes deformaciones (GD) están logrando capturar el fenómeno de pandeo, analizando a la vez el comportamiento no lineal de los materiales componentes; por lo tanto, con la adaptación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones se están contemplando inestabilidades que involucran no linealidades cinemáticas y no linealidades constitutivas en los materiales.

- *Análisis del comportamiento de las configuraciones de la lámina solicitada a flexo-compresión*

En la figura 5-37 se muestra el desplazamiento horizontal del nodo 1 con respecto a la carga de compresión, y en la figura 5-38 se señala el desplazamiento vertical del

nodo 1 con respecto a la carga de corte. Tanto por corte como por compresión se observa que los macromodelos analizados con la teoría clásica TC-MD y TC-MP presentan una mayor carga que los macromodelos SP-MD y SP-MP, la diferencia es aproximadamente de un 15%.

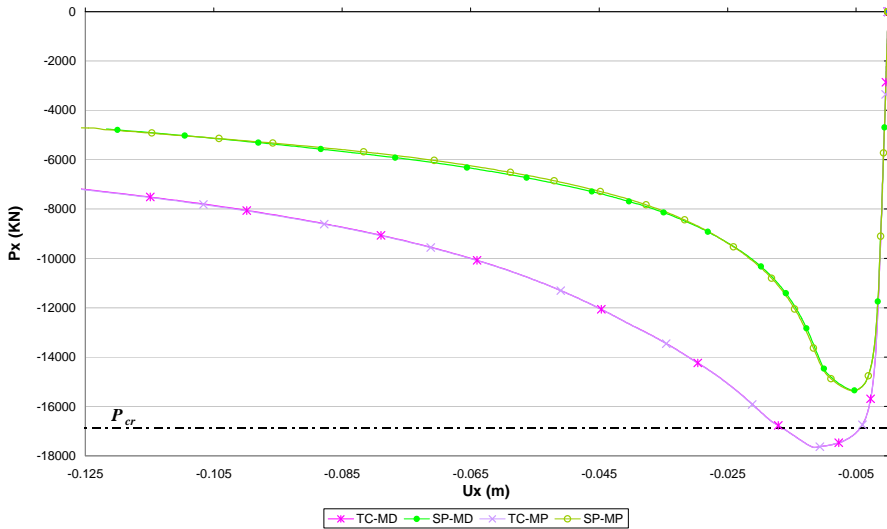


FIGURA 5-37 CURVAS CARGA  $P_x$  - DESPLAZAMIENTO  $U_x$  DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN

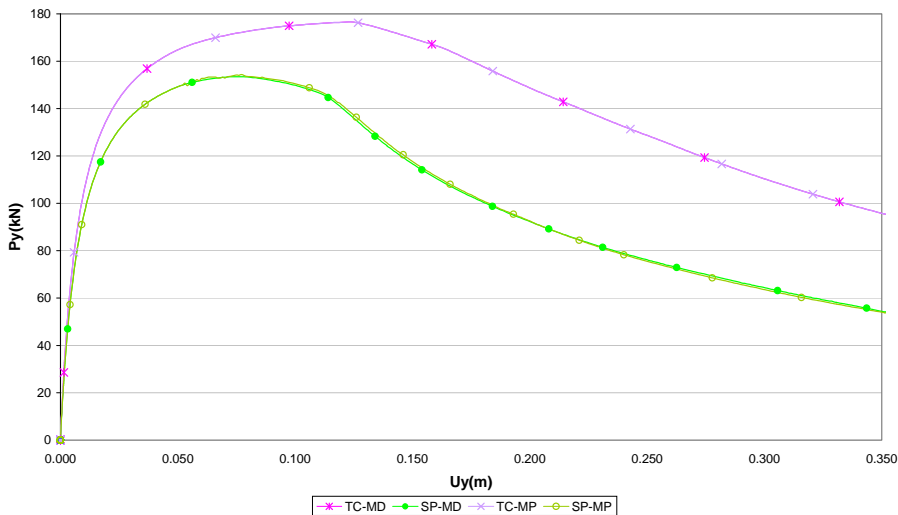


FIGURA 5-38 CURVAS CARGA  $P_y$  - DESPLAZAMIENTO  $U_y$  DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN

Teniendo en cuenta que los macromodelos SP-MD y SP-MP tienen una carga máxima aproximada a la de los micromodelos MD-M, MD-F MP-M y MP-F, se puede ver que a pesar de que con la teoría de mezclas clásica se está considerando la re-orientación de las fibras, la condición de isodeformación en todas las

direcciones limita en la dirección transversal el efecto que tiene la diferencia de comportamiento entre las fibras y la matriz.

Con el objetivo de mostrar las diferencias en la evolución de las variables internas en la figura 5-39 se indica el daño en la matriz de los macromodelos SP-MD y TC-MD, de igual forma en la figura 5-40 se señala el endurecimiento plástico en la matriz de los macromodelos SP-MP y TC-MP. En lo que corresponde al daño, se aprecia que mientras el daño en SP-MD se presenta a lo largo de la viga en la zona flectada, con TC-MD aunque el daño se distribuye hasta el centro de la viga flectada, se concentra en el apoyo. Con respecto al endurecimiento plástico, se tiene que en la zona central inferior de SP-MP se presenta endurecimiento, siendo la zona más deformada, contrario a esto en TC-MP el endurecimiento ocurre en la parte superior e inferior de los elementos cercanos al apoyo.

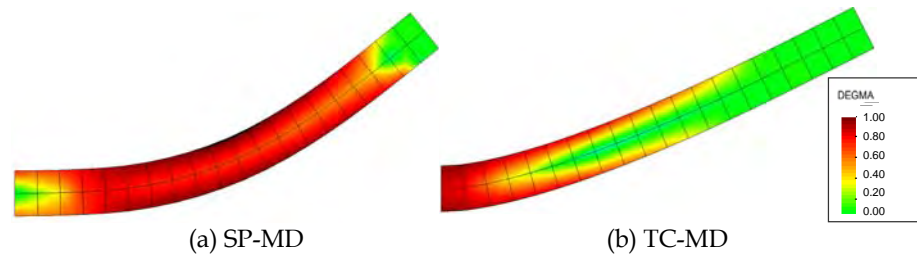


FIGURA 5-39 DISTRIBUCIÓN DEL DAÑO EN LA MATRIZ DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN PARA UN  $\dot{U}_X$  EN EL NODO 2 DE 0.05M. DEFORMADA 1:1

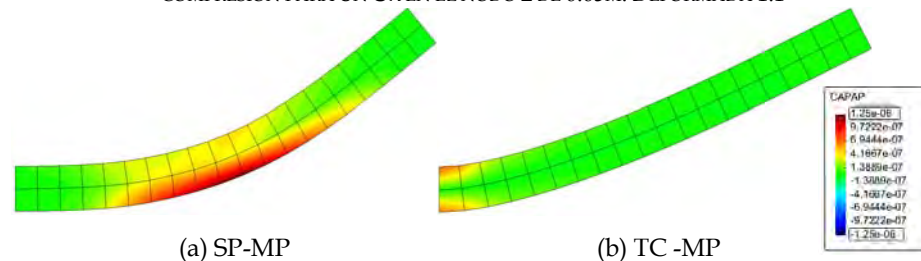


FIGURA 5-40 DISTRIBUCIÓN DEL ENDURECIMIENTO PLÁSTICO EN LA MATRIZ DE LA LÁMINA SOLICITADA A FLEXO-COMPRESIÓN PARA UN  $\dot{U}_X$  EN EL NODO 2 DE 0.05M. DEFORMADA 1:1

Los macromodelos analizados con la teoría serie/paralelo presentan una mayor zona afectada por el daño o por la plasticidad que los estudiados con la teoría clásica. También cabe anotar que para TC-MD y TC-MP los elementos cercanos a los apoyos son los que más se deforman, en cambio para SP-MD y SP-MP los elementos que mas se deforman son los centrales acorde con la curvatura que produce el efecto de flexo-compresión. Esto muestra que con la teoría clásica se subestiman los efectos que tiene la interacción transversal entre la fibra y la matriz, efectos que si se consideran intrínsecamente con la teoría serie/paralelo por las condiciones de equilibrio y compatibilidad.

Con el anterior ejemplo se mostró que con la adaptación de la teoría serie/paralelo al campo de grandes deformaciones y la aplicación de la teoría de mapeo de

espacios, se pueden utilizar diferentes modelos constitutivos formulados para materiales isótropos en el estudio del comportamiento no lineal de los materiales compuestos. Además se pudo observar que aparte de considerar la reorientación de la fibra en el análisis, también se pueden identificar las zonas que pueden presentar fallos en el compuesto frente a una determinada acción.

## 5.8 Conclusiones del capítulo 5

Los estudios experimentales complementados con simulaciones realizadas con elementos finitos, han surgido como técnica de apoyo para los investigadores, debido a que permiten analizar la evolución del fenómeno de forma integral y se evitan sobre-costes; con los ensayos se verifica el comportamiento resultante de las simulaciones, y con las simulaciones se puede contemplar la variación de diferentes parámetros que inciden en el comportamiento del compuesto, sin que esto implique nuevos ensayos. No obstante, se deben mejorar las herramientas numéricas existentes y proponer nuevos modelos que permitan simular con precisión la respuesta no lineal cinemática del material compuesto junto con la no linealidad constitutiva de sus componentes. Considerando las ventajas que presenta la teoría serie/paralelo propuesta por Rastellini [3], se extiende esta teoría de mezclas al campo de grandes deformaciones, como una alternativa para analizar problemas no lineales de materiales compuestos en deformaciones finitas.

La teoría de mezclas clásica o la teoría serie/paralelo adaptadas al campo de grandes deformaciones, aprovechan las formulaciones dadas en la configuración material (referencial) y en la espacial (actual) en los procesos de análisis planteados. En los planteamientos de juntas teorías se recomienda que la integración de la ecuación constitutiva se realice en la configuración espacial y el resto de operaciones se hace en la configuración material. Esta combinación de las formulaciones Lagrangeana total y la actualizada se utiliza debido a que sólo bajo la configuración espacial se conoce la tensión de fluencia o la de rotura de los materiales componentes, mientras que en la configuración material se facilita realizar la verificación del equilibrio ya que el volumen se mantiene constante y no es necesario hacer el seguimiento de la evolución de las cargas.

La adaptación de la teoría de mezclas serie/paralelo al campo de grandes deformaciones permite analizar estructuras conformadas por materiales compuestos que estén solicitadas a no linealidades cinemáticas. Con la adaptación formulada, la teoría de mezclas serie/paralelo puede analizar en forma simultánea, el comportamiento no lineal material y no lineal geométrico de un compuesto. Además, al introducir la teoría de mapeo de espacios en esta adaptación, permite que con la teoría serie/paralelo se pueda estudiar un material compuesto anisótropo en el campo de grandes deformaciones aplicando a sus materiales componentes los modelos constitutivos que han sido formulados en materiales isótropos. Aunque el uso de la teoría de mezclas serie/paralelo en el campo de las deformaciones finitas es potencial, no debe subestimarse el valor que tienen las soluciones analíticas simples, las cuales permiten tener una idea del orden de

magnitud de una determinada respuesta de la estructura, como se mostró en el caso de flexo-compresión con la teoría de Euler.

Las comparaciones entre los micromodelos y los macromodelos muestran que con la teoría de mezclas serie/paralelo extendida al campo de grandes deformaciones se obtienen buenas aproximaciones del comportamiento de las estructuras analizadas. No obstante, es conveniente que se pueda contrastar los resultados obtenidos de las simulaciones con resultados experimentales en estructuras de materiales compuestos solicitadas a grandes cambios de configuración, con el propósito de mejorar las formulaciones planteadas para representar de una forma más precisa el comportamiento de los materiales compuestos con grandes deformaciones. Sin embargo, la búsqueda de ensayos adecuados con la suficiente información para hacer las simulaciones es compleja, por el propio montaje de las pruebas y por la instrumentación requerida para tomar las mediciones apropiadas.

La teoría serie/paralelo aumenta su potencialidad de uso como gestor de modelos constitutivos al ser extendida al campo de grandes deformaciones ya que permite analizar a la vez no linealidades cinemáticas de las estructuras, junto con las no linealidades constitutivas de los materiales que las componen. Con la implementación formulada en este capítulo, la teoría de mezclas serie/paralelo se puede utilizar en el análisis de estructuras de materiales compuestos que estén sujetas a cambios drásticos de su configuración geométrica, además involucra los efectos de alineación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones, haciendo que se refleje en el cambio de la rigidez del compuesto. No obstante, al partir de la hipótesis que la adherencia es perfecta entre los componentes, con esta adaptación aún no se tienen en cuenta las inestabilidades locales que pueden existir en las interfaz fibra/matriz como el deslizamiento elástico relativo entre los componentes, la delaminación o el pandeo de las fibras, por tanto se requiere mayor investigación, para introducir a la teoría serie/paralelo nuevos algoritmos que permitan considerar estos fenómenos en el campo de las deformaciones finitas.

## 5.9 Bibliografía del capítulo 5

- [1] Z.P. Bažant, L. Cedolin. *Stability of structures : elastic, inelastic, fracture and damage theories*. World Scientific Publishing, Toh Tuck Link, Singapore, 2010.
- [2] M. Molina, S. Oller, A. H. Barbat, X. Martínez, "Análisis numérico de estructuras de hormigón reforzadas con FRP por medio de la teoría de mezclas serie/paralelo", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol.26 N°2 (2010).
- [3] F. Rastellini. *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España, (2006).
- [4] F. Rastellini, S. Oller, O. Salomon, E. Oñate. *Composite materials non-linear modelling for long fibre-reinforced laminates: Continuum basis, computational aspects and validations*. *International Journal of Computers & Structures* 86 (9) (2008) 879–896.
- [5] S. Oller. *Dinámica No Lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, CIMNE. Ediciones UPC. Barcelona España. 2001.
- [6] P.A. Salas, D.J. Benson, S. Venkataraman, M.J. Loikkanen. *Numerical Implementation of Polymer Viscoplastic Equations for High Strain-Rate Composite Models*. *Journal of*

- Aerospace Engineering, 22 (3) (2009) 304-309.
- [7] X. Yang, A. Nanni, S. Haug, C. L. Sun. Strength and Modulus Degradation of Carbon Fiber-Reinforced Polymer Laminates from Fiber Misalignment. *Journal of Materials in Civil Engineering ASCE* 14 (4) (2002) 320-326.
- [8] X. Yang, A. Nanni. Concrete Beams Strengthened with Misaligned CFRP Laminates. Non-Metallic Reinforcement for Concrete Structures. In: *Proceedings on the 5th International Symposium On Fiber Reinforced Polymer for Reinforced Concrete Structures (FRPRCS-5)*, Cambridge, UK, (2001) 79-85.
- [9] J. Cao, R. Akkerman, P. Boisse, J. Chen, H.S. Cheng, E.F. de Graaf, J.L. Gorczyca, P. Harrison, G. Hivet, J. Launay, W. Lee, L. Liu, S.V. Lomov, A. Long, E. de Luycker, F. Morestin, J. Padvoiskis, X.Q. Peng, J. Sherwood, Tz. Stoilova, X.M. Tao, I. Verpoest, A. Willems, J. Wiggers, T.X. Yu, B. Zhu. Characterization of mechanical behavior of woven fabrics: Experimental methods and benchmark results. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 39 (6) (2008) 1037-1053.
- [10] K. Croft, L. Lessard, D. Pasini, M. Hojjati, J. Chen, A. Yousefpour. Experimental study of the effect of automated fiber placement induced defects on performance of composite laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* (2011) doi:10.1016/j.compositesa.2011.01.007.
- [11] R. Joffe, D. Mattsson, J. Modniks, J. Varna. Compressive failure analysis of non-crimp fabric composites with large out-of-plane misalignment of fiber bundles. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 36 (8) (2005) 1030-1046.
- [12] Z.P. Bazant, M.D. Adley, I. Carol, M. Jirásek, S. A. Akers, B. Rohani, J. D. Cargile, F. C. Caner. Large-Strain Generalization of Microplane Model for Concrete and Application. *Journal of Engineering Mechanics ASCE* 126 (9) (2000) 971-980.
- [13] D. Anggawidjaja, T. Ueda, J. Dai, H. Nakai. Deformation capacity of RC piers wrapped by new fiber-reinforced polymer with large fracture strain. *Cement and Concrete Composites* 28 (10) (2006) 914-927.
- [14] A. Parvin, W. Wang Behavior of fiber reinforced plastic jacketed concrete columns under eccentric loading *Journal of Composites for Construction ASCE* 5 (3) (2001) 146-152.
- [15] O. Ozcan, B. Binici, G. Ozcebe. Improving seismic performance of deficient reinforced concrete columns using carbon fiber-reinforced polymers. *Engineering Structures*.30 (6) (2008) 1632-1646.
- [16] A. De Luca; F. Nardone; F. Matta, A. Nanni, G.P. Lignola, A. Prota. Structural Evaluation of Full-Scale FRP-Confined Reinforced Concrete Columns. *Journal of Composites for Construction ASCE* 15 (1) (2011) 112-123.
- [17] S.H. Alsayed, Y.A. Al-Salloum, T.H. Almusallam, N.A. Siddiqui. Seismic Response of FRP-Upgraded Exterior RC Beam-Column Joints. *Journal of Composites for Construction ASCE* 14 (2) (2010) 195-218 .
- [18] B. Li, H.Y.G. Chua. Seismic Performance of Strengthened Reinforced Concrete Beam-Column Joints Using FRP Composites. *Journal of Composites for Construction ASCE* 135 (9) (2009) 1177-1190.
- [19] A. Parvin, S. Wu. Ply angle effect on fiber composite wrapped reinforced concrete beam-column connections under combined axial and cyclic loads. *Composite Structures* 82 (4) (2008) 532-538.
- [20] A. Ghobarah, T. El-Amoury. Seismic rehabilitation of deficient exterior concrete frame joints. *Journal of Composites for Construction*.9 (5) (2005) 408-416.
- [21] B. Zhu, T.X. Yu, X.M. Tao. Large deformation and slippage mechanism of plain woven composite in bias extension. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 38 (8) (2007) 1821-1828.
- [22] B. Zhu, T.X. Yu, X.M. Tao. An experimental study of in-plane large shear deformation of woven fabric composite. *Composites Science and Technology* 67 (2) (2007) 252-261.
- [23] S. Flores, A.G. Evans, F.W. Zok, M. Genet, B. Cox, D. Marshall, O. Sudre, Q. Yang

- Treating matrix nonlinearity in the binary model formulation for 3D ceramic composite structures *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing* 41 (2) (2010) 222-229.
- [24] P. Xue, J. Cao, J. Chen. Integrated micro/macro-mechanical model of woven fabric composites under large deformation. *Composite Structures* 70 (1) (2005) 69-80.
- [25] K. S. Krishnamurthy, P. Mahajan, R. K. Mittal. Impact response and damage in laminated composite cylindrical shells. *Composite Structures* 59 (1) (2003) 15-36.
- [26] T.-W. Shyr, Y.-H. Pan. Impact resistance and damage characteristics of composite laminates. *Composite Structures* 62 (2) (2003) 193-203.
- [27] M. Sayer, N.B. Bektaş, O. Sayman. An experimental investigation on the impact behavior of hybrid composite plates. *Composite Structures* 92 (5) (2010) 1256-1262.
- [28] Y. Zhang, P. Zhu, X. Lai. Finite element analysis of low-velocity impact damage in composite laminated plates. *Materials & Design* 27 (6) (2006) 513-519.
- [29] X. Oliver Olivella, C. Agelet de Saracibar Bosch. *Mecánica de medios continuos para ingenieros*. Ediciones UPC, Barcelona, España, 2004.
- [30] J. Bonet, R.D. Wood. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. Cambridge University Press, 2nd Ed., Cambridge, UK, 2008.
- [31] G.A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics : a continuum approach for engineering*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2000.
- [32] T. Belytschko, W.K. Liu, B. Moran. *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 2000.
- [33] E. Car, S. Oller, E. Oñate. *Tratamiento Numérico de Materiales Compuestos*. Monografía CIMNE No.57. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería - CIMNE, Barcelona, España, 2000.
- [34] M.A. Crisfield. *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol.1. John Wiley & Sons. Chichester, UK, 1991.
- [35] J.E. Marsden, T. Jr. Hughes. *Mathematical foundations of elasticity*. Dover Publications, New York, USA, 1994.
- [36] J. Bonet, A.J. Burton. A simple orthotropic, transversely isotropic hyperelastic constitutive equation for large strain computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 162 (1-4) (1998) 151-164.
- [37] J. Lu, P. Papadopoulos. A covariant formulation of anisotropic finite plasticity: theoretical developments. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 193 (48-51) (2004) 5339-5358.
- [38] G.A. Holzapfel, T.C. Gasser. A viscoelastic model for fiber-reinforced composites at finite strains: Continuum basis, computational aspects and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 190 (34) (2001) 4379-4403.
- [39] R.H.W. Ten Thije, R. Akkerman, J. Huétink . Large deformation simulation of anisotropic material using an updated Lagrangian finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 196 (33-34) (2007) 3141-3150.
- [40] M.A. Khan, T. Mabrouki, E. Vidal-Sallé, P. Boisse. Numerical and experimental analyses of woven composite reinforcement forming using a hypoelastic behaviour. Application to the double dome benchmark. *Journal of Materials Processing Technology* 210 (2) (2010) 378-388.
- [41] P. Badel, E. Vidal-Sallé, P. Boisse. Large deformation analysis of fibrous materials using rate constitutive equations. *Computers & Structures* 86 (11-12) 2008 1164-1175.
- [42] J. Huétink. On anisotropy, objectivity and invariancy in finite thermo-mechanical deformations. In: *Proceedings on the 9th International ESAFORM Conference on Material Forming*, U.K. Publishing House Akapit, Krakow, Poland, (2006), 355- 358.
- [43] S. Klinkel, C. Sansour, W. Wagner. An anisotropic fibre-matrix material model at finite elastic-plastic strains. *Computational Mechanics* 35 (6) (2005) 409-417.
- [44] B. Nedjar An anisotropic viscoelastic fibre-matrix model at finite strains: Continuum formulation and computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and*

Engineering 196 (9-12) (2007) 1745-1756.

[45] T.D. Nguyen, R.E. Jones, B.L. Boyce. Modeling the anisotropic finite-deformation viscoelastic behavior of soft fiber-reinforced composites. *International Journal of Solids and Structures* 44 (25-26) (2007) 8366-8389.

[46] S. Oller. *Simulación Numérica del Comportamiento Mecánico de los Materiales Compuestos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería-CIMNE, Barcelona, España, 2003.

[47] E. Car, S. Oller, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic constitutive model for large strain analysis of fiber reinforced composite materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 185 (2-4) (2000) 245- 277

[48] S. Oller, S. Botello, J. Miquel, E. Oñate. An anisotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation. *Engineering Computations* 12 (3) (1995) 245-262.

[49] E. Car, S. Oller, E. Oñate. Plasticidad en grandes deformaciones para materiales compuestos anisótropos Parte I: Formulación Teórica. In AMCA (Ed.) *Actas del VI Congreso argentino de mecánica computacional. MECOM'99, Argentina*. 218-220.

[50] E. Car, F. Zalamea, S. Oller, J. Miquel, E. Oñate. Numerical simulation of fiber reinforced composites-Two procedures. *International Journal of Solids and Structures* 39 (7) (2002) 1967-1986.

[51] E. Car, S. Oller, E. Oñate. A large strain plasticity for anisotropic materials-composite material application. *International Journal of Plasticity* 17 (11) (2001) 1437-1463.

[52] S. Oller, E. Oñate, J. Miquel, S. Botello. A plastic damage constitutive model for composite materials. *International Journal of Solids and Structures*, 33 (17) (1996) 2501-2518.

[53] J. Lubliner. *Plasticity Theory*. Macmillan Publishing, New York, USA, 1990.

[54] E. Car. *Modelo constitutivo continuo para el estudio del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Ph.D. thesis. Universidad Politécnica de Cataluña. Barcelona, España. Directores: S. Oller y E. Oñate (2000).

[55] M. Molina, "Estudio numérico de la adherencia de los materiales compuestos como refuerzo en estructuras de hormigón armado", *Master en Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España, (2009).

[56] M. Molina, J. Cruz, S. Oller, A. Barbat, L. Gil., *Estudio numérico-experimental de la interfaz hormigón-epoxi-FRP para una estructura reforzada sometida a doble cortadura*, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. In press. Vol 28 N°1 (2012).

[57] X. Martínez, S. Oller, F. Rastellini, A. Barbat. A numerical procedure simulating RC structures reinforced with FRP using the serial/parallel mixing theory. *Computers and Structures* 86 (15-16) (2008) 1604-1618.

[58] E. Oñate, L. Neamtu, S. Oller. Generalization of a classical mixing theory for analysis of composite materials. In . *International Conference on Advances in Computational Engineering Science (ICES'97)*. Eds N.S. Atluri y G. Yagawa. Georgia, USA: Tech. Science Press (1997).

[59] M.W. Hyer. *Stress analysis of fiber-reinforced composite materials*. Contributions on fibers, matrices, interfaces, and manufacturing by S.R. White. DEStech Publications, Inc. PA, USA, 2009.

[60] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice Hall. New Jersey USA, 1996.



# Capítulo 6

---

## Conclusiones y futuras líneas de investigación

---

### 6.1 Conclusiones

En la simulación numérica, la estrategia de las teorías de mezclas junto con las herramientas que la complementan, es una herramienta versátil en el análisis tanto de estructuras de hormigón armado reforzadas con FRP, como de estructuras de materiales compuestos. Esta estrategia presenta diferentes aspectos relevantes, entre los que pueden mencionarse:

- Con la metodología de los elementos finitos y los principios de la mecánica de medios continuos, se acopla el comportamiento no lineal y cinemático de los materiales simples y de los materiales compuestos en cada punto de Gauss, al resto de la estructura. Esto permite definir el comportamiento global de la estructura considerando los diferentes efectos locales y mecanismos de fallo que se presentan en los materiales que la componen.
- Con las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, se define el comportamiento de los materiales compuestos considerando la respuesta no lineal constitutiva y cinemática de todos los materiales componentes.

Estas teorías de mezclas fueron adaptadas con modelos complementarios para el análisis de inestabilidades microestructurales producidas por el pandeo de fibras y la delaminación en los materiales compuestos reforzados con fibras largas. Con este trabajo se introdujeron en las dos teorías el efecto microestructural producido por el deslizamiento relativo entre las fibras y la matriz (DFM) para distintos tipos de materiales compuestos, en los que el DFM se puede presentar por el fallo de la matriz, de las fibras ó de la interfaz fibra-matriz.

De otra parte, con las teorías de mezclas al homogenizar el material compuesto, no se requiere en la simulación particularizar un espacio específico para los componentes del compuesto, lo que hace que haya un

mallado menos restringido por la distribución y orientación de los componentes. Por consiguiente, con esta estrategia los mallados de las modelizaciones son menos densos.

- Con el mapeo de espacios, como herramienta complementaria, los materiales anisótropos de la estructura (materiales simples y los componentes de los compuestos) se analizan con modelos constitutivos isotropos, lo que implica el uso formulaciones sencillas y con menores costos computacionales en la resolución de problemas planteados en los campos de pequeñas y grandes deformaciones.
- Con los modelos constitutivos se puede considerar el comportamiento no lineal de todos materiales que componen las estructuras. Lo que permite que se seleccione en cada material el modelo que mejor represente su comportamiento para obtener una aproximación más precisa en la simulación.

Con los modelos constitutivos se tiene la ventaja que al distribuir en el mallado de elementos finitos los efectos de la fisuración, la rotura y la plasticidad entre otros, el comportamiento de los materiales que componen la estructura se analiza desde un punto de vista fenomenológico, sin que se requiera hacer remallados, o utilizar mallados muy finos, conduciendo a menores costos computacionales.

### 6.1.1 Conclusiones científicas

- *Estrategia de la teoría de mezclas*

A través del uso, de las mejoras y de las modificaciones realizadas en las teorías de mezclas, se muestra que la estrategia de la teoría de mezclas en las simulaciones numéricas permite tener una aproximación más precisa del comportamiento real de las estructuras reforzadas con FRP y estructuras conformadas por materiales compuestos. Por lo tanto, esta estrategia es una herramienta para mejorar los análisis, y, se optimizar las configuraciones de refuerzo en los diseños de elementos estructurales que requieren ser reparados o rehabilitados.

Aunque la estrategia de la teoría de mezclas permite tener una información integral de los mecanismos de fallo de la estructura y de sus materiales componentes, no debe subestimarse el valor que tienen las soluciones analíticas simples, que permiten tener una idea del orden de magnitud de una determinada respuesta de la estructura analizada.

- *Metodología de simulación de la interfaz hormigón-epoxi-FRP*

Si bien el FRP como refuerzo aumenta la capacidad de carga de los

elementos estructurales, puede reducirse su ductilidad, si el mecanismo de fallo de los elementos esta gobernado por la pérdida de adherencia entre el laminado y el hormigón. En esta investigación se planteó una metodología para simular el comportamiento de la interfaz hormigón-epoxi-FRP en los ensayos de adherencia.

Con esta metodología se señaló la importancia en el análisis del comportamiento de la interfaz de: (i) utilizar modelos tridimensionales en los ensayos de adherencia, (ii) aplicar las teorías de mezclas en la simulación de los materiales compuestos, (iii) tener en cuenta el comportamiento no lineal de todos los materiales que componen la interfaz, y, (iv) considerar el epoxi o adhesivo como una tercera entidad material de la interfaz.

Se mostró que con la estrategia planteada se tiene un instrumento que permite analizar de una forma integral, la interacción entre el hormigón, el epoxi y el FRP, así como, su incidencia en los mecanismos de fallo que inducen el deslizamiento del refuerzo.

- *Modelo constitutivo de las teorías de mezclas con DFM*

Con las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo, se formuló un modelo generalizado que permite considerar los diferentes mecanismos de pérdida de adherencia fibra-matriz que se generan en los materiales compuestos reforzados con fibras largas.

Teniendo en cuenta que el DFM se presenta al perderse la compatibilidad de deformaciones entre los componentes del compuesto, para mantener las ecuaciones de cierre de cada teoría, en el modelo propuesto se realiza una corrección de las propiedades en cada componente del compuesto, donde el avance progresivo del (DFM) se define acorde con el comportamiento del componente menos resistente.

Asimismo, con la formulación planteada, los modelos constitutivos definen el comportamiento de cada componente, y limitan su capacidad acorde con el DFM presentado, con esta limitación consideran el efecto del DFM en la transferencia de esfuerzos entre las fibras y la matriz.

El modelo propuesto con las teorías de mezclas introduce el fenómeno microestructural el DFM en el compuesto dentro del análisis global de la estructura; además, permite simular el avance progresivo del DFM en los materiales compuestos bajo cargas incrementales y cargas cíclicas.

- *Formulación de la teoría serie paralelo en grandes deformaciones*

La teoría serie/paralelo propuesta tiene gran potencial de uso como gestor de modelos constitutivos, ya que aparte utilizarse para el análisis de

estructuras de materiales compuestos sujetas al campo de pequeñas deformaciones, con el modelo propuesto en este trabajo, se pueden analizar también, estructuras de materiales compuestos que se rigen en el campo de grandes deformaciones y/o grandes desplazamientos.

Con la adaptación formulada en el campo de grandes deformaciones, la teoría de mezclas serie/paralelo puede analizar en forma simultánea, el comportamiento no lineal cinemático y constitutivo de los materiales compuestos. Además, por el desarrollo de la formulación, intrínsecamente se está introduciendo la reorientación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones, uno de los principales factores de los cambios cinemáticos en los compuestos.

No obstante, bajo la hipótesis que la adherencia es perfecta entre los componentes, con esta adaptación en deformaciones finitas, aún no se tienen en cuenta las inestabilidades microestructurales como el DFM, la delaminación y el pandeo de las fibras, por lo tanto se requiere mayor investigación, para formular algoritmos que introduzcan estos fenómenos en las teorías de mezclas adaptadas al campo de grandes deformaciones.

#### 6.1.2 Conclusiones tecnológicas

- *Estrategia de la teoría de mezclas*

La estrategia de la teoría de mezclas junto con las herramientas complementarias, permite analizar estructuras con diferentes alternativas de refuerzo; asimismo, permite que se seleccionen las configuraciones más eficientes y se determine la capacidad de resistencia del sistema estructural reforzado, identificando el nivel de daño que se puede alcanzar.

En el caso de estudiar una estructura reparada, se pueden considerar las limitaciones que ocasionan el daño, la plasticidad y el estado de deformación de los elementos de la estructura sin reforzar, por consiguiente, es posible establecer, de una forma objetiva, el grado de eficiencia de las configuraciones de refuerzo propuestas para la reparación.

Esta aplicación es posible a dos escalas: una local, en donde se estudian los elementos estructurales, en la que los materiales compuestos se utilizan como refuerzo a cortante, a flexión y/o a compresión; y una escala global, en la que se analiza el comportamiento de la estructura reforzada.

- *Simulación con las teorías de mezclas y ensayos de experimentales*

El comportamiento de las estructuras en hormigón armado reforzadas con FRP depende de múltiples parámetros, esto dificulta estudiar de una forma integral los mecanismos de fallo que se generan en la estructura y en su

refuerzo, partiendo sólo de la medición experimental.

Una estrategia eficaz para analizar en forma detallada el comportamiento no lineal de estructuras reforzadas con materiales compuestos es la interacción entre la experimentación y la simulación numérica con elementos finitos.

Esta estrategia permite analizar la evolución los mecanismos de fallo de forma integral y se evitan sobre-costes; con los ensayos se verifica el comportamiento resultante de las simulaciones, y con las simulaciones se puede contemplar la variación de diferentes parámetros que inciden en el comportamiento de los materiales compuestos, sin que esto implique nuevos ensayos.

Con los diferentes ejemplos tratados en este documento se muestra que la simulación con las teorías de mezclas clásica y serie/paralelo permiten analizar a nivel global y local el comportamiento de las estructuras (reforzadas con FRP y compuestas), y de los materiales que la componen, para obtener información que no se puede medir en los ensayos.

- *Reparación y/o rehabilitación con FRP*

Con la reparación y/o rehabilitación de los elementos estructurales de hormigón armado con FRP se aumenta la resistencia global de la estructura. El aumento de la capacidad de la estructura y la reducción de la pérdida de rigidez por el refuerzo, depende tanto de la configuración de refuerzo de FRP que se seleccione, como del estado y de la configuración de la estructura original.

En lo que respecta a la ductilidad, cabe anotar que su aumento depende de la distribución de la armadura; si la armadura es insuficiente, el refuerzo con FRP incrementa considerablemente la ductilidad del sistema; pero si la armadura aporta por si misma ductilidad al sistema, al reforzarlo el incremento de su ductilidad es imperceptible. Aunque, la ductilidad en los elementos reforzados con FRP puede reducirse, si el mecanismo de fallo esta gobernado por la pérdida de adherencia entre el laminado y el hormigón, o por la rotura del refuerzo.

De otra parte, es necesario tener en cuenta que el refuerzo puede cambiar el modo de fallo de los elementos estructurales, lo fundamental es garantizar que la estructura de hormigón armado pueda resistir las tensiones que origina la configuración de refuerzo que se seleccione.

- *Metodología de simulación de la interfaz hormigón-epoxi-FRP*

Los ensayos de adherencia permiten analizar diferentes mecanismos de fallo que se pueden presentar con la pérdida de adherencia de la interfaz

hormigón-epoxi-FRP. La selección de efectuar un determinado ensayo de adherencia depende de lo que se pretenda estudiar.

Al complementar los análisis experimentales con la estrategia propuesta para simular los ensayos de adherencia, se estudia de una forma detallada el comportamiento de las interfaces hormigón-epoxi y epoxi -FRP.

El uso complementario de esta metodología a los ensayos de adherencia, permite que a lo largo de las zonas reforzadas se analice: la transmisión de esfuerzos, la evolución de la distribución de tensiones en todos materiales que componen la interfaz, y el avance progresivo de los mecanismos de fallo que generan el despegue del FRP, el desprendimiento del hormigón, o, la rotura del FRP, entre otros. También se puede examinar los efectos locales que se presentan en los extremos donde se adhiere el refuerzo y que son producidos por la acción conjunta del arrancamiento y tracción en el laminado.

En la simulación de los ensayos de adherencia por corte doble y por flexión se comprobó que pese a que el epoxi y el FRP tienen mayor resistencia que el hormigón, su comportamiento no es lineal, por estar interactuando con el hormigón fisurado, y por ser susceptibles al daño y/o a la plasticidad en las zonas donde hay concentración de tensiones.

- *Modelo constitutivo de las teorías de mezclas con DFM*

El potencial del modelo propuesto para introducir el DFM en las teorías de mezclas está en que se tiene en cuenta que el avance del DFM afecta el comportamiento de los compuestos de diferente forma, ya que sus efectos dependen del fenómeno que se presente en cada componente (elasto-plasticidad, visco-plasticidad y otros), además de otros factores, entre ellos pueden enunciarse: las proporciones volumétricas y las propiedades mecánicas de los componentes, las direcciones de orientación de las fibras y las condiciones en que se aplican las cargas.

Desde un enfoque fenomenológico, con este modelo quedan introducidos los efectos del DFM, con lo cual se tienen macromodelos que simulan con una buena aproximación el comportamiento de los compuestos al estar sujetos a acciones que inducen el DFM, y que además demanda menores costos computacionales a los requeridos con los micromodelos.

Con el modelo propuesto, en las simulaciones se captura el proceso de redistribución en la transferencia esfuerzos entre las fibras y la matriz, al afectarse la interacción por daño y/o plasticidad en uno de ellos; asimismo se logra representar la incidencia del mecanismo de fallo que genera el DFM del compuesto en el comportamiento global de la estructura, en particular en la pérdida de resistencia y de rigidez.

- *Formulación de la teoría serie paralelo en grandes deformaciones*

La adaptación de la teoría de mezclas serie/paralelo al campo de grandes deformaciones permite analizar estructuras conformadas por materiales compuestos que estén solicitadas a no linealidades cinemáticas.

La teoría serie/paralelo aumenta su potencialidad de uso como gestor de modelos constitutivos al ser extendida al campo de grandes deformaciones. Con la implementación formulada, la teoría de mezclas serie/paralelo se puede utilizar en el análisis de estructuras de materiales compuestos que estén sujetas a cambios drásticos de su configuración geométrica, junto con los efectos de alineación de las fibras en la dirección de las mayores tensiones, haciendo que se refleje en el cambio de la rigidez y resistencia del compuesto.

En este trabajo se le brinda al analista estructural un grupo de formulaciones constitutivas y de estrategias, que en su conjunto, son una herramienta para la simulación numérica, que permite un análisis integral de los materiales compuestos y de las estructuras, para predecir su comportamiento y mecanismos de fallo. Esto es apenas una muestra de que los materiales compuestos en las estructuras es un campo con gran proyección, por lo tanto, es un reto permanente el optimizar las estrategias simulación.

## 6.2 Futuras líneas de investigación

Partiendo del desarrollo de esta tesis han surgido algunas inquietudes para mejorar y generalizar los modelos y las metodologías propuestas, entre ellas se pueden destacar :

- *Estrategia de la teoría de mezclas*

Es conveniente incorporar los fenómenos térmicos en las formulaciones para analizar el comportamiento de los materiales compuestos de una forma más integral, de tal forma que se puedan tratar diferentes casos termomecánicos. Dadas las ventajas que presentan las teorías de mezclas en el estudio de estructuras reforzadas con FRP y las conformadas por compuestos, es conveniente que se puedan modelizar estructuras que pueden estar solicitadas a cambios extremos de temperatura, o estar sujetas en un medio de altas temperaturas como sucede con algunas estructuras industriales.

De otra parte, para generalizar la estrategia de la teoría de mezclas es necesario extender las formulaciones a compuestos con refuerzo de fibras cortas, y así poder analizar con las teorías de mezclas, el comportamiento de las estructuras de materiales compuestos reforzados con fibras cortas.

- *Metodología de simulación de la interfaz hormigón-epoxi-FRP*

El desarrollo de los lineamientos en el diseño del refuerzo de vigas y uniones de hormigón armado reforzadas con FRP requiere entender el proceso de pérdida de adherencia de la interfaz para evitar mecanismos de fallo súbitos. Dado que la distribución de tensiones y la transmisión de esfuerzos en la interfaz es de difícil medición, es necesario extender la aplicación de la metodología propuesta para simulación de ensayos de adherencia, a la simulación de ensayos de vigas y uniones en los que se estudie el comportamiento de la interfaz.

La idea de extender la metodología de simulación de la interfaz tiene como propósito establecer la relación entre los análisis de los ensayos de adherencia y el comportamiento de la interfaz en los elementos reforzados. Esto en aras de interpretar adecuadamente la información obtenida en los ensayos de adherencia y las correspondientes simulaciones.

Además el identificar las similitudes y diferencias del comportamiento de la interfaz entre los ensayos de adherencia y los ensayos en elementos reforzados, permite que se pueda establecer para cada tipo de ensayo de adherencia los casos estructurales en que sus resultados son aplicables.

- *Estructuras conformadas por otros tipos de materiales compuestos*

El comportamiento de los compuestos tejidos es más complejo que el de los compuestos laminados, por los efectos del entramado de las fibras en la distribución de esfuerzos y en la transmisión de tensiones. Es pertinente analizar la posibilidad de aplicar la estrategia de las teorías de mezclas para estudiar los compuestos tejidos, donde además es necesario evaluar la forma de considerar que las fibras no son rectas por el entramado de los tejidos.

Estas metodologías y formulaciones tienen la posibilidad de extenderse a otros tipos de materiales compuestos diferentes del hormigón armado y al FRP. Previa adaptación (modificaciones y mejoras) y validación de los modelos formulados, es posible que se pueda aplicar a construcciones históricas, o, edificaciones que fueron construidas con otro tipo de material que se considere como material compuesto reforzado con fibras, como la madera o la guadua, asimismo, podrían utilizarse en el análisis de las estructuras construidas con nuevos tipos de materiales.

- *Contrastación experimental de los modelos formulados*

Desde el punto de vista de los modelos constitutivos, es conveniente que todas las modificaciones y mejoras estén acompañadas de una serie de ensayos experimentales, con el propósito de mejorar las formulaciones planteadas y lograr representar de una forma más precisa el comportamiento de los materiales compuestos.



Los modelos de extensión teoría serie/paralelo en grandes deformaciones, y de adaptación de las teorías de mezclas para introducir el DFM, muestran precisión con respecto a los análisis de los micromodelos; sin embargo, es conveniente que se puedan contrastar con resultados experimentales.

En el campo de grandes deformaciones, la búsqueda de ensayos adecuados con la suficiente información para hacer las simulaciones de los materiales compuestos en deformaciones finitas es compleja, por el propio montaje de las pruebas y por la instrumentación requerida para tomar las mediciones apropiadas.

Mientras que en el caso del DFM, actualmente no es posible obtener la información necesaria para la simulación de un material compuesto, debido a que a nivel experimental hay una limitación tecnológica. Los ensayos en los que se registra el avance progresivo del DFM, corresponden a probetas de una sola fibra embebida en una matriz, las cuales no reflejan los mecanismos conjuntos que se generan en los compuestos manufacturados, además no existe la instrumentación que permita medir el DFM en un compuesto conformado por varias fibras.

Frente a las limitaciones encontradas, en los dos casos es conveniente buscar ensayos alternos que permitan contrastar con datos experimentales, de una forma indirecta, el comportamiento de los compuestos en el campo de grandes deformaciones y los efectos del DFM.

- *Aplicación de los modelos formulados en tres dimensiones*

Dada la necesidad de estudiar de una forma integral, el comportamiento de los elementos estructurales reforzados con FRP y de las estructuras de compuestos, es conveniente aplicar los modelos propuestos de DFM y grandes deformaciones a las simulaciones de estructuras en tres dimensiones.

- *Formulación de las teorías de mezclas en grandes deformaciones*

En el campo de las grandes deformaciones, las adaptaciones de las teorías clásica y serie/paralelo, aún no tienen en cuenta las inestabilidades microestructurales como el DFM, la delaminación y el pandeo de las fibras.

Se recomienda mayor investigación, para formular algoritmos que introduzcan estos fenómenos microestructurales como en las teorías de mezclas adaptadas al campo de grandes deformaciones.