



Universitat Politècnica de Catalunya
Escola Tècnica Superior d'Enginyers
de Camins, Canals i Ports



Departament de Resistència de Materials i Estructures a
l'Enginyeria

Tesis Doctoral

**FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS
PARA VIGAS DE SECCIÓN ABIERTA
EN LAMINADOS COMPUESTOS**

Por

Pablo Enrique Vargas Mendoza

Directores:

**Eugenio Oñate
Sergio Oller Martínez**

Barcelona, julio de 2011

Agradecimientos Institucionales.

La mayoría de los desarrollos incluidos en este trabajo fueron posibles gracias al apoyo del Gobierno español a través del Ministerio de Ciencia y Tecnología (DELCOM, ref. MAT2008-02232/MAT) y CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería). Todos estos apoyos se agradecen.

Tabla de contenido

Capítulo 1	Introducción	1
1.1	Antecedentes y motivación	3
1.2	Objetivos	5
1.3	Metodología	6
1.4	Descripción del contenido de la tesis	7
Capítulo 2	Vigas homogéneas e isotrópicas de sección abierta y pared delgada	9
2.1	Sistemas de coordenadas	10
2.2	Campo de desplazamientos	12
2.2-1	Desplazamientos por flexión	15
2.2-2	Desplazamientos por torsión	17
2.2-3	Alabeo por torsión	20
2.2-4	Integración de los desplazamientos	27
2.3	Deformaciones	28
2.4	Formulación variacional	30
2.5	Fuerzas internas y matriz de rigidez	33
2.5-1	Sección con doble simetría	37
2.5-2	Sección con simetría en el eje \tilde{y}	37
2.5-3	Sección con simetría en el eje \tilde{z}	38
2.6	Tensiones longitudinales en una viga con sección C	39
2.6-1	Expresión general para el cálculo de la tensión longitudinal	39
2.6-2	Caso de estudio	42
2.6-3	Comentarios	43
2.7	Propiedades geométricas de la sección	44
2.7-1	Eje neutro	44
2.7-2	Centro de giro	45
2.7-3	Centro de esfuerzos cortantes	47

	2.7-4	Comparación entre el centro de giro y el centro de esfuerzos cortantes.....	48
2.8		Ecuaciones de gobierno	50
	2.8-1	Ecuaciones de relación entre fuerzas externas e internas	51
	2.8-2	Ecuaciones diferenciales	53
	2.8-3	Flexión pura.....	54
	2.8-4	Torsión pura	55
2.9		Aplicación de las ecuaciones diferenciales.....	57
	2.9-1	Viga sección I en voladizo	57
	2.9-2	Viga sección C en voladizo.....	60
	2.9-3	Viga de sección cerrada biapoyada.....	61
Capítulo 3		Laminados de materiales compuestos	65
	3.1	Láminas unidireccionales de materiales compuestos ...	67
	3.2	Transformación de sistemas de coordenadas	69
	3.2-1	Rotación de ejes	70
	3.2-2	Transformación de deformaciones.....	71
	3.2-3	Transformación de Tensiones	73
	3.2-4	Transformación de la matriz de rigidez.....	74
	3.3	Teoría de laminados	76
	3.3-1	Campo de desplazamientos	77
	3.3-2	Deformaciones.....	78
	3.3-3	Matriz de rigidez y esfuerzos en el laminado ..	81
	3.3-4	Tipos de Laminados	85
	3.4	Ejemplo de aplicación.....	86
	3.4-1	Propiedades del laminado.....	87
	3.4-2	Características del ensayo experimental	88
Capítulo 4		Vigas de sección abierta en laminados compuestos.....	93
	4.1	Sistemas de coordenadas	94
	4.2	Campo de desplazamientos	95
	4.3	Campo de deformaciones	96
	4.3-1	Deformaciones en las láminas	96
	4.3-2	Deformaciones en el laminado	98
	4.4	Formulación variacional.....	99
	4.5	Simplificación de las relaciones tensión-deformación ...	100
	4.5-1	Condición de tensiones nulas en el contorno... 102	
	4.5-2	Condición de esfuerzos nulos en el contorno ... 105	
	4.5-3	Comparación entre la condición de tensiones nulas y la de esfuerzos nulos en el contorno ... 109	
	4.6	Fuerzas internas y matriz de rigidez	115
	4.7	Propiedades geométricas de la sección.....	118
	4.7-1	Eje neutro.....	118
	4.7-2	Centro de cortante	119
	4.7-3	Ejemplos de cálculo	121
	4.8	Ecuaciones de gobierno	122

4.9	Aplicación de las ecuaciones de gobierno	124
4.9-1	Viga solicitada a torsión	124
4.9-2	Viga solicitada a flexión	126
Capítulo 5	Elementos finitos unidimensionales <i>BSW</i>	131
5.1	Aspectos generales	131
5.1-1	Sistema de coordenadas	132
5.1-2	Campo de desplazamientos	132
5.1-3	Deformaciones	133
5.1-4	Formulación variacional	133
5.1-5	Relaciones constitutivas	134
5.2	Formulación de elementos finitos unidimensionales	135
5.2-1	Desplazamientos	135
5.2-2	Funciones de forma e interpolación	136
5.2-3	Matriz de deformación del elemento	140
5.2-4	Matriz de rigidez y vector de fuerzas externas	141
5.2-5	Aporte de los desplazamientos al vector de fuerzas residuales	145
5.2-6	Ensamblaje	146
5.3	Integración numérica	151
5.3-1	Método de Gauss-Legendre	151
5.3-2	Integración de la matriz de rigidez	152
5.4	Estudio de la integración numérica exacta vs. reduci- da	154
5.4-1	Análisis de bloqueo por tensiones tangencia- les	155
5.4-2	Análisis de convergencia	157
5.5	Ejemplos de aplicación	162
5.5-1	Viga con sección C en voladizo	163
5.5-2	Análisis de una viga biempotrada con cargas en el centro del vano	168
Capítulo 6	Conclusiones y líneas futuras de investigación	173
6.1	Conclusiones	173
6.2	Líneas futuras de investigación	175
Apéndice A	Estudio de una viga homogénea con sección C	183
A.1	Coefficientes de la matriz de rigidez	183
A.1-1	Eje neutro y ejes principales	184
A.1-2	Centro de torsión y momentos de inercia	188
A.1-3	Función de alabeo y rigidez al alabeo	193
A.1-4	Coefficientes de la matriz de rigidez	195
A.2	Cálculo del bimomento	196
Apéndice B	Solución de EDP con Matlab	199

Listado de figuras

Figura 1.0-1	Los materiales compuestos en la ingeniería civil.	2
Figura 1.0-2	Usos de los materiales compuestos	2
Figura 1.0-3	Perfiles pultrusionados	3
Figura 2.1-1	Sistemas de coordenadas en una viga de sección abierta y pared delgada.....	10
Figura 2.2-1	Deformaciones tangenciales por flexión en la sección transversal de una viga.....	14
Figura 2.2-2	Intensidad del alabeo por torsión ϕ_ω (izq.) y defor- maciones tangenciales por torsión γ_t (der.). Adaptado de Kollár (2001)	14
Figura 2.2-3	Desplazamientos impuestos en el plano de la sección transversal de una viga para un segmento diferencial (Adaptado de Kollbrunner & Basler 1969).....	15
Figura 2.2-4	Giro de torsión impuesto en el plano de la sección transversal de una viga para un segmento diferencial. .	18
Figura 2.2-5	Incremento en la coordenada sectorial de la sección. ...	22
Figura 2.2-6	Traslaciones y rotaciones aplicadas en la sección transversal de una viga	27

Figura 2.4-1	Torsiones y bimomento resultante en la sección transversal de una viga con sección I.	32
Figura 2.5-1	Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones generalizadas ($\tilde{\sigma}$) de la sección de una viga isótropa.	35
Figura 2.5-2	Coefficientes presentes en la matriz de rigidez de una sección con doble simetría.	37
Figura 2.5-3	Coefficientes presentes en la matriz de rigidez de una sección con simetría en el eje \tilde{y}	38
Figura 2.5-4	Coefficientes presentes en la matriz de rigidez de una sección con simetría en el eje \tilde{z}	39
Figura 2.6-1	Viga con sección canal sometida a cargas puntuales excéntricas.	40
Figura 2.6-2	Función de alabeo y propiedades geométricas de la sección transversal de una viga con sección canal en materiales homogéneos.	41
Figura 2.6-3	Valor de los coeficientes ζ de tensión a lo largo de la coordenada curvilínea s de la sección transversal de una viga canal.	43
Figura 2.7-1	Fuerzas que actúan en el plano medio de un segmento de pared de la sección.	48
Figura 2.7-2	Fuerzas que actúan en el plano transversal de un segmento de pared de la sección.	49
Figura 2.9-1	Geometría de una viga con sección I sometida a un momento torsor.	58
Figura 2.9-2	Ángulo de giro por torsión en la longitud de una viga en voladizo con sección I.	58
Figura 2.9-3	Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga con sección I.	59
Figura 2.9-4	Momento torsor impuesto $M_{\tilde{x}}$ y sus componentes: M_{sv} (torsión de Saint-Venant) y B'_{ω} (torsión no uniforme), en una viga con sección I.	59
Figura 2.9-5	Geometría de una viga con sección C sometida a un momento torsor.	60

Figura 2.9-6	Ángulo de giro por torsión en la longitud de una viga con sección C.	61
Figura 2.9-7	Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga con sección C.	61
Figura 2.9-8	Momento torsor impuesto $M_{\bar{x}}$ y sus componentes: M_{sv} (torsión de Saint-Venant) y B'_{ω} (torsión no uniforme).	62
Figura 2.9-9	Geometría de una viga con sección cerrada sometida a un momento torsor.	62
Figura 2.9-10	Ángulo de giro por torsión en la longitud de la viga con sección cerrada.	63
Figura 2.9-11	Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga de sección cerrada.	64
Figura 2.9-12	Momento torsor impuesto $M_{\bar{x}}$ y sus componentes: M_{sv} (torsión de Saint-Venant) y B'_{ω} (torsión no uniforme).	64
Figura 3.0-1	Viga conformada por laminados compuestos	65
Figura 3.0-2	Tipos de roving, fieltros y mats usados en la fabricación de pultrusionados (Adaptado de Fiberline Composites A/S 2003)	66
Figura 3.1-1	Lámina unidireccional de materiales compuestos (Sistema de ejes cartesianos).	67
Figura 3.2-1	Capa con fibras orientadas en dirección φ respecto al sistema de coordenadas del laminado.	70
Figura 3.2-2	Rotación del sistema de ejes del laminado al sistema de la capa.	70
Figura 3.2-3	Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones de una capa en el sistema de coordenadas del laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$	75
Figura 3.2-4	Variación de las componentes de la matriz $\hat{\mathbf{Q}}$ en función de la orientación de la lámina φ	76
Figura 3.3-1	Laminado compuesto por capas a diferentes orientaciones (Adaptado de Jones 1999).	77

Figura 3.3-2	Sistema de ejes para un laminado.	78
Figura 3.3-3	Esfuerzos en el laminado.	81
Figura 3.3-4	Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones generalizadas ($\hat{\sigma}^o$) de un laminado.	82
Figura 3.3-5	Relaciones tensión-deformación en un laminado y sus acoplamientos.	83
Figura 3.3-6	Disposición de las capas en el laminado.	84
Figura 3.3-7	Deformada de un laminado $[0/90]_4$ sometido a fuerza axial.	85
Figura 3.4-1	Montaje del ensayo a flexión de un laminado compuesto (Tomado de Correia 2004).	88
Figura 3.4-2	Geometría del laminado ensayado y condiciones de apoyo y carga.	89
Figura 3.4-3	Modelo para la simulación del laminado a flexión.	89
Figura 3.4-4	Variación del módulo de flexión en un laminado según el porcentaje en volumen de fibras (V_f) y los módulos de rigidez de fibra (E_f) y matriz (E_m).	90
Figura 3.4-5	Comportamiento a flexión de un laminado cuyos materiales componentes tienen propiedades $E_f=72$ GPa, $E_m= 3.2$ GPa y $V_f=44$ %.	90
Figura 4.1-1	Sistemas de coordenadas en una viga de sección abierta en laminados compuestos.	94
Figura 4.2-1	Desplazamientos en la sección transversal de una viga de laminados compuestos.	95
Figura 4.5-1	“Condición de esfuerzos nulos en el contorno”.	101
Figura 4.5-2	Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones en la sección transversal de una viga suponiendo una “condición de tensiones nulas en el contorno”.	105
Figura 4.5-3	Fuerzas y momentos en el borde longitudinal de una viga de sección abierta y pared delgada en laminados compuestos.	106

Figura 4.5-4	Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones de un laminado suponiendo una “condición de esfuerzos nulos en el contorno”	110
Figura 4.5-5	Giro por torsión en el extremo libre de una viga I en voladizo conformada por laminados unidireccionales $[\alpha]_{16}$	113
Figura 4.5-6	Giro por torsión en el extremo libre de una viga I en voladizo conformada por laminados bidireccionales $[\pm\alpha]_{4s}$	113
Figura 4.5-7	Cálculo de las tensiones en la sección transversal de una viga en laminados compuestos.	114
Figura 4.7-1	Sección doble T.	121
Figura 4.7-2	Sección C (simetría en el eje horizontal).	121
Figura 4.9-1	Viga con sección C, empotrada en un extremo y con un momento torsor en el otro.	125
Figura 4.9-2	Viga en voladizo. Modelo con 550 elementos cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c).	126
Figura 4.9-3	Variación del giro por torsión a lo largo de una viga de laminados compuestos en voladizo.	126
Figura 4.9-4	Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga de laminados compuestos con sección C en voladizo.	127
Figura 4.9-5	Sección transversal de los perfiles ensayados por Correia (2004).	127
Figura 4.9-6	Sistema de aplicación de carga e instrumentación en vigas ensayadas a flexión (Correia, 2004).	128
Figura 4.9-7	Deformada obtenida usando las EDP para la viga V1 (L=4000 mm) en laminados compuestos.	130
Figura 4.9-8	Comparación relaciones fuerza-desplazamiento. EDP definidas en la Sección 4.8 vs ensayo laboratorio de Correia (2004).	130

Figura 5.1-1	Sistema de coordenadas usado en los elementos finitos y disposición de los movimientos en la sección transversal.	132
Figura 5.2-1	Desplazamientos nodales en el nodo i para un elemento unidimensional de n nodos.	136
Figura 5.2-2	Funciones de forma lagrangianas para interpolación lineal y cuadrática.	137
Figura 5.2-3	Elemento de 2 nodos (L - BSW).	138
Figura 5.2-4	Elemento de 3 nodos (Q - BSW).	139
Figura 5.2-5	Elemento de 4 nodos (C - BSW).	140
Figura 5.2-6	Sistemas de coordenadas global y local de los elementos finitos.	147
Figura 5.2-7	Dirección vectores unitarios del sistema local cuando \hat{e}_1 es paralelo a \hat{k}	148
Figura 5.4-1	Geometría de la viga con sección I y propiedades de las láminas que la conforman.	154
Figura 5.4-2	Modelo de elementos cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c), usado para simular una viga I de 1000 mm de longitud sometida a torsión.	155
Figura 5.4-3	Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a flexión. Integración exacta de la matriz de rigidez.	155
Figura 5.4-4	Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a torsión. Integración exacta de la matriz de rigidez.	156
Figura 5.4-5	Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a flexión. Integración reducida de la matriz de rigidez.	157
Figura 5.4-6	Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a torsión. Integración reducida de la matriz de rigidez.	157

Figura 5.4-7	Comparación de resultados en análisis de bloqueo entre integración exacta de elementos Q -BSW y C -BSW, e integración reducida de L -BSW y Q -BSW para una viga sometida a flexión.	158
Figura 5.4-8	Comparación de resultados en análisis de bloqueo entre integración exacta de elementos Q -BSW y C -BSW, e integración reducida de L -BSW y Q -BSW para una viga sometida a torsión.	158
Figura 5.4-9	Análisis de convergencia en una viga sometida a flexión. Integración exacta de la matriz de rigidez.	159
Figura 5.4-10	Análisis de convergencia en una viga sometida a torsión. Integración exacta de la matriz de rigidez.	159
Figura 5.4-11	Análisis de convergencia en una viga sometida a flexión. Integración reducida de la matriz de rigidez. ...	160
Figura 5.4-12	Análisis de convergencia en una viga sometida a torsión. Integración reducida de la matriz de rigidez. ...	160
Figura 5.4-13	Comparación de resultados en análisis de convergencia entre integración exacta de elementos Q -BSW y C -BSW, e integración reducida de L -BSW y Q -BSW para una viga sometida a flexión.	161
Figura 5.4-14	Comparación de resultados en análisis de convergencia entre integración exacta de elementos Q -BSW y C -BSW, e integración reducida de L -BSW y Q -BSW para una viga sometida a torsión.	161
Figura 5.4-15	Comparación de resultados en análisis de convergencia según el número de nodos para una viga sometida a flexión.	161
Figura 5.4-16	Comparación de resultados en análisis de convergencia según el número de nodos para una viga sometida a torsión.	162
Figura 5.5-1	Viga con sección C, con dos cargas puntuales en el otro.	162
Figura 5.5-2	Transformación de las fuerzas puntuales $P_{\bar{y}}$ y $P_{\bar{z}}$ a sus equivalentes en el centro de torsión.	163

Figura 5.5-3	Viga con sección C, empotrada en un extremo y con dos cargas puntuales en el otro.	164
Figura 5.5-4	Viga en voladizo. Modelo con 550 elementos cuadriláteros tipo S9R5 (ABAQUS, 2006c).	164
Figura 5.5-5	Viga en voladizo (material homogéneo). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.	165
Figura 5.5-6	Viga en voladizo (material homogéneo). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.	165
Figura 5.5-7	Viga en voladizo (material homogéneo). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.	166
Figura 5.5-8	Viga en voladizo (laminado compuesto). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.	167
Figura 5.5-9	Viga en voladizo (laminado compuesto). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.	167
Figura 5.5-10	Viga en voladizo (laminado compuesto). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.	167
Figura 5.5-11	Viga biempotrada. Modelo con 550 elementos cuadriláteros tipo S9R5 (ABAQUS, 2006c).	168
Figura 5.5-12	Viga biempotrada (material homogéneo). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.	169
Figura 5.5-13	Viga biempotrada (material homogéneo). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.	169
Figura 5.5-14	Viga biempotrada (material homogéneo). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.	170
Figura 5.5-15	Viga biempotrada (laminado compuesto). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.	171

Figura 5.5-16	Viga biempotrada (laminado compuesto). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.	171
Figura 5.5-17	Viga biempotrada (laminado compuesto). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.	171
Figura A.0-1	Viga con sección C	183
Figura A.1-1	Sistema de ejes en la viga y segmentos \overline{DA} , \overline{AB} y \overline{BF} . ..	185
Figura A.1-2	Distancia entre el alma de la viga y el eje neutro e_o . ..	187
Figura A.1-3	Distancia entre el centro de torsión y el alma de la viga e_c	193
Figura A.1-4	Valor de la coordenada sectorial normalizada g_s	195

Listado de tablas

Tabla 2.6-1	Evaluación de los coeficientes ς_{M_z} , ς_{M_y} y ς_{B_ω}	43
Tabla 3.1-1	Definición de notación indicial contraída (Barbero, 1999)	69
Tabla 3.4-1	Propiedades de fibras de vidrio-E	87
Tabla 3.4-2	Propiedades de resinas de poliéster	87
Tabla 4.8-1	Comparación de coeficientes de rigidez en vigas de pared delgada	124
Tabla 4.9-1	Relaciones fuerza-desplazamiento obtenidas por Correia (2004) en vigas sometidas a flexión	128
Tabla 4.9-2	Propiedades de los materiales que componen las capas del laminado (ver Sección 3.4)	128
Tabla 5.2-1	Funciones de forma en coordenadas normalizadas y sus derivadas para el elemento de 2 nodos.	138
Tabla 5.2-2	Funciones de forma en coordenadas normalizadas y sus derivadas para el elemento de 3 nodos.	139
Tabla 5.2-3	Funciones de forma en coordenadas normalizadas y sus derivadas para el elemento de 4 nodos.	140

Tabla 5.3-1	Localización de puntos y factores de peso para las cuadraturas de Gauss. (Adaptado de Kuhl & Meschke 2003) 152
Tabla 5.3-2	Orden del polinomio a integrar en función del número de nodos del elemento 152
Tabla 5.3-3	Orden de los polinomios y cuadraturas requeridas en las submatrices para integrar la matriz de rigidez en función del número de elementos. 153
Tabla 5.5-1	Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga homogénea en voladizo..... 165
Tabla 5.5-2	Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga en laminados compuestos en voladizo. 166
Tabla 5.5-3	Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga homogénea biempotrada. 169
Tabla 5.5-4	Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga biempotrada en laminados compuestos. 170

CAPÍTULO 1

Introducción

Desde comienzos de la década de los noventa, el uso en ingeniería de materiales compuestos de polímero reforzado por fibra (FRP - Fiber Reinforced Polymer) ha experimentado un aumento importante gracias a las propiedades específicas que dichos materiales exhiben: alta relación rigidez/peso y resistencia mecánica/peso, alta resistencia a la degradación ambiental y baja conductividad térmica, además por su ligereza son muy adecuados para estructuras donde el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño (Zureick, 1998; Pulido & Sobrino, 2002; Oller, 2003; Rastellini, 2006).

La introducción de los materiales compuestos en el campo de la ingeniería civil ha sido lenta principalmente por razones económicas, empleándose fundamentalmente en rehabilitación estructural, refuerzo estructural y sustitución de elementos estructurales (ver Figura 1.0-1). Se estima que por la expansión del mercado de estos materiales en la industria automotriz, naval y aeronáutica (ver Figura 1.0-2), se generarán reducciones en los costos de producción que permitan una mayor difusión de su uso.

Los materiales compuestos FRP combinan las características de los materiales individuales que los conforman para obtener un nuevo material que proporcione mejores propiedades que las de sus componentes por separado, de esta manera, mientras la fibra se diseña para soportar las cargas, la resina actúa como medio de transferencia de tensiones entre fibras adyacentes (Karbhari & Zhao, 2000). Los FRP normalmente presentan fibras de vidrio, carbón o aramida dentro de una matriz de resina termoestable epóxica, de poliéster, vinilester o fenólica, en una concentración mayor al 30% en volumen de fibra del compuesto.

Las ventajas que ofrecen estos materiales hacen posible que sean considerados como una alternativa de solución durante la etapa de diseño, es por esto que comienzan a ser empleados en diferentes tipos de estructuras como edificios,



(a) Refuerzo estructural



(b) Sustitución de tablero de puente

Figura 1.0-1: Los materiales compuestos en la ingeniería civil.

(a) Avión *Diamond DA42*

(b) Edificio Eyecatcher - (Suiza)



(c) Parachoques



(d) Yate en FRP

Figura 1.0-2: Usos de los materiales compuestos

pasarelas y puentes (Keller, 1999; Bank et al., 2000; Keller, 2002; Sobrino & Pulido, 2002; Sika, 2005; Bank, 2006a; Keller et al., 2007) dando respuesta a requerimientos difíciles de cumplir empleando materiales convencionales.

Los principales métodos de fabricación de productos FRP para ingeniería estructural son la pultrusión y el moldeo/apilamiento manual (*hand lay-up*), siendo la pultrusión el método más utilizado para la fabricación de perfiles (Bank, 2006b). La pultrusión es un proceso de moldeo continuo usando fibras de vidrio como refuerzo en una matriz compuesta por resina termoestable. Durante el proceso se tiran los refuerzos continuos (fibras) impregnados de resina a través de un molde en el cual mediante un fuerte aporte externo de calor se produce la polimerización de la resina, obteniéndose la geometría definitiva del perfil (ver Figura 1.0-3).

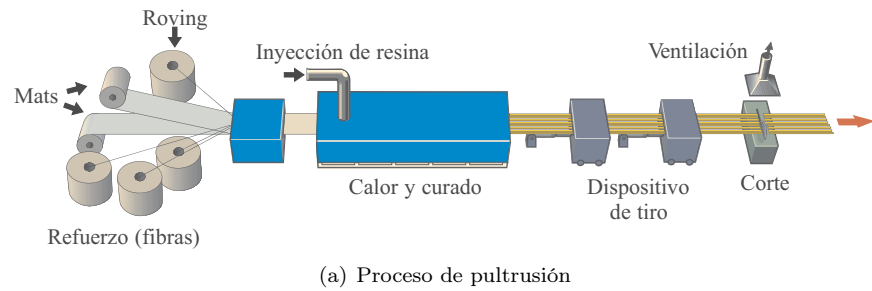


Figura 1.0-3: Perfiles pultrusionados

A continuación se incluye una breve reseña de las investigaciones relacionadas con la presente investigación y se indican los factores que motivan el trabajo presentado en este documento, también se incluyen los objetivos perseguidos y la metodología utilizada para conseguirlos. Para finalizar se presenta un resumen del contenido de la Tesis.

1.1 Antecedentes y motivación

Las soluciones analíticas para las vigas de sección abierta en materiales compuestos son complejas y no tan directas como las usadas en los casos de vigas metálicas, esto sucede especialmente cuando se considera el fenómeno de torsión, el cual debe contemplar la presencia de alabeo restringido y por ende las componentes de deformación axial que induce.

Por esta razón, la comunidad científica ha trabajado en técnicas computacionales, tales como el método de los elementos finitos (MEF), concentrando los esfuerzos para su modelización en el estudio y caracterización de las secciones transversales (Chakravarty, 2011) buscando obtener coeficientes de rigidez adecuados para ser combinados bajo ciertas suposiciones con formulaciones de elementos finitos unidimensionales *ad-hoc* o con elementos finitos contenidos en programas comerciales.

Entre las metodologías desarrolladas para el cálculo de los coeficientes de rigidez de la sección transversal de vigas en materiales compuestos se destacan dos grupos: las que realizan un análisis bidimensional de la sección (Berdichevskii, 1979;

Berdichevsky et al., 1992; Cesnik & Hodges, 1997; Yu, 2002; Yu et al., 2002; Coda & Paccola, 2010) y las que aplican formulaciones analíticas discretizando la sección en segmentos rectilíneos (Back & Will, 1998; Qiao et al., 2003; Lee & Lee, 2004; Lee, 2005; Back & Will, 2008; Feo & Mancusi, 2010). El primer grupo de metodologías es muy utilizado en los casos donde la configuración de la sección transversal es compleja, mientras que el segundo grupo ofrece ventajas cuando se quieren analizar secciones con geometrías sencillas.

A continuación se incluye una breve reseña de las investigaciones relacionadas con las metodologías que aplican formulaciones analíticas, por ser el grupo en el que se enmarca esta investigación.

- Bauld & Tzeng (1984). Extendieron la teoría de Vlasov (estudio del comportamiento de las vigas homogéneas e isotrópicas de pared delgada) al análisis a flexión de vigas de sección abierta conformadas por laminados simétricos sin considerar las deformaciones tangenciales en la sección. El estudio de los laminados lo realizaron aplicando las hipótesis de Kirchhoff.
- Wu & Sun (1992). Presentaron una teoría simplificada para el análisis flexión y torsión de vigas de pared delgada incluyendo en la cinemática las deformaciones tangenciales por flexión y torsión, y mostraron la utilidad de tener estas deformaciones en cuenta durante los análisis. Analizaron el comportamiento de los laminados que conforman la sección mediante las hipótesis de Kirchhoff.
- Barbero et al. (1993). Desarrollaron expresiones simples para el análisis a flexión, torsión y alabeo de vigas en compuestos donde la torsión está desacoplada de la flexión. Las expresiones propuestas requieren de una fase previa de evaluación de los coeficientes de rigidez en la sección transversal, por lo que su precisión depende del cálculo de los coeficientes.
- Massa & Barbero (1998) Presentaron expresiones para el análisis a flexión de vigas incluyendo las deformaciones transversales.
- Kollar & Pluzsik (2002) y Pluzsik & Kollar (2002). Mostraron la importancia de incluir las deformaciones tangenciales por flexión en los análisis de vigas de sección abierta con alabeo restringido.
- Lee & Lee (2004). Desarrollaron un modelo analítico para el estudio de vigas en laminados simétricos con sección I sometidas a flexión y torsión. En su modelo estudiaron los laminados de acuerdo con la teoría clásica e incluyeron el alabeo restringido sin considerar deformaciones tangenciales. Posteriormente Lee (2005) propuso un modelo general que incluyó deformaciones tangenciales por flexión y “deformaciones de corte por alabeo” en su formulación, sin embargo, no estudió la torsión y la ecuación que definió para el cálculo del alabeo solo es aplicable a secciones en I doblemente simétricas.
- Kim et al. (2006). Propusieron un método para el cálculo de soluciones exactas de vigas en compuestos sometidas a momentos de torsión y lo usaron en la obtención de las expresiones aplicables al caso de vigas en laminados simétricos.

- Back & Will (2008). Estudiaron la flexión de vigas extendiendo el modelo general propuesto por Lee (2005) a vigas de pared delgada cuyos laminados compuestos siguen la teoría FSDT (*First shear deformation theory*, Reddy 2004) y mejoraron la fórmula para el cálculo del alabeo haciéndola válida también para secciones en I con una sola simetría.
- Feo & Mancusi (2010). Presentaron una aproximación general para la modelización de vigas de pared delgada en laminados compuestos considerando las deformaciones tangenciales por torsión. En su cinemática incluyeron funciones de aproximación para corregir los desplazamientos longitudinales inducidos por el alabeo restringido al evaluarlos según la teoría de Vlasov.

De lo anterior se observa que en la última década se han presentado desarrollos notables en el estudio de vigas en materiales compuestos, especialmente en el comportamiento a flexión, pero no es hasta los últimos cinco años cuando se han llevado investigaciones enfocadas en la torsión de este tipo de vigas evaluándose de forma explícita la función de alabeo para cada tipología de sección que se estudia o incluyendo los desplazamientos longitudinales por torsión como una variable a obtener mediante funciones de interpolación. En este punto debe indicarse que las formulaciones analíticas para el estudio de la torsión se han limitado al estudio de vigas con laminados compuestos simétricos (flexión y torsión desacopladas).

Esta situación motiva el desarrollo de la presente tesis donde se pretende estudiar el comportamiento a flexión y torsión con alabeo restringido de vigas de sección abierta en laminados compuestos con independencia de la tipología de sección y la secuencia de apilado, a través del estudio de la influencia de las tensiones longitudinales inducidas por el alabeo en la viga y considerando las deformaciones tangenciales en su formulación.

La investigación de esta Tesis también ha estado motivada por el desarrollo de los proyectos “*Guías de diseño para el proyecto de pasarelas conformadas totalmente por perfiles de compuestos sintéticos. 2004/32*” incluido dentro de las ayudas I+D 2004 del Ministerio de Fomento y “*Pasarelas de emergencia constituidas por perfiles FRP. C9/2006*” del Ministerio de Fomento.

1.2 Objetivos

Se pretende estudiar el comportamiento a flexión y torsión de vigas de sección abierta en laminados compuestos con alabeo restringido, considerando la influencia de las deformaciones tangenciales por flexión y torsión.

Para lograrlo se establecen objetivos particulares divididos en dos partes:

Vigas de pared delgada en materiales homogéneos e isotrópicos.

- Estudio de la influencia del alabeo restringido en las tensiones longitudinales de la viga.
- Comportamiento de las vigas cuando se consideran las deformaciones tangenciales (flexión y torsión) en su formulación.

Vigas de pared delgada en laminados compuestos.

- Compatibilización de las componentes de deformación de la viga de pared delgada y de los laminados compuestos que la conforman.
- Extensión de la formulación desarrollada para vigas de materiales homogéneos e isotrópos al caso de vigas en laminados compuestos.
- Desarrollo de elementos finitos que acoplen de forma analítica las deformaciones tangenciales y que sean independientes de la geometría de la viga de sección abierta.

1.3 Metodología

A continuación se incluyen las tareas realizadas para obtener las expresiones que permiten el estudio del comportamiento a flexión y torsión de vigas de sección abierta en laminados compuestos:

- Desarrollo de la cinemática de vigas homogéneas e isotrópas de sección abierta y pared delgada que incluye dentro de su formulación los desplazamientos por alabeo en la línea media de la sección y en el espesor considerando la existencia de deformaciones tangenciales en la sección por flexión y por torsión.
- Obtención de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de las vigas homogéneas usando las fuerzas internas y la matriz de rigidez de la sección obtenidas a partir del principio de los trabajos virtuales.
- Evaluación de la matriz de rigidez en secciones transversales de laminados compuestos usando la cinemática desarrollada para vigas homogéneas e isotrópas y los campos de deformación propios de laminados que siguen la teoría FSDT (*First shear deformation theory*, Reddy 2004).
- Desarrollo de tres tipos de elementos finitos (lineal, cuadrático y cúbico) para el estudio de las vigas de sección abierta en laminados compuestos.

En la tesis se implementaron las expresiones y ecuaciones derivadas para el estudio de vigas en un código de programación usando el lenguaje de programación *Fortran 90* con el objetivo de verificarlas y posteriormente validar sus resultados contrastando con los obtenidos en la literatura o en modelos detallados. Como resultado de implementar la formulación detallada a lo largo de este documento se ha obtenido una librería de funciones creada de forma tal que es de fácil adaptación a diferentes programas de elementos finitos. Se indica que los análisis elaborados en esta investigación se realizaron usando la facilidad dada por el programa Abaqus (ABAQUS, 2006b) para incluir como usuario nuevos elementos finitos (*UEL Subroutines*).

De esta forma, la librería creada incluyó la implementación de las siguientes actividades con el ánimo de preparar al programa para recibir las expresiones desarrolladas a lo largo de este documento:

- Análisis geométrico de las secciones transversales de vigas de pared delgada: Las secciones se definen usando segmentos rectilíneos a partir de coordenadas de nodos y conectividades. Usando esta información y mediante un algoritmo de búsqueda de grafos se establece la coordenada curvilínea de cada segmento para el cálculo de su coordenada sectorial, con la cual posteriormente se determinará la función de alabeo de cada segmento.
- Gestión de los materiales que conforman las secciones: Se establecen bases de datos que almacenan las propiedades de láminas para su uso en la composición de las matrices de rigidez de los laminados que conforman los segmentos rectilíneos de la viga.
- Vinculación de la geometría y los materiales en la sección transversal: Usando técnicas de programación se crean enlaces entre las propiedades geométricas de un segmento (nodos de inicio y fin, coordenada curvilínea y coordenada sectorial) y sus propiedades físicas (rigidez del laminado)
- Integración de la matriz de rigidez para cada sección recorriendo todos los segmentos que la conforman a través de su coordenada curvilínea.

Se destaca que en el estudio de vigas de sección abierta en materiales homogéneos e isotrópos, la generalización de la formulación a cualquier tipología de viga ha sido tratada mediante la evaluación de la función de alabeo como una variable nodal adicional al problema (Saadé, 2004; Prokic, 1996), sin embargo, esta actividad aumenta injustificadamente los tiempos de cálculo al incluir nuevas incógnitas en el problema tal como lo apunta Prokic (2000) quien posteriormente revisó su metodología y siguió la propuesta de cálculo de la coordenada sectorial mediante técnicas de búsqueda de grafos dada por Alfano et al. (1996). Por este motivo y conociendo que la extensión a materiales compuestos del cálculo de la función de alabeo requiere del conocimiento de la coordenada sectorial en cada segmento, en la actividad de análisis geométrico de vigas mencionada anteriormente se incluye el tratamiento de la sección transversal como un grafo.

1.4 Descripción del contenido de la tesis

Este documento se encuentra dividido en 6 capítulos, siendo de contenido los capítulos 2 al 5 y el Capítulo 6 de conclusiones.

A continuación se detalla el contenido de cada capítulo de la memoria:

Capítulo 2: Se aplica la hipótesis supuesta por Wu & Sun (1992) (*Estudio de vigas de pared delgada en materiales compuestos incluyendo las deformaciones angulares por torsión*) para el análisis de vigas homogéneas e isotrópas de pared delgada con el fin de entender su influencia frente al estudio clásico de vigas de pared delgada (Vlasov, 1961; Gjelsvik, 1981). También se establece el campo de desplazamientos que se usará en el estudio de vigas y el procedimiento de cálculo de las coordenadas del eje neutro, del centro de giro de la sección transversal, así como las ecuaciones que gobiernan su comportamiento.

Capítulo 3: Se introducen algunos conceptos básicos para el tratamiento de laminados compuestos y en especial de los conformados por láminas unidireccionales. También se incluyen los procedimientos usados para la integración de los esfuerzos y la matriz de rigidez del laminado a partir de las tensiones y rigidez de cada capa siguiendo la teoría de laminados de primer orden - FSDT.

Capítulo 4: Se propone una metodología de cálculo para evaluar la matriz de rigidez en secciones transversales de vigas en laminados compuestos usando la cinemática presentada en el Capítulo 2 y los campos de deformaciones definidos en el Capítulo 3. La propuesta incluye la compatibilización entre los coeficientes del vector de deformación definidos para la sección transversal y los definidos para los laminados.

Capítulo 5: Se incluye la formulación y desarrollo de los elementos finitos de viga implementados para el estudio de vigas de sección abierta en laminados compuestos y comprueba su rango de aplicación.

Capítulo 6: Se presentan las conclusiones obtenidas en esta Tesis junto a las líneas futuras que se desprenden de la investigación.

CAPÍTULO 2

Vigas homogéneas e isótropas de sección abierta y pared delgada

En este capítulo se describe la formulación que gobierna el comportamiento de vigas de pared delgada y sección abierta de forma general y se aplica la hipótesis supuesta por Wu & Sun (1992) (*Estudio de vigas de pared delgada en materiales compuestos incluyendo las deformaciones angulares por torsión*) para el análisis de vigas homogéneas e isótropas. Esta tarea se realiza con el fin de entender los alcances y consecuencias de aplicar la hipótesis frente al estudio clásico de vigas de pared delgada (Vlasov, 1961; Gjelsvik, 1981) antes de usarla en el campo de los compuestos.

El comportamiento a torsión de las vigas de pared delgada está influenciado por el alabeo de su sección transversal y este a su vez, por la denominada “*función de alabeo*” que se compone de alabeo en la línea media de la sección transversal (alabeo primario) y alabeo en el espesor de la pared (alabeo secundario), el cual será tenido en cuenta dentro de la formulación.

La automatización del cálculo de la función de alabeo ha generado muchos interrogantes en la comunidad científica; desde proponer funciones de alabeo simplificadas aplicables a un tipo particular de sección transversal (Lee, 2005; Back & Will, 2008) hasta el uso de métodos numéricos que buscan la generalidad del cálculo a través de funciones que interpolan el valor de la función de alabeo para algunos puntos de la sección transversal de pared delgada (Saadé, 2004), aumentando el coste computacional. En esta investigación se opta por realizar el cálculo de esta función usando un algoritmo de búsqueda de grafos tal como proponen Alfano et al. (1996) y Prokic (2000) para vigas homogéneas de pared delgada. Este algoritmo permite asignar una coordenada curvilínea a cada punto de la línea media de la sección transversal para relacionarla posteriormente con el sistema de coordenadas globales y evaluar la función de alabeo.

A continuación se definen los sistemas de coordenadas necesarios para el análisis de vigas de sección abierta y pared delgada, donde junto a los ejes globales y locales se incluye el eje curvilíneo s que recorre toda la línea media de la sección transversal; se establece el campo de desplazamientos que se empleará para el estudio de las vigas de pared delgada; se evalúan las deformaciones derivadas del campo de desplazamientos; se incluye la formulación variacional del sistema con el fin de establecer las ecuaciones de equilibrio y definir las fuerzas internas y la matriz de rigidez de la sección transversal de la viga; se demuestra la importancia de incluir el alabeo en el análisis; se establece el procedimiento de cálculo de las coordenadas del eje neutro y del centro de giro de la sección transversal; y se determinan las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de la viga según las hipótesis adoptadas, y con ellas se resuelven tres ejemplos de aplicación donde se muestra el comportamiento de dos vigas de sección abierta y se contrasta con la literatura los resultados de una viga de sección cerrada.

2.1 Sistemas de coordenadas

El estudio de vigas de sección abierta y pared delgada se realiza usando dos sistemas ortogonales de coordenadas y un eje curvilíneo (ver Figura 2.1-1): el primer sistema de coordenadas corresponde al sistema de ejes de la viga o sistema global $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ localizado en el eje neutro o , donde el eje \tilde{x} es paralelo al eje longitudinal de la viga y los ejes \tilde{y} y \tilde{z} corresponden a sus ejes principales; el segundo sistema de coordenadas es el sistema local (\tilde{x}, n, s) para un punto P sobre la línea media de la sección transversal, donde el eje \tilde{x} es paralelo al eje \tilde{x} , el eje n es normal a la línea media de la sección transversal y el eje s que completa el sistema cartesiano es tangente al eje curvilíneo s de la sección en el punto P .

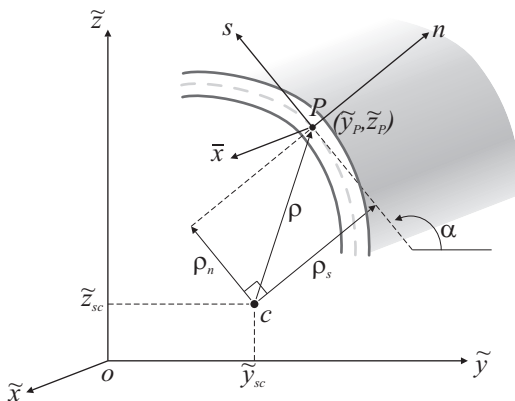


Figura 2.1-1: Sistemas de coordenadas en una viga de sección abierta y pared delgada

En adelante el eje curvilíneo (s) se tomará como eje de referencia, por lo que las coordenadas (\tilde{y}, \tilde{z}) corresponderán a puntos localizados sobre la línea media de la

sección transversal, así

$$\tilde{y} = \tilde{y}(s) \quad ; \quad \tilde{z} = \tilde{z}(s) \quad (2.1-1)$$

Los puntos localizados fuera de la línea media incluirán junto a las coordenadas (\tilde{y}, \tilde{z}) , su componente en el eje normal n .

Los sistemas de coordenadas global y local están relacionados por el ángulo α medido desde el eje \tilde{y} hasta el eje s en sentido antihorario. La distancia entre el punto P con coordenadas $(\tilde{y}_P, \tilde{z}_P)$ y el centro de giro de la sección transversal $(\tilde{y}_c, \tilde{z}_c)$ es la suma de los vectores ρ_s y ρ_n , paralelos a los ejes n y s respectivamente.

Se indica que las distancias ρ_s y ρ_n deben considerarse positivas si al multiplicarse de forma vectorial con la dirección de los ejes s y n respectivamente ($\rho_s \times s$ y $\rho_n \times n$) se obtiene un vector en la dirección del eje \tilde{x} .

De la Figura 2.1-1 se establece la relación diferencial entre las componentes del sistema de coordenadas de la viga y el eje curvilíneo s

$$d\tilde{y} = ds \cos \alpha \quad ; \quad d\tilde{z} = ds \sin \alpha \quad (2.1-2)$$

y la rotación de coordenadas entre los sistemas de coordenadas global y local

$$\mathbf{R}_2(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{y}n}{\partial \tilde{y}s} & \frac{\partial \tilde{z}n}{\partial \tilde{z}s} \\ \frac{\partial \tilde{y}s}{\partial \tilde{y}n} & \frac{\partial \tilde{z}s}{\partial \tilde{z}n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (2.1-3)$$

La matriz $\mathbf{R}_2(\alpha)$ permite relacionar las componentes en coordenadas locales de la distancia entre el centro de giro (c) y un punto P en términos de las respectivas distancias en coordenadas de la viga (ver Figura 2.1-1), resultando

$$\rho_s = (\tilde{y}_P - \tilde{y}_c) \sin \alpha - (\tilde{z}_P - \tilde{z}_c) \cos \alpha \quad (2.1-4a)$$

$$\rho_n = (\tilde{y}_P - \tilde{y}_c) \cos \alpha + (\tilde{z}_P - \tilde{z}_c) \sin \alpha \quad (2.1-4b)$$

Desarrollando las ecuaciones (2.1-4) para un punto cualquiera sobre la línea media de la sección (\tilde{y}, \tilde{z}) se obtiene

$$\rho_s = \rho_{s_o} - (\tilde{y}_c \sin \alpha - \tilde{z}_c \cos \alpha) \quad (2.1-5a)$$

$$\rho_n = \rho_{n_o} - (\tilde{y}_c \cos \alpha + \tilde{z}_c \sin \alpha) \quad (2.1-5b)$$

con

$$\rho_{s_o} = \tilde{y} \sin \alpha - \tilde{z} \cos \alpha \quad (2.1-6a)$$

$$\rho_{n_o} = \tilde{y} \cos \alpha + \tilde{z} \sin \alpha \quad (2.1-6b)$$

donde, ρ_{s_o} y ρ_{n_o} son las distancias paralelas a los ejes n y s respectivamente entre un punto con coordenadas (\tilde{y}, \tilde{z}) y el eje neutro de la sección transversal.

Las ecuaciones (2.1-5) son útiles en el cálculo de las distancias ρ_s y ρ_n cuando se conoce ρ_{s_o} y ρ_{n_o} y la coordenada del centro de giro $(\tilde{y}_c, \tilde{z}_c)$.

Una vez se han definido las distancias en coordenadas locales, es posible establecer las derivadas de estas distancias con respecto a los ejes (n, s)

$$\partial_s \rho_s = 0 \quad ; \quad \partial_n \rho_s = 1 \quad (2.1-7a)$$

$$\partial_s \rho_n = 1 \quad ; \quad \partial_n \rho_n = 0 \quad (2.1-7b)$$

2.2 Campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos se obtiene al integrar los incrementos de desplazamientos generados por flexión y torsión en el plano de la sección transversal.

Los incrementos de desplazamientos se evalúan suponiendo que la viga está sometida a pequeñas rotaciones, que su sección transversal es rígida y que se presentan deformaciones angulares por flexión y por torsión. Con respecto a los incrementos de desplazamientos longitudinales generados por la torsión, adicionalmente se requiere conocer la función de alabeo de la sección transversal, la cual depende de su geometría, de los materiales que la conforman y de las condiciones de contorno que presenta.

A continuación se incluyen las hipótesis de trabajo usadas en la definición del cálculo de los incrementos de desplazamientos por flexión y torsión, la evaluación de la función de alabeo y la integración de los incrementos para obtener el campo de desplazamientos.

Hipótesis de trabajo

El campo de desplazamientos de una sección transversal abierta de pared delgada se deducirá a partir de las hipótesis establecidas en este apartado.

Hipótesis 2-1 (Pequeñas rotaciones). *La viga está sometida a pequeñas rotaciones.*

Esta hipótesis permite aproximar la tangente de un ángulo a su valor en radianes

$$\tan(\theta) \approx \theta(rad) \quad (2.2-1)$$

Se destaca que en ángulos inferiores a 10° (0.1745 rad), la diferencia es menor al 1%.

Hipótesis 2-2 (Sección transversal rígida). *Se considera que la sección transversal de la viga es indeformable (Vlasov, 1961).*

Esta suposición establece que la sección transversal de una viga de pared delgada no presentará deformaciones ni distorsiones en su plano, por lo que al imponer desplazamientos en el plano de la sección, esta se comportará como un cuerpo rígido, así

$$\varepsilon_{\tilde{y}} = \partial_{\tilde{y}}\tilde{v} = 0 \quad (2.2-2a)$$

$$\varepsilon_{\tilde{z}} = \partial_{\tilde{z}}\tilde{w} = 0 \quad (2.2-2b)$$

$$\gamma_{\tilde{y}\tilde{z}} = \partial_{\tilde{z}}\tilde{v} + \partial_{\tilde{y}}\tilde{w} = 0 \quad (2.2-2c)$$

donde \tilde{v} y \tilde{w} son los desplazamientos en los ejes \tilde{y} y \tilde{z} respectivamente.

De las ecuaciones 2.2-2 se define

$$\tilde{v} = \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{z}) \quad (2.2-3a)$$

$$\tilde{w} = \tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (2.2-3b)$$

tal que

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{z}) = -\partial_{\tilde{y}}\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (2.2-4)$$

Hipótesis 2-3 (Deformaciones angulares). *Se supone que en la línea media de la sección transversal de la viga se presentan deformaciones angulares por flexión y por torsión (Wu & Sun, 1992).*

Wu & Sun establecen que la deformación angular en el plano medio de la sección transversal está dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{\tilde{x}s} = & (-\theta_{\tilde{z}} + \partial_{\tilde{x}}\tilde{v}) \cos \alpha + (\theta_{\tilde{y}} + \partial_{\tilde{x}}\tilde{w}) \sin \alpha \\ & + (-\phi_{\omega} + \partial_{\tilde{x}}\theta_{\tilde{x}}) \rho_s \end{aligned} \quad (2.2-5)$$

donde:

- \tilde{v}, \tilde{w} : Desplazamientos en los ejes \tilde{y} y \tilde{z} .
- $\theta_{\tilde{x}}$: Giro de torsión en el eje \tilde{x} .
- $\theta_{\tilde{y}}, \theta_{\tilde{z}}$: Giros de flexión en los ejes \tilde{y} y \tilde{z} .
- α : Ángulo del eje s con respecto al eje \tilde{y} .
- ϕ_{ω} : Intensidad de alabeo.
- ρ_s : Distancia perpendicular al eje s desde el centro de giro.

Se indica que en la ecuación (2.2-5) se han cambiado algunos signos respecto a la formulación original para ajustar la ecuación a las relaciones geométricas mostradas en las Figuras 2.2-1 y 2.2-2 para flexión y torsión respectivamente.

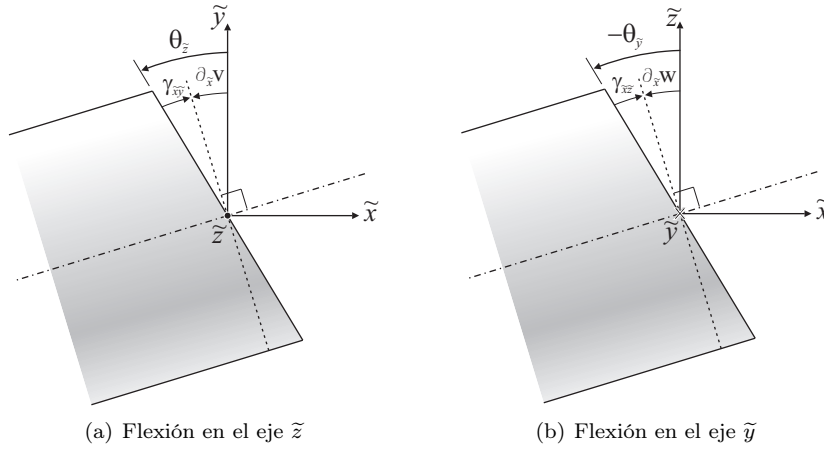


Figura 2.2-1: Deformaciones tangenciales por flexión en la sección transversal de una viga.

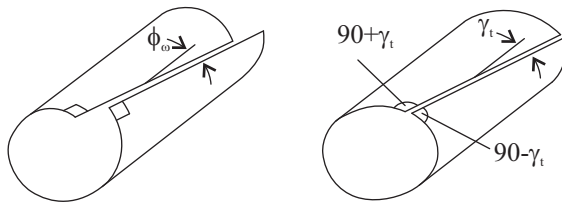


Figura 2.2-2: Intensidad del alabeo por torsión ϕ_ω (izq.) y deformaciones tangenciales por torsión γ_t (der.). Adaptado de Kollár (2001)

De las Figuras 2.2-1 y 2.2-2 se establecen las siguientes relaciones

$$\theta_{\tilde{y}} = -\partial_{\tilde{x}}\tilde{w} + \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}} \quad (2.2-6a)$$

$$\theta_{\tilde{z}} = \partial_{\tilde{x}}\tilde{v} - \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}} \quad (2.2-6b)$$

$$\partial_{\tilde{x}}\theta_{\tilde{x}} = \phi_\omega + \gamma_t \quad (2.2-6c)$$

donde:

- $\gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}, \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}$: Deformaciones angulares fuera del plano de la sección transversal de la viga.
- γ_t : Deformaciones tangenciales por torsión.

Las ecuaciones (2.2-6a) y (2.2-6b) pertenecen a la teoría de flexión de vigas de Timoshenko.

La ecuación (2.2-6c) descompone la derivada del ángulo de giro torsional en dos partes, una es la intensidad del alabeo y la otra la deformación tangencial por torsión.

La teoría de Vlasov se recupera al suponer en esta formulación que la contribución de la componente de deformación angular es despreciable ($\gamma_t \approx 0$) llevando la ecuación (2.2-6c) a $\partial_{\tilde{x}}\theta_{\tilde{x}} \approx \phi_{\omega}$.

Debe notarse que la deformación angular por torsión (γ_t) en la ecuación (2.2-6c) es definida como *deformación de corte generada por alabeo* (γ_{ω}) por Lee (2005) y como *deformación de cortante por torsión asociada al alabeo* (γ_{ω}) por Back & Will (2008) en sus formulaciones.

2.2-1 Desplazamientos por flexión

Los desplazamientos por flexión se definen usando la Hipótesis 2-2 (sección transversal rígida) y se evalúan para un segmento diferencial de la sección transversal después de imponer incrementos de desplazamientos en el plano de la sección, tal como se muestra en la Figura 2.2-3.

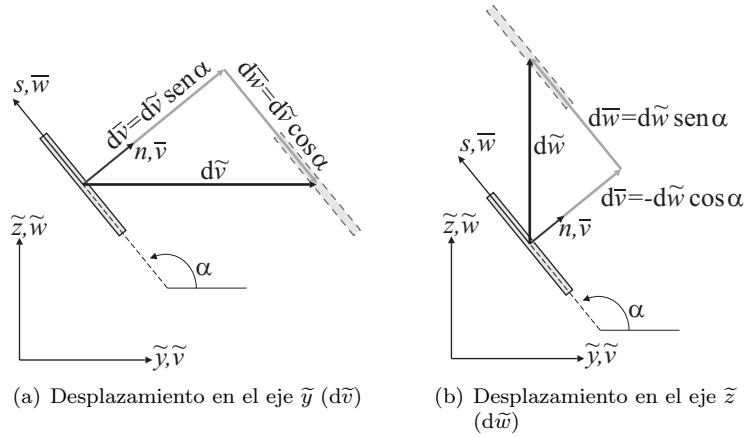


Figura 2.2-3: Desplazamientos impuestos en el plano de la sección transversal de una viga para un segmento diferencial (Adaptado de Kollbrunner & Basler 1969).

Los desplazamientos en el plano de la sección transversal se calculan en función de los desplazamientos tangenciales ($d\bar{w}$) y normales ($d\bar{v}$) al eje curvilíneo s , y los desplazamientos longitudinales se encuentran aplicando la Hipótesis 2-3 (deformaciones angulares) después de imponer los desplazamientos en la sección transversal.

Desplazamientos en el plano de la sección transversal

Superponiendo los desplazamientos impuestos (ver Figura 2.2-3) se obtienen los incrementos de desplazamientos en el plano de la sección transversal

$$d\bar{v} = d\tilde{v} \sin \alpha - d\tilde{w} \cos \alpha \quad (2.2-7a)$$

$$d\bar{w} = d\tilde{v} \cos \alpha + d\tilde{w} \sin \alpha \quad (2.2-7b)$$

Desplazamientos longitudinales

Los incrementos de desplazamientos (ecuación 2.2-7) equivalen a la transformación de los incrementos de desplazamientos en la viga $d\tilde{v}$ y $d\tilde{w}$ a coordenadas locales

$$\begin{Bmatrix} d\bar{v} \\ d\bar{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_2(\alpha) \begin{Bmatrix} d\tilde{v} \\ d\tilde{w} \end{Bmatrix} \quad (2.2-8)$$

suponiendo que el ángulo α del segmento diferencial, formado entre los ejes \tilde{y} y s no varía con la coordenada longitudinal \tilde{x} puede reescribirse la ecuación (2.2-8) en términos de derivadas

$$\begin{Bmatrix} \partial_{\tilde{x}} \bar{v} \\ \partial_{\tilde{x}} \bar{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_2(\alpha) \begin{Bmatrix} \partial_{\tilde{x}} \tilde{v} \\ \partial_{\tilde{x}} \tilde{w} \end{Bmatrix} \quad (2.2-9)$$

y que los ejes \tilde{x} y \bar{x} son paralelos, se obtiene

$$\begin{Bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{v} \\ \partial_{\bar{x}} \bar{w} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_2(\alpha) \begin{Bmatrix} \partial_{\tilde{x}} \tilde{v} \\ \partial_{\tilde{x}} \tilde{w} \end{Bmatrix} \quad (2.2-10)$$

Por definición las deformaciones angulares relacionadas con el eje longitudinal de la viga y escritas en coordenadas locales son

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{x}n} \\ \gamma_{\bar{x}s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{v} \\ \partial_{\bar{x}} \bar{w} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \partial_n \bar{u} \\ \partial_s \bar{u} \end{Bmatrix} \quad (2.2-11)$$

despejando de la ecuación (2.2-11) los términos relacionados con el desplazamiento longitudinal \bar{u} se obtiene el gradiente de los desplazamientos longitudinales en la sección transversal

$$\begin{Bmatrix} \partial_n \bar{u} \\ \partial_s \bar{u} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{x}n} \\ \gamma_{\bar{x}s} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \partial_{\bar{x}} \bar{v} \\ \partial_{\bar{x}} \bar{w} \end{Bmatrix} \quad (2.2-12)$$

Por otra parte, la matriz de transformación $\mathbf{R}_2(\alpha)$ definida en la ecuación (2.1-3) permite expresar las deformaciones angulares locales en términos de sus equivalentes en coordenadas globales

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{x}n} \\ \gamma_{\bar{x}s} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_2(\alpha) \begin{Bmatrix} \gamma_{\bar{x}\bar{y}} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}} \end{Bmatrix} \quad (2.2-13)$$

Así, reemplazando en el gradiente de los desplazamientos (2.2-12) las equivalencias dadas por las ecuaciones (2.2-13) y (2.2-10) y usando la ecuación (2.2-6) en virtud de la Hipótesis 2-3 (deformaciones angulares) resulta

$$\begin{Bmatrix} \partial_n \bar{u} \\ \partial_s \bar{u} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_2(\alpha) \begin{Bmatrix} -\theta_{\bar{z}} \\ \theta_{\bar{y}} \end{Bmatrix} \quad (2.2-14)$$

Suponiendo que un incremento diferencial en los desplazamientos longitudinales por flexión puede expresarse como

$$d\bar{u} = (\partial_s \bar{u}) ds + (\partial_n \bar{u}) dn \quad (2.2-15)$$

se obtiene el diferencial de desplazamientos longitudinales al reemplazar en la ecuación (2.2-15), las ecuaciones (2.2-14)

$$d\bar{u} = [-(ds \cos \alpha) \theta_{\bar{z}} + (ds \sin \alpha) \theta_{\bar{y}}] - [(dn \sin \alpha) \theta_{\bar{z}} + (dn \cos \alpha) \theta_{\bar{y}}] \quad (2.2-16)$$

Usando las relaciones dadas en la ecuación (2.1-2) se encuentra que

$$\begin{aligned} d\bar{u} &= [-(d\tilde{y}) \theta_{\bar{z}} + (d\tilde{z}) \theta_{\bar{y}}] - [(dn \sin \alpha) \theta_{\bar{z}} + (dn \cos \alpha) \theta_{\bar{y}}] \\ &= -(d\tilde{y} + dn \sin \alpha) \theta_{\bar{z}} + (d\tilde{z} - dn \cos \alpha) \theta_{\bar{y}} \end{aligned} \quad (2.2-17)$$

2.2-2 Desplazamientos por torsión

Siguiendo el procedimiento empleado en los desplazamientos por flexión se definen los desplazamientos por torsión usando la Hipótesis 2-2 (sección transversal rígida) para un segmento diferencial de la sección transversal al imponer un giro por torsión, tal como se muestra en la Figura 2.2-4.

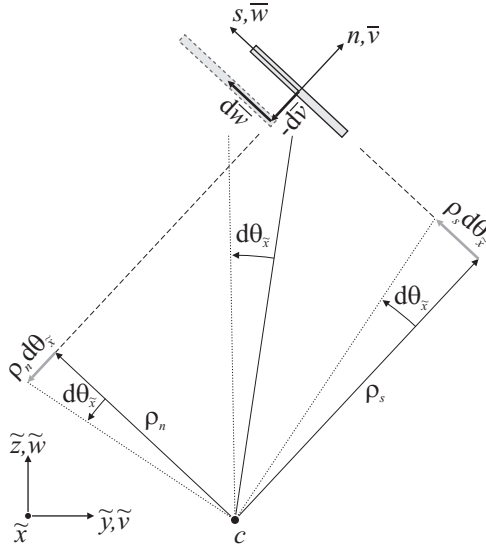


Figura 2.2-4: Giro de torsión impuesto en el plano de la sección transversal de una viga para un segmento diferencial.

Los incrementos de desplazamientos en los ejes locales (n y s) mostrados en la Figura 2.2-4 se obtienen a partir de la Hipótesis 2-1 (pequeñas rotaciones).

Los desplazamientos en el plano de la sección transversal se evalúan en función del giro impuesto ($d\theta_{\bar{x}}$) en el centro de giro y las distancias entre el eje el centro de giro y el segmento diferencial (ρ_s y ρ_n), y los desplazamientos longitudinales se obtienen aplicando la Hipótesis 2-3 (deformaciones angulares).

Desplazamientos en el plano de la sección transversal

Los incrementos de desplazamientos en el plano de la sección transversal para un punto localizado en la línea media de la sección de acuerdo con la Figura 2.2-4 son:

$$d\bar{v} = -\rho_n d\theta_{\bar{x}} \quad (2.2-18a)$$

$$d\bar{w} = \rho_s d\theta_{\bar{x}} \quad (2.2-18b)$$

y para un punto que se encuentra fuera de la línea media de la sección son:

$$d\bar{v} = -\rho_n d\theta_{\bar{x}} \quad (2.2-19a)$$

$$d\bar{w} = \rho_s^* d\theta_{\bar{x}} \quad (2.2-19b)$$

con

$$\rho_s^* = \rho_s + n \quad (2.2-20)$$

Desplazamientos longitudinales

Suponiendo que la viga tiene sección constante en toda su longitud y que la distancia entre un punto de estudio y el centro de giro (vectores ρ_s y ρ_n) no varía con la coordenada longitudinal de la viga (\tilde{x}) se reescriben los incrementos de desplazamientos (2.2-18) en términos de derivadas con respecto a \tilde{x}

$$\begin{Bmatrix} \partial_{\tilde{x}} \bar{v} \\ \partial_{\tilde{x}} \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho_n \\ \rho_s \end{Bmatrix} \partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{x}} \quad (2.2-21)$$

Al expresar las deformaciones angulares en términos de la componente de deformación tangencial (γ_t) de la derivada del giro de torsión por unidad de longitud resulta

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{\tilde{x}n} \\ \gamma_{\tilde{x}s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\rho_n \\ \rho_s \end{Bmatrix} \gamma_t \quad (2.2-22)$$

Reemplazando en el gradiente de los desplazamientos longitudinales en la sección transversal (2.2-12), las ecuaciones (2.2-22) y (2.2-21), y usando (2.2-6c) en virtud de la Hipótesis 2-3 (deformaciones angulares) se tiene

$$\begin{Bmatrix} \partial_n \bar{u} \\ \partial_s \bar{u} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -\rho_n \\ \rho_s \end{Bmatrix} \phi_\omega \quad (2.2-23)$$

De igual forma que en el cálculo del diferencial de desplazamientos longitudinales por flexión, en los desplazamientos longitudinales por torsión se supone que un incremento en los desplazamientos puede expresarse de acuerdo con la ecuación (2.2-15)

$$d\bar{u} = (\partial_s \bar{u}) ds + (\partial_n \bar{u}) dn$$

y reemplazando en esta ecuación las equivalencias dadas en (2.2-23) se obtiene

$$\begin{aligned} d\bar{u} &= [-(\rho_s ds) \phi_\omega] + [(\rho_n dn) \phi_\omega] \\ &= -(\rho_s ds - \rho_n dn) \phi_\omega \\ &= -(d\omega_s - d\omega_n) \phi_\omega \end{aligned} \quad (2.2-24)$$

$$= -d\omega \phi_\omega \quad (2.2-25)$$

con

$$d\omega_s = \rho_s ds \quad (2.2-26a)$$

$$d\omega_n = \rho_n dn \quad (2.2-26b)$$

$$d\omega = d\omega_s - d\omega_n \quad (2.2-26c)$$

donde, $d\omega$ es el incremento en la función de alabeo, y $d\omega_s$ y $d\omega_n$ corresponden a los incrementos en las funciones de alabeo *primario* y *secundario* respectivamente, tal como se verá en el Apartado 2.2-3.

2.2-3 Alabeo por torsión

Vlasov (1961) define como alabeo a la distorsión por desplazamientos longitudinales presentada en la sección transversal de una viga cuando se le aplican momentos de torsión y Librescu & Song (2006) indican que una viga de pared delgada sometida a torsión pura puede presentar:

- *Alabeo libre*: cuando no se restringe el alabeo en ninguna sección transversal a lo largo de la viga y la intensidad del alabeo es constante en toda la longitud ($\partial_{\bar{x}}\phi_\omega = 0$). Esta condición no genera tensiones longitudinales adicionales por la torsión aplicada.
- *Alabeo restringido*: cuando se impide el alabeo de alguna sección de la viga, la intensidad de alabeo varía con la coordenada longitudinal ($\partial_{\bar{x}}\phi_\omega \neq 0$) induciendo tensiones longitudinales que deben ser consideradas. Este fenómeno también se presenta cuando el momento torsor cambia a lo largo de la viga.

La forma en que alabea la sección transversal de una viga de pared delgada depende de su geometría, condiciones de contorno y materiales que la conforman, y su valor se define a través de la *función de alabeo*.

Siguiendo la ecuación (2.2-25) se suponen los desplazamientos longitudinales generados por el alabeo como

$$\bar{u}(\bar{x}, n, s) = -\omega(n, s)\phi_\omega(\bar{x}) \quad (2.2-27)$$

donde $\omega(n, s)$ es la función de alabeo para un punto en la sección transversal y $\phi_\omega(\bar{x})$ es la intensidad del alabeo.

A continuación se establecen las expresiones que permiten evaluar las funciones de alabeo primario y secundario, así como el valor medio de la función de alabeo.

Función de alabeo primario (ω_s)

La función de alabeo primario (alabeo en el contorno) corresponde al alabeo de un punto sobre la línea media de la sección y se obtiene al “normalizar” la coordenada sectorial del punto en cuestión.

$$\omega_s(s) = \Omega_s(s) - \omega_m \quad (2.2-28)$$

donde, $\Omega_s(s)$ es la coordenada sectorial medida desde el centro de esfuerzos cortantes c y ω_m es el valor medio del alabeo en la línea media de la sección transversal.

Esta “normalización” de la coordenada sectorial garantiza que el alabeo no introduce fuerzas longitudinales que desequilibren el sistema.

La coordenada sectorial se evalúa en la línea media de la sección transversal mediante la siguiente expresión

$$\Omega_s(s) = \int_0^s \rho_s(s) ds \quad (2.2-29)$$

y se supone constante en el espesor de la pared de la viga por tratarse de una viga de pared delgada, es decir

$$\partial_n \Omega_s = 0 \quad (2.2-30)$$

Debe notarse que los incrementos de la función de alabeo primario son iguales a los de la coordenada sectorial por ser constante el valor medio del alabeo ω_m

$$d\omega_s = d\Omega_s = \rho_s ds \quad (2.2-31)$$

Dividiendo la ecuación (2.2-31) por ds se obtiene

$$\frac{d\omega_s}{ds} = \rho_s = \partial_s \omega_s \quad (2.2-32)$$

de las ecuaciones (2.2-30) y (2.2-31) se deduce que

$$\partial_n \omega_s = 0 \quad (2.2-33)$$

De la ecuación (2.2-33) se establece que si la función de alabeo primario es constante en el espesor de las paredes de la viga, las tensiones generadas por esta función también lo serán.

En la Figura 2.2-5 se muestra que el valor de un incremento en la coordenada sectorial ($d\Omega_s$) puede evaluarse como el doble del área del sector circular con origen en el centro de esfuerzos cortantes c .

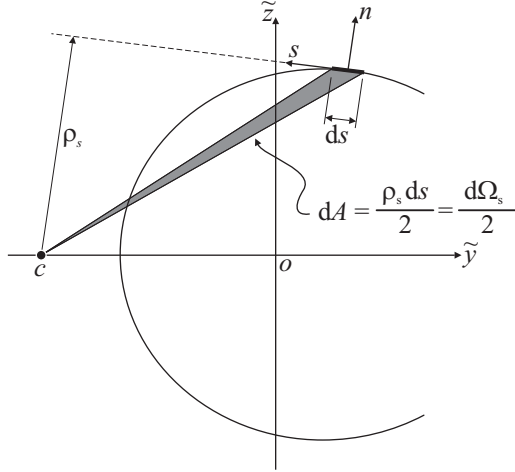


Figura 2.2-5: Incremento en la coordenada sectorial de la sección.

Reemplazando en la ecuación (2.2-31) las definiciones dadas en las ecuaciones (2.1-4a) y (2.1-2), pueden reescribirse los incrementos de la función de alabeo primario en términos del sistema de coordenadas global

$$d\omega_s = d\Omega_s = (\tilde{y}_P - \tilde{y}_c) d\tilde{z} - (\tilde{z}_P - \tilde{z}_c) d\tilde{y} \quad (2.2-34)$$

Desarrollando la ecuación (2.2-34) se obtiene el incremento de la coordenada sectorial con origen en el centro de cortante (c) para un punto cualquiera

$$d\Omega_s = (\tilde{y} d\tilde{z} - \tilde{z} d\tilde{y}) - (\tilde{y}_c d\tilde{z} - \tilde{z}_c d\tilde{y}) \quad (2.2-35)$$

que equivale a escribir

$$d\Omega_s = d\Omega_{s_o} - (\tilde{y}_c d\tilde{z} - \tilde{z}_c d\tilde{y}) \quad (2.2-36)$$

con

$$d\Omega_{s_o} = \tilde{y} d\tilde{z} - \tilde{z} d\tilde{y} = \rho_{s_o} ds \quad (2.2-37)$$

donde, $d\Omega_{s_o}$ es el incremento de la coordenada sectorial con origen en el centroide de la sección transversal.

Al integrar la ecuación (2.2-36) se obtiene una expresión alternativa a la ecuación (2.2-29) para evaluar la coordenada sectorial referida al centro de torsión cuando se conoce la coordenada sectorial medida desde el centroide

$$\Omega_s(s) = \Omega_{s_o}(s) - [\tilde{y}_c \tilde{z}(s) - \tilde{z}_c \tilde{y}(s)] \quad (2.2-38)$$

De igual forma puede evaluarse la función de alabeo primario medida desde el centro de torsión cuando se conoce la función de alabeo referida al eje neutro de la sección transversal

$$\omega_s(s) = \omega_{s_o}(s) - [\tilde{y}_c \tilde{z}(s) - \tilde{z}_c \tilde{y}(s)] \quad (2.2-39)$$

con

$$\omega_{s_o}(s) = \Omega_{s_o}(s) - \omega_m \quad (2.2-40)$$

donde, ω_{s_o} es la función de alabeo medida desde el eje neutro de la sección transversal.

Función de alabeo secundario (ω_n)

La función de alabeo secundario (alabeo en el espesor) corresponde a la componente de alabeo adicional al alabeo primario, que presenta un punto por estar fuera la línea media de la sección transversal.

El alabeo secundario se define como

$$\omega_n(n, s) = \int \rho_n(s) \, dn = \rho_n(s)n \quad (2.2-41)$$

y al igual que la función de alabeo primario, puede expresarse en términos de una función de alabeo secundario medida desde el centroide de la sección

$$\omega_n(n, s) = \omega_{n_o}(n, s) - [\tilde{y}_c (n \cos \alpha) + \tilde{z}_c (n \sin \alpha)] \quad (2.2-42)$$

con

$$\omega_{n_o}(n, s) = \rho_{n_o}(s)n \quad (2.2-43)$$

donde, ω_{n_o} es la función de alabeo secundario medida desde el eje neutro y ρ_{n_o} es la distancia entre el centroide y el punto de estudio tal como se definió en la ecuación (2.1-6b).

La ecuación (2.2-41) establece que el valor del alabeo secundario varía linealmente en el espesor de la pared siendo nulo en la línea media de la sección, con una pendiente

$$\partial_n \omega_n = \rho_n \quad (2.2-44)$$

La derivada de la función de alabeo secundario con respecto a la coordenada curvilínea s se calcula usando las ecuaciones (2.2-41) y (2.1-7)

$$\partial_s \omega_n = n \quad (2.2-45)$$

Valor medio de la función de alabeo (ω_n)

El valor medio de la función de alabeo en la línea media de la sección transversal normaliza la coordenada sectorial asegurando que la resultante de las tensiones longitudinales inducidas por la torsión es nula. Esto se logra estableciendo la condición de equilibrio

$$N_{\tilde{x}} = \int_A \sigma_{\tilde{x}} dA = 0 \quad (2.2-46)$$

De los incrementos de desplazamientos generados por torsión (2.2-25) se establece que

$$\int d\bar{u} = - \left\{ \int (\rho_s ds - \rho_n dn) \right\} \phi_\omega \quad (2.2-47)$$

resultando

$$\bar{u} = \bar{u}_{s=0} - (\Omega_s - \omega_n) \phi_\omega \quad (2.2-48)$$

donde $\bar{u}_{s=0}$ es el desplazamiento longitudinal en el origen del eje curvilíneo.

La tensión longitudinal en un punto de la sección transversal se define usando los desplazamientos longitudinales (ver ecuación 2.2-48) y la Hipótesis 2-2 o de la sección rígida

$$\sigma_{\tilde{x}} = E \partial_{\tilde{x}} \bar{u} \quad (2.2-49a)$$

$$\sigma_{\tilde{x}} = E \partial_{\tilde{x}} [\bar{u}_{s=0} - (\Omega_s - \omega_n) \phi_\omega] \quad (2.2-49b)$$

donde E es el módulo de elasticidad del material de la viga.

Reemplazando la tensión longitudinal (2.2-49) en la condición de equilibrio (2.2-46)

$$N_{\tilde{x}} = \int_A E \partial_{\tilde{x}} [\bar{u}_{s=0} - (\Omega_s - \omega_n) \phi_\omega] dA = 0 \quad (2.2-50)$$

y considerando que los desplazamientos se evalúan en la línea media de la sección transversal ($n = 0$ y $\omega_n = 0$), que la coordenada sectorial (Ω_s) no depende de la coordenada longitudinal de la viga (\tilde{x}) y que tanto el material (E) como los términos $\partial_{\tilde{x}} \bar{u}_{s=0}$ y $\partial_{\tilde{x}} \phi_\omega$ son constantes en todos los puntos que conforman la sección transversal, se tiene

$$N_{\tilde{x}} = (\partial_{\tilde{x}} \bar{u}_{s=0}) E \int_A dA - (\partial_{\tilde{x}} \phi_\omega) E \int_A \Omega_s dA = 0 \quad (2.2-51)$$

La ecuación (2.2-51) debe ser válida para cualquier material, por lo que sacando como factor común el módulo del material (E) y tomando la parte no trivial de la expresión resultante queda

$$(\partial_{\bar{x}} \bar{u}_{s=0}) \int_A dA - (\partial_{\bar{x}} \phi_\omega) \int_A \Omega_s dA = 0 \quad (2.2-52)$$

Despejando $\partial_{\bar{x}} \bar{u}_{s=0}$ resulta

$$\partial_{\bar{x}} \bar{u}_{s=0} = \omega_m \partial_{\bar{x}} \phi_\omega \quad (2.2-53)$$

con

$$\omega_m = \frac{S_{\Omega_s}}{A} \quad (2.2-54)$$

y

$$S_{\Omega_s} = \int_A \Omega_s dA \quad (2.2-55)$$

donde, ω_m corresponde al valor medio de la función de alabeo a lo largo de toda la coordenada curvilínea (s) y S_{Ω_s} es el primer momento del área con respecto a la coordenada sectorial.

El primer momento de área S_{Ω_s} puede evaluarse también usando la coordenada sectorial medida desde el centroide. Usando la definición de la coordenada sectorial Ω_s , dada en la ecuación (2.2-38) se establece que

$$S_{\Omega_s} = \int_A \Omega_s dA = \int_A \Omega_{s_o} dA \quad (2.2-56)$$

Función de alabeo (ω)

Conocido el valor medio de la función de alabeo y por ende el término $\bar{u}_{s=0}$ se obtiene el campo de desplazamientos longitudinales inducidos por alabeo después de reemplazar la ecuación (2.2-53) en la definición de las tensiones longitudinales (2.2-49b)

$$\sigma_{\bar{x}} = E \partial_{\bar{x}} [\omega_m \phi_\omega - (\Omega_s - \omega_n) \phi_\omega] \quad (2.2-57)$$

Comparando las ecuaciones (2.2-49a) y (2.2-57) se establece que el campo de desplazamientos es

$$\bar{u} = \omega_m \phi_\omega - (\Omega_s - \omega_n) \phi_\omega \quad (2.2-58)$$

al reordenar se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{u} &= -[(\Omega_s - \omega_m) - \omega_n] \phi_\omega \\
&= -(\omega_s - \omega_n) \phi_\omega \\
&= -\omega \phi_\omega
\end{aligned} \tag{2.2-59}$$

verificando la ecuación (2.2-27) supuesta al inicio. De acuerdo con la ecuación (2.2-59) la función de alabeo se define en términos de las funciones de alabeo primario y secundario

$$\omega = \omega_s - \omega_n \tag{2.2-60}$$

La función de alabeo (ecuación 2.2-60) también puede calcularse en términos de funciones de alabeo primario y secundario medidas desde el eje neutro con ayuda de las ecuaciones (2.2-42) y (2.2-39)

$$\omega = \omega_o - [(\tilde{z} - n \cos \alpha) \tilde{y}_c - (\tilde{y} + n \sin \alpha) \tilde{z}_c] \tag{2.2-61}$$

con

$$\omega_o = \omega_{s_o} - \omega_{n_o} \tag{2.2-62}$$

La derivada de la función de alabeo con respecto a los ejes locales se evalúa usando las ecuaciones (2.2-60), (2.2-32), (2.2-33), (2.2-43) y (2.2-44).

$$\frac{\partial \omega}{\partial s} = \partial_s \omega_s - \partial_s \omega_n = \rho_s - n \tag{2.2-63a}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \partial_n \omega_s - \partial_n \omega_n = -\rho_n \tag{2.2-63b}$$

La derivada de la función de alabeo con respecto a los ejes globales se obtiene aplicando las ecuaciones (2.2-63) y (2.1-3), y la regla de la cadena

$$\partial_{\tilde{y}} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \tilde{y}} + \frac{\partial \omega}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \tilde{y}} = -[(\tilde{z} - \tilde{z}_c) + n \cos \alpha] \tag{2.2-64a}$$

$$\partial_{\tilde{z}} \omega = \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial \omega}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial \tilde{z}} = [(\tilde{y} - \tilde{y}_c) - n \sin \alpha] \tag{2.2-64b}$$

El valor de la función de alabeo se evalúa una vez se ha discretizado la sección transversal en segmentos rectilíneos usando un algoritmo de búsqueda de grafos Alfano et al. (1996), después se asigna a cada segmento la coordenada curvilínea obtenida del grafo que representa la sección, la dirección en que crece la coordenada curvilínea y el valor de la función de alabeo evaluada en el centro del segmento. Con esta información es posible calcular posteriormente las propiedades geométricas que se requieren junto a las del material para definir la matriz de rigidez de la viga.

2.2-4 Integración de los desplazamientos

El campo de desplazamientos se obtiene aplicando el método de superposición de las componentes de desplazamientos a flexión y torsión

$$\begin{Bmatrix} d\bar{u} \\ d\bar{v} \\ d\bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} - (d\tilde{y} + dn \operatorname{sen} \alpha) \theta_{\tilde{z}} + (d\tilde{z} - dn \operatorname{cos} \alpha) \theta_{\tilde{y}} \\ d\tilde{v} \operatorname{sen} \alpha - d\tilde{w} \operatorname{cos} \alpha \\ d\tilde{v} \operatorname{cos} \alpha + d\tilde{w} \operatorname{sen} \alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} - (d\omega_s - d\omega_n) \phi_\omega \\ -\rho_n d\theta_{\tilde{x}} \\ (\rho_s + n) d\theta_{\tilde{x}} \end{Bmatrix} \quad (2.2-65)$$

flexión torsión

Al integrar la ecuación (2.2-65) se define el campo de desplazamientos en el sistema local

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \tilde{u}_o - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \theta_{\tilde{z}} + (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) \theta_{\tilde{y}} - (\omega_s - \omega_n) \phi_\omega \\ \bar{v} &= (\tilde{v}_c \operatorname{sen} \alpha - \tilde{w}_c \operatorname{cos} \alpha) - \rho_n \theta_{\tilde{x}} \\ \bar{w} &= (\tilde{v}_c \operatorname{cos} \alpha + \tilde{w}_c \operatorname{sen} \alpha) + (\rho_s + n) \theta_{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (2.2-66)$$

donde, \bar{u} , \bar{v} y \bar{w} son los desplazamientos en los ejes \bar{x} , n y s respectivamente; \tilde{y} y \tilde{z} son coordenadas sobre la línea media de la sección; n es la coordenada en el espesor de la pared; \tilde{u}_o , \tilde{v}_c y \tilde{w}_c son los desplazamientos en los ejes \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} , aplicados en la sección transversal de la viga tal como se muestra en la Figura 2.2-6.

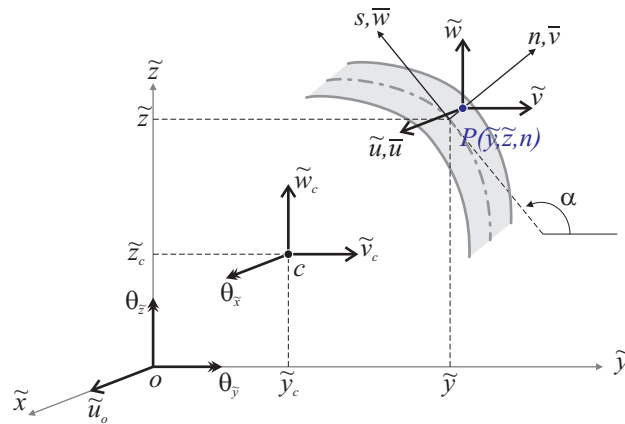


Figura 2.2-6: Traslaciones y rotaciones aplicadas en la sección transversal de una viga

El campo de desplazamientos en el sistema de coordenadas global se calcula reemplazando en la ecuación (2.2-66) las ecuaciones (2.1-4b) y usando la matriz de rotación de coordenadas $\mathbf{R}_2(\alpha)$ (ver ecuación 2.1-3), así,

$$\begin{aligned}
\tilde{u} &= \tilde{u}_o - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \theta_{\tilde{z}} + (\tilde{z} - n \cos \alpha) \theta_{\tilde{y}} - (\omega_s - \omega_n) \phi_\omega \\
\tilde{v} &= \tilde{v}_c - [(\tilde{z} - \tilde{z}_c) - n \cos \alpha] \theta_{\tilde{x}} \\
\tilde{w} &= \tilde{w}_c + [(\tilde{y} - \tilde{y}_c) + n \operatorname{sen} \alpha] \theta_{\tilde{x}}
\end{aligned} \tag{2.2-67}$$

Se indica que al evaluar estas expresiones en la línea media de la sección transversal ($n = 0$) y contemplar que son despreciables las deformaciones angulares por torsión ($\gamma_t = 0$) se recuperan los campos de desplazamientos incluidos en las formulaciones presentadas por Bažant & Cedolin (2003); Back & Will (1998); Gjelsvik (1981); Timoshenko & Gere (1963); Vlasov (1961).

2.3 Deformaciones

La teoría de pequeños desplazamientos permite definir el campo de deformaciones en coordenadas locales usando las siguientes relaciones:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \partial_{\bar{x}} \bar{u} \tag{2.3-1a}$$

$$\varepsilon_s = \partial_s \bar{w} \tag{2.3-1b}$$

$$\gamma_{\bar{x}s} = \partial_{\bar{x}} \bar{w} + \partial_s \bar{u} \tag{2.3-1c}$$

$$\gamma_{sn} = \partial_s \bar{v} + \partial_n \bar{w} \tag{2.3-1d}$$

$$\gamma_{\bar{x}n} = \partial_{\bar{x}} \bar{v} + \partial_n \bar{u} \tag{2.3-1e}$$

o escrito en forma matricial,

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\mathcal{D}} \bar{\mathbf{u}} \tag{2.3-2}$$

con

$$\bar{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{\bar{x}}, \varepsilon_s, \gamma_{\bar{x}s}, \gamma_{sn}, \gamma_{\bar{x}n}\} \tag{2.3-3a}$$

$$\bar{\mathbf{u}}^T = \{\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}\} \tag{2.3-3b}$$

y

$$\bar{\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_s \\ \partial_s & 0 & \partial_{\bar{x}} \\ 0 & \partial_s & \partial_n \\ \partial_n & \partial_{\bar{x}} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3-4}$$

Las derivadas parciales del campo de desplazamientos en el sistema local (2.2-66) con respecto a los ejes locales son:

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} \bar{u} &= \partial_{\bar{x}} \bar{u}_o - (\bar{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{z}} \\ &\quad + (\bar{z} - n \cos \alpha) \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{y}} - (\omega_s - \omega_n) \partial_{\bar{x}} \phi_\omega \end{aligned} \quad (2.3-5a)$$

$$\partial_s \bar{u} = -(\partial_s \bar{y}) \theta_{\bar{z}} + (\partial_s \bar{z}) \theta_{\bar{y}} - (\partial_s \omega_s - \partial_s \omega_n) \phi_\omega \quad (2.3-5b)$$

$$\partial_n \bar{u} = -(\operatorname{sen} \alpha) \theta_{\bar{z}} - (\cos \alpha) \theta_{\bar{y}} - (\partial_n \omega_s - \partial_n \omega_n) \phi_\omega \quad (2.3-5c)$$

$$\partial_{\bar{x}} \bar{v} = (\partial_{\bar{x}} \bar{v}_c \operatorname{sen} \alpha - \partial_{\bar{x}} \bar{w}_c \cos \alpha) - \rho_n \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{x}} \quad (2.3-5d)$$

$$\partial_s \bar{v} = -(\partial_s \rho_n) \theta_{\bar{x}} \quad (2.3-5e)$$

$$\partial_n \bar{v} = -(\partial_n \rho_n) \theta_{\bar{x}} \quad (2.3-5f)$$

$$\partial_{\bar{x}} \bar{w} = (\partial_{\bar{x}} \bar{v}_c \cos \alpha + \partial_{\bar{x}} \bar{w}_c \operatorname{sen} \alpha) + (\rho_s + n) \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{x}} \quad (2.3-5g)$$

$$\partial_s \bar{w} = (\partial_s \rho_s) \theta_{\bar{x}} \quad (2.3-5h)$$

$$\partial_n \bar{w} = \partial_n (\rho_s + n) \theta_{\bar{x}} = (\partial_n \rho_s^*) \theta_{\bar{x}} \quad ; \quad (\text{ver ecuación 2.2-20}) \quad (2.3-5i)$$

Reemplazando las derivadas parciales del campo de desplazamientos (2.3-5) y la hipótesis de deformaciones angulares (2.2-6) en las ecuaciones (2.3-1) se obtienen las deformaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}} &= \partial_{\bar{x}} \bar{u}_o - (\bar{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{z}} + (\bar{z} - n \cos \alpha) \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{y}} - (\omega_s - \rho_n n) \partial_{\bar{x}} \phi_\omega \\ \varepsilon_s &= 0 \\ \gamma_{\bar{x}s} &= \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \cos \alpha + \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \operatorname{sen} \alpha + \rho_s \gamma_t + (\phi_\omega + \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{x}}) n \\ \gamma_{sn} &= 0 \\ \gamma_{\bar{x}n} &= \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \operatorname{sen} \alpha - \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \cos \alpha - \rho_n \gamma_t \end{aligned} \quad (2.3-6)$$

Aplicando un cambio de variables en las deformaciones resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\bar{x}} &= \varepsilon_{\bar{x}}^o - (\bar{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \kappa_{\bar{z}} + (\bar{z} - n \cos \alpha) \kappa_{\bar{y}} - (\omega_s - \rho_n n) \kappa_\omega \\ \gamma_{\bar{x}s} &= \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \cos \alpha + \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \operatorname{sen} \alpha + \rho_s \gamma_t + n \kappa_{\bar{x}s} \\ \gamma_{\bar{x}n} &= \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \operatorname{sen} \alpha - \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \cos \alpha - \rho_n \gamma_t \end{aligned} \quad (2.3-7)$$

donde, $\varepsilon_{\bar{x}}^o$ es la deformación axial; $\gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o$ y $\gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o$ son las deformaciones tangenciales por flexión; γ_t es la deformación angular por torsión; κ son las curvaturas debido a: flexión ($\kappa_{\bar{y}}$, $\kappa_{\bar{z}}$), torsión ($\kappa_{\bar{x}s}$) y alabeo (κ_ω); definidas como

$$\varepsilon_{\bar{x}}^o = \partial_{\bar{x}} \bar{u}_o \quad (2.3-8a)$$

$$\gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o = \partial_{\bar{x}} \bar{v}_c - \theta_{\bar{z}} \quad \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o = \partial_{\bar{x}} \bar{w}_c + \theta_{\bar{y}} \quad (2.3-8b)$$

$$\gamma_t = \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{x}} - \phi_\omega \quad (2.3-8c)$$

$$\kappa_{\bar{y}} = \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{y}} \quad \kappa_{\bar{z}} = \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{z}} \quad (2.3-8d)$$

$$\kappa_{\bar{x}s} = \partial_{\bar{x}} \theta_{\bar{x}} + \phi_\omega \quad \kappa_\omega = \partial_{\bar{x}} \phi_\omega \quad (2.3-8e)$$

Para el caso en que se supone despreciable la contribuci3n de las deformaciones angulares por torsi3n ($\gamma_t \approx 0$ y $\phi_\omega \approx \partial_{\bar{x}}\theta_{\bar{z}}$), el valor de la curvatura por torsi3n ser3 $\kappa_{\bar{x}s} = 2\partial_{\bar{x}}\theta_{\bar{z}}$, recuper3ndose Bažant & Cedolin (2003); Back & Will (1998); Gjelsvik (1981); Timoshenko & Gere (1963); Vlasov (1961).

Las ecuaciones (2.3-8) definen las deformaciones generalizadas de la secci3n de la viga ($\tilde{\epsilon}$) en funci3n de desplazamientos y rotaciones impuestos ($\tilde{\mathbf{u}}$).

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^o \\ \kappa_{\bar{z}} \\ \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\bar{\omega}} \\ \kappa_{\bar{x}s} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \\ \gamma_t \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\bar{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\bar{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{\bar{x}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\bar{x}} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_o \\ \tilde{v}_c \\ \tilde{w}_c \\ \theta_{\bar{x}} \\ \theta_{\bar{y}} \\ \theta_{\bar{z}} \\ \phi_\omega \end{pmatrix} \quad (2.3-9)$$

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\mathcal{D}}\tilde{\mathbf{u}}$$

Expresando el campo de deformaciones (2.3-7) en forma vectorial se tiene

$$\bar{\epsilon} = \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\epsilon}}\tilde{\epsilon} \quad (2.3-10)$$

con

$$\bar{\epsilon}^T = \{\varepsilon_{\bar{x}}, \gamma_{\bar{x}s}, \gamma_{\bar{x}n}\} \quad (2.3-11)$$

y

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\epsilon}} = \begin{bmatrix} 1 & -(\bar{y}+n \operatorname{sen} \alpha) & (\bar{z}-n \operatorname{cos} \alpha) & -(\omega_s-\rho_n n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen} \alpha & \rho_s & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{cos} \alpha & -\rho_n \end{bmatrix} \quad (2.3-12)$$

El vector de deformaciones $\bar{\epsilon}$ definido por la ecuaci3n (2.3-11), es una versi3n simplificada del vector $\tilde{\epsilon}$ (ver ecuaci3n 2.3-3a) debido a la cinem3tica de la viga.

2.4 Formulaci3n variacional

La energ3a potencial del sistema es la suma de la energ3a de deformaci3n \mathcal{U} y la energ3a potencial de las cargas aplicadas \mathcal{V}

$$\Pi = \mathcal{U} + \mathcal{V} \quad (2.4-1)$$

definiendo la energía de deformación como

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_{\bar{x}} \varepsilon_{\bar{x}} + \tau_{\bar{x}s} \gamma_{\bar{x}s} + \tau_{\bar{x}n} \gamma_{\bar{x}n}) dV \quad (2.4-2)$$

y reemplazando las deformaciones definidas por la ecuación (2.3-7), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = \frac{1}{2} \iiint_V \left\{ \sigma_{\bar{x}} [\varepsilon_{\bar{x}}^o - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \kappa_{\tilde{z}} \right. \\ + (\tilde{z} - n \cos \alpha) \kappa_{\tilde{y}} - (\omega_s - \rho_n n) \kappa_{\omega}] \\ + \tau_{\bar{x}s} [\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o \cos \alpha + \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o \operatorname{sen} \alpha + \rho_s \gamma_t + n \kappa_{\tilde{x}s}] \\ \left. + \tau_{\bar{x}n} [\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o \operatorname{sen} \alpha - \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o \cos \alpha - \rho_n \gamma_t] \right\} dV \end{aligned} \quad (2.4-3)$$

La variación de la energía de deformación del sistema se evalúa a partir de la ecuación (2.4-3) resultando

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{U} = \int_{\ell} \left\{ N_{\bar{x}} \delta \varepsilon_{\bar{x}}^o + M_{\tilde{z}} \delta \kappa_{\tilde{z}} + M_{\tilde{y}} \delta \kappa_{\tilde{y}} + B_{\omega} \delta \kappa_{\omega} \right. \\ \left. + M_t \delta \kappa_{\tilde{x}s} + Q_{\tilde{y}} \delta \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o + Q_{\tilde{z}} \delta \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o + T \delta \gamma_t \right\} d\tilde{x} \end{aligned} \quad (2.4-4)$$

o en forma compacta

$$\delta \mathcal{U} = \int_{\ell} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\tilde{x} \quad (2.4-5)$$

con

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T = \{N_{\bar{x}}, M_{\tilde{z}}, M_{\tilde{y}}, B_{\omega}, M_t, Q_{\tilde{y}}, Q_{\tilde{z}}, T\} \quad (2.4-6)$$

donde, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ es el vector de fuerzas internas en la viga, $N_{\bar{x}}$ es la fuerza axial, $M_{\tilde{z}}$ y $M_{\tilde{y}}$ son los momentos flectores en los ejes \tilde{z} y \tilde{y} , M_t es la torsión en el espesor de la pared de la sección, B_{ω} es el momento de alabeo (bimomento), $Q_{\tilde{y}}$ y $Q_{\tilde{z}}$ son las fuerzas de corte en las direcciones \tilde{y} y \tilde{z} , y T es la torsión generada por las deformaciones de corte, definidas en el área de la sección transversal:

$$N_{\bar{x}} = \iint_A \sigma_{\bar{x}} dA \quad (2.4-7a)$$

$$M_{\tilde{z}} = - \iint_A [\sigma_{\bar{x}} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)] dA \quad (2.4-7b)$$

$$M_{\tilde{y}} = \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\tilde{z} - n \cos \alpha)] dA \quad (2.4-7c)$$

$$B_{\omega} = - \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\omega_s - \rho_n n)] dA \quad (2.4-7d)$$

$$M_t = \iint_A \tau_{\tilde{x}s} n dA \quad (2.4-7e)$$

$$Q_{\tilde{y}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \cos \alpha + \tau_{\tilde{x}n} \sin \alpha) dA \quad (2.4-7f)$$

$$Q_{\tilde{z}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \sin \alpha - \tau_{\tilde{x}n} \cos \alpha) dA \quad (2.4-7g)$$

$$T = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \rho_s - \tau_{\tilde{x}n} \rho_n) dA \quad (2.4-7h)$$

En la Figura 2.4-1 se muestra de forma esquemática la torsión en el espesor de la pared de la sección (M_t), la torsión generada por las deformaciones de corte (T) y el momento de alabeo (B_{ω}) en la sección transversal de una viga I.

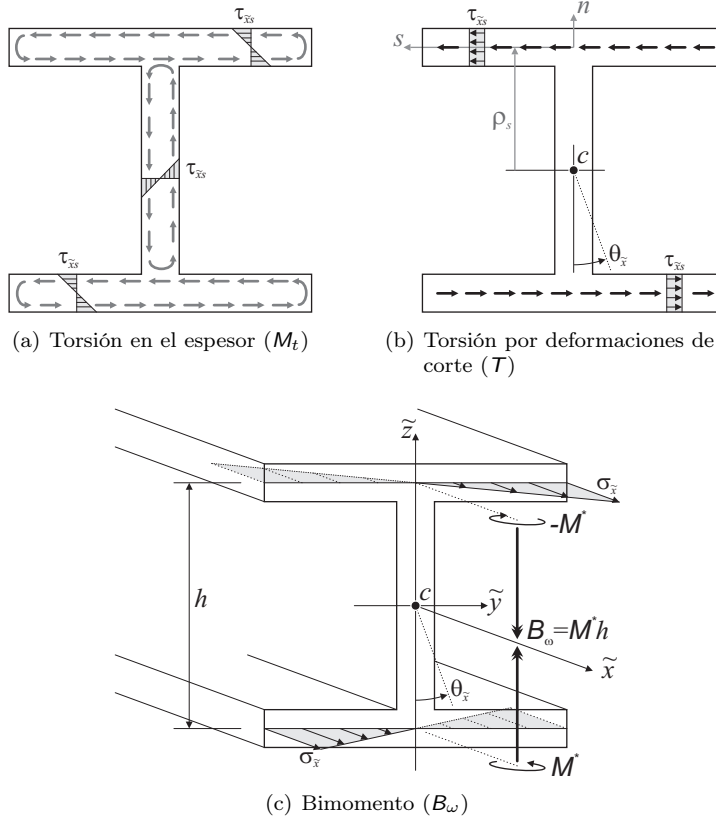


Figura 2.4-1: Torsiones y bimomento resultante en la sección transversal de una viga con sección I.

La variación de la energía potencial de las cargas aplicadas se expresa como

$$\delta\mathcal{V} = \int_{\ell} \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} d\tilde{x} + [\delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^{\ell} \quad (2.4-8)$$

con

$$\tilde{\mathbf{u}}^T = \{\tilde{u}_o, \tilde{v}_c, \tilde{w}_c, \theta_{\tilde{x}}, \theta_{\tilde{y}}, \theta_{\tilde{z}}, \phi_{\omega}\} \quad (2.4-9a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^T = \{p_{\tilde{x}}, p_{\tilde{y}}, p_{\tilde{z}}, m_{\tilde{x}}, m_{\tilde{y}}, m_{\tilde{z}}, b_{\omega}\} \quad (2.4-9b)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^T = \{P_{\tilde{x}}, P_{\tilde{y}}, P_{\tilde{z}}, M_{\tilde{x}}, M_{\tilde{y}}, M_{\tilde{z}}, B_{\omega}\} \quad (2.4-9c)$$

donde: $\tilde{\mathbf{b}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ son los vectores de fuerzas externas impuestas en la viga, distribuidas y puntuales respectivamente; $p_{\tilde{x}}$, $p_{\tilde{y}}$ y $p_{\tilde{z}}$ son fuerzas distribuidas en la dirección de los ejes \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} ; $m_{\tilde{x}}$, $m_{\tilde{y}}$ y $m_{\tilde{z}}$ son momentos actuando a lo largo de la viga; b_{ω} es el bimomento distribuido; $P_{\tilde{x}}$, $P_{\tilde{y}}$ y $P_{\tilde{z}}$ son fuerzas puntuales; $M_{\tilde{x}}$, $M_{\tilde{y}}$ y $M_{\tilde{z}}$ son momentos concentrados; y B_{ω} es el bimomento concentrado.

Usando el principio de la mínima variación de la energía potencial del sistema

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{V} = 0 \quad (2.4-10)$$

se establece la ecuación de equilibrio

$$\int_{\ell} \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\tilde{x} = \int_{\ell} \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} d\tilde{x} + [\delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^{\ell} \quad (2.4-11)$$

2.5 Fuerzas internas y matriz de rigidez

Considerando la Hipótesis 2-2 (sección transversal rígida) y las componentes del vector de deformaciones $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ (ver ecuación 2.3-11), se establece la ecuación constitutiva que relaciona las tensiones y deformaciones para materiales isotrópicos

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\tilde{x}} \\ \tau_{\tilde{x}s} \\ \tau_{\tilde{x}n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\tilde{x}} \\ \gamma_{\tilde{x}s} \\ \gamma_{\tilde{x}n} \end{Bmatrix} \quad (2.5-1)$$

o en forma compacta

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \tilde{\mathbb{Q}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.5-2)$$

donde E corresponde al módulo de elasticidad del material y G al módulo de corte.

Debe tenerse en cuenta que al ser un material isotrópico es posible definir la matriz constitutiva $\tilde{\mathbb{Q}}$ a partir de sus módulos sin preocuparse por el sistema cartesiano

en el que se evalúa. En el caso de materiales anisótropos la definición de la matriz constitutiva reducida $\tilde{\mathbb{Q}}$ requiere de un procedimiento que considere las relaciones entre sistemas coordenados de la viga y del material, y las suposiciones que permitan reducir el tensor constitutivo del material a las componentes requeridas por la cinemática de la viga.

El vector de esfuerzos en la sección transversal de la viga ($\tilde{\sigma}$) definido en la ecuación (2.4-6) se evalúa usando las fuerzas internas dadas por las ecuaciones (2.4-7) y la ecuación constitutiva del material (2.5-1), de tal forma que

$$\tilde{\sigma} = \iint_A \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\sigma}} \bar{\sigma} dA \quad (2.5-3)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(\bar{y}+n \operatorname{sen} \alpha) & 0 & 0 \\ (\bar{z}-n \operatorname{cos} \alpha) & 0 & 0 \\ -(\omega_s - \rho_n n) & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{cos} \alpha \\ 0 & \rho_s & -\rho_n \end{bmatrix} \quad (2.5-4)$$

Debe notarse que

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\sigma}} = \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\epsilon}}^T \quad (2.5-5)$$

Sustituyendo la ecuación constitutiva del material (2.5-2) y el campo de deformaciones (2.3-10) en el vector de esfuerzos (2.5-3) se obtiene la relación entre el vector de fuerzas internas (2.4-6) y el vector de deformaciones generalizadas (2.3-9)

$$\begin{Bmatrix} N_{\bar{x}} \\ M_{\bar{z}} \\ M_{\bar{y}} \\ B_{\omega} \\ M_t \\ Q_{\bar{y}} \\ Q_{\bar{z}} \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\bar{x}}^o \\ \kappa_{\bar{z}} \\ \kappa_{\bar{y}} \\ \kappa_{\omega} \\ \kappa_{\bar{x}s} \\ \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \\ \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \\ \gamma_t \end{Bmatrix} \quad (2.5-6)$$

escrito en forma compacta

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\epsilon} \quad (2.5-7)$$

Con la matriz de rigidez generalizada definida como

$$\tilde{\mathbf{E}} = \iint_A \tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \bar{\mathbf{Q}} \tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} dA = \begin{bmatrix} EA & -ES_z & ES_y & -ES_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & EI_z & -EI_{yz} & EI_{z\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & EI_y & -EI_{y\omega} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & EI_\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & GI_s & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & k_1 GA & 0 & -GS_{y_c} \\ sim. & & & & & & k_2 GA & GS_{z_c} \\ & & & & & & & GI_{t_c} \end{bmatrix} \quad (2.5-8)$$

donde, k_1 y k_2 corresponden a los coeficientes de distorsión transversal introducidos para considerar la distribución no uniforme de las tensiones tangenciales en la sección de la viga, A es el área de la sección transversal, I es el momento de inercia y S es el primer momento del área de la sección.

Con el fin de facilitar la comprensión de las interrelaciones entre los componentes involucrados en la evaluación de las tensiones generalizadas en la sección ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$) en la Figura 2.5-1 se incluye un diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado a la metodología presentada, donde se calculan las tensiones generalizadas en la sección ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$) conociendo las deformaciones generalizadas ($\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$) y la matriz constitutiva del material ($\bar{\mathbf{Q}}$).

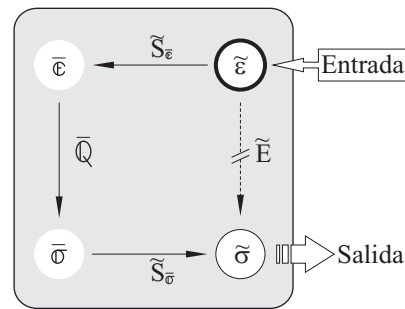


Figura 2.5-1: Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones generalizadas ($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$) de la sección de una viga isotrópica.

A continuación se definen las constantes geométricas de la sección usadas en la matriz de rigidez

$$\begin{aligned} S_z &= \int_A \tilde{y} dA & ; & \quad S_y = \int_A \tilde{z} dA & \quad ; & \quad S_\omega = \int_A \omega dA \\ I_\omega &= \int_A \omega^2 dA & ; & \quad I_{z\omega} = \int_A \tilde{y}\omega dA & \quad ; & \quad I_{y\omega} = \int_A \tilde{z}\omega dA \\ I_{\tilde{y}} &= \int_A \tilde{z}^2 dA + \int_A (n \cos \alpha)^2 dA & ; & \quad I_{\tilde{z}} = \int_A \tilde{y}^2 dA + \int_A (n \sin \alpha)^2 dA \\ I_{\tilde{y}\tilde{z}} &= \int_A \tilde{y}\tilde{z} dA - \int_A n^2 \cos \alpha \sin \alpha dA \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_s &= \int_A n^2 dA \quad ; \quad I_{t_c} = \int_A [(\tilde{y} - \tilde{y}_c)^2 + (\tilde{z} - \tilde{z}_c)^2] dA \\
S_{\tilde{y}_c} &= \int_A (\tilde{z} - \tilde{z}_c) dA \quad ; \quad S_{\tilde{z}_c} = \int_A (\tilde{y} - \tilde{y}_c) dA
\end{aligned} \tag{2.5-9}$$

donde $S_\omega = I_{\tilde{y}\omega} = I_{\tilde{z}\omega} = 0$ si la función de alabeo (ω) se mide desde el centro de cortante.

Se indica que en el cálculo de las constantes geométricas no se consideró el término $\int_A n dA$ por tratarse de secciones de materiales homogéneos e isotrópicos cuyo eje curvilíneo se localiza en la mitad del espesor de la pared.

La relación entre las tensiones y las fuerzas internas se obtiene reemplazando las deformaciones generalizadas resultantes de invertir la matriz de rigidez generalizada (2.5-6), en la ecuación constitutiva (2.5-2)

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma} &= \bar{Q} \bar{\epsilon} \\
&= \bar{Q} \tilde{S}_\epsilon \tilde{\epsilon} \\
&= \bar{Q} \tilde{S}_\epsilon \tilde{E}^{-1} \tilde{\sigma}
\end{aligned} \tag{2.5-10}$$

resultando

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}} (\tilde{y} + n \sin \alpha) + \frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}} (\tilde{z} - n \cos \alpha) - \frac{B_\omega}{I_\omega} \omega \tag{2.5-11a}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\bar{x}s} &= \frac{M_t}{I_s} n + \frac{(k_2 A I_{t_c} - S_{\tilde{z}_c}^2) \cos \alpha - S_{\tilde{y}_c} S_{\tilde{z}_c} \sin \alpha + \rho_s k_2 A S_{\tilde{y}_c}}{k_1 k_2 A^2 I_{t_c} - k_1 A S_{\tilde{z}_c}^2 - k_2 A S_{\tilde{y}_c}^2} Q_{\tilde{y}} \\
&\quad - \frac{S_{\tilde{y}_c} S_{\tilde{z}_c} \cos \alpha - (k_1 A I_{t_c} - S_{\tilde{y}_c}^2) \sin \alpha + \rho_s k_1 A S_{\tilde{z}_c}}{k_1 k_2 A^2 I_{t_c} - k_1 A S_{\tilde{z}_c}^2 - k_2 A S_{\tilde{y}_c}^2} Q_{\tilde{z}} \\
&\quad + \frac{k_2 A S_{\tilde{y}_c} \cos \alpha - k_1 A S_{\tilde{z}_c} \sin \alpha + \rho_s k_1 k_2 A^2}{k_1 k_2 A^2 I_{t_c} - k_1 A S_{\tilde{z}_c}^2 - k_2 A S_{\tilde{y}_c}^2} T
\end{aligned} \tag{2.5-11b}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\bar{x}n} &= \frac{(k_2 A I_{t_c} - S_{\tilde{z}_c}^2) \sin \alpha + S_{\tilde{y}_c} S_{\tilde{z}_c} \cos \alpha - \rho_s k_2 A S_{\tilde{y}_c}}{k_1 k_2 A^2 I_{t_c} - k_1 A S_{\tilde{z}_c}^2 - k_2 A S_{\tilde{y}_c}^2} Q_{\tilde{y}} \\
&\quad - \frac{S_{\tilde{y}_c} S_{\tilde{z}_c} \sin \alpha + (k_1 A I_{t_c} - S_{\tilde{y}_c}^2) \cos \alpha - \rho_s k_1 A S_{\tilde{z}_c}}{k_1 k_2 A^2 I_{t_c} - k_1 A S_{\tilde{z}_c}^2 - k_2 A S_{\tilde{y}_c}^2} Q_{\tilde{z}} \\
&\quad + \frac{k_2 A S_{\tilde{y}_c} \sin \alpha + k_1 A S_{\tilde{z}_c} \cos \alpha - \rho_s k_1 k_2 A^2}{k_1 k_2 A^2 I_{t_c} - k_1 A S_{\tilde{z}_c}^2 - k_2 A S_{\tilde{y}_c}^2} T
\end{aligned} \tag{2.5-11c}$$

2.5-1 Sección con doble simetría

En las vigas homogéneas de pared delgada que presentan doble simetría y con la función de alabeo ω evaluada desde el centro de cortante se tiene que algunas propiedades de la sección son nulas,

1. $S_{\tilde{z}} = S_{\tilde{z}_c} = 0$
2. $S_{\tilde{y}} = S_{\tilde{y}_c} = 0$

En la Figura 2.5-2 se muestra la matriz de rigidez de la sección transversal $\tilde{\mathbf{E}}$ para una sección con doble simetría suponiendo que el origen de coordenadas se ubica en el eje neutro de la sección.

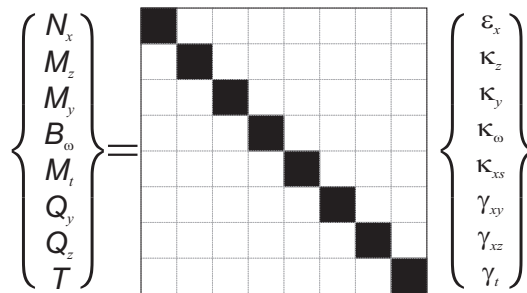


Figura 2.5-2: Coeficientes presentes en la matriz de rigidez de una sección con doble simetría.

Eliminando de la ecuación (2.5-11) las propiedades nulas de la sección se obtiene la relación entre tensiones y fuerzas internas para vigas homogéneas de pared delgada con doble simetría

$$\sigma_{\tilde{x}} = \frac{N_{\tilde{x}}}{A} - \frac{M_{\tilde{z}}}{I_{\tilde{z}}} (\tilde{y} + n \sin \alpha) + \frac{M_{\tilde{y}}}{I_{\tilde{y}}} (\tilde{z} - n \cos \alpha) - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega \quad (2.5-12a)$$

$$\tau_{\tilde{x}s} = \frac{M_t}{I_s} n + \frac{Q_{\tilde{y}}}{k_1 A} \cos \alpha + \frac{Q_{\tilde{z}}}{k_2 A} \sin \alpha + \frac{T}{I_{t_c}} \rho_s \quad (2.5-12b)$$

$$\tau_{\tilde{x}n} = \frac{Q_{\tilde{y}}}{k_1 A} \sin \alpha - \frac{Q_{\tilde{z}}}{k_2 A} \cos \alpha - \frac{T}{I_{t_c}} \rho_s \quad (2.5-12c)$$

2.5-2 Sección con simetría en el eje \tilde{y}

Las vigas homogéneas con simetría en el eje \tilde{y} y cuya función de alabeo ω está evaluada desde el centro de cortante, muestran que $S_{\tilde{y}} = S_{\tilde{y}_c} = 0$.

En la Figura 2.5-3 se muestra la matriz de rigidez de la sección transversal $\tilde{\mathbf{E}}$ para una sección transversal con simetría en el eje \tilde{y} suponiendo que el origen de coordenadas se ubica en el eje neutro de la sección.

Figura 2.5-3: Coeficientes presentes en la matriz de rigidez de una sección con simetría en el eje \tilde{y} .

Eliminando de la ecuación (2.5-11) las propiedades nulas de la sección se obtiene la relación entre tensiones y fuerzas internas

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) + \frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}} (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega \quad (2.5-13a)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{x}s} = & \frac{n}{I_s} M_t + \frac{\operatorname{cos} \alpha}{k_1 A} Q_{\bar{y}} + \frac{l_{t_c} \operatorname{sen} \alpha - \rho_s S_{\bar{z}_c}}{k_2 A l_{t_c} - S_{\bar{z}_c}^2} Q_{\bar{z}} \\ & - \frac{S_{\bar{z}_c} \operatorname{sen} \alpha - \rho_s k_2 A}{k_2 A l_{t_c} - S_{\bar{z}_c}^2} T \end{aligned} \quad (2.5-13b)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\bar{x}n} = & \frac{\operatorname{sen} \alpha}{k_1 A} Q_{\bar{y}} - \frac{l_{t_c} \operatorname{cos} \alpha + \rho_s S_{\bar{z}_c}}{k_2 A l_{t_c} - S_{\bar{z}_c}^2} Q_{\bar{z}} \\ & + \frac{S_{\bar{z}_c} \operatorname{cos} \alpha - \rho_s k_2 A}{k_2 A l_{t_c} - S_{\bar{z}_c}^2} T \end{aligned} \quad (2.5-13c)$$

2.5-3 Sección con simetría en el eje \tilde{z}

Las vigas homogéneas con simetría en el eje \tilde{y} y cuya función de alabeo ω está evaluada desde el centro de cortante, muestran que $S_{\bar{z}} = S_{\bar{z}_c} = 0$.

En la Figura 2.5-4 se muestra la matriz de rigidez de la sección transversal $\tilde{\mathbf{E}}$ para una sección transversal con simetría en el eje \tilde{z} suponiendo que el origen de coordenadas se ubica en el eje neutro de la sección.

Eliminando de la ecuación (2.5-11) las propiedades nulas de la sección se obtiene la relación entre tensiones y fuerzas internas

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{N_{\bar{x}}}{A} - \frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) + \frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}} (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}} \omega \quad (2.5-14a)$$

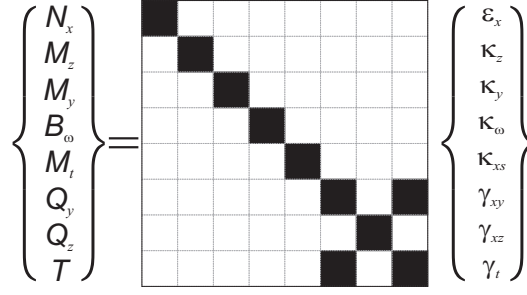


Figura 2.5-4: Coeficientes presentes en la matriz de rigidez de una sección con simetría en el eje \tilde{z} .

$$\tau_{\bar{x}s} = \frac{n}{I_s} M_t + \frac{l_{t_c} \cos \alpha + \rho_s S_{\tilde{y}_c}}{k_1 A l_{t_c} - S_{\tilde{y}_c}^2} Q_{\tilde{y}} + \frac{\text{sen } \alpha}{k_2 A} Q_{\tilde{z}} + \frac{S_{\tilde{y}_c} \cos \alpha + \rho_s k_1 A}{k_1 A l_{t_c} - S_{\tilde{y}_c}^2} T \quad (2.5-14b)$$

$$\tau_{\bar{x}n} = \frac{l_{t_c} \text{sen } \alpha - \rho_s S_{\tilde{y}_c}}{k_1 A - S_{\tilde{y}_c}^2} Q_{\tilde{y}} - \frac{\cos \alpha}{k_2 A} Q_{\tilde{z}} + \frac{S_{\tilde{y}_c} \text{sen } \alpha - \rho_s k_1 A}{k_1 A l_{t_c} - S_{\tilde{y}_c}^2} T \quad (2.5-14c)$$

2.6 Tensiones longitudinales en una viga con sección C

La expresión (2.5-11a) permite evaluar la tensión longitudinal en cada punto de la sección transversal de una viga y se usará con el fin de determinar el peso que tiene cada uno de los términos que la definen respecto a la ecuación total. El caso que se analizará corresponde a una viga canal en voladizo sometida a dos cargas excéntricas en su extremo libre tal como se muestra en la Figura 2.6-1

2.6-1 Expresión general para el cálculo de la tensión longitudinal

El análisis completo de las propiedades de una viga canal se incluyen en el Anexo A, donde se evalúan los momentos de inercia, la distancia del alma de la viga al eje neutro (e_o) y al centro de torsión (e_c) como:

$$I_{\tilde{y}} = \frac{h^2 t}{12} (6b + h) + \frac{bt^3}{12} \quad (2.6-1a)$$

$$I_{\tilde{z}} = \frac{b^3 t}{6} + 2bt \left(\frac{b}{2} - e_o \right)^2 + hte_o^2 + \frac{ht^3}{12} \quad (2.6-1b)$$

$$I_{\omega} = \frac{b^3 h^2 t}{12} \left(\frac{3b + 2h}{6b + h} \right) \quad (2.6-1c)$$

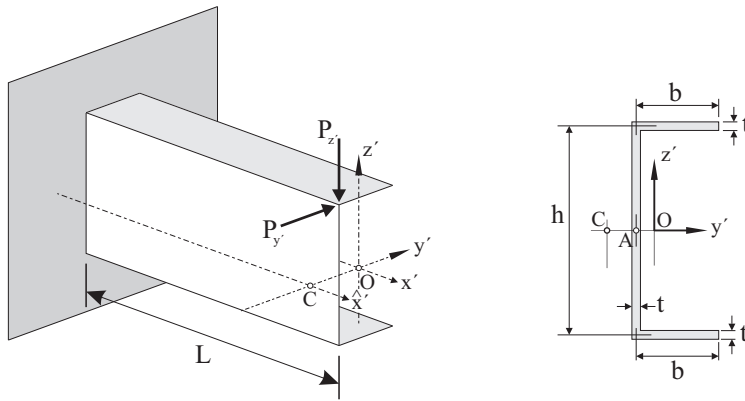


Figura 2.6-1: Viga con sección canal sometida a cargas puntuales excéntricas

$$J = \frac{t^3(2b + h)}{3} \quad (2.6-1d)$$

$$e_o = \frac{b^2}{2b + h} \quad (2.6-1e)$$

$$e_c = \frac{3b^2}{6b + h} \quad (2.6-1f)$$

En la Figura 2.6-2 se muestra la función de alabeo obtenida en el Anexo A y algunas propiedades geométricas de las vigas con sección canal en materiales isotropos homogéneos.

En el Anexo A también se incluye el cálculo de los momentos flectores, torsor y bimomento de la viga en el apoyo, indicando que estas expresiones se presentan en términos de las cargas puntuales aplicadas en el extremo libre:

$$M_{\bar{y}} = -P_{\bar{z}}L \quad (2.6-2a)$$

$$M_{\bar{z}} = -P_{\bar{y}}L \quad (2.6-2b)$$

$$M_{\bar{x}} = -hP_{\bar{y}}/2 - e_c P_{\bar{z}} \quad (2.6-2c)$$

$$B_{\omega} = -LM_{\bar{x}} \frac{\tanh k}{k} \quad (2.6-2d)$$

siendo k un parámetro adimensional,

$$k = L \sqrt{\frac{GJ}{EI_{\omega}}} \quad (2.6-3)$$

Reemplazando las expresiones (2.6-2) en la ecuación (2.5-11a) y considerando que

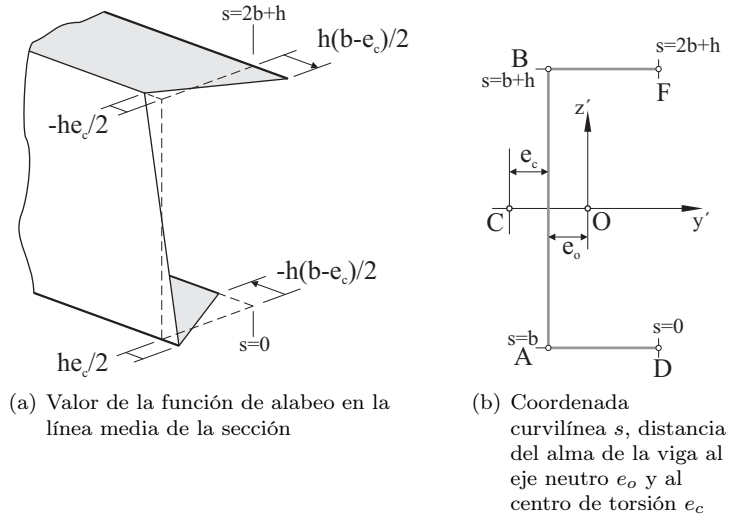


Figura 2.6-2: Función de alabeo y propiedades geométricas de la sección transversal de una viga con sección canal en materiales homogéneos.

por simplicidad solamente se estudiará la tensión en los puntos ubicados sobre la línea media de la sección ($n = 0$) se obtiene

$$\sigma_{\bar{x}} = -\frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}}\tilde{y} + \frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}}\tilde{z} - \frac{B_{\omega}}{I_{\omega}}\omega \quad (2.6-4a)$$

$$= \frac{P_{\bar{y}}L}{I_{\bar{z}}}\tilde{y} - \frac{P_{\bar{z}}L}{I_{\bar{y}}}\tilde{z} + \frac{LM_{\bar{x}}\frac{\tanh k}{k}}{I_{\omega}}\omega \quad (2.6-4b)$$

que equivale a

$$\sigma_{\bar{x}}(s) = \left(\frac{\tilde{y}(s)}{I_{\bar{z}}} - \frac{\tilde{z}(s)}{I_{\bar{y}}} - \frac{\omega(s)}{I_{\omega}}(h/2 + e_c)\frac{\tanh k}{k} \right) P L \quad (2.6-5)$$

suponiendo que las fuerzas puntuales $P_{\bar{y}}$ y $P_{\bar{z}}$ son iguales ($P_{\bar{y}} = P_{\bar{z}} = P$).

La ecuación (2.6-5) permite evaluar el valor de la tensión longitudinal en cualquier punto s (ver Figura 2.6-2b) de la línea media de la sección transversal de una viga canal en voladizo con dos fuerzas puntuales $P_{\bar{y}}$ y $P_{\bar{z}}$ impuestas en su extremo libre.

Discriminando el valor de la tensión longitudinal en los factores $\varsigma_{M_{\bar{z}}}$, $\varsigma_{M_{\bar{y}}}$ y $\varsigma_{B_{\omega}}$ tal que

$$\sigma_{\bar{x}}(s) = (\varsigma_{M_{\bar{z}}}(s) + \varsigma_{M_{\bar{y}}}(s) + \varsigma_{B_{\omega}}(s)) P L \quad (2.6-6)$$

con

$$\varsigma_{M_{\bar{z}}}(s) = \frac{\tilde{y}(s)}{I_{\bar{z}}} \quad (2.6-7a)$$

$$\varsigma_{M_{\bar{y}}}(s) = -\frac{\tilde{z}(s)}{I_{\bar{y}}} \quad (2.6-7b)$$

$$\varsigma_{B_{\omega}}(s) = -\frac{\omega(s)}{I_{\omega}} (h/2 + e_c) \frac{\tanh k}{k} \quad (2.6-7c)$$

es posible comparar y establecer el nivel de importancia de cada término ς en el valor total de tensión longitudinal $\sigma_{\bar{x}}$ para cualquier punto sobre la línea media de la sección transversal.

2.6-2 Caso de estudio

A continuación se detallan las características geométricas y de material de la viga canal en voladizo que será estudiada

$$\begin{aligned} L &= 2000 \text{ mm} & ; & \quad h = 200 \text{ mm} \\ b &= 60 \text{ mm} & ; & \quad t = 10 \text{ mm} \\ E &= 210000 \text{ MPa} & ; & \quad \nu = 0.30 \end{aligned}$$

Aplicando en las expresiones (2.6-1) las características mencionadas se obtiene

$$I_{\bar{y}} = 1.87 \times 10^7 \text{ mm}^4 \quad (2.6-8a)$$

$$I_{\bar{z}} = 1.05 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad (2.6-8b)$$

$$I_{\omega} = 7.46 \times 10^9 \text{ mm}^6 \quad (2.6-8c)$$

$$J = 1.07 \times 10^5 \text{ mm}^4 \quad (2.6-8d)$$

$$e_o = 11.25 \text{ mm} \quad (2.6-8e)$$

$$e_c = 19.29 \text{ mm} \quad (2.6-8f)$$

y el valor adimensional

$$k = 4.691 \quad (2.6-8g)$$

La Tabla 2.6-1 muestra el resultado de evaluar los coeficientes ς (ver ecuación 2.6-7) en los puntos D, A, B, F (ver Figura 2.6-2b) usando las propiedades de sección dadas en la ecuación (2.6-8).

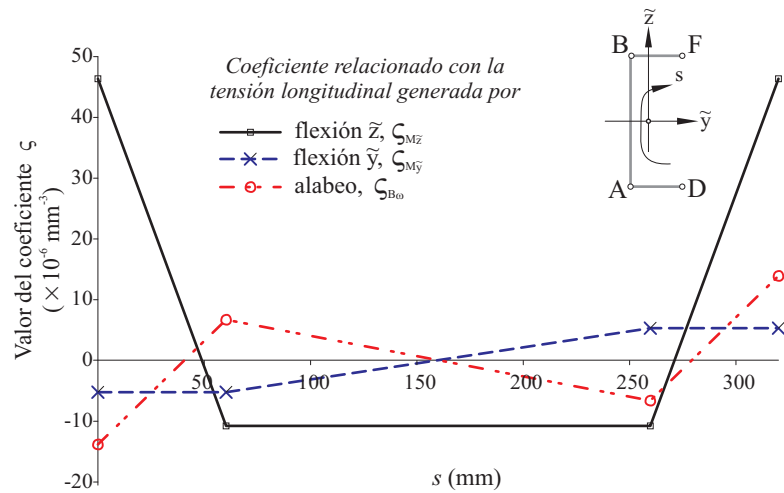
De la Tabla 2.6-1 se observa que en valor absoluto el coeficiente correspondiente a las tensiones longitudinales por alabeo ($\varsigma_{B_{\omega}}$) es mayor al coeficiente de las tensiones

Tabla 2.6-1: Evaluación de los coeficientes $\zeta_{M_{\tilde{z}}}$, $\zeta_{M_{\tilde{y}}}$ y $\zeta_{B_{\omega}}$

	Puntos en la sección transversal			
	D	A	B	F
s [mm]	0	60	260	320
$\tilde{y}(s)$ [mm]	48.75	-11.25	-11.25	48.75
$\tilde{z}(s)$ [mm]	-100	-100	100	100
$\zeta_{M_{\tilde{z}}}(s)$ [$\times 10^{-6}$ mm $^{-3}$]	46.35	-10.70	-10.70	46.35
$\zeta_{M_{\tilde{y}}}(s)$ [$\times 10^{-6}$ mm $^{-3}$]	-5.35	-5.35	5.35	5.35
$\zeta_{B_{\omega}}(s)$ [$\times 10^{-6}$ mm $^{-3}$]	-13.88	6.58	-6.58	13.88

por momento flector en el eje \tilde{y} ($\zeta_{M_{\tilde{y}}}$) y oscila entre un 30% y un 60% del valor del coeficiente de las tensiones por momento flector en el eje \tilde{z} ($\zeta_{M_{\tilde{z}}}$).

La Figura 2.6-3 muestra la distribución de los coeficientes ζ a lo largo de la coordenada curvilínea s .

**Figura 2.6-3:** Valor de los coeficientes ζ de tensión a lo largo de la coordenada curvilínea s de la sección transversal de una viga canal

2.6-3 Comentarios

En la Figura 2.6-3 se muestra que el nivel de tensiones longitudinales generadas por flexión en el eje \tilde{z} de la viga es muy superior al presentado en el eje \tilde{y} para el mismo nivel de fuerza aplicada en el extremo libre del voladizo, resultado que se esperaba por los valores de inercia de la viga en estos ejes (ver ecuaciones 2.6-8a y 2.6-8b).

Considerando que las fuerzas aplicadas son excéntricas respecto del centro de torsión, estas inducen un momento torsor a la sección que genera alabeo. En el

caso analizado se demuestra que las tensiones longitudinales generadas por torsión son superiores (en valor absoluto) a las presentadas por flexión en el eje \tilde{y} de la viga, determinando de esta manera la importancia de considerarlas en el análisis de vigas de sección abierta y pared delgada.

2.7 Propiedades geométricas de la sección

El cálculo del eje neutro de la sección y del centro de cortante se realiza siguiendo la metodología descrita por Kollbrunner & Basler (1969), en la cual después de evaluar la posición del eje neutro se calcula el centro de giro estableciendo que las tensiones longitudinales generadas por torsión no inducen momentos flectores en la viga. También se calcula el centro de esfuerzos cortante suponiendo que las fuerzas de corte no generan torsión, finalmente se comprueba que el centro de torsión equivale al centro de giro.

2.7-1 Eje neutro

El eje neutro (y_o, z_o) de la sección transversal se localiza en el punto de aplicación de la fuerza axial interna $(N_{\tilde{x}})$ resultante de imponer en la ecuación (2.5-6) un vector de deformaciones generalizadas ε cuya única componente no nula es la deformación axial $(\varepsilon_{\tilde{x}}^o)$, de lo que se establecen las siguientes expresiones

$$N_{\tilde{x}} = EA\varepsilon_{\tilde{x}}^o \quad (2.7-1a)$$

$$M_{\tilde{z}} = -ES_{\tilde{z}}\varepsilon_{\tilde{x}}^o \quad (2.7-1b)$$

$$M_{\tilde{y}} = ES_{\tilde{y}}\varepsilon_{\tilde{x}}^o \quad (2.7-1c)$$

Por otra parte, los momentos generados por la fuerza interna $N_{\tilde{x}}$ son

$$M_{\tilde{z}} = -N_{\tilde{x}}y_o \quad ; \quad M_{\tilde{y}} = N_{\tilde{x}}z_o \quad (2.7-2)$$

Despejando las coordenadas del eje neutro (y_o, z_o) de la ecuación (2.7-2), resulta

$$y_o = -\frac{M_{\tilde{z}}}{N_{\tilde{x}}} \quad ; \quad z_o = \frac{M_{\tilde{y}}}{N_{\tilde{x}}} \quad (2.7-3)$$

y reemplazando (2.7-1) en la ecuación (2.7-3) se obtienen las coordenadas del eje neutro

$$y_o = \frac{S_{\tilde{z}}}{A} \quad ; \quad z_o = \frac{S_{\tilde{y}}}{A} \quad (2.7-4)$$

2.7-2 Centro de giro

El equilibrio en la sección transversal de la viga permite obtener las coordenadas del centro de giro $(\tilde{y}_c, \tilde{z}_c)$ estableciendo que las tensiones longitudinales por torsión $(\sigma_{\tilde{x}})$ no generan momentos flectores $(M_{\tilde{z}}$ y $M_{\tilde{y}})$, así,

$$M_{\tilde{z}} = - \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)] dA = 0 \quad (2.7-5a)$$

$$M_{\tilde{y}} = \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha)] dA = 0 \quad (2.7-5b)$$

En la condición de torsión pura, la deformación longitudinal (ver ecuación 2.3-7) es

$$\varepsilon_{\tilde{x}} = -\omega \kappa_{\omega} \quad (2.7-6)$$

y la tensión longitudinal (ver ecuación 2.5-1)

$$\sigma_{\tilde{x}} = -E\omega \kappa_{\omega} \quad (2.7-7)$$

Reemplazando la ecuación (2.7-7) en la condición de equilibrio (2.7-5a) se obtiene

$$M_{\tilde{z}} = \iint_A [E\omega \kappa_{\omega} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)] dA = 0 \quad (2.7-8)$$

Aplicando en la ecuación (2.7-8) la definición de la función de alabeo en términos de funciones medidas desde el eje neutro (2.2-61)

$$\iint_A \{E [\omega_o - ((\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) \tilde{y}_c - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \tilde{z}_c)] \kappa_{\omega} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)\} dA = 0 \quad (2.7-9)$$

y considerando que la viga está formada por un material isotropo homogéneo y que la igualdad de la ecuación (2.7-9) debe mantenerse para cualquier material y para cualquier giro torsional aplicado, se reduce la expresión a

$$\iint_A \{[\omega_o - ((\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) \tilde{y}_c - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \tilde{z}_c)] (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)\} dA = 0 \quad (2.7-10)$$

Desarrollando la ecuación (2.7-10) resulta

$$\begin{aligned} \iint_A \omega_o (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) dA - \tilde{y}_c \iint_A (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) dA \\ + \tilde{z}_c \iint_A (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)^2 dA = 0 \end{aligned} \quad (2.7-11)$$

Reemplazando en (2.7-11) las constantes geométricas de la sección definidas en las ecuaciones (2.5-9) se encuentra que

$$I_{\tilde{z}\omega_o} - \tilde{y}_c I_{\tilde{y}\tilde{z}} + \tilde{z}_c I_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.7-12)$$

con

$$I_{\tilde{z}\omega_o} = \int_A \tilde{y}\omega_o \, dA \quad (2.7-13)$$

En estos cálculos no se consideraron los términos que incluyen $\int_A n \, dA$ por tratarse de secciones de materiales homogéneos e isotropos cuyo eje curvilíneo se localiza en la mitad del espesor de la pared.

Reemplazando la ecuación (2.7-7) en la ecuación de equilibrio (2.7-5b) y siguiendo el mismo procedimiento usado con $M_{\tilde{z}}$ se obtiene

$$I_{\tilde{y}\omega_o} - \tilde{y}_c I_{\tilde{y}} + \tilde{z}_c I_{\tilde{y}\tilde{z}} = 0 \quad (2.7-14)$$

con

$$I_{\tilde{y}\omega_o} = \int_A \tilde{z}\omega_o \, dA \quad (2.7-15)$$

Las ecuaciones (2.7-12) y (2.7-14) forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, así, despejando las coordenadas del centro de giro resulta

$$\tilde{y}_c = \frac{I_{\tilde{z}} I_{\tilde{y}\omega_o} - I_{\tilde{y}\tilde{z}} I_{\tilde{z}\omega_o}}{I_{\tilde{y}} I_{\tilde{z}} - I_{\tilde{y}\tilde{z}}^2} \quad (2.7-16a)$$

$$\tilde{z}_c = -\frac{I_{\tilde{y}} I_{\tilde{z}\omega_o} - I_{\tilde{y}\tilde{z}} I_{\tilde{y}\omega_o}}{I_{\tilde{y}} I_{\tilde{z}} - I_{\tilde{y}\tilde{z}}^2} \quad (2.7-16b)$$

Si el sistema de coordenadas corresponde a las direcciones principales de la viga, el centro de giro resulta

$$\tilde{y}_c = \frac{I_{\tilde{y}\omega_o}}{I_{\tilde{y}}} \quad (2.7-17a)$$

$$\tilde{z}_c = -\frac{I_{\tilde{z}\omega_o}}{I_{\tilde{z}}} \quad (2.7-17b)$$

2.7-3 Centro de esfuerzos cortantes

El centro de esfuerzos cortantes (\tilde{y}_c, \tilde{z}_c) de una viga de pared delgada corresponde al punto de aplicación de las fuerzas de corte $Q_{\tilde{y}}$ y $Q_{\tilde{z}}$, de tal forma que no generan torsiones a la sección.

Definiendo los esfuerzos cortantes ($Q_{\tilde{y}}$ y $Q_{\tilde{z}}$) y el momento torsor (T) en función de las tensiones de corte ($\tau_{\tilde{x}n}$ y $\tau_{\tilde{x}s}$), según las ecuaciones (2.4-7) se tiene:

$$Q_{\tilde{y}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \cos \alpha + \tau_{\tilde{x}n} \sin \alpha) dA \quad (2.7-18a)$$

$$Q_{\tilde{z}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \sin \alpha - \tau_{\tilde{x}n} \cos \alpha) dA \quad (2.7-18b)$$

$$T = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \rho_s - \tau_{\tilde{x}n} \rho_n) dA \quad (2.7-18c)$$

La componente de torsión en el espesor (M_t) no se incluye en el análisis por considerar que sus tensiones tangenciales no aportan a la resultante de fuerzas de corte $Q_{\tilde{y}}$ y $Q_{\tilde{z}}$ en la sección (ver Figura 2.4-1), del equilibrio se establece que

$$T = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \rho_s - \tau_{\tilde{x}n} \rho_n) dA = 0 \quad (2.7-19)$$

Expresando la ecuación (2.7-19) en términos de distancias referidas al eje neutro (ver ecuación 2.1-5) se tiene

$$\iint_A \{ \tau_{\tilde{x}s} [\rho_{s_o} - (\tilde{y}_c \sin \alpha - \tilde{z}_c \cos \alpha)] - \tau_{\tilde{x}n} [\rho_{n_o} - (\tilde{y}_c \cos \alpha + \tilde{z}_c \sin \alpha)] \} dA = 0 \quad (2.7-20)$$

Reordenando la ecuación (2.7-20) resulta

$$\iint_A [(\tau_{\tilde{x}s} \rho_{s_o} - \tau_{\tilde{x}n} \rho_{n_o}) - \tilde{y}_c (\tau_{\tilde{x}s} \sin \alpha - \tau_{\tilde{x}n} \cos \alpha) + \tilde{z}_c (\tau_{\tilde{x}s} \cos \alpha + \tau_{\tilde{x}n} \sin \alpha)] dA = 0 \quad (2.7-21)$$

Reemplazando la definición de los esfuerzos cortantes (ecuaciones 2.7-18a y 2.7-18b) en la ecuación (2.7-21) se obtiene

$$M_{\tilde{x}} - \tilde{y}_c Q_{\tilde{z}} + \tilde{z}_c Q_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.7-22)$$

con

$$M_{\tilde{x}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \rho_{s_o} - \tau_{\tilde{x}n} \rho_{n_o}) dA \quad (2.7-23)$$

Así, las coordenadas del centro de cortante se definen como

$$\tilde{y}_c = \frac{M_{\tilde{x}}}{Q_{\tilde{z}}} \quad ; Q_{\tilde{z}} \neq 0 \text{ y } Q_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.7-24a)$$

$$\tilde{z}_c = -\frac{M_{\tilde{x}}}{Q_{\tilde{y}}} \quad ; Q_{\tilde{y}} \neq 0 \text{ y } Q_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.7-24b)$$

2.7-4 Comparación entre el centro de giro y el centro de esfuerzos cortantes

La comparación entre las expresiones obtenidas para el cálculo del centro de giro y centro de esfuerzos cortantes (ecuaciones 2.7-17 y 2.7-24) requiere de la evaluación de las tensiones tangenciales ($\tau_{\tilde{x}s}$ y $\tau_{\tilde{x}n}$) en términos de la inercia a la flexión de la sección para un segmento diferencial de pared de la sección. Por este motivo se prefiere evaluar las tensiones tangenciales a partir del equilibrio con las tensiones axiales generadas por flexión en lugar de las expresiones incluidas en las ecuaciones (2.5-11b) y (2.5-11c).

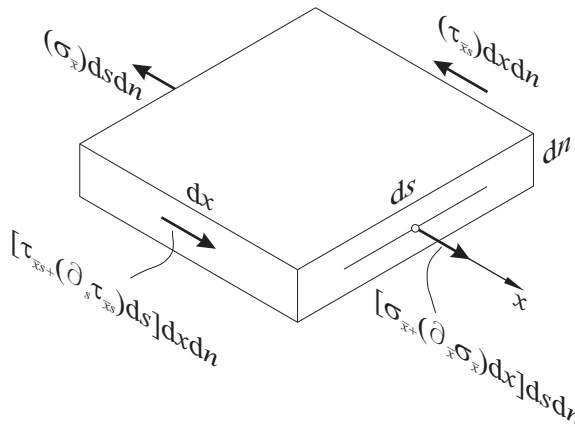


Figura 2.7-1: Fuerzas que actúan en el plano medio de un segmento de pared de la sección

En la Figura 2.7-1 se muestran las fuerzas que actúan en el plano medio de un segmento diferencial de pared de viga, obteniéndose la ecuación de equilibrio

$$\partial_s \tau_{xs} + \partial_x \sigma_x = 0 \quad (2.7-25)$$

De igual forma, en la Figura 2.7-2 se muestran las fuerzas que actúan en el plano transversal de un segmento diferencial de pared de viga, estableciéndose la ecuación de equilibrio

$$\partial_n \tau_{xn} + \partial_x \sigma_x = 0 \quad (2.7-26)$$

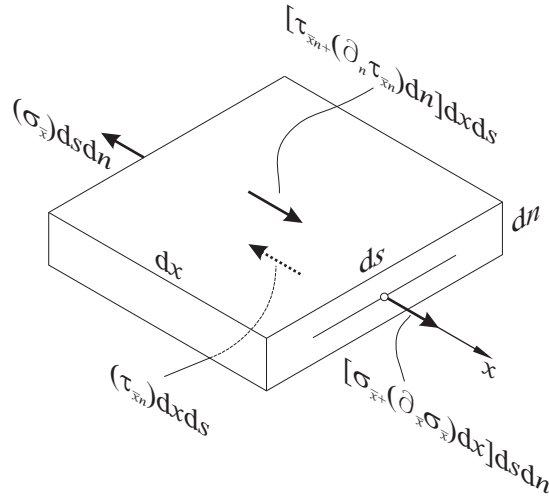


Figura 2.7-2: Fuerzas que actúan en el plano transversal de un segmento de pared de la sección

Suponiendo que los esfuerzos cortantes resultantes no generan torsiones, de la ecuación (2.5-11a) se obtiene

$$\sigma_{\bar{x}} = -\frac{M_{\bar{z}}}{I_{\bar{z}}}(\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) + \frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}}(\tilde{z} - n \cos \alpha) \quad (2.7-27)$$

La derivada de las tensiones axiales en la línea media de la pared ($n = 0$) es

$$\partial_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}} = \frac{Q_{\tilde{y}}}{I_{\bar{z}}} \tilde{y} + \frac{Q_{\tilde{z}}}{I_{\bar{y}}} \tilde{z} \quad (2.7-28)$$

con

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{x}} M_{\bar{z}} &= -Q_{\tilde{y}} \\ \partial_{\bar{x}} M_{\bar{y}} &= Q_{\tilde{z}} \end{aligned} \quad (2.7-29)$$

Una vez se ha definido la derivada de las tensiones axiales se evalúan las tensiones tangenciales como

$$\tau_{\bar{x}s}(s) = -\int_0^s \partial_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}} ds \quad (2.7-30a)$$

$$\tau_{\bar{x}n}(n) = -\int \partial_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}} dn \quad (2.7-30b)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.7-30) en la ecuación que define el momento torsor ($M_{\bar{x}}$) generado por los esfuerzos cortantes se obtiene

$$M_{\bar{x}} = \iint_A \left\{ -\rho_{s_o} \left(\int_0^s \partial_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}} ds \right) + \rho_{n_o} \left(\int \partial_{\bar{x}} \sigma_{\bar{x}} dn \right) \right\} dA \quad (2.7-31)$$

Integrando por partes y reemplazando las ecuaciones (2.2-37), (2.2-43) y (2.7-28) resulta

$$\begin{aligned} M_{\bar{x}} &= \iint_A \left\{ \left(\frac{Q_{\bar{y}}}{I_{\bar{z}}} \tilde{y} + \frac{Q_{\bar{z}}}{I_{\bar{y}}} \tilde{z} \right) (\Omega_{s_o} - \omega_{n_o}) \right\} dA \\ &= \frac{Q_{\bar{y}}}{I_{\bar{z}}} I_{\bar{z}\omega_o} + \frac{Q_{\bar{z}}}{I_{\bar{y}}} I_{\bar{y}\omega_o} \end{aligned} \quad (2.7-32)$$

Reemplazando el momento torsor generado por los esfuerzos cortantes (2.7-32) en la expresión obtenida para el cálculo del centro de esfuerzos cortantes (ver ecuación 2.7-24)

$$\tilde{y}_c = \frac{1}{Q_{\bar{z}}} \left(\frac{Q_{\bar{z}}}{I_{\bar{y}}} I_{\bar{y}\omega_o} \right) \quad ; \quad Q_{\bar{z}} \neq 0 \text{ y } Q_{\bar{y}} = 0 \quad (2.7-33a)$$

$$\tilde{z}_c = -\frac{1}{Q_{\bar{y}}} \left(\frac{Q_{\bar{y}}}{I_{\bar{z}}} I_{\bar{z}\omega_o} \right) \quad ; \quad Q_{\bar{y}} \neq 0 \text{ y } Q_{\bar{z}} = 0 \quad (2.7-33b)$$

que equivale a escribir

$$\tilde{y}_c = \frac{I_{\bar{y}\omega_o}}{I_{\bar{y}}} \quad ; \quad Q_{\bar{z}} \neq 0 \text{ y } Q_{\bar{y}} = 0 \quad (2.7-34a)$$

$$\tilde{z}_c = -\frac{I_{\bar{z}\omega_o}}{I_{\bar{z}}} \quad ; \quad Q_{\bar{y}} \neq 0 \text{ y } Q_{\bar{z}} = 0 \quad (2.7-34b)$$

Al comparar la ecuación (2.7-34) con la expresión obtenida para el cálculo del centro de giro

Refec:defCoordsSC2b se comprueba la correspondencia entre el centro de de esfuerzos cortantes y el centro de giro.

2.8 Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones de gobierno permiten definir el comportamiento de las vigas de pared delgada mediante la relación entre fuerzas externas y desplazamientos.

En este apartado primero se obtienen las relaciones entre las fuerzas externas e internas desagregando los desplazamientos virtuales de la ecuación de variación

de la energía potencial del sistema, posteriormente se usan las ecuaciones constitutivas del material para expresar las fuerzas internas en términos de las derivadas de los desplazamientos y usando integración por partes se definen las relaciones entre fuerzas externas y desplazamientos.

Una vez se han definido las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de la viga se demuestra que al suponer una condición de flexión pura en las vigas de pared delgada se recuperan las ecuaciones de Timoshenko para el análisis de vigas.

En las ecuaciones diferenciales obtenidas también se supone una condición a torsión pura y se muestra de una forma clara la influencia de las deformaciones tangenciales por torsión en el comportamiento de las vigas. Se indica que esta influencia puede ser despreciable en vigas con sección abierta mientras que en vigas con sección cerrada podría ser considerable.

2.8-1 Ecuaciones de relación entre fuerzas externas e internas

Las relaciones entre fuerzas externas e internas se obtiene de la ecuación de la variación de la energía potencial del sistema (2.4-10).

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{V} = 0$$

Al expresar la variación de la energía de deformación del sistema $\delta\mathcal{U}$ (2.4-4) en términos de los incrementos de desplazamientos (ver ecuaciones 2.3-8) se obtiene

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{U} = \int_{\ell} \left\{ N_{\tilde{x}} \delta \tilde{u}'_o + M_{\tilde{z}} \delta \theta'_z + M_{\tilde{y}} \delta \theta'_y + B_{\omega} \delta \phi'_{\omega} + M_t \delta (\theta'_{\tilde{x}} + \phi_{\omega}) \right. \\ \left. + Q_{\tilde{y}} \delta (\tilde{v}'_c - \theta_{\tilde{z}}) + Q_{\tilde{z}} \delta (\tilde{w}'_c + \theta_{\tilde{y}}) + T \delta (\theta'_{\tilde{x}} - \phi_{\omega}) \right\} d\tilde{x} \end{aligned} \quad (2.8-1)$$

En la ecuación anterior se reemplazaron las derivadas con respecto al eje longitudinal de la viga $\partial_{\tilde{x}}(\cdot)$ por $(\cdot)'$ para simplificar la lectura.

Aplicando el método de integración por partes en la ecuación (2.8-1) y reordenando los términos se obtiene

$$\delta\mathcal{U} = - \int_{\ell} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} d\tilde{x} + [\delta \mathbf{u}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^{\ell} \quad (2.8-2)$$

con

$$\tilde{\mathbf{u}}^T = \{\tilde{u}_o, \tilde{v}_c, \tilde{w}_c, \theta_{\tilde{x}}, \theta_{\tilde{y}}, \theta_{\tilde{z}}, \phi_{\omega}\} \quad (2.8-3a)$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^T = \{N'_{\tilde{x}}, Q'_{\tilde{y}}, Q'_{\tilde{z}}, M'_t + T', M'_{\tilde{y}} - Q_{\tilde{z}}, M'_{\tilde{z}} + Q_{\tilde{y}}, B'_{\omega} - M_t + T\} \quad (2.8-3b)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}^T = \{N_{\tilde{x}}, Q_{\tilde{y}}, Q_{\tilde{z}}, M_t + T, M_{\tilde{y}}, M_{\tilde{z}}, B_{\omega}\} \quad (2.8-3c)$$

El término $[\delta\tilde{\mathbf{u}}^T\tilde{\mathbf{q}}]_0^\ell$ en la ecuación (2.8-2) se denomina *condición de contorno natural* (Cook et al., 2002) y muestra la relación entre desplazamientos y fuerzas internas en los extremos de la viga, de tal forma que cuando en un extremo uno de sus desplazamientos no tiene restricciones, la fuerza interna asociada es nula y cuando el desplazamiento se restringe, presenta una fuerza interna asociada no nula.

La variación de la energía potencial del sistema se obtiene reemplazando en la ecuación (2.4-10), las ecuaciones(2.8-2) y (2.4-8) que definen la variación de la energía de deformación y de la energía potencial respectivamente.

$$\delta\Pi = \left(- \int_\ell \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} d\tilde{x} + [\delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^\ell \right) - \left(\int_\ell \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} d\tilde{x} + [\delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^\ell \right) = 0 \quad (2.8-4)$$

Reorganizando los términos de la ecuación (2.8-4) se encuentra la relación entre fuerzas internas y externas en la viga

$$\delta\Pi = - \int_\ell \delta\tilde{\mathbf{u}}^T (\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}) d\tilde{x} + [\delta\tilde{\mathbf{u}}^T (\tilde{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{q}})]_0^\ell = 0 \quad (2.8-5)$$

El primer término de la ecuación (2.8-5) muestra la relación entre las fuerzas internas y las cargas distribuidas a lo largo de la viga.

$$- \int_\ell \delta\tilde{\mathbf{u}}^T (\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}) d\tilde{x} = 0 \quad \forall \delta\tilde{\mathbf{u}} \quad (2.8-6)$$

resultando

$$N'_x + p_x = 0 \quad (2.8-7a)$$

$$Q'_y + p_y = 0 \quad (2.8-7b)$$

$$Q'_z + p_z = 0 \quad (2.8-7c)$$

$$M'_t + T' + m_x = 0 \quad (2.8-7d)$$

$$M'_y - Q_z + m_y = 0 \quad (2.8-7e)$$

$$M'_z + Q_y + m_z = 0 \quad (2.8-7f)$$

$$B'_\omega - M_\omega + b_\omega = 0 \quad (2.8-7g)$$

con

$$M_\omega = M_t - T \quad (2.8-8)$$

M_ω corresponde a la torsión de alabeo y equivale a la diferencia entre la torsión en el espesor de la pared y la de Coulomb. En ausencia de bimomentos distribuidos en la longitud de la viga, de la ecuación (2.8-7g) se comprueba que

$$B'_\omega = M_\omega \quad (2.8-9)$$

El segundo término de la expresión (2.8-5) establece la relación entre las fuerzas internas y las fuerzas externas puntuales en los extremos de la viga.

$$N_{\tilde{x}} = P_{\tilde{x}} \quad (2.8-10a)$$

$$Q_{\tilde{y}} = P_{\tilde{y}} \quad (2.8-10b)$$

$$Q_{\tilde{z}} = P_{\tilde{z}} \quad (2.8-10c)$$

$$M_t + T = M_{\tilde{x}} \quad (2.8-10d)$$

$$M_{\tilde{y}} = M_{\tilde{y}} \quad (2.8-10e)$$

$$M_{\tilde{z}} = M_{\tilde{z}} \quad (2.8-10f)$$

$$B_{\omega} = B_{\omega} \quad (2.8-10g)$$

De las ecuaciones (2.8-7) y (2.8-10) se obtienen las relaciones entre fuerzas externas puntuales y distribuidas destacando entre otras

$$M'_{\tilde{x}} + m_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-11)$$

2.8-2 Ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales que definen el comportamiento de una viga de pared delgada se obtienen al reemplazar en las ecuaciones (2.8-7) las fuerzas internas definidas mediante la matriz constitutiva generalizada (ver ecuación 2.5-7).

$$EA\tilde{u}''_o - ES_{\tilde{z}}\theta''_{\tilde{z}} + ES_{\tilde{y}}\theta''_{\tilde{y}} - ES_{\omega}\phi''_{\omega} + p_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-12a)$$

$$k_1 GA(\tilde{v}''_c - \theta'_{\tilde{z}}) - GS_{\tilde{y}_c}(\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + p_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-12b)$$

$$k_2 GA(\tilde{w}''_c + \theta'_{\tilde{y}}) + GS_{\tilde{z}_c}(\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + p_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-12c)$$

$$GI_s(\theta''_{\tilde{x}} + \phi'_{\omega}) - GS_{\tilde{y}_c}(\tilde{v}''_c - \theta'_{\tilde{z}}) + GS_{\tilde{z}_c}(\tilde{w}''_c + \theta'_{\tilde{y}}) + GI_{t_c}(\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + m_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-12d)$$

$$ES_{\tilde{y}}\tilde{u}''_o - EI_{\tilde{y}\tilde{z}}\theta''_{\tilde{z}} + EI_{\tilde{y}}\theta''_{\tilde{y}} - EI_{\tilde{y}\omega}\phi''_{\omega} - k_2 GA(\tilde{w}'_c + \theta_{\tilde{y}}) - GS_{\tilde{z}_c}(\theta'_{\tilde{x}} - \phi_{\omega}) + m_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-12e)$$

$$-ES_{\tilde{z}}\tilde{u}''_o + EI_{\tilde{z}}\theta''_{\tilde{z}} - EI_{\tilde{y}\tilde{z}}\theta''_{\tilde{y}} + EI_{\tilde{z}\omega}\phi''_{\omega} + k_1 GA(\tilde{v}'_c - \theta_{\tilde{z}}) - GS_{\tilde{y}_c}(\theta'_{\tilde{x}} - \phi_{\omega}) + m_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-12f)$$

$$-ES_{\omega}\tilde{u}''_o + EI_{\tilde{z}\omega}\theta''_{\tilde{z}} - EI_{\tilde{y}\omega}\theta''_{\tilde{y}} + EI_{\omega}\phi''_{\omega} - GI_s(\theta'_{\tilde{x}} + \phi_{\omega}) - GS_{\tilde{y}_c}(\tilde{v}'_c - \theta_{\tilde{z}}) + GS_{\tilde{z}_c}(\tilde{w}'_c + \theta_{\tilde{y}}) + GI_{t_c}(\theta'_{\tilde{x}} - \phi_{\omega}) + b_{\omega} = 0 \quad (2.8-12g)$$

Las ecuaciones (2.8-12) se simplifican cuando el sistema de ejes coordenados se localiza en el centroide, los ejes \tilde{y} y \tilde{z} corresponden a las direcciones principales y la función de alabeo ω se evalúa respecto al centro de torsión c , resultando

$$EA\tilde{w}_c'' + p_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-13a)$$

$$k_1 GA (\tilde{v}_c'' - \theta_{\tilde{z}}') - GS_{\tilde{y}c} (\theta_{\tilde{x}}'' - \phi_\omega') + p_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-13b)$$

$$k_2 GA (\tilde{w}_c'' + \theta_{\tilde{y}}') + GS_{\tilde{z}c} (\theta_{\tilde{x}}'' - \phi_\omega') + p_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-13c)$$

$$GI_s (\theta_{\tilde{x}}'' + \phi_\omega') - GS_{\tilde{y}c} (\tilde{v}_c'' - \theta_{\tilde{z}}') + GS_{\tilde{z}c} (\tilde{w}_c'' + \theta_{\tilde{y}}') + GI_{tc} (\theta_{\tilde{x}}'' - \phi_\omega') + m_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-13d)$$

$$EI_{\tilde{y}}\theta_{\tilde{y}}'' - k_2 GA (\tilde{w}_c' + \theta_{\tilde{y}}) - GS_{\tilde{z}c} (\theta_{\tilde{x}}' - \phi_\omega) + m_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-13e)$$

$$EI_{\tilde{z}}\theta_{\tilde{z}}'' + k_1 GA (\tilde{v}_c' - \theta_{\tilde{z}}) - GS_{\tilde{y}c} (\theta_{\tilde{x}}' - \phi_\omega) + m_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-13f)$$

$$EI_\omega\phi_\omega'' - GI_s (\theta_{\tilde{x}}' + \phi_\omega) - GS_{\tilde{y}c} (\tilde{v}_c' - \theta_{\tilde{z}}) + GS_{\tilde{z}c} (\tilde{w}_c' + \theta_{\tilde{y}}) + GI_{tc} (\theta_{\tilde{x}}' - \phi_\omega) + b_\omega = 0 \quad (2.8-13g)$$

De las ecuaciones (2.8-13) se observa que los comportamientos a flexión, torsión y cortante de la viga están acoplados debido a las deformaciones tangenciales por flexión y por torsión.

2.8-3 Flexión pura

Al someter una viga a la condición de flexión pura se supone que el giro torsional, sus derivadas y los términos relacionados con la intensidad de alabeo son nulos.

$$\theta_{\tilde{x}} = \theta_{\tilde{x}}' = \theta_{\tilde{x}}'' = \phi_\omega = \phi_\omega' = 0 \quad (2.8-14)$$

Aplicando esta hipótesis, las ecuaciones diferenciales (2.8-13) se reducen a

$$k_1 GA (\tilde{v}_c'' - \theta_{\tilde{z}}') + p_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-15a)$$

$$k_2 GA (\tilde{w}_c'' + \theta_{\tilde{y}}') + p_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-15b)$$

$$EI_{\tilde{y}}\theta_{\tilde{y}}'' - k_2 GA (\tilde{w}_c' + \theta_{\tilde{y}}) + m_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-15c)$$

$$EI_{\tilde{z}}\theta_{\tilde{z}}'' + k_1 GA (\tilde{v}_c' - \theta_{\tilde{z}}) + m_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-15d)$$

Se observa que las ecuaciones (2.8-15) corresponden a la teoría clásica de Timoshenko para el estudio de vigas.

2.8-4 Torsión pura

Imponer la condición de torsión pura en una viga supone considerar nulos los giros y las deformaciones tangenciales por flexión, al igual que sus respectivas derivadas.

$$\theta_{\tilde{y}} = \theta_{\tilde{z}} = (\tilde{w}'_c + \theta_{\tilde{y}}) = (\tilde{v}'_c - \theta_{\tilde{z}}) = 0 \quad (2.8-16)$$

Incluyendo estas consideraciones en las ecuaciones diferenciales (2.8-13) se obtiene

$$-GS_{\tilde{y}_c} (\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + p_{\tilde{y}} = 0 \quad (2.8-17a)$$

$$GS_{\tilde{z}_c} (\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + p_{\tilde{z}} = 0 \quad (2.8-17b)$$

$$GI_s (\theta''_{\tilde{x}} + \phi'_{\omega}) + GI_{t_c} (\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + m_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-17c)$$

$$EI_{\omega} \phi''_{\omega} - GI_s (\theta'_{\tilde{x}} + \phi_{\omega}) + GI_{t_c} (\theta'_{\tilde{x}} - \phi_{\omega}) + b_{\omega} = 0 \quad (2.8-17d)$$

Las ecuaciones (2.8-17) corresponden a las expresiones generales que gobiernan el comportamiento a torsión de una viga de pared delgada cuando se contemplan las deformaciones tangenciales por torsión en su cinemática.

Con el objetivo de mostrar una expresión que permita entender mejor la influencia de las deformaciones tangenciales por torsión en el comportamiento de la viga se obtiene la derivada de la ecuación (2.8-17d)

$$EI_{\omega} \phi'''_{\omega} - GI_s (\theta''_{\tilde{x}} + \phi'_{\omega}) + GI_{t_c} (\theta''_{\tilde{x}} - \phi'_{\omega}) + b'_{\omega} = 0 \quad (2.8-18)$$

y en ella se reemplaza la rigidez GI_{t_c} obtenida de la ecuación (2.8-17c)

$$EI_{\omega} \phi'''_{\omega} - GI_s (\theta''_{\tilde{x}} + \phi'_{\omega}) - (GI_s (\theta''_{\tilde{x}} + \phi'_{\omega}) + m_{\tilde{x}}) + b'_{\omega} = 0 \quad (2.8-19)$$

usando las definiciones dadas por la Hipótesis 2-3 (hipótesis de deformaciones angulares y ecuación 2.2-6c) y la relación entre el momento torsor puntual y el distribuido dada por la ecuación (2.8-11), resulta

$$EI_{\omega} \phi'''_{\omega} - GJ\theta''_{\tilde{x}} + GJ \left(\frac{\gamma'_t}{2} \right) + b'_{\omega} + M'_{\tilde{x}} = 0 \quad (2.8-20)$$

con

$$J = 4I_s \quad (2.8-21)$$

donde J es el coeficiente de rigidez a torsión para elementos de pared delgada definido en función de la inercia en el eje curvilíneo (I_s) de la sección, dada por la

ecuación (2.5-9)

$$J = 4 \int_A n^2 dA = \frac{1}{3} \sum b_i t_i^3 \quad (2.8-22)$$

La relación entre el ángulo de giro y la intensidad de alabeo se obtiene reescribiendo la ecuación (2.8-17c)

$$\theta_x'' - \zeta \phi_\omega' + \frac{4m_{\bar{x}}}{4Gl_{t_c} + GJ} = 0 \quad (2.8-23)$$

donde

$$\zeta = \frac{4Gl_{t_c} - GJ}{4Gl_{t_c} + GJ} \quad (2.8-24)$$

El parámetro ζ es un indicador de la influencia de las deformaciones tangenciales por torsión en el comportamiento de la viga y depende de las propiedades geométricas y mecánicas de su sección transversal, de tal forma que si

$$Gl_{t_c} \gg GJ \Rightarrow \zeta \approx 1 \quad (2.8-25)$$

y en ausencia de momentos torsores distribuidos ($m_{\bar{x}}$), cuando ζ se aproxime a la unidad el comportamiento de la viga se aproximará a la teoría de Vlasov ($\theta_x' - \phi_\omega \approx 0$).

En las vigas de sección abierta, el parámetro ζ tiende a la unidad por su bajo módulo de rigidez a torsión (GJ) respecto de la inercia polar (Gl_{t_c}) indicando que las deformaciones tangenciales por torsión afectan muy poco su comportamiento. Por otra parte, en el análisis de las vigas de sección cerrada cuyo parámetro ζ se aleje de la unidad se deberá considerar la componente de deformaciones tangenciales por torsión.

Integrando la ecuación (2.8-20) de que la viga tiene sección constante en toda su longitud se obtiene la expresión que determina el momento de torsión

$$M_{\bar{x}} + b_\omega = GJ\theta_x' - El_\omega\phi_\omega'' - GJ\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \quad (2.8-26)$$

que puede escribirse de la siguiente forma

$$M_{\bar{x}} + b_\omega = M_{sv} - B_\omega' - GJ\left(\frac{\gamma t}{2}\right) \quad (2.8-27)$$

donde M_{sv} es la torsión de Saint-Venant

$$M_{sv} = GJ\theta_x' \quad (2.8-28)$$

y B'_ω es la derivada del bimomento definido según la ecuación (2.5-6) como

$$B_\omega = EI_\omega \phi'_\omega \quad (2.8-29)$$

De las ecuaciones (2.8-20) y (2.8-29) se recupera el esquema de la torsión de Vlasov (Vlasov, 1961) suponiendo que las deformaciones tangenciales por torsión son despreciables ($\gamma_t \approx 0$ y $\theta'_x = \phi_\omega$). Debe tenerse en cuenta que la torsión de Vlasov desprecia el alabeo secundario ω_n en el cálculo de la rigidez de alabeo I_ω .

$$EI_\omega \theta_x^{iv} - GJ\theta_x'' + b'_\omega - m_{\bar{x}} = 0 \quad (2.8-30a)$$

$$B_\omega = EI_\omega \theta_x'' \quad (2.8-30b)$$

La torsión de Saint-Venant se recupera de la ecuación (2.8-20) suponiendo que las deformaciones tangenciales por torsión son despreciables ($\gamma_t \approx 0$ y $\theta'_x = \phi_\omega$) y que la torsión es uniforme ($\theta_x'' = \phi'_\omega = 0$) por lo que no hay bimomento en la sección

$$GJ\theta_x'' = 0 \quad (2.8-31)$$

2.9 Aplicación de las ecuaciones diferenciales

Se incluyen tres aplicaciones a las ecuaciones diferenciales establecidas en el apartado anterior con el fin de mostrar su uso, así como el de las condiciones de contorno que deben imponerse. Debe notarse que en el comportamiento de cada viga estudiada también influyen las propiedades geométricas de las secciones transversales y de material.

Con el ánimo de evaluar la importancia de las deformaciones tangenciales en el comportamiento a torsión pura se aplican las ecuaciones diferenciales también a una sección cerrada y los resultados obtenidos se comparan con los análisis de Hoogenboom & Borgart 2005, quienes evaluaron el ángulo de giro y la distribución del momento y bimomento de una viga de pared delgada usando la formulación de Vlasov (1961).

En el Anexo B se incluyen los comandos usados para resolver las ecuaciones diferenciales con ayuda de MATLAB 2004.

2.9-1 Viga sección I en voladizo

Se analiza una viga con sección I en voladizo. En el extremo libre de la viga se impone un momento torsor de 1000 N mm tal como se muestra en la Figura 2.9-1.

Las propiedades geométricas de la sección mostrada en la Figura 2.9-1 son:

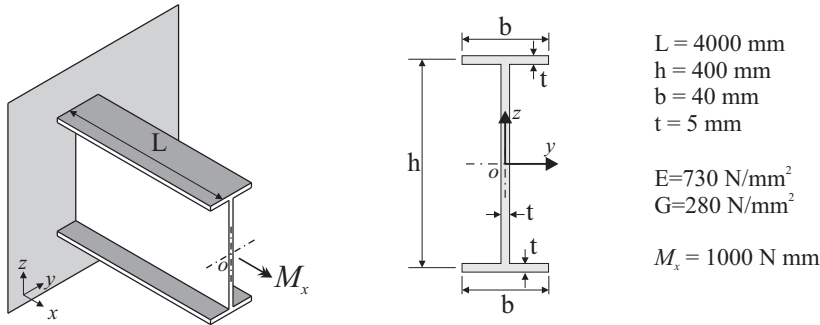


Figura 2.9-1: Geometría de una viga con sección I sometida a un momento torsor.

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{y}} &= 4.31 \times 10^7 \text{ mm}^4 & I_{\bar{z}} &= 5.75 \times 10^4 \text{ mm}^4 \\
 J &= 2.00 \times 10^4 \text{ mm}^4 & I_{\omega} &= 2.13 \times 10^9 \text{ mm}^6 \\
 I_{t_c} &= I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}}
 \end{aligned}$$

La viga se analiza resolviendo las ecuaciones diferenciales (2.8-20) y (2.8-23) con las siguientes condiciones de contorno:

- Giro restringido en el apoyo: $\theta_{\bar{x}}(0) = 0$.
- Alabeo restringido en el apoyo: $\phi_{\omega}(0) = 0$.
- Sin deformaciones tangenciales en el apoyo: $\theta'_{\bar{x}}(0) = 0$.
- Alabeo libre en el extremo libre (sin bimomento): $\phi'_{\omega}(L) = 0$.

Los ángulos de giro obtenidos muestran diferencias inferiores al 0.1 % respecto a la teoría de Vlasov (Vlasov, 1961), esto indica que en este caso las deformaciones de corte son despreciables y la derivada del ángulo de giro se aproxima a la intensidad de alabeo ($\theta'_{\bar{x}} \approx \phi_{\omega}$).

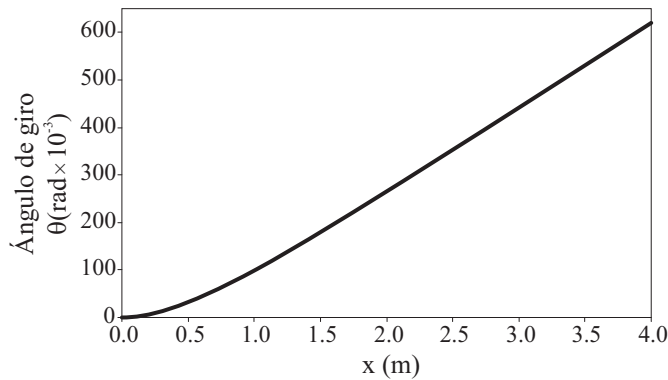


Figura 2.9-2: Ángulo de giro por torsión en la longitud de una viga en voladizo con sección I.

En la Figura 2.9-2 se muestra el valor del ángulo de giro por torsión a lo largo de la viga.

La Figura 2.9-3 muestra el valor de la derivada del ángulo de giro por unidad de longitud y tal como se mencionó anteriormente se verifica que su valor se corresponde con la intensidad de alabeo. Se observa que la pendiente de la curva se va reduciendo y a 2.5 m del apoyo tiende a ser horizontal indicando que a partir de este punto domina el comportamiento por torsión uniforme

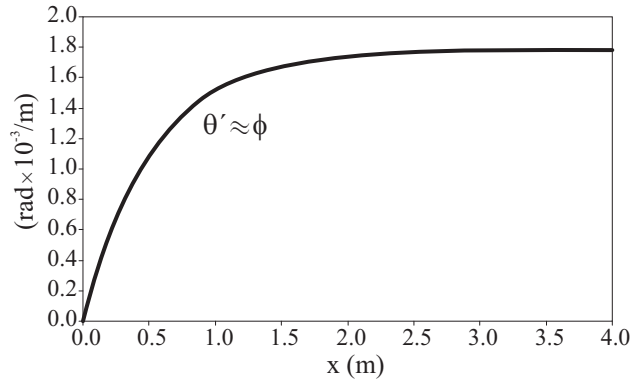


Figura 2.9-3: Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga con sección I.

En la Figura 2.9-4 se incluyen los momentos torsores involucrados en el caso de estudio, M_x es el momento torsor aplicado, M_{sv} es el momento de Saint-Venant generado por la torsión uniforme y B'_ω es la componente de torsión no uniforme. Se observa que a 2.5 m del apoyo, la componente de momento de Saint-Venant domina el comportamiento de la viga siendo mínimo el aporte de la torsión no uniforme.

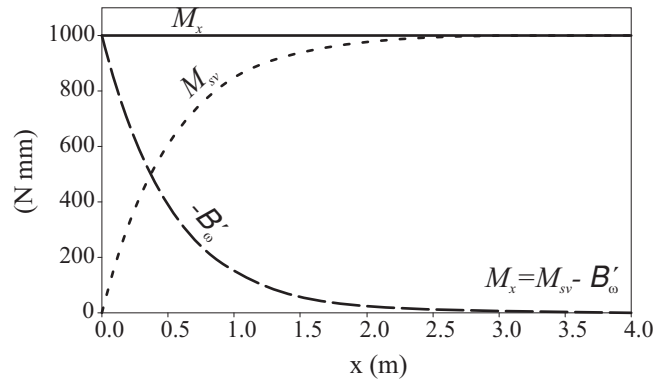


Figura 2.9-4: Momento torsor impuesto M_x y sus componentes: M_{sv} (torsión de Saint-Venant) y B'_ω (torsión no uniforme), en una viga con sección I.

2.9-2 Viga sección C en voladizo

El segundo análisis realizado con las ecuaciones diferenciales obtenidas consiste en el estudio del comportamiento a torsión de una viga con sección C en voladizo, la cual está sometida a un momento torsor de 1000 kN m en su extremo libre (ver Figura 2.9-5).

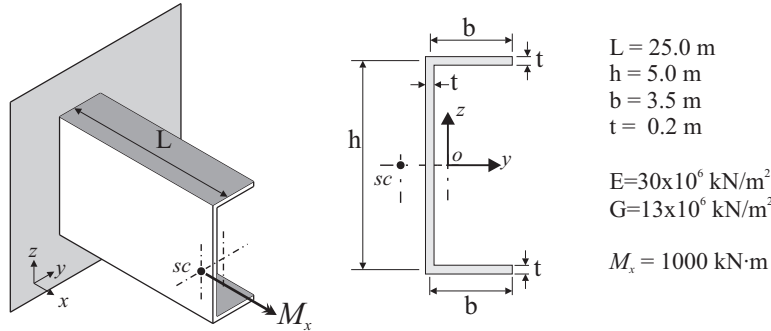


Figura 2.9-5: Geometría de una viga con sección C sometida a un momento torsor.

Las propiedades geométricas de la sección mostrada en la Figura 2.9-5 son:

$$\begin{aligned}
 I_{y_c} &= 10.60 \text{ m}^4 & I_{z_c} &= 16.49 \text{ m}^4 \\
 J &= 0.032 \text{ m}^4 & I_{\omega} &= 14.09 \text{ m}^6 \\
 I_{t_c} &= I_{y_c} + I_{z_c}
 \end{aligned}$$

Al igual que en el análisis de la viga con sección I se resuelven las ecuaciones diferenciales (2.8-20) y (2.8-23) usando las siguientes condiciones de contorno:

- Giro restringido en el apoyo: $\theta_x(0) = 0$.
- Alabeo restringido en el apoyo: $\phi_{\omega}(0) = 0$.
- Sin deformaciones tangenciales en el apoyo: $\theta'_x(0) = 0$.
- Alabeo libre en el extremo libre (sin bimomento): $\phi'_{\omega}(L) = 0$.

Tal como se esperaba, las diferencias entre los resultados obtenidos y la teoría de Vlasov (Vlasov, 1961) son inferiores al 0.1 %.

La Figura 2.9-6 muestra el valor del ángulo de giro por torsión a lo largo de la viga y la Figura 2.9-7 el valor de la derivada del ángulo de giro por unidad de longitud. Se observa que en el extremo libre de la viga la pendiente del ángulo de giro no es constante, esto indica que el comportamiento de la viga está influenciado por torsión uniforme y no uniforme.

En la Figura 2.9-8 se muestran los momentos torsores involucrados en el caso de estudio, $M_{\bar{x}}$ es el momento torsor aplicado, M_{s_v} es el momento de Saint-Venant generado por la torsión uniforme y B'_{ω} es la componente de torsión no uniforme.

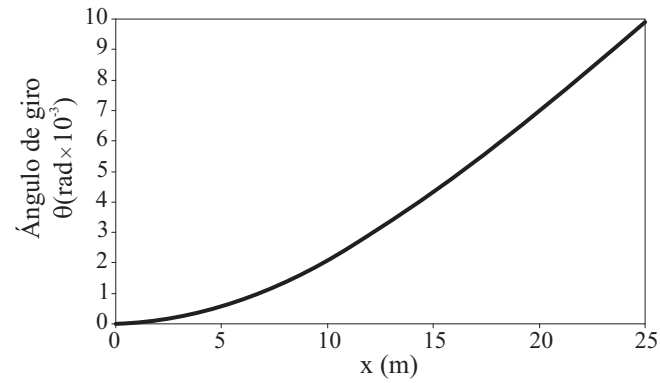


Figura 2.9-6: Ángulo de giro por torsión en la longitud de una viga con sección C.

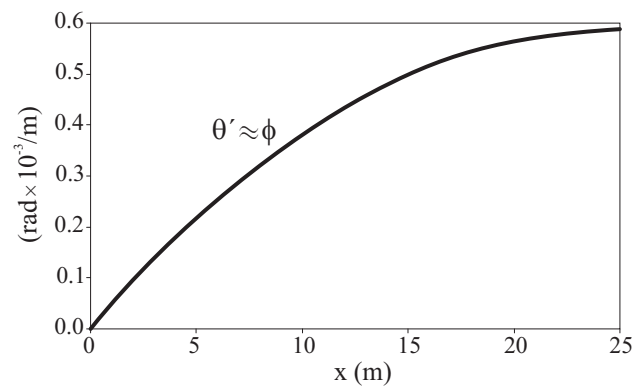


Figura 2.9-7: Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga con sección C.

Se observa que el momento torsor está dominado por la componente de torsión no uniforme.

2.9-3 Viga de sección cerrada biapoyada

Se estudia la viga biapoyada que analizaron Hoogenboom & Borgart (2005) usando la teoría de Vlasov, esta viga tiene 60 m de longitud, sus apoyos permiten el alabeo pero no el giro por torsión y presenta en el centro del vano un momento torsor de 2.69×10^4 kN m. En la Figura 2.9-9 se muestra la geometría de la sección transversal de la viga.

De acuerdo con Hoogenboom & Borgart (2005), las propiedades geométricas de la sección mostrada en la Figura 2.9-5 son:

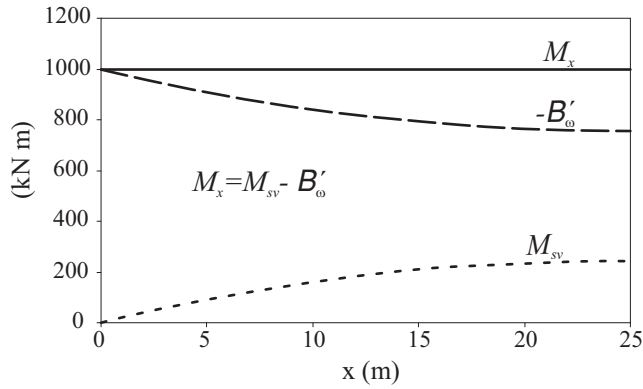


Figura 2.9-8: Momento torsor impuesto M_x y sus componentes: M_{sv} (torsión de Saint-Venant) y B'_ω (torsión no uniforme).

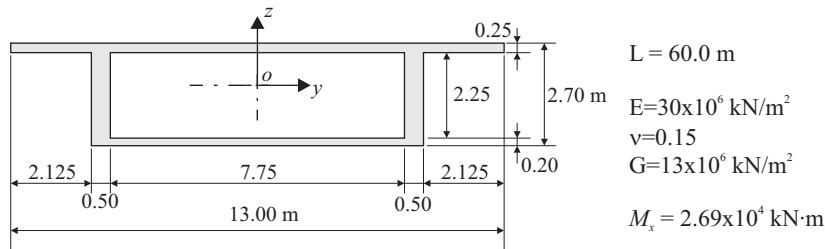


Figura 2.9-9: Geometría de una viga con sección cerrada sometida a un momento torsor.

$$\begin{aligned}
 I_{\bar{y}} &= 95.21 \text{ m}^4 & I_{\bar{z}} &= 8.16 \text{ m}^4 \\
 J &= 20.62 \text{ m}^4 & I_\omega &= 39.44 \text{ m}^6 \\
 I_{t_c} &= I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}}
 \end{aligned}$$

Se evalúa el parámetro ζ (ver ecuación 2.9-1) con el objetivo de saber la influencia de las deformaciones de corte por torsión en el análisis de la sección:

$$\zeta = \frac{4GI_{t_c} - GJ}{4GI_{t_c} + GJ} = 0.9050 \quad (2.9-1)$$

El valor de ζ se aleja de la unidad un 10% indicando que las deformaciones tangenciales deben ser consideradas en el análisis por torsión.

El estudio de la viga se realiza resolviendo las ecuaciones diferenciales (2.8-20) y (2.8-23) con las siguientes condiciones de contorno:

- Giro restringido en el apoyo: $\theta_x(0) = 0$.
- Alabeo libre en el apoyo (sin bimomento): $\phi'_\omega(0) = 0$.

- Alabeo restringido en el centro del vano: $\phi_\omega(L/2) = 0$.
- Sin deformaciones tangenciales en el centro del vano: $\theta'_x(L/2) = 0$.

Los resultados muestran diferencias del 5 % con la teoría de Vlasov (Vlasov, 1961) confirmando que para este caso las deformaciones de corte deben contemplarse en el análisis.

En la Figura 2.9-10 se contrasta el valor del ángulo de giro por torsión a lo largo de la viga calculado usando la teoría de Saint-Venant, la de Vlasov e incluyendo las deformaciones tangenciales por torsión en el análisis.

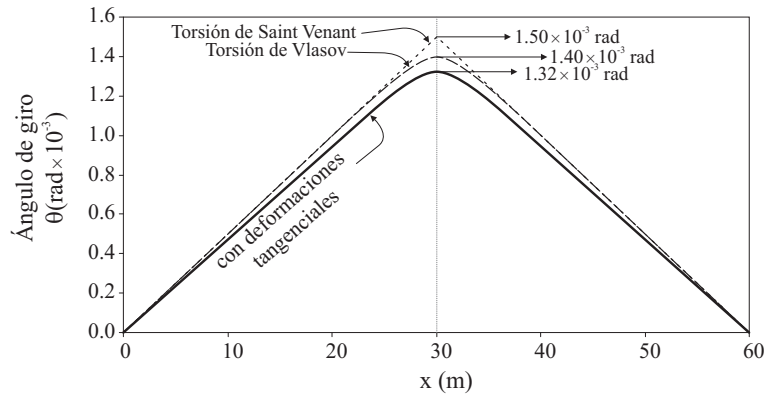


Figura 2.9-10: Ángulo de giro por torsión en la longitud de la viga con sección cerrada.

En la Figura 2.9-11 se muestra el valor de la derivada del ángulo de giro por unidad de longitud y la deformación tangencial por torsión. Se observa que la intensidad de alabeo es mayor que la derivada del ángulo de giro, indicando con esto que las deformaciones longitudinales inducidas por la torsión son mayores en la sección analizada cuando en el análisis se incluyen las deformaciones tangenciales por torsión.

En la Figura 2.9-12 se muestran los momentos torsores involucrados en el caso de estudio, $M_{\bar{x}}$ es el momento torsor aplicado, M_{sv} es el momento de Saint-Venant generado por la torsión uniforme, B'_ω es la componente de torsión no uniforme y $GJ(\gamma_t/2)$ es la componente de deformaciones tangenciales.

Se observa que las deformaciones tangenciales influyen en el comportamiento de la sección estudiada y se generan interrogantes sobre la precisión de las respuestas obtenidas cuando no se considera esta componente.

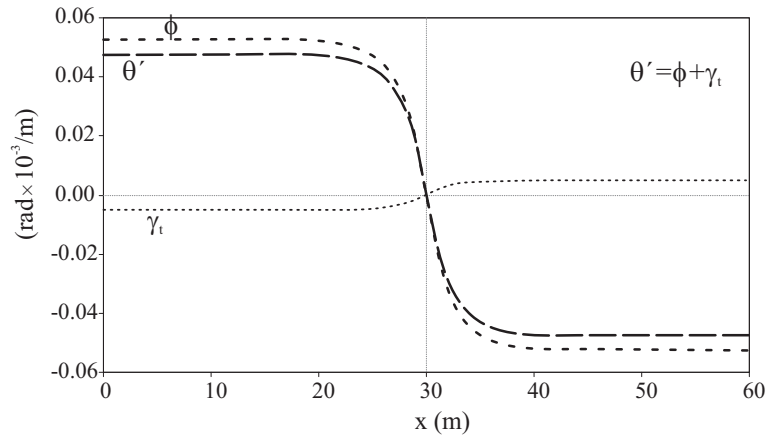


Figura 2.9-11: Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga de sección cerrada.

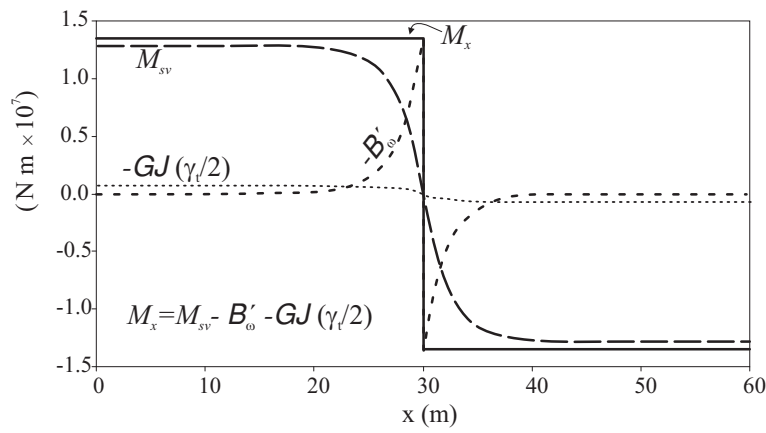


Figura 2.9-12: Momento torsor impuesto M_x y sus componentes: M_{sv} (torsión de Saint-Venant) y B'_o (torsión no uniforme).

CAPÍTULO 3

Laminados de materiales compuestos

En este capítulo se introducen conceptos básicos para el tratamiento de laminados compuestos que permitirán comprender su comportamiento cuando hacen parte de vigas de sección abierta en materiales compuestos (ver Figura 3.0-1).

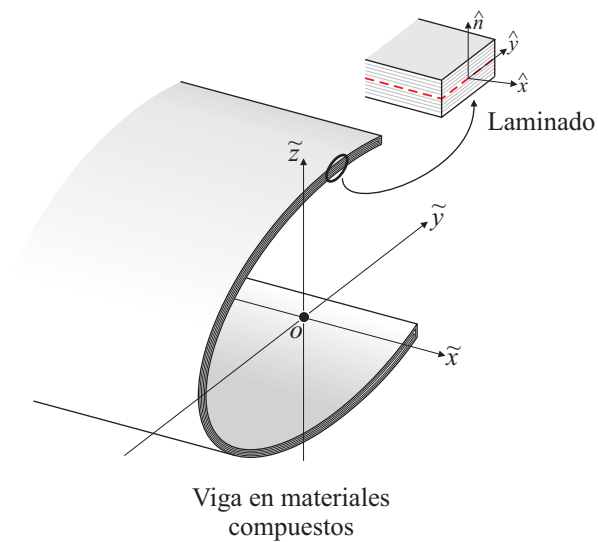


Figura 3.0-1: Viga conformada por laminados compuestos

El término “material compuesto” se refiere a la combinación de dos o más materiales a escala macroscópica para dar origen a un tercer material con mejores propiedades que los materiales individuales. Miravete (2000) muestra una clasificación de los materiales compuestos en función del tipo de refuerzo

(partículas y fibras) y entre los materiales que contienen fibras incluye los reforzados por: fibras cortas (aleatorias), fibras largas (unidireccionales) y fibras largas (textiles). En la Figura 3.0-2 se muestran las disposiciones de fibras más usadas en la fabricación de pultrusionados (Fiberline Composites A/S, 2003).

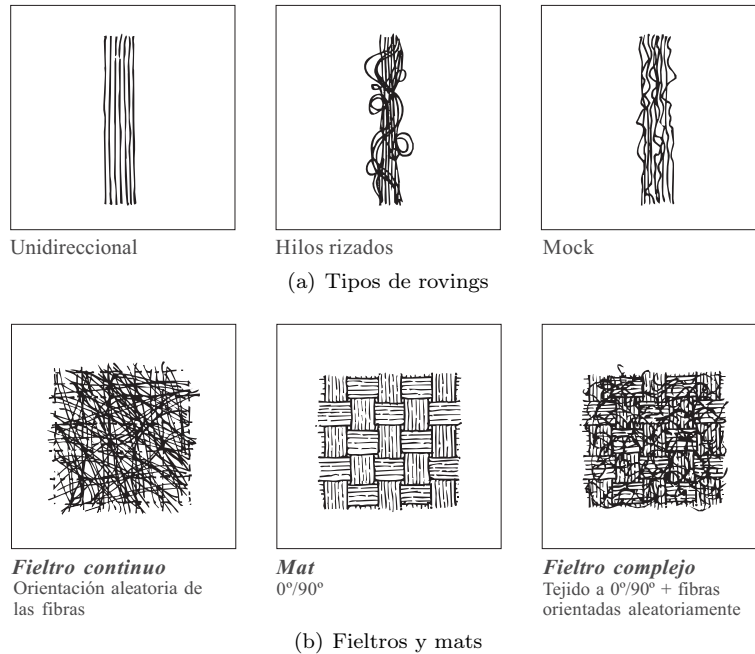


Figura 3.0-2: Tipos de roving, fieltros y mats usados en la fabricación de pultrusionados (Adaptado de Fiberline Composites A/S 2003)

Este trabajo se centra en los materiales compuestos por láminas unidireccionales, las cuales están constituidas por fibras largas paralelas entre si y embebidas en una matriz polimérica.

A continuación se establecen las relaciones tensión-deformación de láminas unidireccionales de compuestos fibra-matriz, se muestran los pasos a seguir para transformar las tensiones, deformaciones y matriz de rigidez de su sistema de coordenadas local o de la capa al sistema cartesiano del laminado, y se incluyen los procedimientos usados para la integración de esfuerzos y matriz de rigidez del laminado a partir de las tensiones y rigidez de cada lámina siguiendo la teoría de laminados de primer orden - FSDT (*First shear deformation theory*, Reddy 2004). En la última Sección se incluye un ejemplo de aplicación donde se realiza un análisis de sensibilidad usando las herramientas implementadas con la formulación planteada en este Capítulo.

3.1 Láminas unidireccionales de materiales compuestos

En la ingeniería estructural las láminas unidireccionales (ver Figura 3.1-1) juegan un papel muy importante en la evaluación del comportamiento de los materiales compuestos FRP (*Fiber Reinforced Polymer*), a partir de los ensayos que se realizan a dichas láminas se obtienen las propiedades de los laminados multidireccionales que las contienen y de estos últimos, el comportamiento de todo un perfil pultrusionado (Bank, 2006b).

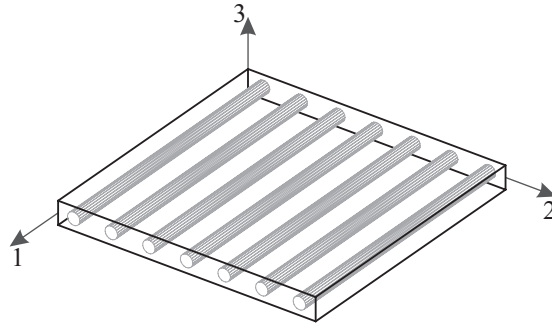


Figura 3.1-1: Lámina unidireccional de materiales compuestos (Sistema de ejes cartesianos).

En las láminas de materiales compuestos cuya longitud y anchura son mucho mayores a su espesor es razonable y habitual suponer que la componente de tensión en el espesor (σ_3) es nula (Barbero, 1999; Reddy, 2004). Bajo este supuesto se emplean las siguientes ecuaciones de deformación-tensión para una lámina unidireccional (Gere, 2005):

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \frac{\nu_{21}}{E_2} \sigma_2 \quad (3.1-1a)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \sigma_1 + \frac{1}{E_2} \sigma_2 \quad (3.1-1b)$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}} \tau_{12} \quad (3.1-1c)$$

$$\gamma_{23} = \frac{1}{G_{23}} \tau_{23} \quad (3.1-1d)$$

$$\gamma_{13} = \frac{1}{G_{13}} \tau_{13} \quad (3.1-1e)$$

Debe notarse que los laminados unidireccionales presentan isotropía transversal con respecto al eje 1, por esta razón exhiben las mismas propiedades en todas las direcciones del plano (2, 3), de tal forma que $G_{12} = G_{13}$.

Las ecuaciones (3.1-1) suponen conocidas las propiedades mecánicas de la lámina ($E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}, G_{23}$) y que los módulos de elasticidad (longitudinal y transversal)

son iguales para tracción y compresión, sin distinguir entre deformación por tensión positiva (tracción) o negativa (compresión).

Para los casos en los que se tienen las propiedades de los materiales componentes y el porcentaje en volumen de cada uno de ellos en la capa, se obtienen las propiedades de la lámina usando el modelo de microestructura periódica (*PMM*, Barbero & Luciano 1995), el cual usa técnicas de series de Fourier y de homogenización para materiales que presentan inclusiones de material o vacío con microestructura periódica, aplicadas al caso de materiales compuestos por matriz y fibras unidireccionales.

Las relaciones deformación-tensión de láminas unidireccionales (3.1-1) en forma matricial son

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.1-2)$$

y en forma compacta,

$$\varepsilon = \mathbf{S} \sigma \quad (3.1-3)$$

donde, ε es el vector de deformaciones en la lámina, σ el vector de tensiones y \mathbf{S} la matriz de flexibilidades de la capa.

La matriz de rigidez de la capa \mathbf{Q} se evalúa como la inversa de la matriz de flexibilidad \mathbf{S} :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{\Delta} & \frac{\nu_{21}E_2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{\Delta} & \frac{E_2}{\Delta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} \end{bmatrix} \quad (3.1-4)$$

Con

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1}$$

Tal que

$$\sigma = \mathbf{Q} \varepsilon \quad (3.1-5)$$

En adelante las componentes de tensión y deformación se escribirán en notación indicial contraída, por este motivo se emplearán las equivalencias dadas en la Tabla 3.1-1.

Tabla 3.1-1: Definición de notación indicial contraída (Barbero, 1999)

Tensorial	Contraído	Tensorial	Contraído
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
τ_{23}	τ_4	γ_{23}	γ_4
τ_{31}	τ_5	γ_{31}	γ_5
τ_{12}	τ_6	γ_{12}	γ_6

Aplicando las definiciones dadas en la Tabla 3.1-1 a la ecuación (3.1-5), se establecen las relaciones tensión-deformación de una lámina unidireccional de materiales compuestos como

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_6 \\ \tau_4 \\ \tau_5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_6 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{pmatrix} \quad (3.1-6)$$

con

$$\begin{aligned} Q_{11} &= E_1/\Delta \\ Q_{12} &= (\nu_{12}E_2)/\Delta \\ Q_{21} &= Q_{12} \\ Q_{22} &= E_2/\Delta \\ Q_{66} &= G_{12} \\ Q_{44} &= G_{23} \\ Q_{55} &= G_{13} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \end{aligned} \quad (3.1-7)$$

3.2 Transformación de sistemas de coordenadas

El análisis de láminas unidireccionales que hacen parte de laminados requiere de la transformación de tensiones, deformaciones y rigideces entre los sistemas de coordenadas. En adelante se denominará sistema local al sistema de coordenadas en las láminas o capas y sistema global al sistema referido al laminado.

En la Figura 3.2-1 se muestra una lámina orientada un ángulo φ respecto al eje longitudinal del laminado (\hat{x}) al que pertenece.

A continuación se incluyen la matrices de rotación entre ejes locales y globales; las matrices de transformación de deformaciones y tensiones definidas a partir de la rotación de ejes del sistema del laminado a la capa; y el procedimiento para transformar la matriz de rigidez usando las matrices de transformación de deformaciones y tensiones.

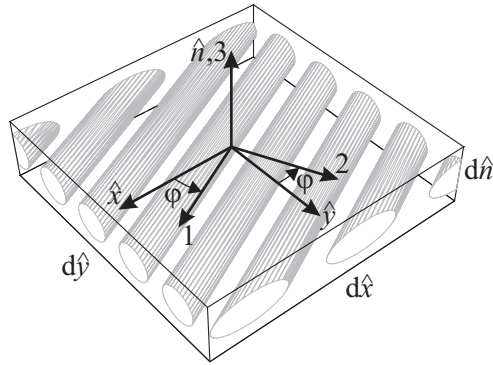


Figura 3.2-1: Capa con fibras orientadas en dirección φ respecto al sistema de coordenadas del laminado.

3.2-1 Rotación de ejes

La rotación de los ejes del laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ a la capa $(1, 2, 3)$ se realiza usando la matriz de transformación $a(\varphi)$, siendo φ el ángulo que forma el sistema coordenadas de la capa con el del laminado (ver Figura 3.2-2)

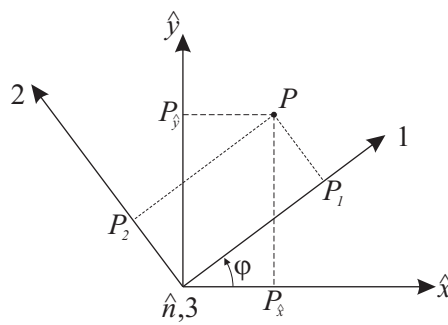


Figura 3.2-2: Rotación del sistema de ejes del laminado al sistema de la capa.

Así, la matriz $a(\varphi)$ se define como

$$a(\varphi) = \begin{bmatrix} a_{1\hat{x}} & a_{1\hat{y}} & a_{1\hat{n}} \\ a_{2\hat{x}} & a_{2\hat{y}} & a_{2\hat{n}} \\ a_{3\hat{x}} & a_{3\hat{y}} & a_{3\hat{n}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi & 0 \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2-1)$$

tal que

$$a(\varphi) : (\hat{x}, \hat{y}, \hat{n}) \rightarrow (1, 2, 3) \quad (3.2-2)$$

De las ecuaciones (3.2-1) y (3.2-2) se establece que las coordenadas de un punto

de coordenadas $P_{(1,2,3)}$ en términos de las coordenadas globales son

$$P_{(1,2,3)} = a(\varphi)P_{(\hat{x},\hat{y},\hat{n})} \quad (3.2-3)$$

La matriz de transformación de coordenadas inversa, o de la capa al laminado, se denomina $b(\varphi)$ y al ser una matriz de rotación de ejes puede expresarse en términos de la matriz $a(\varphi)$ como

$$b(\varphi) = a(\varphi)^{-1} = a(\varphi)^T = a(-\varphi) \quad (3.2-4)$$

De las ecuaciones (3.2-1) y (3.2-4) se definen las componentes de la matriz $b(\varphi)$ como

$$b(\varphi) = \begin{bmatrix} b_{\hat{x}1} & b_{\hat{x}2} & b_{\hat{x}3} \\ b_{\hat{y}1} & b_{\hat{y}2} & b_{\hat{y}3} \\ b_{\hat{n}1} & b_{\hat{n}2} & b_{\hat{n}3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2-5)$$

Con ayuda de la ecuación (3.2-5) se definen las coordenadas de un punto de coordenadas $P_{(\hat{x},\hat{y},\hat{n})}$ en términos de coordenadas locales como

$$P_{(\hat{x},\hat{y},\hat{n})} = b(\varphi)P_{(1,2,3)} \quad (3.2-6)$$

Debe notarse que el ángulo φ se mide desde los ejes del laminado a los ejes de la capa (ver Figura 3.2-2).

3.2-2 Transformación de deformaciones

Las deformaciones en el sistema de coordenadas del laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ se transforman a los ejes de la capa (1, 2, 3) usando la matriz $\hat{T}_\varepsilon(\varphi)$, la cual se evalúa a partir de la matriz de rotación de ejes $a(\varphi)$, tal que

$$\hat{T}_\varepsilon(a(\varphi)) : \hat{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon \quad (3.2-7)$$

donde, ε es el vector de deformaciones de la capa en el sistema local (ver ecuaciones 3.1-2 y 3.1-3) y $\hat{\varepsilon}$ es el vector de deformaciones de la capa en el sistema de coordenadas del laminado.

$$\hat{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{\hat{x}}, \varepsilon_{\hat{y}}, \gamma_{\hat{x}\hat{y}}, \gamma_{\hat{y}\hat{n}}, \gamma_{\hat{x}\hat{n}}\} \quad (3.2-8)$$

La matriz \hat{T}_ε se obtiene después de transformar las componentes del tensor de deformaciones $\hat{\varepsilon}$ en coordenadas globales a coordenadas locales. Usando la definición dada por Malvern (1969) para la transformación de tensores se tiene.

$$\varepsilon_{ij} = a_{ip}a_{jq}\varepsilon_{pq} \quad i, j \in (1, 2, 3); \quad p, q \in (\hat{x}, \hat{y}, \hat{n}) \quad (3.2-9)$$

Desarrollando la componente ε_{11} de las deformaciones locales

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= a_{1p}a_{1q}\varepsilon_{pq} \quad p, q \in (\hat{x}, \hat{y}, \hat{n}) \\
&= a_{1\hat{x}}a_{1q}\varepsilon_{\hat{x}q} + a_{1\hat{y}}a_{1q}\varepsilon_{\hat{x}q} + a_{1\hat{n}}a_{1q}\varepsilon_{\hat{x}q} \\
&= a_{1\hat{x}}a_{1\hat{x}}\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} + a_{1\hat{y}}a_{1\hat{x}}\varepsilon_{\hat{y}\hat{x}} + a_{1\hat{n}}a_{1\hat{x}}\varepsilon_{\hat{n}\hat{x}} \\
&\quad + a_{1\hat{x}}a_{1\hat{y}}\varepsilon_{\hat{x}\hat{y}} + a_{1\hat{y}}a_{1\hat{y}}\varepsilon_{\hat{y}\hat{y}} + a_{1\hat{n}}a_{1\hat{y}}\varepsilon_{\hat{n}\hat{y}} \\
&\quad + a_{1\hat{x}}a_{1\hat{n}}\varepsilon_{\hat{x}\hat{n}} + a_{1\hat{y}}a_{1\hat{n}}\varepsilon_{\hat{y}\hat{n}} + a_{1\hat{n}}a_{1\hat{n}}\varepsilon_{\hat{n}\hat{n}}
\end{aligned} \tag{3.2-10}$$

Eliminando de la ecuación (3.2-10) las componentes nulas de la matriz $a(\varphi)$ (ver ecuación 3.2-1) y considerando la simetría del tensor de deformaciones resulta

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{11} &= a_{1\hat{x}}^2\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} + 2a_{1\hat{x}}a_{1\hat{y}}\varepsilon_{\hat{x}\hat{y}} + a_{1\hat{y}}^2\varepsilon_{\hat{y}\hat{y}} \\
&= a_{1\hat{x}}^2\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} + a_{1\hat{x}}a_{1\hat{y}}\gamma_{\hat{x}\hat{y}} + a_{1\hat{y}}^2\varepsilon_{\hat{y}\hat{y}}
\end{aligned} \tag{3.2-11}$$

Al usar el mismo procedimiento para el cálculo de las componentes de deformación transversal se obtiene

$$\varepsilon_{12} = a_{1\hat{x}}a_{2\hat{x}}\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} + (a_{1\hat{y}}a_{2\hat{x}} + a_{1\hat{x}}a_{2\hat{y}})\varepsilon_{\hat{x}\hat{y}} + a_{1\hat{y}}a_{2\hat{y}}\varepsilon_{\hat{y}\hat{y}} \tag{3.2-12}$$

Multiplicando la ecuación (3.2-12) por 2

$$\begin{aligned}
2\varepsilon_{12} &= 2a_{1\hat{x}}a_{2\hat{x}}\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} + (a_{1\hat{y}}a_{2\hat{x}} + a_{1\hat{x}}a_{2\hat{y}})2\varepsilon_{\hat{x}\hat{y}} + 2a_{1\hat{y}}a_{2\hat{y}}\varepsilon_{\hat{y}\hat{y}} \\
\gamma_{12} &= (2a_{1\hat{x}}a_{2\hat{x}})\varepsilon_{\hat{x}\hat{x}} + (a_{1\hat{y}}a_{2\hat{x}} + a_{1\hat{x}}a_{2\hat{y}})\gamma_{\hat{x}\hat{y}} + (2a_{1\hat{y}}a_{2\hat{y}})\varepsilon_{\hat{y}\hat{y}}
\end{aligned} \tag{3.2-13}$$

Al aplicar el mismo procedimiento de transformación de sistema de coordenadas a las componentes restantes se obtiene un sistema de ecuaciones, el cual se organiza según el orden de las componentes en los vectores de deformación global (3.2-8) y local (3.1-3) permitiendo extraer la matriz que transforma las deformaciones de los ejes del laminado a la capa.

$$\hat{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} a_{1\hat{x}}^2 & a_{1\hat{y}}^2 & a_{1\hat{x}}a_{1\hat{y}} & 0 & 0 \\ a_{2\hat{x}}^2 & a_{2\hat{y}}^2 & a_{2\hat{x}}a_{2\hat{y}} & 0 & 0 \\ 2a_{1\hat{x}}a_{2\hat{x}} & 2a_{1\hat{y}}a_{2\hat{y}} & a_{1\hat{y}}a_{2\hat{x}} + a_{1\hat{x}}a_{2\hat{y}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{1\hat{x}}a_{3\hat{n}} & a_{1\hat{y}}a_{3\hat{n}} \\ 0 & 0 & 0 & a_{2\hat{x}}a_{3\hat{n}} & a_{2\hat{y}}a_{3\hat{n}} \end{bmatrix} \tag{3.2-14}$$

Tal que

$$\varepsilon = \hat{T}_\varepsilon \hat{\varepsilon} \tag{3.2-15}$$

Reemplazando las componentes de la matriz a (ver ecuación 3.2-1) en (3.2-14) resulta

$$\hat{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & 0 & 0 \\ -2 \cos \varphi \sin \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.2-16)$$

3.2-3 Transformación de Tensiones

La transformación de tensiones del sistema de coordenadas local al del laminado se realiza usando la matriz $\hat{T}_\sigma(\varphi)$, tal que

$$\hat{T}_\sigma(\varphi) : \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (3.2-17)$$

donde, $\boldsymbol{\sigma}$ es el vector de tensiones de la capa en coordenadas locales (ver ecuaciones 3.1-2 y 3.1-3) y $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ es el vector de tensiones de la capa en el sistema de coordenadas global.

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}^\top = \{\sigma_{\hat{x}}, \sigma_{\hat{y}}, \tau_{\hat{x}\hat{y}}, \tau_{\hat{y}\hat{n}}, \tau_{\hat{x}\hat{n}}\} \quad (3.2-18)$$

Debe notarse que esta transformación es inversa a la planteada para las deformaciones, por lo que en lugar de usar la matriz de rotación $a(\varphi)$ se usará su inversa $b(\varphi)$, así, siguiendo el mismo procedimiento aplicado en el Apartado 3.2-2 se transforman las componentes del tensor de tensiones

$$\sigma_{ij} = b_{ip} b_{jq} \sigma_{pq} \quad i, j \in (\hat{x}, \hat{y}, \hat{n}); \quad p, q \in (1, 2, 3) \quad (3.2-19)$$

Desarrollando la componente $\sigma_{\hat{x}\hat{x}}$ de las tensiones globales se tiene

$$\begin{aligned} \sigma_{\hat{x}\hat{x}} &= b_{\hat{x}p} b_{\hat{x}q} \sigma_{pq} \quad p, q \in (1, 2, 3) \\ &= b_{\hat{x}1} b_{\hat{x}q} \sigma_{1q} + b_{\hat{x}2} b_{\hat{x}q} \sigma_{2q} + b_{\hat{x}3} b_{\hat{x}q} \sigma_{3q} \\ &= b_{\hat{x}1} b_{\hat{x}1} \sigma_{11} + b_{\hat{x}2} b_{\hat{x}1} \tau_{21} + b_{\hat{x}3} b_{\hat{x}1} \tau_{31} \\ &\quad + b_{\hat{x}1} b_{\hat{x}2} \tau_{12} + b_{\hat{x}2} b_{\hat{x}2} \sigma_{22} + b_{\hat{x}3} b_{\hat{x}2} \tau_{32} \\ &\quad + b_{\hat{x}1} b_{\hat{x}3} \tau_{13} + b_{\hat{x}2} b_{\hat{x}3} \tau_{23} + b_{\hat{x}3} b_{\hat{x}3} \sigma_{33} \end{aligned} \quad (3.2-20)$$

Eliminando de la ecuación (3.2-20) las componentes nulas de la matriz $b(\varphi)$ (ver ecuación 3.2-5) y considerando la simetría del tensor de tensiones resulta

$$\sigma_{\hat{x}\hat{x}} = b_{\hat{x}1}^2 \sigma_{11} + 2b_{\hat{x}1} b_{\hat{x}2} \tau_{12} + b_{\hat{x}2}^2 \sigma_{22} \quad (3.2-21)$$

Realizando el mismo procedimiento para las demás componentes y reorganizando los términos de las ecuaciones resultantes, se encuentra la matriz que transforma las tensiones de las coordenadas del laminado a las coordenadas de la capa

$$\hat{T}_\sigma = \begin{bmatrix} b_{\hat{x}1}^2 & b_{\hat{x}2}^2 & 2b_{\hat{x}1}b_{\hat{x}2} & 0 & 0 \\ b_{\hat{y}1}^2 & b_{\hat{y}2}^2 & 2b_{\hat{y}1}b_{\hat{y}2} & 0 & 0 \\ b_{\hat{x}1}b_{\hat{y}1} & b_{\hat{x}2}b_{\hat{y}2} & b_{\hat{x}2}b_{\hat{y}1} + b_{\hat{x}1}b_{\hat{y}2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{\hat{x}1}b_{\hat{n}3} & b_{\hat{x}2}b_{\hat{n}3} \\ 0 & 0 & 0 & b_{\hat{y}1}b_{\hat{n}3} & b_{\hat{y}2}b_{\hat{n}3} \end{bmatrix} \quad (3.2-22)$$

Así,

$$\hat{\sigma} = \hat{T}_\sigma \sigma \quad (3.2-23)$$

Reemplazando las componentes de la matriz b (ver ecuación 3.2-5) en (3.2-22) resulta

$$\hat{T}_\sigma = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & -2 \cos \varphi \sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & 2 \cos \varphi \sin \varphi & 0 & 0 \\ \cos \varphi \sin \varphi & -\cos \varphi \sin \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (3.2-24)$$

Comparando las ecuaciones (3.2-16) y (3.2-24) se observa que

$$\hat{T}_\sigma = \hat{T}_\varepsilon^T \quad (3.2-25)$$

3.2-4 Transformación de la matriz de rigidez

La transformación de la matriz de rigidez de una capa, del sistema local al sistema de coordenadas del laminado se realiza usando las matrices de transformación de tensiones y deformaciones definidas anteriormente.

Reemplazando las ecuaciones (3.1-5) y (3.2-15) en (3.2-23) resulta

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \hat{T}_\sigma \mathbf{Q} \varepsilon \\ &= \hat{T}_\sigma \mathbf{Q} \hat{T}_\varepsilon \hat{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.2-26)$$

Definiendo la ecuación constitutiva de una capa en el sistema de coordenadas del laminado como

$$\hat{\sigma} = \hat{\mathbf{Q}} \hat{\varepsilon} \quad (3.2-27)$$

Se establece al comparar las ecuaciones (3.2-26) y (3.2-27), que

$$\hat{\mathbf{Q}} = \hat{T}_\sigma \mathbf{Q} \hat{T}_\varepsilon = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{44} & \hat{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{45} & \hat{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (3.2-28)$$

donde las componentes de la matriz $\hat{\mathbf{Q}}$ son:

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \varphi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22} \sin^4 \varphi \\ \hat{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ \hat{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \varphi \cos^3 \varphi \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ \hat{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \varphi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + Q_{22} \cos^4 \varphi \\ \hat{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \varphi \cos \varphi \\ &\quad + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \varphi \cos^3 \varphi \\ \hat{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi \\ &\quad + Q_{66} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) \\ \hat{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \varphi + Q_{55} \sin^2 \varphi \\ \hat{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \sin \varphi \cos \varphi \\ \hat{Q}_{55} &= Q_{44} \sin^2 \varphi + Q_{55} \cos^2 \varphi \end{aligned} \quad (3.2-29)$$

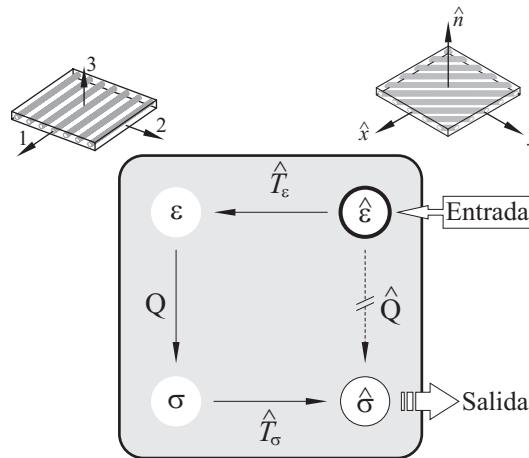


Figura 3.2-3: Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones de una capa en el sistema de coordenadas del laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$.

La Figura 3.2-3 muestra el esquema de cálculo de las tensiones de una capa a partir de las deformaciones en el sistema de coordenadas del laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$.

En la Figura 3.2-4 se incluye la variación de algunas componentes de la matriz de rigidez de una lámina en coordenadas globales $\hat{\mathbf{Q}}$ según la orientación de sus ejes locales. Las propiedades usadas en el análisis de la lámina de compuestos (E-glass+LY556/HT907/ DY063 epoxy. Soden et al. 1998) son: $E_1 = 53.48$ GPa, $E_2 = 17.70$ GPa, $G_{12} = 5.83$ GPa y $\nu_{12} = 0.278$.

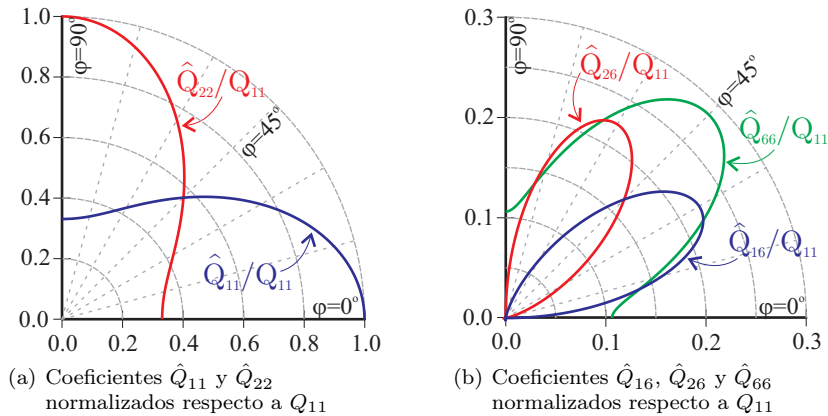


Figura 3.2-4: Variación de las componentes de la matriz $\hat{\mathbf{Q}}$ en función de la orientación de la lámina φ .

De la Figura 3.2-4 se observa que el valor máximo de la componente de corte de la matriz de rigidez \hat{Q}_{66} se obtiene para $\varphi=45^\circ$ mientras que las componentes \hat{Q}_{16} y \hat{Q}_{26} alcanzan sus máximos valores en orientaciones de $\varphi=30^\circ$ y $\varphi=60^\circ$ respectivamente.

3.3 Teoría de laminados

Un laminado es la composición de dos o más láminas, apiladas y perfectamente unidas entre sí, para actuar como un elemento estructural integral (Jones, 1999).

El esquema de apilado que define un laminado se denota por una secuencia de ángulos de orientación $[\alpha, \beta, \gamma, \dots]$, donde α es la orientación de la primera capa, β la de la segunda y así hasta definir todas las capas. Las capas se numeran en la dirección positiva del eje normal al laminado \hat{n} y mientras no se indique lo contrario se establece que todas las capas tienen el mismo espesor y están fabricadas en el mismo material (Reddy, 2004).

Cuando el material, la secuencia de apilado y la geometría son simétricos respecto a la línea media del laminado se denomina “*laminado simétrico*” y para identificarlo se incluye la letra s como subíndice en el esquema del apilado, es decir,

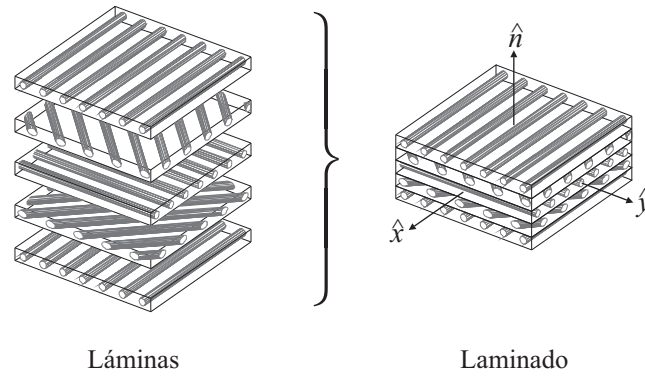


Figura 3.3-1: Laminado compuesto por capas a diferentes orientaciones (Adaptado de Jones 1999).

$$[-45, 45, 45, -45] = [-45, 45]_s = [\mp 45]_s$$

$$[45, -45, -45, 45] = [45, -45]_s = [\pm 45]_s$$

En apilados que incluyen secuencias repetitivas, estas se indican mediante un subíndice que señala el número de veces que se repite, es decir, $[30, 60, 30, 60] = [30, 60]_2$, los subíndices también se usan para indicar que una capa se repite de forma consecutiva, por ejemplo $[30, 45, 45, 45, 60, 60] = [30, 45_3, 60_2]$.

Combinando secuencias repetitivas y simétricas se tiene

$$[30, -30, 60, -60, 30, -30, 60, -60, -60, 60, -30, 30, -60, 60, -30, 30] = [\pm 30, \pm 60]_{2s}$$

En laminados cuyas capas presentan diferentes espesores estos se indican usando subíndices en cada capa $[\alpha_{t1}, -\alpha_{t2}]$.

A continuación se define el campo de desplazamientos según la teoría de laminados de primer orden, en la que se contemplan las deformaciones tangenciales por flexión; se establecen las deformaciones para cada punto del laminado; se evalúan la matriz de rigidez y los esfuerzos en el laminado integrando las propiedades y tensiones en el espesor; y se incluyen algunos de los tipos de laminados más usados mostrando la influencia de la secuencia de apilado en la matriz de rigidez del laminado.

3.3-1 Campo de desplazamientos

Aplicando la teoría de laminados de primer orden - FSDT (*First shear deformation theory*, Reddy 2004) se define el campo de desplazamientos de un laminado compuesto suponiendo que el espesor de la sección transversal no presentará

deformaciones y que una línea recta y perpendicular a la superficie media del laminado (en dirección normal al laminado) permanecerá recta pero no necesariamente perpendicular a la superficie media después de la deformación.

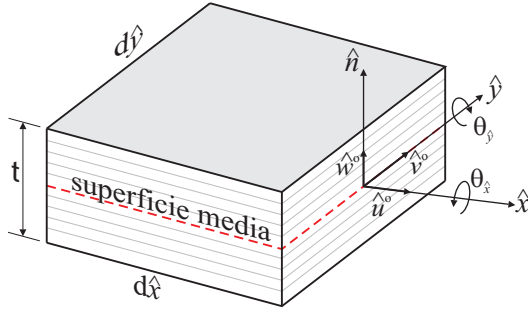


Figura 3.3-2: Sistema de ejes para un laminado.

Así, el campo de desplazamientos de la FSDT de acuerdo con Reddy (2004) es

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \hat{u}^o + \hat{n}\theta_{\hat{y}} \\ \hat{v} &= \hat{v}^o - \hat{n}\theta_{\hat{x}} \\ \hat{w} &= \hat{w}^o\end{aligned}\quad (3.3-1)$$

donde, \hat{u} , \hat{v} y \hat{w} son los desplazamientos en los ejes \hat{x} , \hat{y} y \hat{n} respectivamente, tal como se muestra en la Figura 3.3-2.

3.3-2 Deformaciones

Las deformaciones de cada punto dentro del laminado dependen del campo de desplazamientos y están dadas por las siguientes expresiones:

$$\varepsilon_{\hat{x}} = \partial_{\hat{x}} \hat{u} \quad (3.3-2a)$$

$$\varepsilon_{\hat{y}} = \partial_{\hat{y}} \hat{v} \quad (3.3-2b)$$

$$\gamma_{\hat{x}\hat{y}} = \partial_{\hat{x}} \hat{v} + \partial_{\hat{y}} \hat{u} \quad (3.3-2c)$$

$$\gamma_{\hat{y}\hat{n}} = \partial_{\hat{y}} \hat{w} + \partial_{\hat{n}} \hat{v} \quad (3.3-2d)$$

$$\gamma_{\hat{x}\hat{n}} = \partial_{\hat{x}} \hat{w} + \partial_{\hat{n}} \hat{u} \quad (3.3-2e)$$

o en forma matricial,

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\mathcal{D}} \hat{u} \quad (3.3-3)$$

con el vector de deformaciones en coordenadas del laminado ($\hat{\varepsilon}$) definido según la ecuación (3.2-8)

$$\hat{\mathbf{u}}^T = \{\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}\} \quad (3.3-4)$$

y

$$\hat{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \partial_{\hat{x}} & 0 & 0 \\ 0 & \partial_{\hat{y}} & 0 \\ \partial_{\hat{y}} & \partial_{\hat{x}} & 0 \\ 0 & \partial_{\hat{n}} & \partial_{\hat{y}} \\ \partial_{\hat{n}} & 0 & \partial_{\hat{x}} \end{bmatrix} \quad (3.3-5)$$

Usando el campo de desplazamientos (3.3-1) en las ecuaciones (3.3-2) se obtienen las deformaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\hat{x}} &= \partial_{\hat{x}} \hat{u}^o + \hat{n} \partial_{\hat{x}} \theta_{\hat{y}} \\ \varepsilon_{\hat{y}} &= \partial_{\hat{y}} \hat{v}^o - \hat{n} \partial_{\hat{y}} \theta_{\hat{x}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{y}} &= (\partial_{\hat{x}} \hat{v}^o + \partial_{\hat{y}} \hat{u}^o) + \hat{n} (\partial_{\hat{y}} \theta_{\hat{y}} - \partial_{\hat{x}} \theta_{\hat{x}}) \\ \gamma_{\hat{y}\hat{n}} &= \partial_{\hat{y}} \hat{w}^o - \theta_{\hat{x}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{n}} &= \partial_{\hat{x}} \hat{w}^o + \theta_{\hat{y}} \end{aligned} \quad (3.3-6)$$

Aplicando un cambio de variables en la ecuación (3.3-6) resulta

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\hat{x}} &= \varepsilon_{\hat{x}}^o + \hat{n} \kappa_{\hat{x}} \\ \varepsilon_{\hat{y}} &= \varepsilon_{\hat{y}}^o + \hat{n} \kappa_{\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{y}} &= \gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o + \hat{n} \kappa_{\hat{x}\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{y}\hat{n}} &= \gamma_{\hat{y}\hat{n}}^o \\ \gamma_{\hat{x}\hat{n}} &= \gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o \end{aligned} \quad (3.3-7)$$

donde, $\varepsilon_{\hat{x}}^o$ y $\varepsilon_{\hat{y}}^o$ son deformaciones membranales; $\gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o$, $\gamma_{\hat{y}\hat{n}}^o$ y $\gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o$ son deformaciones tangenciales; y $\kappa_{\hat{x}}$, $\kappa_{\hat{y}}$ y $\kappa_{\hat{x}\hat{y}}$ son curvaturas de flexión y torsión en el laminado; definidas como

$$\varepsilon_{\hat{x}}^o = \partial_{\hat{x}} \hat{u}^o \quad (3.3-8a)$$

$$\varepsilon_{\hat{y}}^o = \partial_{\hat{y}} \hat{v}^o \quad (3.3-8b)$$

$$\gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o = \partial_{\hat{x}} \hat{v}^o + \partial_{\hat{y}} \hat{u}^o \quad (3.3-8c)$$

$$\kappa_{\hat{x}} = \partial_{\hat{x}} \theta_{\hat{y}} \quad (3.3-8d)$$

$$\kappa_{\hat{y}} = -\partial_{\hat{y}} \theta_{\hat{x}} \quad (3.3-8e)$$

$$\kappa_{\hat{x}\hat{y}} = \partial_{\hat{y}} \theta_{\hat{y}} - \partial_{\hat{x}} \theta_{\hat{x}} \quad (3.3-8f)$$

3.3-3 Matriz de rigidez y esfuerzos en el laminado

Cuando se imponen desplazamientos en el laminado, este se comporta como una sola entidad que presenta esfuerzos por unidad de ancho en cada uno de sus lados (ver Figura 3.3-3).

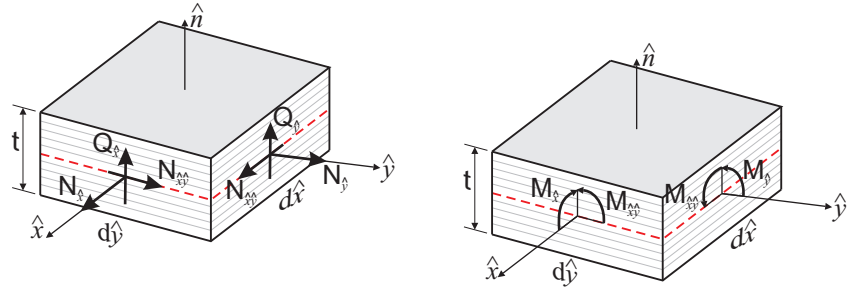


Figura 3.3-3: Esfuerzos en el laminado

Los esfuerzos en el laminado se evalúan integrando las tensiones generadas por el campo de deformaciones en la sección transversal:

$$\begin{Bmatrix} N_{\hat{x}} \\ N_{\hat{y}} \\ N_{\hat{x}\hat{y}} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{\hat{x}} \\ \sigma_{\hat{y}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{y}} \end{Bmatrix} d\hat{n} \quad (3.3-14a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{\hat{x}} \\ M_{\hat{y}} \\ M_{\hat{x}\hat{y}} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{\hat{x}} \\ \sigma_{\hat{y}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{y}} \end{Bmatrix} \hat{n} d\hat{n} \quad (3.3-14b)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{\hat{y}} \\ Q_{\hat{x}} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{\hat{y}\hat{n}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{n}} \end{Bmatrix} d\hat{n} \quad (3.3-14c)$$

Usando la definición del vector de tensiones de una capa (ver ecuación 3.2-18), puede expresarse (3.3-14) como

$$\hat{\sigma}^o = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \hat{\mathbf{S}}_{\sigma}(\hat{n}) \hat{\sigma}(\hat{n}) d\hat{n} \quad (3.3-15)$$

donde, $\hat{\sigma}(\hat{n})$ es el vector de tensiones de la capa localizada en la coordenada \hat{n} del laminado, $\hat{\sigma}^o$ es el vector de tensiones en el laminado

$$\hat{\sigma}^{oT} = \{N_{\hat{x}}, N_{\hat{y}}, N_{\hat{x}\hat{y}}, M_{\hat{x}}, M_{\hat{y}}, M_{\hat{x}\hat{y}}, Q_{\hat{y}}, Q_{\hat{x}}\} \quad (3.3-16)$$

y

$$\hat{\mathbf{S}}_{\sigma}(\hat{n}) = \hat{\mathbf{S}}_{\varepsilon}^{\text{T}}(\hat{n}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hat{n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3-17)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.2-27) y (3.2-28) para cada lámina en (3.3-15), se obtiene

$$\hat{\sigma}^o = \hat{\mathbf{E}}\hat{\varepsilon}^o \quad (3.3-18)$$

donde $\hat{\mathbf{E}}$ es la matriz de rigidez del laminado definida como

$$\hat{\mathbf{E}} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \hat{\mathbf{S}}_{\sigma}(\hat{n})\hat{\mathbf{Q}}(\hat{n})\hat{\mathbf{S}}_{\varepsilon}(\hat{n}) d\hat{n} \quad (3.3-19)$$

En la Figura 3.3-4 se muestra el esquema usado para el cálculo de las tensiones generalizadas en el laminado ($\hat{\sigma}^o$) conociendo las deformaciones generalizadas ($\hat{\varepsilon}^o$) y la matriz constitutiva de cada lámina que lo conforma (\mathbf{Q}).

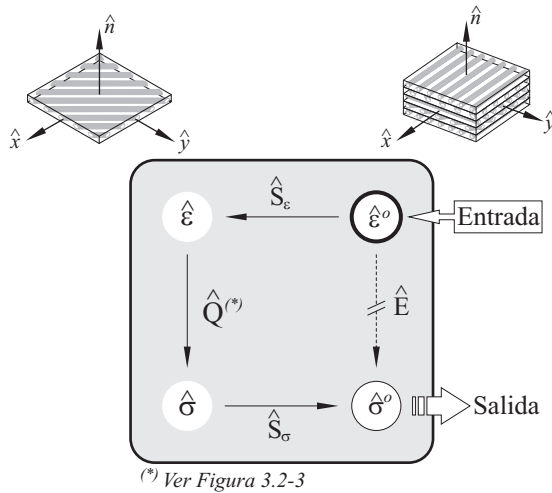


Figura 3.3-4: Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones generalizadas ($\hat{\sigma}^o$) de un laminado.

Escribiendo la expresión (3.3-18) en forma matricial (ver Figura 3.3-5) se divide la matriz de rigidez en zonas marcadas por los términos A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} y H_{ij} .

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\epsilon}_x \\ \hat{\epsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \\ \hat{\kappa}_x \\ \hat{\kappa}_y \\ \hat{\kappa}_{xy} \\ \hat{\gamma}_{y\theta} \\ \hat{\gamma}_{x\theta} \end{Bmatrix}$$

Axil - Corte Axil - Flexión Axil - Torsión
Corte - Torsión Flexión - Torsión Corte transversal

Figura 3.3-5: Relaciones tensión-deformación en un laminado y sus acoplamientos.

Los coeficientes A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} y H_{ij} de la matriz corresponden a las componentes de rigidez membranar, de acoplamiento, de flexión y de corte transversal respectivamente, evaluados como

$$\{A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \hat{Q}_{ij}(\hat{n}) \{1, \hat{n}, \hat{n}^2\} d\hat{n} \quad ; \quad i, j \in \{1, 2, 6\} \quad (3.3-20a)$$

$$H_{ij} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} f(\hat{n}) \hat{Q}_{ij}(\hat{n}) d\hat{n} \quad ; \quad i, j \in \{4, 5\} \quad (3.3-20b)$$

El cálculo de las componentes de la matriz de corte transversal (H_{ij}) se realiza usando una función de corrección que considera la distribución parabólica de las tensiones de corte en el espesor del laminado $f(\hat{n})$ (Vinson & Sierakowski, 2004)

$$f(\hat{n}) = \frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{\hat{n}}{t/2} \right)^2 \right] \quad (3.3-21)$$

donde t corresponde al espesor del laminado.

La función mostrada en la ecuación (3.3-21) asegura que el valor de $f(\hat{n}) = 0$ en los extremos del laminado ($\hat{n} = \pm t/2$) y su máximo se alcance en el centro ($\hat{n} = 0$).

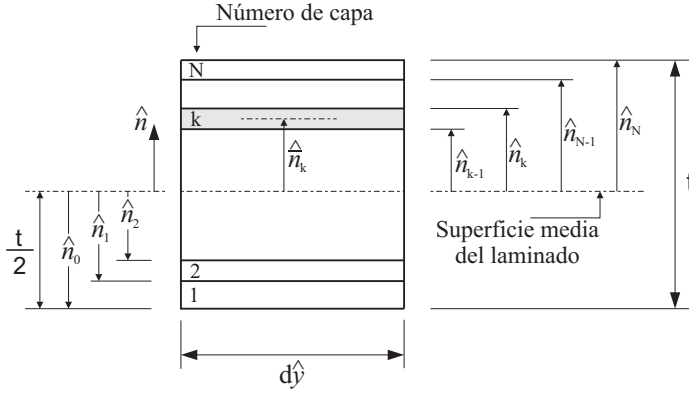


Figura 3.3-6: Disposición de las capas en el laminado

La integración de los coeficientes de la matriz de rigidez del laminado (ver ecuación 3.3-20) se realiza sumando el aporte de cada capa \$k\$ en el laminado (ver Figura 3.3-6)

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{ij} \right)_k t_k \right\} \quad ; \quad i, j \in \{1, 2, 6\} \quad (3.3-22a)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{ij} \right)_k t_k \hat{n}_k \right\} \quad ; \quad i, j \in \{1, 2, 6\} \quad (3.3-22b)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{ij} \right)_k \left(t_k \hat{n}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right\} \quad ; \quad i, j \in \{1, 2, 6\} \quad (3.3-22c)$$

$$H_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{ij} \right)_k \left[t_k - \frac{4}{t^2} \left(t_k \hat{n}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right) \right] \right\} \quad ; \quad i, j \in \{4, 5\} \quad (3.3-22d)$$

donde, \$t_k\$ es el espesor de la capa \$k\$ en el laminado y \$\hat{n}_k\$ la distancia al centro de la capa \$k\$ medida desde el centro del laminado.

Los acoplamientos entre diferentes tipos de acciones en el laminado se generan por la secuencia del apilado, las diferencias en el espesor de las capas y el material que define cada capa, pudiendo presentar:

1. Acoplamiento Axil-Corte (\$A_{16} \neq 0\$ y \$A_{26} \neq 0\$).
2. Acoplamiento Axil-Flexión (\$B_{11} \neq 0\$, \$B_{12} \neq 0\$ y \$B_{22} \neq 0\$).
3. Acoplamiento Axil-Torsión (\$B_{16} \neq 0\$ y \$B_{26} \neq 0\$).
4. Acoplamiento Corte-Torsión (\$B_{66} \neq 0\$).
5. Acoplamiento Flexión-Torsión (\$D_{16} \neq 0\$ y \$D_{26} \neq 0\$).

Cuando un laminado presenta alguno de estos acoplamientos se generan esfuerzos adicionales que deben ser contemplados en el análisis, por ejemplo, para un

laminado con acoplamiento *axil-flexión* (ver Figura 3.3-7), se generan esfuerzos de flexión al aplicar fuerzas axiales y viceversa.

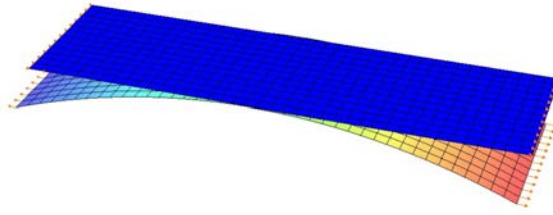


Figura 3.3-7: Deformada de un laminado $[0/90]_4$ sometido a fuerza axial

3.3-4 Tipos de Laminados

Con el objetivo de aclarar la influencia de la secuencia de apilado en los acoplamientos que puede presentar la matriz de rigidez de un laminado, a continuación se listan las secuencias de apilado más usadas (Barbero, 1999; Reddy, 2004; Kaw, 2006). En las descripciones que se darán, se supone que los laminados están conformados por varias capas del mismo material y que todas las capas tienen el mismo espesor.

- *Laminado simétrico* $[\alpha, \beta]_s$. Un laminado es simétrico cuando su secuencia de apilado es simétrica respecto a la superficie media. Un ejemplo es el laminado $[0, 30, 60, 90, 90, 60, 30, 0] = [0, 30, 60, 90]_s$

0
30
60
90
90
60
30
0

En este caso, los términos B_{ij} de la matriz de rigidez son nulos, por lo que no presenta acoplamientos de las componentes membranales (axil y corte) con las componentes de flexión y torsión.

- *Laminado equilibrado*. Es un tipo de laminado simétrico en el que por cada lámina en dirección $+\alpha$ existe otra en dirección $-\alpha$ y por cada lámina en dirección 0 hay otra en dirección 90, que pueden ser o no adyacentes.

$+\alpha$
$-\beta$
$-\alpha$
$+\beta$
$+\beta$
$-\alpha$
$-\beta$
$+\alpha$

Los laminados equilibrados no presentan acoplamiento corte-extensión ($A_{16} = A_{26} = 0$) y por ser simétricos $B_{ij} = 0$. Cuando el laminado equilibrado incluye solamente capas en direcciones 0-90 no presenta ningún tipo de acoplamiento.

- *Laminado unidireccional* $[\varphi]_N$. Es otro tipo de laminado simétrico en el que todas las fibras están dispuestas de forma paralela en la dirección φ .

φ
φ
φ
φ
φ

Al ser simétricos, los términos B_{ij} de la matriz de rigidez son nulos. En el caso especial de laminados $[0]_N$ o $[90]_N$, no se presenta ningún tipo de acoplamiento.

3.4 Ejemplo de aplicación

La formulación desarrollada para el análisis de laminados en materiales compuestos se ha implementado en *Fortran 90* y se ha incluido para su uso como una subrutina de tipo usuario (UGenS - User general section, ABAQUS 2006b) en el programa de análisis por el método de los elementos finitos Abaqus (ABAQUS, 2006c). La subrutina tipo usuario UGenS permite definir el comportamiento mecánico de placas en términos de deformaciones y esfuerzos generalizados en la sección.

Se destaca que aunque Abaqus posee herramientas para resolver este tipo de ejemplos, la implementación de la formulación se ha realizado con el ánimo de incluirla como parte del conjunto de subrutinas que analizan vigas de sección abierta en laminados compuestos.

A continuación se realiza un análisis de sensibilidad usando la formulación implementada donde se pretende determinar la influencia de la variación de las propiedades reportadas en la literatura para los materiales componentes del laminado sometido a flexión por Correia (2004).

En la primera parte se establecen las propiedades mecánicas que se usarán en el análisis y la secuencia de apilado del laminado; en la segunda parte se detallan las características del ensayo realizado por Correia (2004) y se muestra el modelo

que se usará en la simulación del ensayo; y en la tercera parte se incluyen los resultados del análisis efectuado.

3.4-1 Propiedades del laminado

Los laminados ensayados por Correia (2004) fueron extraídos de perfiles pultrusionados con sección I (200x100x10 mm) suministrados por la firma italiana Topglass (Topglass Composites Solutions S.p.A., 2010). Estos perfiles estaban constituidos por fibras de vidrio-E embebidas en una resina de poliéster.

En las Tablas 3.4-1 y 3.4-2 se incluyen las propiedades para fibras de vidrio tipo E y resinas de poliéster, según diferentes autores.

Tabla 3.4-1: Propiedades de fibras de vidrio-E

	Clarke (1996)	Barbero (1999)	Miravete (2000)
E_f [GPa]	72.0	72.3	72.5
ν_f	–	0.22	–
Densidad (ρ_f) [g/cm ³]	2.54–2.60	2.50–2.59	2.58

Tabla 3.4-2: Propiedades de resinas de poliéster

	Clarke (1996)	Barbero (1999)	Miravete (2000)
E_m [GPa]	3.3–4.1	3.4	3.2
ν_m	–	0.38	–

Suponiendo que el laminado está conformado por capas del mismo material es posible calcular el porcentaje en volumen de las fibras para una lámina usando una relación de densidades y el porcentaje en masa de la fibra

$$\%V_f = \left(\frac{\rho_T}{\rho_f} \right) \%m_f \quad (3.4-1)$$

donde $\%m_f$ corresponde al porcentaje en masa de las fibras en el laminado y ρ_T a la densidad promedio de las probetas ensayadas por Correia (2004) ($\rho_T = 1.86$ g/cm³).

El porcentaje en masa promedio de las fibras fue obtenido por Correia (2004) midiendo la masa de varios laminados antes y después de someterlos a altas temperaturas, en el cálculo supuso que la masa de las fibras de vidrio correspondía al contenido inorgánico de la probeta, por lo que evaluó el porcentaje de masa como

$$\%m_f = \frac{masa_{después\ de\ calentar}}{masa_{antes\ de\ calentar}} \quad (3.4-2)$$

Obteniendo un valor promedio de $\%m_f = 62.18\%$.

El cálculo del porcentaje en volumen de las fibras (3.4-1) se realiza considerando que la densidad de la fibra (ρ_f) obtenida en la literatura varía entre 2.50 g/cm³ y 2.60 g/cm³, por lo que en su evaluación resultan porcentajes de volumen de fibras que varían entre 44 % y 46 %, es decir, una variación en la densidad de la fibra del 3 % induce un cambio en el porcentaje de volumen de fibras del 2 %.

Según los manuales de Topglass Composites Solutions S.p.A. (2010) usualmente fabrican los perfiles con una composición “*mat-roving-mat*”. Por otra parte, Barbero (1999) indica que el espesor de los tejidos de poliéster con fibra de vidrio-E, en promedio varía entre 1.0 mm y 1.7 mm. Con esta información se supondrá la siguiente secuencia de apilado en los análisis

mat	90°	0.5 mm
	0°	0.5 mm
roving	0°	8.0 mm
mat	0°	0.5 mm
	90°	0.5 mm

3.4-2 Características del ensayo experimental

Las probetas de laminados compuestos fueron cargadas a flexión en tres puntos. Los apoyos del ensayo se elaboraron usando un trozo de perfil metálico en U con una distancia entre alas de 198 mm (ver Figura 3.4-1). La carga fue aplicada en el centro del vano a través de una prensa hidráulica y las deflexiones se capturaron usando un deflectómetro eléctrico conectado a una unidad de adquisición de datos. En total Correia (2004) ensayó 7 probetas extraídas de las alas y 7 del alma del perfil pultrusionado.



Figura 3.4-1: Montaje del ensayo a flexión de un laminado compuesto (Tomado de Correia 2004).

Entre otros resultados, Correia (2004) obtuvo un módulo a la flexión promedio para los laminados de 26.92 GPa.

En la Figura 3.4-2 se muestra la geometría del laminado ensayado, las condiciones de apoyo y de carga impuestas que permitirán establecer un modelo para reproducir el ensayo.

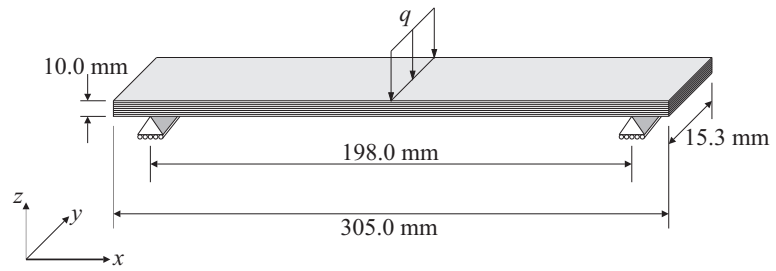


Figura 3.4-2: Geometría del laminado ensayado y condiciones de apoyo y carga.

Aprovechando la doble simetría que presenta el problema a simular se establece el modelo mostrado en la Figura 3.4-3, el cual se ha discretizado usando 1042 elementos cuadriláteros de 4 nodos y 4 puntos de integración cuyo comportamiento se ha definido a través de las herramientas implementadas en la subrutina tipo usuario UGenS (ABAQUS, 2006b).

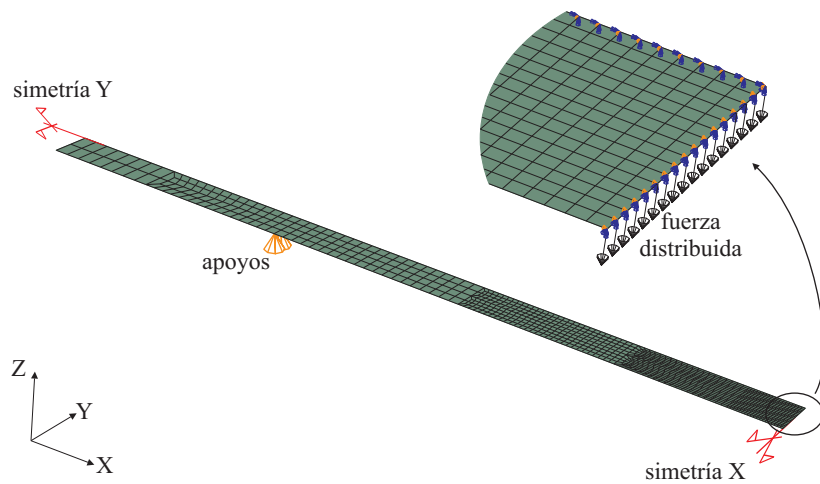


Figura 3.4-3: Modelo para la simulación del laminado a flexión.

Las simulaciones se realizaron variando el porcentajes en volumen de fibras (V_f) entre 44% y 46%, los módulos de rigidez de fibra (E_f) entre 72.0–72.5 GPa y de matriz (E_m) entre 3.2–4.2 GPa.

Resultados

En la Figura 3.4-4 se muestra la variación del módulo de rigidez a flexión del laminado, normalizado con respecto al módulo a flexión obtenido por Correia (2004) en sus ensayos experimentales. El módulo a flexión se ha evaluado para

diferentes porcentajes en volumen de fibras (V_f), módulos de rigidez de fibra (E_f) y de matriz (E_m).

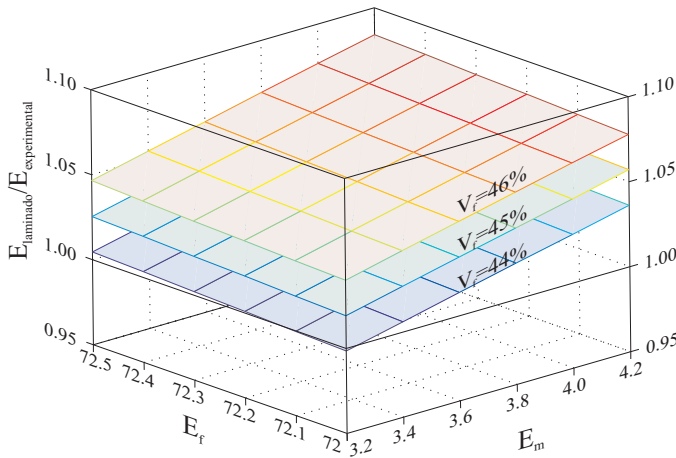


Figura 3.4-4: Variación del módulo de flexión en un laminado según el porcentaje en volumen de fibras (V_f) y los módulos de rigidez de fibra (E_f) y matriz (E_m).

Se observa en la Figura 3.4-4 que al considerar valores del módulo elástico de la resina (E_m) que varían alrededor del 30 % se induce una variación en el módulo a flexión del laminado (E_{lam}) de hasta un 3 %, esto debido a la diferencia tan marcada entre los módulos elásticos de fibra y matriz (relación aproximada de 20:1), así, una variación del 1 % en el módulo de la fibra (E_f) induce variaciones en el módulo a flexión del laminado de hasta un 3 %.

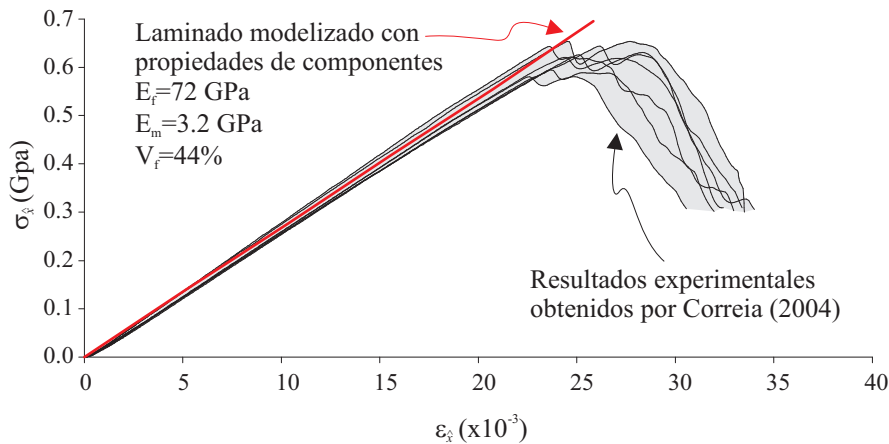


Figura 3.4-5: Comportamiento a flexión de un laminado cuyos materiales componentes tienen propiedades $E_f=72$ GPa, $E_m=3.2$ GPa y $V_f=44\%$.

En la Figura 3.4-5 se contrasta el comportamiento obtenido en la modelización del laminado a flexión usando como propiedades de los materiales componentes $E_f=72$

GPa, $E_m = 3.2$ GPa y $V_f = 44\%$ frente a los resultados experimentales obtenidos por Correia (2004). Se verifica que el módulo obtenido en la modelización se acerca al promedio de valores capturados por Correia (2004).

CAPÍTULO 4

Vigas de sección abierta en laminados compuestos

El comportamiento de las vigas en laminados compuestos se analiza a partir del estudio de sus relaciones fuerza-desplazamiento donde influye tanto la geometría como la distribución de las capas que las conforman, por este motivo es muy importante definir una matriz de rigidez representativa de la geometría de su sección transversal y de los materiales que la componen, que relacione los desplazamientos impuestos con unas fuerzas resultantes axiales, a flexión y a torsión, y se aproximen lo suficiente a datos de verificación obtenidos con ensayos de laboratorio o con modelos detallados creados especialmente para tal fin.

Por lo anterior en este capítulo se propone una metodología de cálculo para evaluar la matriz de rigidez en secciones transversales de vigas en laminados compuestos usando la cinemática explicada en profundidad en el Capítulo 2 (incluye las deformaciones de corte por flexión y por torsión), y los campos de deformaciones definidos en el Capítulo 3. La matriz de rigidez definida en este Capítulo será utilizada en el análisis y solución de los elementos finitos tipo viga propuestos en el Capítulo 5.

Los laminados que conforman la viga (ver Capítulo 3) presentan un vector de deformaciones cuyos coeficientes no pueden obtenerse en su totalidad de los coeficientes del vector de deformaciones de la sección transversal (ver Capítulo 2), esto que obliga a incluir hipótesis que permitan compatibilizar las deformaciones entre los niveles de sección transversal, de laminado y de capa, por esta razón se estudian las implicaciones de introducir dos tipos de suposiciones, la primera considera como unidad básica las láminas que conforman su pared delgada (*condición de tensiones nulas en el contorno*) y la segunda usa el laminado compuesto que a su vez corresponde a la pared delgada de la viga (*condición de esfuerzos nulos en el contorno*).

A continuación se definen los sistemas de coordenadas requeridos para establecer la metodología de cálculo de los coeficientes de rigidez, los campos de desplazamientos y deformaciones según los Capítulos 2 y 3 respectivamente y se establece la ecuación de equilibrio usando el principio de la mínima variación de la energía potencial del sistema.

También se determinan las componentes de la matriz de rigidez de la sección para la condición de esfuerzos nulos en el contorno, se presenta una metodología de cálculo para el eje neutro y el centro de esfuerzos cortantes para vigas de pared delgada en laminados compuestos y se definen las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de las vigas de laminados compuestos en su forma más general, mostrando que todas las componentes de desplazamiento están acopladas entre sí, de igual forma se incluye una simplificación donde se desprecian los acoplamientos.

En la parte final se analizan dos casos de vigas en laminados compuestos, una sometida a torsión y otra a flexión. Los resultados se comparan con modelos de verificación y ensayos experimentales respectivamente, y se determina la validez de la metodología incluida para el cálculo de los coeficientes de rigidez y las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) definidas en las ecuaciones de gobierno.

4.1 Sistemas de coordenadas

En el estudio de vigas de sección abierta y materiales compuestos se usará el sistema de coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ para un laminado localizado en el punto P de la sección transversal, el eje curvilíneo s y los sistemas de coordenadas global $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ y local (\bar{x}, n, s) , usados en el análisis de vigas de sección abierta y pared delgada en materiales homogéneos (Capítulo 2), tal como se muestra en la Figura 4.1-1.

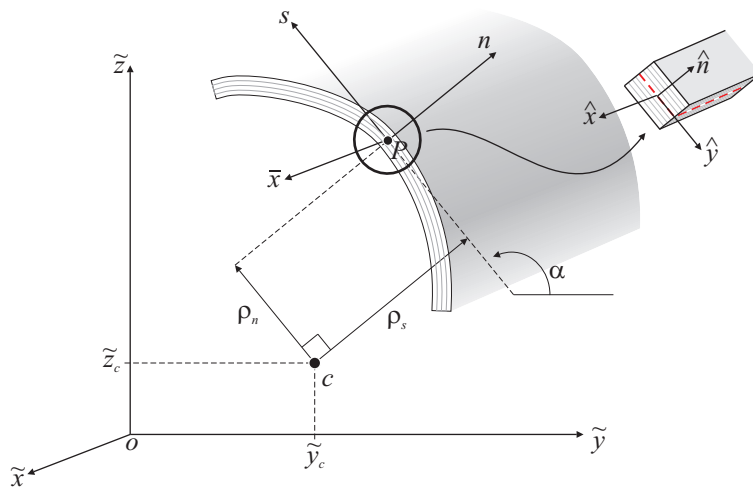


Figura 4.1-1: Sistemas de coordenadas en una viga de sección abierta en laminados compuestos

Al comparar los sistemas de coordenadas local (\bar{x}, n, s) y del laminado $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ se

observa que sus ejes son paralelos entre sí, con la diferencia de que el eje s tiene sentido opuesto al eje \hat{y} .

4.2 Campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos se obtiene aplicando el método de superposición de las componentes de desplazamientos a flexión y torsión según los Apartados 2.2-1, 2.2-2 y 2.2-4. De acuerdo con la ecuación (2.2-66) los desplazamientos son

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \tilde{u}_o - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \theta_{\tilde{z}} + (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) \theta_{\tilde{y}} - (\omega_s - \omega_n) \phi_\omega \\ \bar{v} &= (\tilde{v}_c \operatorname{sen} \alpha - \tilde{w}_c \operatorname{cos} \alpha) - \rho_n \theta_{\tilde{x}} \\ \bar{w} &= (\tilde{v}_c \operatorname{cos} \alpha + \tilde{w}_c \operatorname{sen} \alpha) + (\rho_s + n) \theta_{\tilde{x}}\end{aligned}\quad (4.2-1)$$

donde, \tilde{y} y \tilde{z} son coordenadas sobre la línea media de la sección, n es la coordenada en el espesor de la pared, \tilde{u}_o , \tilde{v}_c y \tilde{w}_c son los desplazamientos en los ejes \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} respectivamente, aplicados en la sección transversal de la viga tal como se muestra en la Figura 4.2-1.

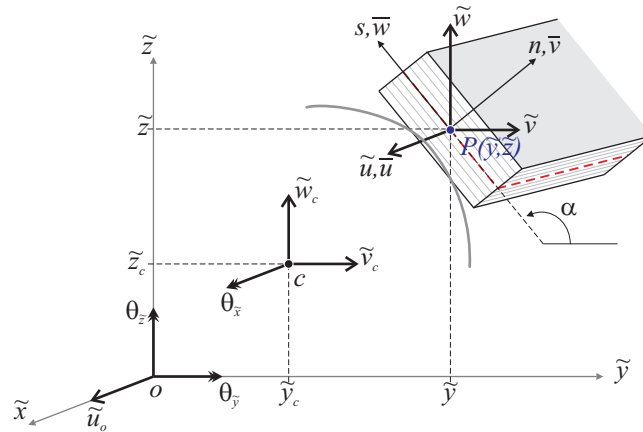


Figura 4.2-1: Desplazamientos en la sección transversal de una viga de laminados compuestos

El campo de desplazamientos en el sistema de coordenadas global según la ecuación 2.2-67 es

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{u}_o - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \theta_{\tilde{z}} + (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) \theta_{\tilde{y}} - (\omega_s - \omega_n) \phi_\omega \\ \tilde{v} &= \tilde{v}_c - [(\tilde{z} - \tilde{z}_c) - n \operatorname{cos} \alpha] \theta_{\tilde{x}} \\ \tilde{w} &= \tilde{w}_c + [(\tilde{y} - \tilde{y}_c) + n \operatorname{sen} \alpha] \theta_{\tilde{x}}\end{aligned}\quad (4.2-2)$$

Se indica que al evaluar estas expresiones en la línea media de la sección transversal ($n = 0$) se recuperan los campos de desplazamientos incluidos en los análisis de Lee (2005); Back & Will (2008).

4.3 Campo de deformaciones

Aplicando la teoría de pequeños desplazamientos a la ecuación (4.2-1) se define el campo de deformaciones en la sección transversal de la viga para un punto de coordenadas \tilde{y}, \tilde{z}, n (ver ecuación 2.3-7) como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\tilde{x}} &= \varepsilon_{\tilde{x}}^o - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) \kappa_{\tilde{z}} + (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha) \kappa_{\tilde{y}} - (\omega_s - \rho_n n) \kappa_{\omega} \\ \gamma_{\tilde{x}s} &= \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o \operatorname{cos} \alpha + \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o \operatorname{sen} \alpha + \rho_s \gamma_t + n \kappa_{\tilde{x}s} \\ \gamma_{\tilde{x}n} &= \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o \operatorname{sen} \alpha - \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o \operatorname{cos} \alpha - \rho_n \gamma_t\end{aligned}\quad (4.3-1)$$

donde, $\varepsilon_{\tilde{x}}^o$ es la deformación axial; $\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o$ y $\gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o$ son las deformaciones tangenciales por flexión; γ_t es la deformación angular por torsión; κ son las curvaturas debido a: flexión ($\kappa_{\tilde{y}}, \kappa_{\tilde{z}}$), torsión ($\kappa_{\tilde{x}s}$) y alabeo (κ_{ω}); definidas como

$$\varepsilon_{\tilde{x}}^o = \partial_{\tilde{x}} \tilde{u}_o \quad (4.3-2a)$$

$$\gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o = \partial_{\tilde{x}} \tilde{v}_c - \theta_{\tilde{z}} \quad \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o = \partial_{\tilde{x}} \tilde{w}_c + \theta_{\tilde{y}} \quad (4.3-2b)$$

$$\gamma_t = \partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{x}} - \phi_{\omega} \quad (4.3-2c)$$

$$\kappa_{\tilde{y}} = \partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{y}} \quad \kappa_{\tilde{z}} = \partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{z}} \quad (4.3-2d)$$

$$\kappa_{\tilde{x}s} = \partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{x}} + \phi_{\omega} \quad \kappa_{\omega} = \partial_{\tilde{x}} \phi_{\omega} \quad (4.3-2e)$$

Para el caso en que se supone despreciable la contribución de las deformaciones angulares por torsión ($\gamma_t \approx 0$ y $\phi_{\omega} = \partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{x}}$), el valor de la curvatura por torsión será $\kappa_{\tilde{x}s} = 2\partial_{\tilde{x}} \theta_{\tilde{x}}$, recuperándose las expresiones empleadas por Lee & Lee (2004); Back & Will (2008); Sheikh & Thomsen (2008) en sus análisis.

A continuación se definen dos campos de deformaciones en la viga, el primero considera como unidad básica las láminas que conforman su pared delgada, el segundo, usa el laminado compuesto correspondiente. Estos campos de deformación se usarán en la definición de las relaciones tensión-deformación.

4.3-1 Deformaciones en las láminas

Al igual que en el Capítulo 2 (ver ecuaciones 2.3-9 y 2.3-10), el campo de deformaciones (4.3-1) para una capa en la sección transversal de la viga puede expresarse en forma vectorial usando las deformaciones generalizadas ($\tilde{\varepsilon}$) como

$$\tilde{\varepsilon} = \tilde{\mathbf{S}}_{\varepsilon} \tilde{\varepsilon} \quad (4.3-3)$$

con

$$\tilde{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{\tilde{x}}, \gamma_{\tilde{x}s}, \gamma_{\tilde{x}n}\} \quad (4.3-4)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \{\varepsilon_{\tilde{x}}^o, \kappa_{\tilde{z}}, \kappa_{\tilde{y}}, \kappa_{\tilde{\omega}}, \kappa_{\tilde{x}s}, \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o, \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o, \gamma_t\} \quad (4.3-5)$$

y

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} 1 - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) & (\tilde{z} - n \cos \alpha) & -(\omega_s - \rho_n n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & \rho_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha - \rho_n \end{bmatrix} \quad (4.3-6)$$

Debe notarse que el vector de deformaciones $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ definido en el sistema local (\tilde{x}, n, s) corresponde a un vector simplificado por tener solamente tres componentes de deformación.

El vector simplificado de deformaciones en el sistema de coordenadas de laminado ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$) se obtiene transformando el vector $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ al sistema $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ mediante la matriz $\bar{\mathbb{T}}$, tal que

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \bar{\mathbb{T}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.3-7)$$

donde,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T = \{\varepsilon_{\hat{x}}, \gamma_{\hat{x}\hat{y}}, \gamma_{\hat{x}\hat{n}}\} \quad (4.3-8)$$

y

$$\bar{\mathbb{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3-9)$$

La matriz de transformación $\bar{\mathbb{T}}$ se obtiene aplicando un procedimiento análogo al usado en la Sección 3.2.

Usando las ecuaciones (4.3-3) y (4.3-7), se define el vector simplificado de deformaciones en el sistema de coordenadas de laminado ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$) en función de las deformaciones generalizadas de la viga ($\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$)

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.3-10)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \bar{\mathbb{T}} \tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} 1 - (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha) & (\tilde{z} - n \cos \alpha) & -(\omega_s - \rho_n n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -n - \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & -\rho_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha - \rho_n \end{bmatrix} \quad (4.3-11)$$

4.3-2 Deformaciones en el laminado

Agrupando los términos del campo de deformaciones (4.3-1) se establece que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\bar{x}} &= (\varepsilon_{\bar{x}}^o - \tilde{y}\kappa_{\bar{z}} + \tilde{z}\kappa_{\bar{y}} - \omega_s\kappa_\omega) + n(-\kappa_{\bar{z}}\text{sen } \alpha - \kappa_{\bar{y}}\text{cos } \alpha + \rho_n\kappa_\omega) \\ \gamma_{\bar{x}s} &= (\gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \text{cos } \alpha + \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \text{sen } \alpha + \rho_s\gamma_t) + n\kappa_{\bar{x}s} \\ \gamma_{\bar{x}n} &= \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \text{sen } \alpha - \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \text{cos } \alpha - \rho_n\gamma_t\end{aligned}\quad (4.3-12)$$

Aplicando un cambio de variables en la ecuación (4.3-12) resulta

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\bar{x}} &= \varepsilon_{\bar{x}}^o + n\kappa_{\bar{x}} \\ \gamma_{\bar{x}s} &= \gamma_{\bar{x}s}^o + n\kappa_{\bar{x}s} \\ \gamma_{\bar{x}n} &= \gamma_{\bar{x}n}^o\end{aligned}\quad (4.3-13)$$

donde, $\varepsilon_{\bar{x}}^o$ es una deformación membranar; $\gamma_{\bar{x}s}^o$ y $\gamma_{\bar{x}n}^o$ son deformaciones tangenciales; y $\kappa_{\bar{x}}$ y $\kappa_{\bar{x}s}$ son curvaturas de flexión y torsión en la línea media de la sección; definidas como

$$\varepsilon_{\bar{x}}^o = \varepsilon_{\bar{x}}^o - \tilde{y}\kappa_{\bar{z}} + \tilde{z}\kappa_{\bar{y}} - \omega_s\kappa_\omega \quad (4.3-14a)$$

$$\gamma_{\bar{x}s}^o = \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \text{cos } \alpha + \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \text{sen } \alpha + \rho_s\gamma_t \quad (4.3-14b)$$

$$\kappa_{\bar{x}} = -\kappa_{\bar{z}}\text{sen } \alpha - \kappa_{\bar{y}}\text{cos } \alpha + \rho_n\kappa_\omega \quad (4.3-14c)$$

$$\kappa_{\bar{x}s} = \kappa_{\bar{x}s} \quad (4.3-14d)$$

$$\gamma_{\bar{x}n}^o = \gamma_{\bar{x}\bar{y}}^o \text{sen } \alpha - \gamma_{\bar{x}\bar{z}}^o \text{cos } \alpha - \rho_n\gamma_t \quad (4.3-14e)$$

Las ecuaciones (4.3-14) definen el vector reducido de deformaciones generalizadas para un punto en la línea media de la sección, en función de las deformaciones generalizadas de la viga.

$$\bar{\mathfrak{E}}^o = \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\mathfrak{E}}^o} \tilde{\mathfrak{E}} \quad (4.3-15)$$

con

$$\bar{\mathfrak{E}}^{o\Gamma} = \{\varepsilon_{\bar{x}}^o, \gamma_{\bar{x}s}^o, \kappa_{\bar{x}}, \kappa_{\bar{x}s}, \gamma_{\bar{x}n}^o\} \quad (4.3-16)$$

y

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\mathfrak{E}}^o} = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{y} & \tilde{z} & -\omega_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha & \rho_s & \\ 0 & -\text{sen } \alpha & -\text{cos } \alpha & \rho_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{sen } \alpha & -\text{cos } \alpha & -\rho_n \end{bmatrix} \quad (4.3-17)$$

siendo $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$ el vector de deformaciones generalizadas en la sección transversal de la viga (ver ecuación (4.3-5)).

El vector simplificado de deformaciones generalizadas en la coordenada curvilínea ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$) se transforma al sistema de coordenadas $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{n})$ usando la matriz $\bar{\mathbb{T}}^o$, tal que

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \bar{\mathbb{T}}^o \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^o \quad (4.3-18)$$

donde,

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{oT} = \{\varepsilon_{\hat{x}}^o, \gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o, \kappa_{\hat{x}}, \kappa_{\hat{x}\hat{y}}, \gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o\} \quad (4.3-19)$$

y

$$\bar{\mathbb{T}}^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.3-20)$$

Usando las ecuaciones (4.3-15) y (4.3-18), se define el vector simplificado de deformaciones generalizadas en el sistema de coordenadas de laminado ($\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o$) en función de las deformaciones generalizadas de la viga ($\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}$)

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o = \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.3-21)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^o} = \bar{\mathbb{T}}^o \tilde{\mathbf{S}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^o} = \begin{bmatrix} 1 & -\tilde{y} & \tilde{z} & -\omega_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos \alpha & -\sin \alpha & -\rho_s \\ 0 & -\sin \alpha & -\cos \alpha & \rho_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & -\cos \alpha & -\rho_n \end{bmatrix} \quad (4.3-22)$$

4.4 Formulación variacional

En las ecuaciones (2.4-1) y (2.4-3) se definió la energía potencial del sistema, la variación de la energía de deformación $\delta\mathcal{U}$ y la variación de la energía potencial de las cargas aplicadas $\delta\mathcal{V}$ como

$$\Pi = \mathcal{U} + \mathcal{V} \quad (4.4-1a)$$

$$\delta\mathcal{U} = \int_{\ell} \delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \, d\tilde{x} \quad (4.4-1b)$$

$$\delta\mathcal{V} = \int_{\ell} \delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} \, d\tilde{x} + [\delta\tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^{\ell} \quad (4.4-1c)$$

con

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^T = \{N_{\tilde{x}}, M_{\tilde{z}}, M_{\tilde{y}}, B_{\omega}, M_t, Q_{\tilde{y}}, Q_{\tilde{z}}, T\} \quad (4.4-2)$$

donde, $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ es el vector de fuerzas internas en la viga, $N_{\tilde{x}}$ es la fuerza axial, $M_{\tilde{z}}$ y $M_{\tilde{y}}$ son los momentos flectores en los ejes \tilde{z} y \tilde{y} , M_t es la torsión en el espesor de la pared de la sección, B_{ω} es el momento de alabeo (bimomento), $Q_{\tilde{y}}$ y $Q_{\tilde{z}}$ son las fuerzas de corte en las direcciones \tilde{y} y \tilde{z} , y T es la torsión generada por las deformaciones de corte (torsión de Coulomb), definidas en el área de la sección transversal (ver ecuaciones 2.4-7):

$$N_{\tilde{x}} = \iint_A \sigma_{\tilde{x}} dA \quad (4.4-3a)$$

$$M_{\tilde{z}} = - \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\tilde{y} + n \operatorname{sen} \alpha)] dA \quad (4.4-3b)$$

$$M_{\tilde{y}} = \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\tilde{z} - n \operatorname{cos} \alpha)] dA \quad (4.4-3c)$$

$$B_{\omega} = - \iint_A [\sigma_{\tilde{x}} (\omega_s - \rho_n n)] dA \quad (4.4-3d)$$

$$M_t = \iint_A \tau_{\tilde{x}s} n dA \quad (4.4-3e)$$

$$Q_{\tilde{y}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \operatorname{cos} \alpha + \tau_{\tilde{x}n} \operatorname{sen} \alpha) dA \quad (4.4-3f)$$

$$Q_{\tilde{z}} = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \operatorname{sen} \alpha - \tau_{\tilde{x}n} \operatorname{cos} \alpha) dA \quad (4.4-3g)$$

$$T = \iint_A (\tau_{\tilde{x}s} \rho_s - \tau_{\tilde{x}n} \rho_n) dA \quad (4.4-3h)$$

y $\tilde{\mathbf{u}}$ es el vector de desplazamientos, y $\tilde{\mathbf{b}}$ y $\tilde{\mathbf{q}}$ son los vectores de fuerzas externas impuestas en la viga, distribuidas y puntuales respectivamente, definidos según las ecuaciones (2.4-9).

La ecuación de equilibrio se establece usando el principio de la mínima variación de la energía potencial del sistema (ver ecuación 2.4-11)

$$\int_{\ell} \delta \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} d\tilde{x} = \int_{\ell} \delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{b}} d\tilde{x} + [\delta \tilde{\mathbf{u}}^T \tilde{\mathbf{q}}]_0^{\ell} \quad (4.4-4)$$

4.5 Simplificación de las relaciones tensión-deformación

Las relaciones tensión-deformación para los laminados (3.2-28) y las capas que pertenecen a laminados (3.3-16) deben simplificarse con el fin de hacerlas compatibles con los campos de deformaciones definidos a nivel de la sección transversal

de las vigas de pared delgada en laminados compuestos (ver ecuaciones 4.3-8 y 4.3-19).

Lee & Lee (2004); Sheikh & Thomsen (2008); Back & Will (2008) sugieren que la relación tensión-deformación de una capa en un laminado puede simplificarse usando una “condición de tensiones nulas en el contorno” ($\sigma_{\hat{y}} = \tau_{\hat{y}\hat{n}} = 0$), también sugieren el uso de una “condición de deformaciones nulas en el contorno”, sin embargo, después de evaluar sus resultados concluyen que la condición de tensiones nulas presenta mejor aproximación a los resultados obtenidos con modelos de verificación (modelización con elementos cuadriláteros).

Otro tipo de simplificación a las relaciones tensión-deformación fue estudiada por Kollar & Pluzsik (2002) quienes aplican una “condición de esfuerzos nulos en el contorno” a un laminado que sigue la teoría clásica de laminados (CLT - *Classical laminate theory*), sin contemplar las deformaciones de corte en la superficie media del laminado y estableciendo que $N_{\hat{y}} = N_{\hat{x}\hat{y}} = M_{\hat{y}} = 0$.

Por lo anterior, se estudia la simplificación sugerida por Lee & Lee (2004); Sheikh & Thomsen (2008); Back & Will (2008) y sus limitaciones, y se propone una adaptación de la teoría de Kollar & Pluzsik (2002) para usarla en laminados que siguen la teoría FSDT, incluyendo las deformaciones tangenciales en la superficie media del laminado y despreciando las tensiones tangenciales en las caras libres del laminado tal como se muestra en la Figura 4.5-1.

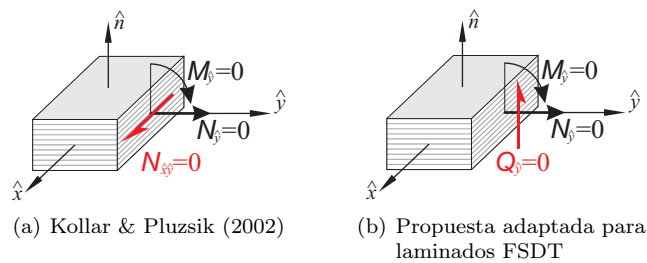


Figura 4.5-1: “Condición de esfuerzos nulos en el contorno”.

También se evalúan las diferencias entre imponer una u otra condición (tensiones vs esfuerzos) mostrando su aplicabilidad a través de casos particulares que permiten ver claramente los términos que intervienen en el cálculo y las consecuencias de considerarlos o no en el análisis del comportamiento de vigas de laminados compuestos.

4.5-1 Condición de tensiones nulas en el contorno

Recordando las expresiones que definen las relaciones tensión-deformación en una capa del laminado (ecuaciones 3.2-8, 3.2-18 y 3.2-28) se tiene

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\hat{x}} \\ \sigma_{\hat{y}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{y}} \\ \tau_{\hat{y}\hat{n}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{n}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{12} & \hat{Q}_{22} & \hat{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{26} & \hat{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{44} & \hat{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{Q}_{45} & \hat{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\hat{x}} \\ \varepsilon_{\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{y}\hat{n}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{n}} \end{Bmatrix} \quad (4.5-1)$$

$$\hat{\sigma} = \hat{Q} \hat{\varepsilon}$$

Sin embargo, las componentes de deformación de la sección transversal de la viga (ver ecuaciones 4.3-1 y 4.3-8) no definen completamente el vector $\hat{\varepsilon}$. Por este motivo se impone la “condición de tensiones nulas en el contorno”, donde se supone que $\sigma_{\hat{y}} = \tau_{\hat{y}\hat{n}} = 0$, permitiendo expresar las componentes de deformación desconocidas ($\varepsilon_{\hat{y}}$ y $\gamma_{\hat{y}\hat{n}}$) como una combinación lineal de las conocidas ($\varepsilon_{\hat{x}}$, $\gamma_{\hat{x}\hat{y}}$ y $\gamma_{\hat{x}\hat{n}}$):

$$\varepsilon_{\hat{y}} = \lambda_1 \varepsilon_{\hat{x}} + \lambda_2 \gamma_{\hat{x}\hat{y}} \quad (4.5-2a)$$

$$\gamma_{\hat{y}\hat{n}} = \mu \gamma_{\hat{x}\hat{n}} \quad (4.5-2b)$$

con

$$\lambda_1 = -\frac{\hat{Q}_{12}}{\hat{Q}_{22}} \quad \lambda_2 = -\frac{\hat{Q}_{26}}{\hat{Q}_{22}} \quad (4.5-3a)$$

$$\mu = -\frac{\hat{Q}_{45}}{\hat{Q}_{44}} \quad (4.5-3b)$$

Así, el vector de deformaciones de una capa ($\hat{\varepsilon}$) se expresa en términos del vector simplificado de deformaciones ($\hat{\varepsilon}$) como

$$\hat{\varepsilon} = \hat{S}_{\varepsilon} \hat{\varepsilon} \quad (4.5-4)$$

con

$$\hat{S}_{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5-5)$$

y el vector simplificado de tensiones se expresa en términos del vector de tensiones de una capa como

$$\hat{\sigma} = \hat{S}_{\hat{\sigma}} \hat{\sigma} \quad (4.5-6)$$

con

$$\hat{\sigma}^T = \{\sigma_{\hat{x}}, \tau_{\hat{x}y}, \tau_{\hat{x}n}\} \quad (4.5-7)$$

y

$$\hat{S}_{\hat{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5-8)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.5-1) y (4.5-4) en la ecuación (4.5-6) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \hat{S}_{\hat{\sigma}} \hat{Q} \hat{\varepsilon} \\ &= \hat{S}_{\hat{\sigma}} \hat{Q} \hat{S}_{\hat{\varepsilon}} \hat{c} \end{aligned} \quad (4.5-9)$$

Definiendo la relación simplificada tensión-deformación para una capa como

$$\hat{\sigma} = \hat{Q} \hat{c} \quad (4.5-10)$$

Al comparar las ecuaciones (4.5-9) y (4.5-10) se deduce que la matriz de rigidez simplificada es

$$\hat{Q} = \hat{S}_{\hat{\sigma}} \hat{Q} \hat{S}_{\hat{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_{11} & \hat{Q}_{16} & 0 \\ \hat{Q}_{16} & \hat{Q}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (4.5-11)$$

con

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{11} &= \hat{Q}_{11} - \frac{\hat{Q}_{12}^2}{\hat{Q}_{22}} \\ \hat{Q}_{16} &= \hat{Q}_{16} - \frac{\hat{Q}_{12} \hat{Q}_{26}}{\hat{Q}_{22}} \\ \hat{Q}_{66} &= \hat{Q}_{66} - \frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \\ \hat{Q}_{55} &= \hat{Q}_{55} - \frac{\hat{Q}_{45}^2}{\hat{Q}_{44}} \end{aligned} \quad (4.5-12)$$

Escribiendo en forma compacta el vector de esfuerzos en la sección transversal de la viga ($\tilde{\sigma}$) a partir de las ecuaciones (4.4-2) y (4.4-3) se tiene

$$\tilde{\sigma} = \iint_A \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\sigma}} \bar{\sigma} dA \quad (4.5-13)$$

donde $\bar{\sigma}$ es el vector simplificado de tensiones para una capa en el sistema de coordenadas (\bar{x}, n, s) , definido como

$$\bar{\sigma}^T = \{\sigma_{\bar{x}}, \tau_{\bar{x}s}, \tau_{\bar{x}n}\} \quad (4.5-14)$$

y

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(\bar{y}+n \operatorname{sen} \alpha) & 0 & 0 \\ (\bar{z}-n \operatorname{cos} \alpha) & 0 & 0 \\ -(\omega_s - \rho_n n) & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & \operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{cos} \alpha \\ 0 & \rho_s & -\rho_n \end{bmatrix} \quad (4.5-15)$$

El vector simplificado de tensiones $\bar{\sigma}$ se obtiene transformando el vector $\hat{\sigma}$ del sistema de coordenadas del laminado al sistema (\bar{x}, n, s) mediante la matriz $\bar{\mathbb{T}}$ (ver ecuación 4.3-9), tal que

$$\bar{\sigma} = \bar{\mathbb{T}} \hat{\sigma} \quad (4.5-16)$$

Reemplazando la ecuación (4.5-16) en (4.5-13) se obtiene el vector de esfuerzos en la sección transversal de la viga ($\tilde{\sigma}$) en términos del vector simplificado de tensiones en cada capa del laminado $\hat{\sigma}$

$$\tilde{\sigma} = \iint_A \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}} \hat{\sigma} dA \quad (4.5-17)$$

con

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}} = \tilde{\mathbf{S}}_{\bar{\sigma}} \bar{\mathbb{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -(\bar{y}+n \operatorname{sen} \alpha) & 0 & 0 \\ (\bar{z}-n \operatorname{cos} \alpha) & 0 & 0 \\ -(\omega_s - \rho_n n) & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 \\ 0 & -\operatorname{cos} \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ 0 & -\operatorname{sen} \alpha & -\operatorname{cos} \alpha \\ 0 & -\rho_s & -\rho_n \end{bmatrix} \quad (4.5-18)$$

Debe notarse que

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}} = \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^T \quad (4.5-19)$$

La Figura 4.5-2 muestra el esquema de cálculo de las tensiones de una capa suponiendo la “condición de tensiones nulas en el contorno”.

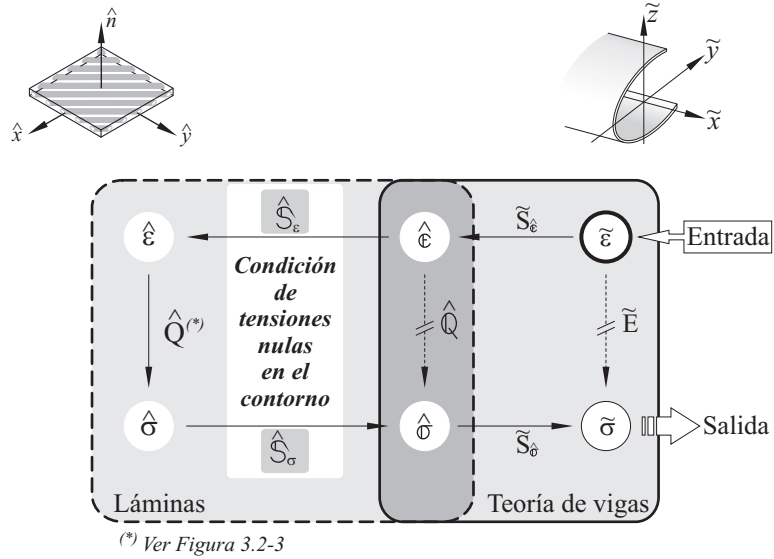


Figura 4.5-2: Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones en la sección transversal de una viga suponiendo una “condición de tensiones nulas en el contorno”

4.5-2 Condición de esfuerzos nulos en el contorno

De acuerdo con las expresiones (3.3-9) y (3.3-16), y la Figura 3.3-5, la relación tensión-deformación para un laminado de material compuesto corresponde a

$$\begin{Bmatrix} N_{\hat{x}} \\ N_{\hat{y}} \\ N_{\hat{x}\hat{y}} \\ M_{\hat{x}} \\ M_{\hat{y}} \\ M_{\hat{x}\hat{y}} \\ Q_{\hat{y}} \\ Q_{\hat{x}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{44} & H_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{\hat{x}}^o \\ \epsilon_{\hat{y}}^o \\ \gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o \\ \kappa_{\hat{x}} \\ \kappa_{\hat{y}} \\ \kappa_{\hat{x}\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{y}\hat{n}}^o \\ \gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o \end{Bmatrix} \quad (4.5-20)$$

$$\hat{\sigma}^o = \hat{\mathbf{E}}\hat{\epsilon}^o$$

donde, A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} y H_{ij} corresponden a los coeficientes de las matrices de rigidez membranal, de acoplamiento, de flexión y de tensiones tangenciales respectivamente, definidas de acuerdo con las ecuaciones (3.3-20).

La ecuación 4.3-19 muestra que las componentes del vector de deformaciones generalizadas definido a partir de la cinemática de la sección transversal ($\hat{\epsilon}^o$) es un vector simplificado frente al vector $\hat{\epsilon}^o$ definido para el análisis de laminados (ver ecuaciones 3.3-9 y 4.5-20).

Con el fin de evaluar las componentes desconocidas del vector de deformaciones generalizadas se impone la “condición de esfuerzos nulos en el contorno”

suponiendo que a lo largo del borde longitudinal del laminado no se presentarán esfuerzos ($N_{\hat{y}} = M_{\hat{y}} = Q_{\hat{y}} = 0$, ver Figura 4.5-3), compatibilizando de esta forma la cinemática de viga y de los laminados compuestos que la conforman.

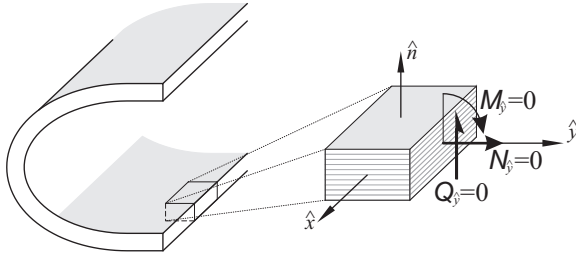


Figura 4.5-3: Fuerzas y momentos en el borde longitudinal de una viga de sección abierta y pared delgada en laminados compuestos.

Así, las deformaciones desconocidas ($\varepsilon_{\hat{y}}^o$, $\kappa_{\hat{y}}$ y $\gamma_{\hat{y}\hat{n}}^o$) se obtienen como una combinación lineal de las deformaciones generalizadas conocidas ($\varepsilon_{\hat{x}}^o$, $\gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o$, $\kappa_{\hat{x}}$, $\kappa_{\hat{x}\hat{y}}$ y $\gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o$).

$$\varepsilon_{\hat{y}}^o = \chi_1 \varepsilon_{\hat{x}}^o + \chi_2 \gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o + \chi_3 \kappa_{\hat{x}} + \chi_4 \kappa_{\hat{x}\hat{y}} \quad (4.5-21a)$$

$$\kappa_{\hat{y}} = \eta_1 \varepsilon_{\hat{x}}^o + \eta_2 \gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o + \eta_3 \kappa_{\hat{x}} + \eta_4 \kappa_{\hat{x}\hat{y}} \quad (4.5-21b)$$

$$\gamma_{\hat{y}\hat{n}}^o = \varsigma \gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o \quad (4.5-21c)$$

con,

$$\chi_1 = \frac{B_{12}B_{22} - A_{12}D_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22a)$$

$$\chi_2 = \frac{B_{26}B_{22} - A_{26}D_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22b)$$

$$\chi_3 = \frac{D_{12}B_{22} - B_{12}D_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22c)$$

$$\chi_4 = \frac{D_{26}B_{22} - B_{26}D_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22d)$$

$$\eta_1 = \frac{A_{12}B_{22} - B_{12}A_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22e)$$

$$\eta_2 = \frac{A_{26}B_{22} - B_{26}A_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22f)$$

$$\eta_3 = \frac{B_{12}B_{22} - D_{12}A_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22g)$$

$$\eta_4 = \frac{B_{26}B_{22} - D_{26}A_{22}}{A_{22}D_{22} - B_{22}^2} \quad (4.5-22h)$$

$$\varsigma = -\frac{H_{45}}{H_{44}} \quad (4.5-22i)$$

Expresando el vector de deformaciones generalizadas del laminado en términos del vector simplificado de deformaciones generalizadas ($\hat{\epsilon}^o$) se tiene

$$\hat{\epsilon}^o = \hat{S}_\epsilon^o \hat{\epsilon}^o \quad (4.5-23)$$

con

$$\hat{S}_\epsilon^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 & \chi_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varsigma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5-24)$$

Definiendo el vector simplificado de tensiones generalizadas ($\hat{\sigma}^o$) en términos del vector de tensiones del laminado como

$$\hat{\sigma}^o = \hat{S}_\sigma^o \hat{\sigma}^o \quad (4.5-25)$$

con

$$\hat{\sigma}^{oT} = \{N_{\hat{x}}, N_{\hat{x}\hat{y}}, M_{\hat{x}}, M_{\hat{x}\hat{y}}, Q_{\hat{x}}\} \quad (4.5-26)$$

y

$$\hat{S}_\sigma^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5-27)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.5-20) y (4.5-24) en la ecuación (4.5-25) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^o &= \hat{S}_\sigma^o \hat{\mathbf{E}} \hat{\epsilon}^o \\ &= \hat{S}_\sigma^o \hat{\mathbf{E}} \hat{S}_\epsilon^o \hat{\epsilon}^o \end{aligned} \quad (4.5-28)$$

Definiendo la relación simplificada tensión-deformación como

$$\hat{\sigma}^o = \hat{\mathbb{E}} \hat{\epsilon}^o \quad (4.5-29)$$

Al comparar las ecuaciones (4.5-28) y (4.5-29) se deduce que la matriz simplificada de rigidez del laminado es

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o \hat{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\varepsilon}}^o = \begin{bmatrix} \mathbb{A}_{11} & \mathbb{A}_{16} & \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{16} & 0 \\ \mathbb{A}_{16} & \mathbb{A}_{66} & \mathbb{B}_{61} & \mathbb{B}_{66} & 0 \\ \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{61} & \mathbb{D}_{11} & \mathbb{D}_{16} & 0 \\ \mathbb{B}_{16} & \mathbb{B}_{66} & \mathbb{D}_{16} & \mathbb{D}_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbb{H}_{55} \end{bmatrix} \quad (4.5-30)$$

con

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{11} &= A_{11} + \chi_1 A_{12} + \eta_1 B_{12} \\ \mathbb{A}_{16} &= A_{16} + \chi_2 A_{12} + \eta_2 B_{12} \\ \mathbb{A}_{66} &= A_{66} + \chi_2 A_{26} + \eta_2 B_{26} \\ \mathbb{B}_{11} &= B_{11} + \chi_3 A_{12} + \eta_3 B_{12} \\ \mathbb{B}_{16} &= B_{16} + \chi_4 A_{12} + \eta_4 B_{12} \\ \mathbb{B}_{61} &= B_{16} + \chi_3 A_{26} + \eta_3 B_{26} \\ \mathbb{B}_{66} &= B_{66} + \chi_4 A_{26} + \eta_4 B_{26} \\ \mathbb{D}_{11} &= D_{11} + \chi_3 B_{12} + \eta_3 D_{12} \\ \mathbb{D}_{16} &= D_{16} + \chi_4 B_{12} + \eta_4 D_{12} \\ \mathbb{D}_{66} &= D_{66} + \chi_4 B_{26} + \eta_4 D_{26} \\ \mathbb{H}_{55} &= H_{55} + \varsigma H_{45} \end{aligned} \quad (4.5-31)$$

Por otra parte, si se define el vector simplificado de tensiones generalizadas ($\hat{\sigma}^o$) en términos del vector de tensiones de una capa ($\hat{\sigma}$) se tiene

$$\hat{\sigma}^o = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o(\hat{n}) \hat{\sigma}(\hat{n}) d\hat{n} \quad (4.5-32)$$

con

$$\hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o(\hat{n}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{n} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5-33)$$

Reescribiendo la matriz $\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}$ (ver ecuación 4.5-18) en términos de $\hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o$ resulta

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}} = \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\tilde{y} & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 \\ \tilde{z} & 0 & -\text{cos } \alpha & 0 & 0 \\ -\omega_s & 0 & \rho_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\text{cos } \alpha & 0 & 0 & \text{sen } \alpha \\ 0 & -\text{sen } \alpha & 0 & 0 & -\text{cos } \alpha \\ 0 & -\rho_s & 0 & 0 & -\rho_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hat{n} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{n} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.5-34)$$

Indicando que

$$\tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} = \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\epsilon}^o}^T \quad (4.5-35)$$

Reemplazando la ecuación (4.5-34) en (4.5-17) y teniendo en cuenta que el eje local normal a la coordenada curvilínea n es igual al eje \hat{n} del sistema de coordenadas de los laminados

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \iint_A \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}} \hat{\sigma} \, dA \\ &= \iint_A \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o \hat{\sigma} \, dn \, ds \\ &= \int_s \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o \hat{\sigma} \, d\hat{n} \right\} ds \\ &= \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \left\{ \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \hat{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}}^o \hat{\sigma} \, d\hat{n} \right\} ds \end{aligned} \quad (4.5-36)$$

Usando la expresión (4.5-32) en la ecuación (4.5-36) resulta

$$\tilde{\sigma} = \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\sigma}^o \, ds \quad (4.5-37)$$

La Figura 4.5-4 muestra el esquema de cálculo de las tensiones de un laminado suponiendo una “condición de esfuerzos nulos en el contorno”.

4.5-3 Comparación entre la condición de tensiones nulas y la de esfuerzos nulos en el contorno

Con el objetivo de evaluar las diferencias al imponer una u otra condición en el análisis de vigas conformadas por laminados compuestos se establece como parámetro de comparación el término A_{66} de la matriz simplificada de rigidez de un laminado al aplicar las condiciones mencionadas.

1. “Condición de tensiones nulas en el contorno” impuesta en una lámina. De acuerdo con las expresiones (3.3-20) y (3.3-22) se define el coeficiente A_{66} como

$$A_{66} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \hat{Q}_{66} \, d\hat{n} = \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{66} \right)_k t_k \right\} \quad (4.5-38)$$

Reemplazando en (4.5-38) el valor de \hat{Q}_{66} dado por la ecuación (4.5-12)

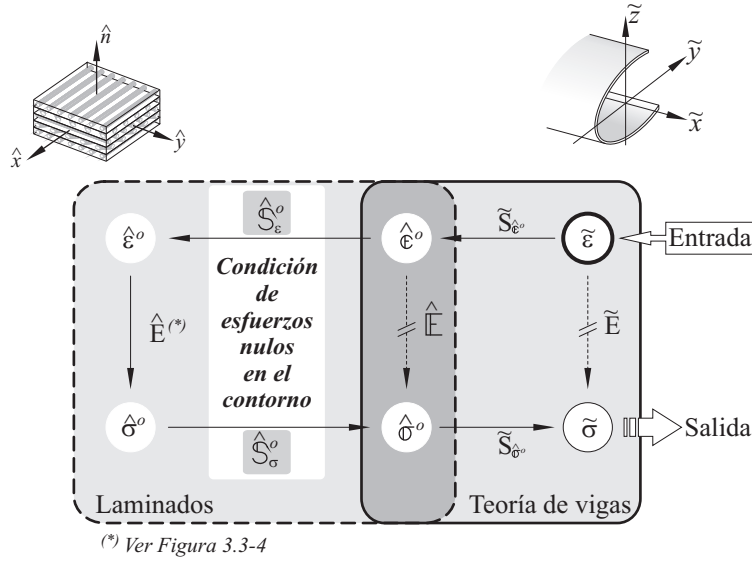


Figura 4.5-4: Diagrama de Tonti (Tonti, 1972) aplicado al cálculo de las tensiones de un laminado suponiendo una “condición de esfuerzos nulos en el contorno”

resulta

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{66} &= \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{66} - \frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \right)_k t_k \right\} \\
 &= \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\hat{Q}_{66} \right)_k t_k \right\} - \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \right)_k t_k \right\} \\
 &= A_{66} - \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \right)_k t_k \right\}
 \end{aligned} \tag{4.5-39}$$

2. “Condición de esfuerzos nulos en el contorno” de un laminado. De acuerdo con la ecuación (4.5-31) el término \mathbb{A}_{66} se define como

$$\begin{aligned}
 \mathbb{A}_{66} &= A_{66} + \chi_2 A_{26} + \eta_2 B_{26} \\
 &= A_{66} - \frac{(A_{26} D_{22} - B_{26} B_{22}) A_{26} + (B_{26} A_{22} - A_{26} B_{22}) B_{26}}{A_{22} D_{22} - B_{22}^2}
 \end{aligned} \tag{4.5-40}$$

De las ecuaciones (4.5-39) y (4.5-40) se observa que la expresión usada bajo la condición de tensiones nulas en una **capa** no contempla los posibles acoplamientos que puede presentar el laminado, mientras que la condición de esfuerzos nulos en

el **laminado** incluye la combinación de coeficientes de rigidez membranal (A), de acoplamiento (B) y de flexión (D).

A continuación se presentan algunos supuestos que permiten comparar de forma directa las ecuaciones (4.5-39) y (4.5-40):

1. *Laminado conformado por capas cuya orientación es 0° o 90° .* En este supuesto el coeficiente de rigidez \hat{Q}_{26} en cada capa es nulo y por tanto $A_{26} = 0$ y $B_{26} = 0$, resultado iguales las expresiones (4.5-39) y (4.5-40).
2. *Laminado unidireccional.* Los laminados unidireccionales son simétricos, así, los coeficientes que acoplan los comportamientos membranal y a flexión son nulos ($B_{ij} = 0$), simplificando la “Condición de esfuerzos nulos en el contorno” (4.5-40) a

$$A_{66} = A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}} \quad (4.5-41)$$

En los laminados unidireccionales los coeficientes \hat{Q}_{ij} son constantes para todas las capas del laminado, así

$$\left(\hat{Q}_{ij}\right)_k = \hat{Q}_{ij} \quad (4.5-42)$$

y por lo tanto

$$A_{ij} = \hat{Q}_{ij} t \quad (4.5-43)$$

siendo t el espesor del laminado.

Reemplazando la definición dada por la ecuación (4.5-43) en la “Condición de tensiones nulas en el contorno” (4.5-39) se obtiene

$$\begin{aligned} A_{66} &= A_{66} - \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \right)_k t_k \right\} \\ &= A_{66} - \left(\frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \right) \sum_{k=1}^N \{t_k\} \\ &= A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}} \end{aligned} \quad (4.5-44)$$

Con estas consideraciones se observa que las expresiones (4.5-39) y (4.5-40) resultan siendo iguales.

3. *Laminado simétrico $[\pm\varphi]_{N_s}$.* Tal como se vió en el numeral anterior, cuando los laminados son simétricos la “Condición de esfuerzos nulos en el contorno”

se simplifica a la ecuación (4.5-41), pudiendo escribirse como

$$\begin{aligned} A_{66} &= A_{66} - \frac{A_{26}^2}{A_{22}} \\ &= A_{66} - \frac{\left\{ \sum_{k=1}^N \left(\hat{Q}_{26} \right)_k t_k \right\}^2}{A_{22}} \end{aligned} \quad (4.5-45)$$

Con respecto a la “Condición de tensiones nulas en el contorno” se indica que al ser constantes los coeficientes \hat{Q}_{22} en los laminados bidireccionales $[\pm\varphi]_N$ y teniendo en cuenta que los coeficientes \hat{Q}_{26} mantienen el signo del ángulo de orientación de la capa $\pm\varphi$, se simplifica la ecuación (4.5-39) como

$$\begin{aligned} A_{66} &= A_{66} - \sum_{k=1}^N \left\{ \left(\frac{\hat{Q}_{26}^2}{\hat{Q}_{22}} \right)_k t_k \right\} \\ &= A_{66} - \frac{\sum_{k=1}^N \left(\hat{Q}_{26}^2 \right)_k t_k}{\hat{Q}_{22}} \\ &= A_{66} - \frac{\left\{ \sum_{k=1}^N \left(\hat{Q}_{26} \right)_k t_k \right\} t}{A_{22}} \end{aligned} \quad (4.5-46)$$

Al comparar término a término las ecuaciones (4.5-46) y (4.5-45) se observan diferencias en los numeradores del segundo mostrando que

$$\left\{ \sum_{k=1}^N \left(\hat{Q}_{26}^2 \right)_k t_k \right\} t \neq \left\{ \sum_{k=1}^N \left(\hat{Q}_{26} \right)_k t_k \right\}^2 \quad (4.5-47)$$

Debe notarse que mientras en el lado derecho de la expresión (4.5-47) se muestra un sumatorio que integra los coeficientes conservando su signos y que por estar elevado al cuadrado relaciona todos los coeficientes entre si, en el lado izquierdo se pierde tanto el signo como la relación entre coeficientes por elevarlos al cuadrado antes del sumatorio.

De lo anterior se observa que el uso de la “Condición de tensiones nulas en el contorno” para cada capa es aplicable al estudio de vigas conformadas por laminados unidireccionales o aquellas cuyos laminados estan compuestos por capas a 0° o 90° respecto al eje longitudinal de la viga, en otros casos, dicha condición no contempla las posibles interacciones que se presentan entre capas al trabajar dentro de un laminado como un conjunto.

En las Figuras 4.5-5 y 4.5-6 se muestran los resultados obtenidos al analizar a una viga con sección en I (doblemente simétrica) en voladizo y sometida a un momento torsor en su extremo libre. En ellas se compara el ángulo de giro en el extremo libre de la viga evaluado mediante la condición de tensiones nulas y la de esfuerzos

nulos en el contorno para diferentes configuraciones de apilado, indicando que la verificación se realiza usando un modelo de elementos cuadriláteros de nueve nodos y 5 puntos de integración S9R5 (ABAQUS, 2006a).

En la Figura 4.5-5 se observa que en los laminados unidireccionales se obtienen los mismos resultados usando las dos condiciones.

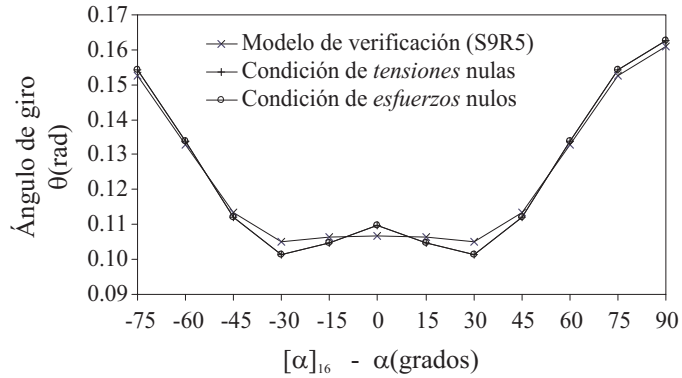


Figura 4.5-5: Giro por torsión en el extremo libre de una viga I en voladizo conformada por laminados unidireccionales $[\alpha]_{16}$.

La Figura 4.5-6 muestra que en laminados bidireccionales $[\pm\alpha]_{4s}$ el uso de la condición de tensiones nulas subestima la rigidez a torsión de la sección presentando mayores giros por torsión respecto a los obtenidos en el modelo de verificación. Se indica que al utilizar la condición de esfuerzos nulos en el contorno se encuentran resultados muy cercanos al modelo de verificación.

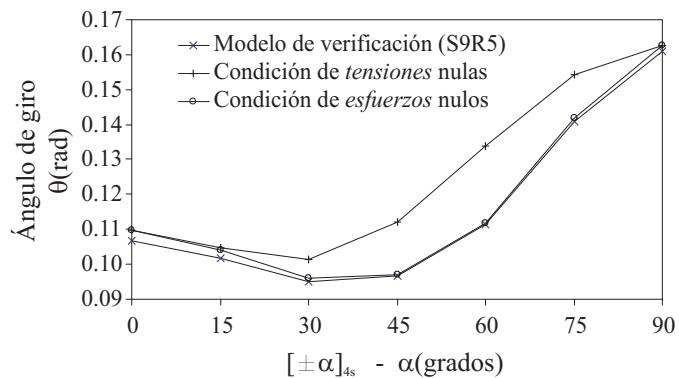


Figura 4.5-6: Giro por torsión en el extremo libre de una viga I en voladizo conformada por laminados bidireccionales $[\pm\alpha]_{4s}$.

La Figura 4.5-7 muestra el esquema de evaluación de las tensiones generalizadas en la sección transversal de una viga de laminados compuestos. En ella se observa que existen dos caminos para el análisis:

- A la izquierda usando la “condición de tensiones nulas en el contorno”, que aunque parece más inmediata, solamente es útil en los casos de laminados unidireccionales y laminados cuyas capas presenten solamente orientaciones 0° y 90° .
- A la derecha mediante la “condición de esfuerzos nulos en el contorno”, más general, permitiendo analizar secciones de vigas conformadas por cualquier secuencia de apilado.

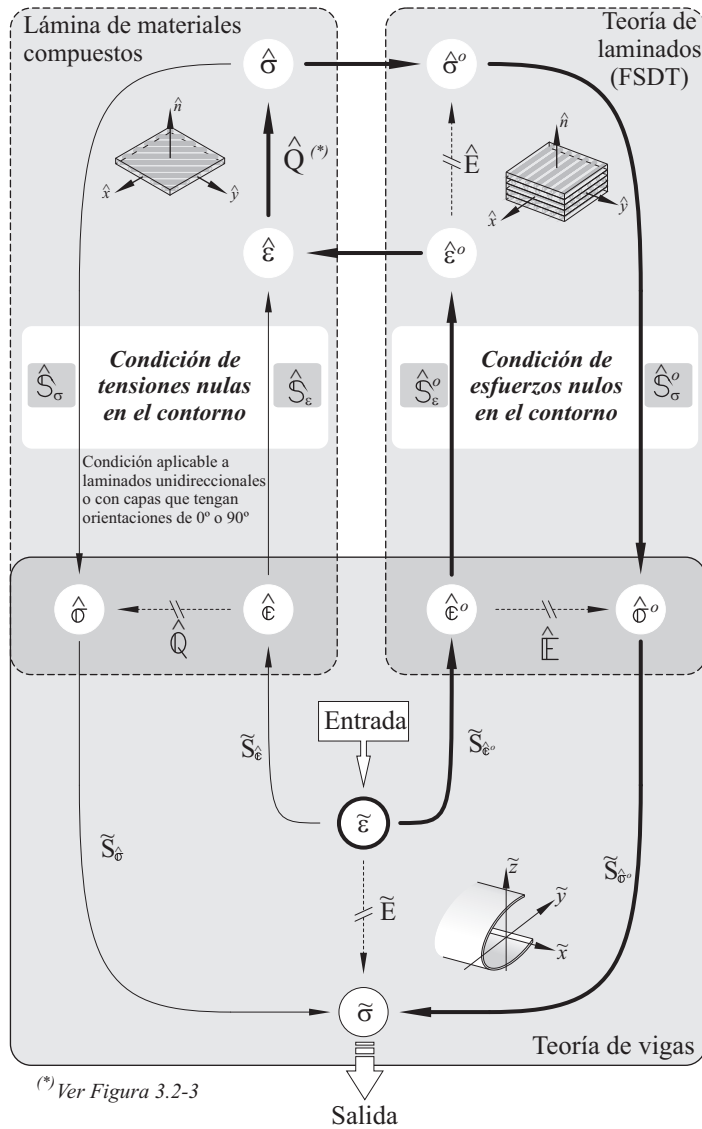


Figura 4.5-7: Cálculo de las tensiones en la sección transversal de una viga en laminados compuestos

4.6 Fuerzas internas y matriz de rigidez

En el apartado anterior se demuestra que al usar la “condición de esfuerzos nulos en el contorno” se da generalidad a la formulación permitiendo analizar secciones de pared delgada en laminados compuestos con cualquier configuración de apilado. Por este motivo, el análisis de fuerzas internas y de la matriz de rigidez se realiza partiendo de las siguientes relaciones simplificadas tensión-deformación (ver ecuación 4.5-29)

$$\begin{pmatrix} N_{\hat{x}} \\ N_{\hat{x}\hat{y}} \\ M_{\hat{x}} \\ M_{\hat{x}\hat{y}} \\ Q_{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{16} & B_{11} & B_{16} & 0 \\ A_{16} & A_{66} & B_{61} & B_{66} & 0 \\ B_{11} & B_{61} & D_{11} & D_{16} & 0 \\ B_{16} & B_{66} & D_{16} & D_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{\hat{x}}^o \\ \gamma_{\hat{x}\hat{y}}^o \\ \kappa_{\hat{x}} \\ \kappa_{\hat{x}\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{n}}^o \end{pmatrix} \quad (4.6-1)$$

$$\hat{\sigma}^o = \hat{E} \hat{\varepsilon}^o$$

con A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} y H_{ij} evaluados de acuerdo con las expresiones (4.5-31).

Reemplazando la expresión (4.6-1) en la ecuación (4.5-37) se obtienen las componentes del vector de tensiones en la sección transversal de la viga

$$N_{\bar{x}} = \int_s N_{\hat{x}} ds \quad (4.6-2a)$$

$$M_{\bar{z}} = - \int_s (N_{\hat{x}} \tilde{y} + M_{\hat{x}} \sin \alpha) ds \quad (4.6-2b)$$

$$M_{\bar{y}} = \int_s (N_{\hat{x}} \tilde{z} - M_{\hat{x}} \cos \alpha) ds \quad (4.6-2c)$$

$$B_{\omega} = - \int_s (N_{\hat{x}} \omega_s - M_{\hat{x}} \rho_n) ds \quad (4.6-2d)$$

$$M_t = - \int_s M_{\hat{x}\hat{y}} ds \quad (4.6-2e)$$

$$Q_{\bar{y}} = - \int_s (N_{\hat{x}\hat{y}} \cos \alpha - Q_{\hat{x}} \sin \alpha) ds \quad (4.6-2f)$$

$$Q_{\bar{z}} = - \int_s (N_{\hat{x}\hat{y}} \sin \alpha + Q_{\hat{x}} \cos \alpha) ds \quad (4.6-2g)$$

$$T = - \int_s (N_{\hat{x}\hat{y}} \rho_s + Q_{\hat{x}} \rho_n) ds \quad (4.6-2h)$$

La matriz de rigidez se obtiene reemplazando la relación simplificada tensión-deformación (4.6-1) y el vector simplificado de deformaciones generalizadas (4.3-

21) en la ecuación (4.5-37)

$$\begin{aligned}
 \tilde{\sigma} &= \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\sigma}^o ds \\
 &= \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{E}} \hat{\epsilon}^o ds \\
 &= \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\epsilon}^o} \tilde{\epsilon} ds \\
 &= \left\{ \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\epsilon}^o} ds \right\} \tilde{\epsilon}
 \end{aligned} \tag{4.6-3}$$

Resultado la siguiente relación tensión-deformación en forma matricial

$$\begin{pmatrix} N_{\tilde{x}} \\ M_{\tilde{z}} \\ M_{\tilde{y}} \\ B_{\omega} \\ M_t \\ Q_{\tilde{y}} \\ Q_{\tilde{z}} \\ T \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{\tilde{x}}^o \\ \kappa_{\tilde{z}} \\ \kappa_{\tilde{y}} \\ \kappa_{\omega} \\ \kappa_{\tilde{x}s} \\ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o \\ \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o \\ \gamma_t \end{pmatrix} \tag{4.6-4}$$

o en forma compacta,

$$\tilde{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}} \tilde{\epsilon} \tag{4.6-5}$$

determinándose la matriz de rigidez de la sección como

$$\tilde{\mathbf{E}} = \int_s \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\sigma}^o} \hat{\mathbf{E}} \tilde{\mathbf{S}}_{\hat{\epsilon}^o} ds = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \tag{4.6-6}$$

con las siguientes componentes de rigidez

$$\begin{aligned}
 E_{11} &= \int_s \mathbb{A}_{11} ds \\
 E_{12} &= - \int_s (\mathbb{A}_{11} \tilde{y} + \mathbb{B}_{11} \sin \alpha) ds \\
 E_{13} &= \int_s (\mathbb{A}_{11} \tilde{z} - \mathbb{B}_{11} \cos \alpha) ds
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{14} &= - \int_s (\mathbb{A}_{11}\omega_s - \mathbb{B}_{11}\rho_n) ds \\
E_{15} &= \int_s \mathbb{B}_{16} ds \\
E_{16} &= \int_s \mathbb{A}_{16} \cos \alpha ds \\
E_{17} &= \int_s \mathbb{A}_{16} \sen \alpha ds \\
E_{18} &= \int_s \mathbb{A}_{16}\rho_s ds \\
E_{22} &= \int_s (\mathbb{A}_{11}\tilde{y}^2 + 2\mathbb{B}_{11}\tilde{y} \sen \alpha + \mathbb{D}_{11} \sen^2 \alpha) ds \\
E_{23} &= - \int_s (\mathbb{A}_{11}\tilde{y}\tilde{z} + \mathbb{B}_{11} (\tilde{z} \sen \alpha - \tilde{y} \cos \alpha) \\
&\quad - \mathbb{D}_{11} \sen \alpha \cos \alpha) ds \\
E_{24} &= \int_s (\mathbb{A}_{11}\tilde{y}\omega_s + \mathbb{B}_{11} (\omega_s \sen \alpha - \tilde{y}\rho_n) \\
&\quad - \mathbb{D}_{11}\rho_n \sen \alpha) ds \\
E_{25} &= - \int_s (\mathbb{B}_{16}\tilde{y} + \mathbb{D}_{16} \sen \alpha) ds \\
E_{26} &= - \int_s (\mathbb{A}_{16}\tilde{y} + \mathbb{B}_{16} \sen \alpha) \cos \alpha ds \\
E_{27} &= - \int_s (\mathbb{A}_{16}\tilde{y} + \mathbb{B}_{16} \sen \alpha) \sen \alpha ds \\
E_{28} &= - \int_s (\mathbb{A}_{16}\tilde{y} + \mathbb{B}_{16} \sen \alpha) \rho_s ds \\
E_{33} &= \int_s (\mathbb{A}_{11}\tilde{z}^2 - 2\mathbb{B}_{11}\tilde{z} \cos \alpha + \mathbb{D}_{11} \cos^2 \alpha) ds \\
E_{34} &= - \int_s (\mathbb{A}_{11}\tilde{z}\omega_s - \mathbb{B}_{11} (\omega_s \cos \alpha + \tilde{z}\rho_n) \\
&\quad + \mathbb{D}_{11}\rho_n \cos \alpha) ds \\
E_{35} &= \int_s (\mathbb{B}_{16}\tilde{z} - \mathbb{D}_{16} \cos \alpha) ds \\
E_{36} &= \int_s (\mathbb{A}_{16}\tilde{z} - \mathbb{B}_{16} \cos \alpha) \cos \alpha ds \\
E_{37} &= \int_s (\mathbb{A}_{16}\tilde{z} - \mathbb{B}_{16} \cos \alpha) \sen \alpha ds \\
E_{38} &= \int_s (\mathbb{A}_{16}\tilde{z} - \mathbb{B}_{16} \cos \alpha) \rho_s ds \\
E_{44} &= \int_s (\mathbb{A}_{11}\omega_s^2 - 2\mathbb{B}_{11}\omega_s\rho_n + \mathbb{D}_{11}\rho_n^2) ds \\
E_{45} &= - \int_s (\mathbb{B}_{16}\omega_s - \mathbb{D}_{16}\rho_n) ds \\
E_{46} &= - \int_s (\mathbb{A}_{16}\omega_s - \mathbb{B}_{16}\rho_n) \cos \alpha ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E_{47} &= - \int_s (\mathbb{A}_{16}\omega_s - \mathbb{B}_{16}\rho_n) \operatorname{sen} \alpha \, ds \\
E_{48} &= - \int_s (\mathbb{A}_{16}\omega_s - \mathbb{B}_{16}\rho_n) \rho_s \, ds \\
E_{55} &= \int_s \mathbb{D}_{66} \, ds \\
E_{56} &= \int_s \mathbb{B}_{66} \cos \alpha \, ds \\
E_{57} &= \int_s \mathbb{B}_{66} \operatorname{sen} \alpha \, ds \\
E_{58} &= \int_s \mathbb{B}_{66}\rho_s \, ds \\
E_{66} &= \int_s (\mathbb{A}_{66} \cos^2 \alpha + \mathbb{H}_{55} \operatorname{sen}^2 \alpha) \, ds \\
E_{67} &= \int_s (\mathbb{A}_{66} - \mathbb{H}_{55}) \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha \, ds \\
E_{68} &= \int_s (\mathbb{A}_{66}\rho_s \cos \alpha - \mathbb{H}_{55}\rho_n \operatorname{sen} \alpha) \, ds \\
E_{77} &= \int_s (\mathbb{A}_{66} \operatorname{sen}^2 \alpha + \mathbb{H}_{55} \cos^2 \alpha) \, ds \\
E_{78} &= \int_s (\mathbb{A}_{66}\rho_s \operatorname{sen} \alpha + \mathbb{H}_{55}\rho_n \cos \alpha) \, ds \\
E_{88} &= \int_s (\mathbb{A}_{66}\rho_s^2 + \mathbb{H}_{55}\rho_n^2) \, ds
\end{aligned} \tag{4.6-7}$$

Los términos \mathbb{A}_{ij} , \mathbb{B}_{ij} , \mathbb{D}_{ij} y \mathbb{H}_{ij} se definen de acuerdo a las ecuaciones (4.5-31).

Debe notarse que estos coeficientes definen la forma más general de la matriz de rigidez de la sección transversal de una viga de pared delgada en laminados compuestos y dependiendo de la geometría de la sección (doblemente simétrica, una simetría o sin simetría) y de la secuencia de apilado de los laminados que la conforman (laminados simétricos, equilibrados, etc.) podrán despreciarse unos u otros coeficientes.

4.7 Propiedades geométricas de la sección

Se propone una metodología de cálculo del eje neutro de la sección y del centro de cortante extendiendo a laminados compuestos el procedimiento incluido en la Sección 2.7, donde después de evaluar la posición del eje neutro se calcula el centro de giro estableciendo que la resultante de las tensiones longitudinales generadas por torsión no induce momentos flectores en la viga.

4.7-1 Eje neutro

Se supone que el eje neutro (y_o, z_o) de la sección transversal se localiza en el punto de aplicación de la fuerza axial interna (N_x) resultante de imponer

en la ecuación (4.6-4) un vector de deformaciones generalizadas $\tilde{\varepsilon}$ cuya única componente no nula es la deformación axial ($\varepsilon_{\tilde{x}}^o$), de lo que se establecen las siguientes expresiones

$$N_{\tilde{x}} = E_{11}\varepsilon_{\tilde{x}}^o \quad (4.7-1a)$$

$$M_{\tilde{z}} = E_{12}\varepsilon_{\tilde{x}}^o \quad (4.7-1b)$$

$$M_{\tilde{y}} = E_{13}\varepsilon_{\tilde{x}}^o \quad (4.7-1c)$$

Por otra parte, los momentos generados por la fuerza interna $N_{\tilde{x}}$ son

$$M_{\tilde{z}} = -N_{\tilde{x}}y_o \quad ; \quad M_{\tilde{y}} = N_{\tilde{x}}z_o \quad (4.7-2)$$

Despejando las coordenadas del eje neutro (y_o, z_o) de la ecuación (4.7-2), resulta

$$y_o = -\frac{M_{\tilde{z}}}{N_{\tilde{x}}} \quad ; \quad z_o = \frac{M_{\tilde{y}}}{N_{\tilde{x}}} \quad (4.7-3)$$

y reemplazando (4.7-1) en la ecuación (4.7-3) se obtienen las coordenadas del eje neutro

$$y_o = -\frac{E_{12}}{E_{11}} \quad ; \quad z_o = \frac{E_{13}}{E_{11}} \quad (4.7-4)$$

4.7-2 Centro de cortante

Suponiendo que el centro de cortante (\tilde{y}_c, \tilde{z}_c) de una viga de pared delgada se localiza en un punto tal que los esfuerzos generados por acción de la torsión no inducen momentos flectores (ver ecuaciones 4.6-2), se tiene que

$$M_{\tilde{z}} = -\int_s (N_{\tilde{x}}\tilde{y} + M_{\tilde{x}} \sin \alpha) ds = 0 \quad (4.7-5a)$$

$$M_{\tilde{y}} = \int_s (N_{\tilde{x}}\tilde{z} - M_{\tilde{x}} \cos \alpha) ds = 0 \quad (4.7-5b)$$

En la condición de torsión pura la única componente no nula del vector de deformaciones generalizadas de la viga ($\tilde{\varepsilon}$) es κ_ω , por lo que las componentes no nulas del vector simplificado de deformaciones generalizadas (ver ecuaciones 4.6-4, 4.3-19, 4.3-21 y 4.3-22) son:

$$\varepsilon_{\tilde{x}}^o = -\omega_s \kappa_\omega \quad (4.7-6a)$$

$$\kappa_{\tilde{x}} = \rho_n \kappa_\omega \quad (4.7-6b)$$

Siguiendo la relación dada por la ecuación (4.6-1) se establece que

$$N_{\hat{x}} = A_{11}\varepsilon_{\hat{x}}^o + B_{11}\kappa_{\hat{x}} = - (A_{11}\omega_s - B_{11}\rho_n) \kappa_{\omega} \quad (4.7-7a)$$

$$M_{\hat{x}} = B_{11}\varepsilon_{\hat{x}}^o + D_{11}\kappa_{\hat{x}} = - (B_{11}\omega_s - D_{11}\rho_n) \kappa_{\omega} \quad (4.7-7b)$$

Expresando en la ecuación (4.7-7) la distancia ρ_n y la función de alabeo primario ω_s (referidas al centro de torsión) en términos de sus homólogas medidas desde el eje neutro (ver ecuaciones 2.1-5b y 2.2-39) se tiene

$$N_{\hat{x}} = - \{A_{11} [\omega_{s_o} - (\tilde{y}_c \tilde{z} - \tilde{z}_c \tilde{y})] - B_{11} [\rho_{n_o} - (\tilde{y}_c \cos \alpha + \tilde{z}_c \sin \alpha)]\} \kappa_{\omega} \quad (4.7-8a)$$

$$M_{\hat{x}} = - \{B_{11} [\omega_{s_o} - (\tilde{y}_c \tilde{z} - \tilde{z}_c \tilde{y})] - D_{11} [\rho_{n_o} - (\tilde{y}_c \cos \alpha + \tilde{z}_c \sin \alpha)]\} \kappa_{\omega} \quad (4.7-8b)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.7-8) en (4.7-5a) y reordenando

$$\begin{aligned} M_{\tilde{z}} &= \int_s [A_{11}\tilde{y}\omega_{s_o} - B_{11}\tilde{y}\rho_{n_o} + B_{11}\omega_{s_o} \sin \alpha - D_{11}\rho_{n_o} \sin \alpha] \kappa_{\omega} ds \\ &\quad - \tilde{y}_c \int_s [A_{11}\tilde{y}\tilde{z} - B_{11}\tilde{y} \cos \alpha + B_{11}\tilde{z} \sin \alpha - D_{11} \sin \alpha \cos \alpha] \kappa_{\omega} ds \quad (4.7-9) \\ &\quad + \tilde{z}_c \int_s [A_{11}\tilde{y}^2 + 2B_{11}\tilde{y} \sin \alpha + D_{11} \sin^2 \alpha] \kappa_{\omega} ds = 0 \end{aligned}$$

Usando los coeficientes de rigidez definidos en las ecuaciones (4.6-7) y considerando que la igualdad de la expresión (4.7-9) debe mantenerse para cualquier giro torsional ($\forall \kappa_{\omega} \neq 0$) se obtiene

$$E_{24}^o + \tilde{y}_c E_{23} + \tilde{z}_c E_{22} = 0 \quad (4.7-10)$$

con

$$E_{24}^o = \int_s (A_{11}\tilde{y}\omega_{s_o} + B_{11} (\omega_{s_o} \sin \alpha - \tilde{y}\rho_{n_o}) - D_{11}\rho_{n_o} \sin \alpha) ds \quad (4.7-11)$$

Reemplazando las ecuaciones (4.7-8) en (4.7-5b) y siguiendo el mismo procedimiento usado con $M_{\tilde{z}}$ se obtiene

$$E_{34}^o + \tilde{y}_c E_{33} + \tilde{z}_c E_{23} = 0 \quad (4.7-12)$$

con

$$E_{34}^o = - \int_s (A_{11} \tilde{z} \omega_{s_o} - B_{11} (\omega_{s_o} \cos \alpha + \tilde{z} \rho_{n_o}) + D_{11} \rho_{n_o} \cos \alpha) ds \quad (4.7-13)$$

Las ecuaciones (4.7-10) y (4.7-12) forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas, así, despejando las coordenadas del centro de giro resulta

$$\tilde{y}_c = - \frac{E_{34}^o E_{22} - E_{24}^o E_{23}}{E_{22} E_{33} - E_{23}^2} \quad (4.7-14a)$$

$$\tilde{z}_c = - \frac{E_{24}^o E_{33} - E_{34}^o E_{23}}{E_{22} E_{33} - E_{23}^2} \quad (4.7-14b)$$

4.7-3 Ejemplos de cálculo

A continuación se incluyen las Figuras 4.7-1 y 4.7-2 donde se muestra la variación de la posición del eje neutro y del centro de torsión en vigas con sección I y C, en función de la relación entre los módulos de elasticidad (E y nE) de los materiales que la componen.

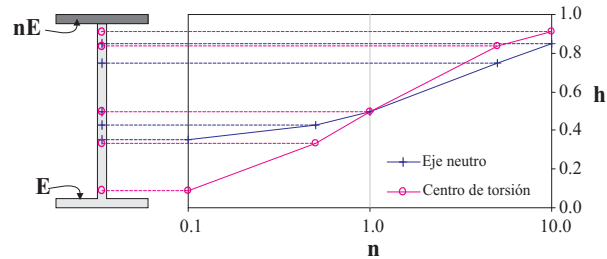


Figura 4.7-1: Sección doble T

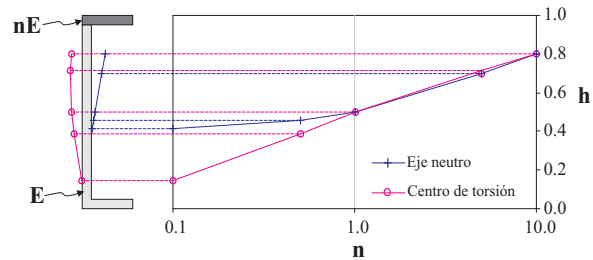


Figura 4.7-2: Sección C (simetría en el eje horizontal).

4.8 Ecuaciones de gobierno

En el Capítulo 2 se dedujo la relación entre fuerzas internas y cargas distribuidas a lo largo de la viga (ver ecuaciones 2.8-7) siendo

$$N'_x + p_x = 0 \quad (4.8-1a)$$

$$Q'_y + p_y = 0 \quad (4.8-1b)$$

$$Q'_z + p_z = 0 \quad (4.8-1c)$$

$$M'_t + T' + m_x = 0 \quad (4.8-1d)$$

$$M'_y - Q'_z + m_y = 0 \quad (4.8-1e)$$

$$M'_z + Q'_y + m_z = 0 \quad (4.8-1f)$$

$$B'_\omega - M_\omega + b_\omega = 0 \quad (4.8-1g)$$

Reemplazando las fuerzas internas definidas por la ecuación (4.6-5) y las deformaciones generalizadas de la sección en términos de los desplazamientos (4.3-2) resulta

$$\begin{aligned} & E_{11}\tilde{u}''_o + E_{16}\tilde{v}''_c + E_{17}\tilde{w}''_c + (E_{15} + E_{18})\theta''_x + E_{17}\theta''_y \\ & + E_{13}\theta''_y - E_{16}\theta'_z + E_{12}\theta''_z + (E_{15} - E_{18})\phi'_\omega + E_{14}\phi''_\omega + p_x = 0 \end{aligned} \quad (4.8-2a)$$

$$\begin{aligned} & E_{16}\tilde{u}''_o + E_{66}\tilde{v}''_c + E_{67}\tilde{w}''_c + (E_{56} + E_{68})\theta''_x + E_{67}\theta''_y \\ & + E_{36}\theta''_y - E_{66}\theta'_z + E_{26}\theta''_z + (E_{56} - E_{68})\phi'_\omega + E_{46}\phi''_\omega + p_y = 0 \end{aligned} \quad (4.8-2b)$$

$$\begin{aligned} & E_{17}\tilde{u}''_o + E_{67}\tilde{v}''_c + E_{77}\tilde{w}''_c + (E_{57} + E_{78})\theta''_x + E_{77}\theta''_y \\ & + E_{37}\theta''_y - E_{67}\theta'_z + E_{27}\theta''_z + (E_{57} - E_{78})\phi'_\omega + E_{47}\phi''_\omega + p_z = 0 \end{aligned} \quad (4.8-2c)$$

$$\begin{aligned} & (E_{15} + E_{18})\tilde{u}''_o + (E_{56} + E_{68})\tilde{v}''_c + (E_{57} + E_{78})\tilde{w}''_c \\ & + (E_{55} + 2E_{58} + E_{88})\theta''_x + (E_{57} + E_{78})\theta''_y \\ & + (E_{35} + E_{38})\theta''_y - (E_{56} + E_{68})\theta'_z + (E_{25} + E_{28})\theta''_z \\ & + (E_{55} - E_{88})\phi'_\omega + (E_{45} + E_{48})\phi''_\omega + m_x = 0 \end{aligned} \quad (4.8-2d)$$

$$\begin{aligned} & -E_{17}\tilde{u}''_o + E_{13}\tilde{u}''_o - E_{67}\tilde{v}''_c + E_{36}\tilde{v}''_c - E_{77}\tilde{w}''_c \\ & + E_{37}\tilde{w}''_c - (E_{57} - E_{78})\theta''_x + (E_{35} + E_{38})\theta''_x - E_{77}\theta''_y \\ & + E_{33}\theta''_y + E_{67}\theta'_z - (E_{36} + E_{27})\theta'_z + E_{23}\theta''_z \\ & - (E_{57} - E_{78})\phi_\omega + (E_{35} - E_{38} - E_{47})\phi'_\omega + E_{34}\phi''_\omega + m_y = 0 \end{aligned} \quad (4.8-2e)$$

$$\begin{aligned} & E_{16}\tilde{u}''_o + E_{12}\tilde{u}''_o + E_{66}\tilde{v}''_c + E_{26}\tilde{v}''_c + E_{67}\tilde{w}''_c + E_{27}\tilde{w}''_c \\ & + (E_{56} + E_{68})\theta''_x + (E_{25} + E_{28})\theta''_x + E_{67}\theta''_y \\ & + (E_{27} + E_{36})\theta''_y + E_{23}\theta''_y - E_{66}\theta'_z + E_{22}\theta''_z \end{aligned}$$

$$+(E_{56} - E_{68})\phi_\omega + (E_{25} - E_{28} + E_{46})\phi'_\omega + E_{24}\phi''_\omega + m_z = 0 \quad (4.8-2f)$$

$$\begin{aligned} & - (E_{15} - E_{18})\tilde{u}'_o + E_{14}\tilde{u}''_o - (E_{56} - E_{68})\tilde{v}'_c \\ & \quad + E_{46}\tilde{v}''_c - (E_{57} - E_{78})\tilde{w}'_c + E_{47}\tilde{w}''_c \\ - (E_{55} - E_{88})\theta'_{\bar{x}} + (E_{45} + E_{48})\theta''_{\bar{x}} - (E_{57} - E_{78})\theta'_{\bar{y}} \\ & \quad - (E_{35} - E_{38} - E_{47})\theta'_{\bar{y}} + E_{34}\theta''_{\bar{y}} + (E_{56} - E_{68})\theta_{\bar{z}} \\ & \quad - (E_{25} - E_{28} + E_{46})\theta'_{\bar{z}} + E_{24}\theta''_{\bar{z}} \\ & \quad - (E_{55} - 2E_{58} + E_{88})\phi_\omega + E_{44}\phi''_\omega + b_\omega = 0 \end{aligned} \quad (4.8-2g)$$

En las ecuaciones anteriores se reemplazan las derivadas con respecto al eje longitudinal de la viga $\partial_{\bar{x}}(\cdot)$ por $(\cdot)'$ para simplificar la lectura.

De las ecuaciones (4.8-2) se observa que las componentes de desplazamiento $(\tilde{u}_o, \tilde{v}_c, \tilde{w}_c, \theta_{\bar{x}}, \theta_{\bar{y}}, \theta_{\bar{z}}, \phi_\omega)$ de una viga de sección abierta y pared delgada en laminados compuestos se encuentran completamente acopladas entre si. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, dependiendo de la geometría de la sección (doblemente simétrica, una simetría o sin simetría) y de la secuencia de apilado de los laminados que la conforman (laminados simétricos, equilibrados, etc.) podrán presentarse desacoplamientos.

Para el caso en que sean despreciables todos los acoplamientos, las ecuaciones (4.8-2) se simplifican a

$$E_{11}\tilde{u}''_o + p_{\bar{x}} = 0 \quad (4.8-3a)$$

$$E_{66}(\tilde{v}''_c - \theta'_{\bar{z}}) + p_{\bar{y}} = 0 \quad (4.8-3b)$$

$$E_{77}(\tilde{w}''_c + \theta'_{\bar{y}}) + p_{\bar{z}} = 0 \quad (4.8-3c)$$

$$E_{55}(\theta''_{\bar{x}} + \phi'_\omega) + E_{88}(\theta''_{\bar{x}} - \phi'_\omega) + m_{\bar{x}} = 0 \quad (4.8-3d)$$

$$-E_{77}(\tilde{w}'_c + \theta_{\bar{y}}) + E_{33}\theta''_{\bar{y}} + m_{\bar{y}} = 0 \quad (4.8-3e)$$

$$E_{66}(\tilde{v}'_c - \theta_{\bar{z}}) + E_{22}\theta''_{\bar{z}} + m_{\bar{z}} = 0 \quad (4.8-3f)$$

$$-E_{55}(\theta'_{\bar{x}} + \phi_\omega) + E_{88}(\theta'_{\bar{x}} - \phi_\omega) + E_{44}\phi''_\omega + b_\omega = 0 \quad (4.8-3g)$$

Al tener las expresiones desacopladas se observa que las ecuaciones (4.8-3b), (4.8-3c), (4.8-3e) y (4.8-3f) corresponden al problema de flexión de Timoshenko y las ecuaciones (4.8-3d) y (4.8-3g) al problema de torsión.

En la Tabla 4.8-1 se muestra la comparación entre los coeficientes de la matriz de rigidez cuando la viga de pared delgada está conformada por materiales homogéneos o por laminados compuestos (ver ecuaciones 4.8-3, 2.8-17 y 2.8-15).

Tabla 4.8-1: Comparación de coeficientes de rigidez en vigas de pared delgada

Laminados compuestos	Materiales homogéneos
E_{11}	EA
E_{22}	$El_{\bar{z}}$
E_{33}	$El_{\bar{y}}$
E_{44}	El_{ω}
E_{55}	GJ_s
E_{66}	$k_1 GA$
E_{77}	$k_2 GA$
E_{88}	GJ_{t_c}

4.9 Aplicación de las ecuaciones de gobierno

A continuación se incluyen dos tipos de análisis para vigas en laminados compuestos: a torsión y a flexión. En estos análisis se usan las ecuaciones de gobierno y los coeficientes de rigidez evaluados con las ecuaciones (4.6-7) con el fin de verificar su validez.

En el estudio a torsión se captura el comportamiento de una viga en voladizo con sección C sometida a torsión en su extremo libre y sus resultados se comparan con los obtenidos usando un modelo de verificación por el método de los elementos finitos; el estudio a flexión de las vigas se modeliza usando las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) definidas en las ecuaciones de gobierno para reproducir el comportamiento registrado mediante ensayos de laboratorio por Correia (2004) a vigas con sección I de laminados compuestos simplemente apoyadas y sometidas a una carga vertical concentrada en el centro del vano.

En el Anexo B se incluyen los comandos usados para resolver las ecuaciones diferenciales planteadas con ayuda de MATLAB 2004.

4.9-1 Viga solicitada a torsión

Se analiza una viga con sección C en voladizo aplicando a las EDP los coeficientes de rigidez evaluados con las ecuaciones (4.6-7).

En el extremo libre de la viga se impone un momento torsor de 1 kN mm tal como se muestra en la Figura 4.9-1.

La sección transversal de la viga está conformada por laminados compuestos $[90, 0_4]_s$ y las capas que conforman el laminado son de fibra de vidrio y matriz epóxica (Gl.Ep. Reddy 2004) con las siguientes características:

- $E_1 = 53780$ MPa ; $E_2 = 17930$ MPa
- $G_{12} = 8960$ MPa ; $G_{13} = 8960$ MPa ; $G_{23} = 3450$ MPa

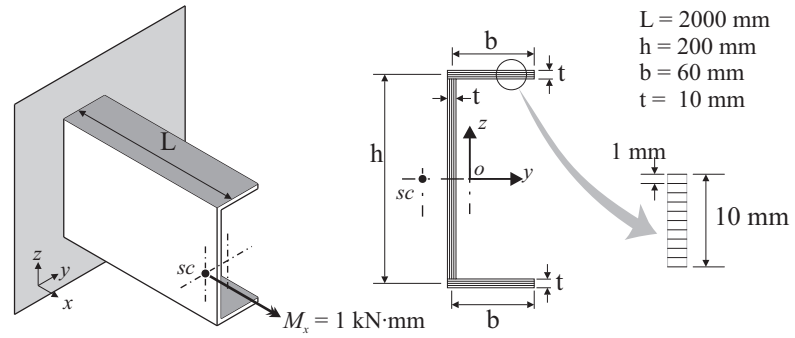


Figura 4.9-1: Viga con sección C, empotrada en un extremo y con un momento torsor en el otro.

- $\nu_{12} = 0.25$
- Espesor de cada lámina = 1.0 mm

El comportamiento a torsión de la viga con sección C se reproduce resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales (4.8-3d) y (4.8-3g), que al no presentar momentos ni bimomentos distribuidos se reducen a

$$E_{55} (\theta_x'' + \phi_\omega') + E_{88} (\theta_x'' - \phi_\omega') = 0 \quad (4.9-1a)$$

$$-E_{55} (\theta_x' + \phi_\omega) + E_{88} (\theta_x' - \phi_\omega) + E_{44} \phi_\omega'' = 0 \quad (4.9-1b)$$

Los coeficientes de rigidez de la sección transversal se obtienen evaluando las expresiones presentadas en las ecuaciones (4.6-7), así

- $E_{44} = EI_\omega = 3.518996 \times 10^{14} \text{ N mm}^4$
- $E_{55} = GI_s = 2.389333 \times 10^8 \text{ N mm}^2$
- $E_{88} = GI_{t_c} = 1.453234 \times 10^{11} \text{ N mm}^2$

Usando estos coeficientes se resuelven las EDP (4.9-1) incluyendo las siguientes condiciones de contorno:

- Giro restringido en el apoyo: $\theta_x(0) = 0$.
- Alabeo restringido en el apoyo: $\phi_\omega(0) = 0$.
- Alabeo libre en el extremo libre (sin bimomento): $\phi_\omega'(L) = 0$.
- Torsión aplicada (al integrar 4.8-3d): $E_{55} (\theta_x'(L) + \phi_\omega(L)) + E_{88} (\theta_x'(L) - \phi_\omega(L)) = M_x$

Con el fin de verificar los resultados obtenidos al aplicar los coeficientes de rigidez se elaboró un modelo con 550 elementos cuadriláteros tipo S9R5 (ABAQUS, 2006c) de 9 nodos con 5 puntos de integración (ver Figura 4.9-2).

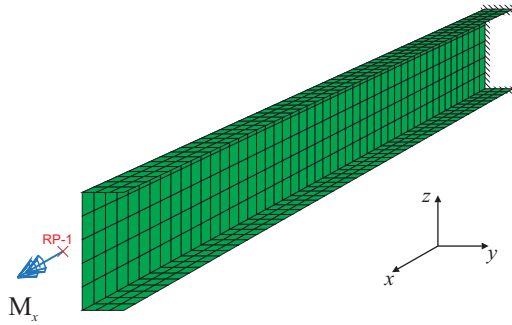


Figura 4.9-2: Viga en voladizo. Modelo con 550 elementos cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c).

En la Figura 4.9-3 se muestra el valor del ángulo de giro por torsión a lo largo de la viga obtenido usando el modelo de elementos cuadriláteros y las EDP en la longitud de la viga.

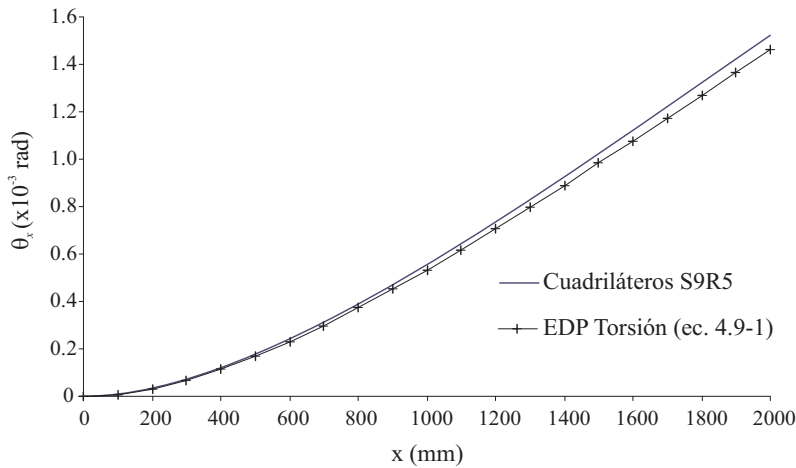


Figura 4.9-3: Variación del giro por torsión a lo largo de una viga de laminados compuestos en voladizo.

La Figura 4.9-4 muestra el valor de la derivada del ángulo de giro por unidad de longitud. Se observa que la pendiente de la curva se va reduciendo y aproximadamente a 1600 mm del apoyo tiende a ser horizontal indicando que a partir de este punto domina el comportamiento por torsión uniforme

4.9-2 Viga solicitada a flexión

Se estudian las vigas ensayadas a flexión por Correia (2004) reproduciendo sus resultados mediante las EDP definidas en la Sección 4.8 y usando los coeficientes de rigidez calculados con las expresiones dadas por las ecuaciones (4.6-7).

En la primera parte del estudio se incluye un resumen de la información obtenida

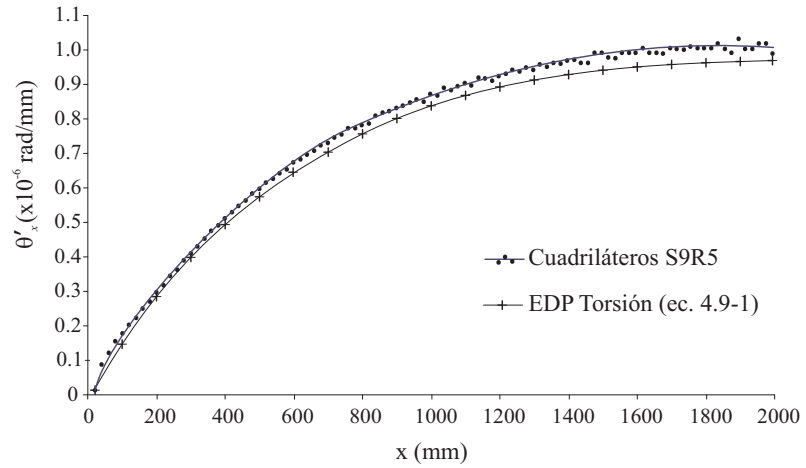


Figura 4.9-4: Derivada del ángulo de giro e intensidad del alabeo en la longitud de una viga de laminados compuestos con sección C en voladizo.

por Correia en los ensayos, en la segunda parte se describe el procedimiento usado para obtener los coeficientes de rigidez y se establecen las condiciones de contorno requeridas para resolver las EDP y al final se comentan los resultados obtenidos.

Información del ensayo de laboratorio (Datos extraídos de Correia 2004)

Correia (2004) realizó ensayos experimentales donde analizó el comportamiento a flexión de vigas pultrusionadas en GFRP (Glass fiber reinforced polymer), simplemente apoyadas y sometidas a una carga vertical concentrada en el centro del vano. Las vigas ensayadas pertenecen al mismo lote de perfiles del que realizó ensayos de caracterización de material (ver Sección 3.4).

Los perfiles ensayados tienen la sección transversal mostrada en la Figura 4.9-5

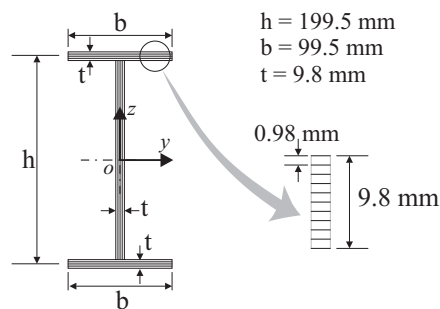


Figura 4.9-5: Sección transversal de los perfiles ensayados por Correia (2004).

Los ensayos de laboratorio en vigas se realizaron para 3 distancias entre apoyos y en cada una de ellas Correia obtuvo una relación fuerza-desplazamiento. En

la Tabla 4.9-1 se resume esta información

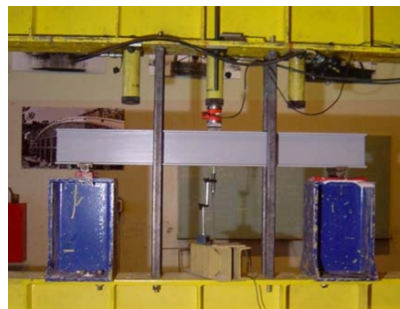
Tabla 4.9-1: Relaciones fuerza-desplazamiento obtenidas por Correia (2004) en vigas sometidas a flexión

Nombre de viga	Long. total (mm)	Dist. entre apoyos (mm)	Esbeltez L/h	$F/\delta_{\text{máx}}$ (kN / mm)
V1	4800	4000	20.1	0.587
V2	1790	1440	7.2	8.028
V3	1200	1000	5.0	16.684

En la Figura 4.9-6 se muestra el montaje utilizado para el ensayo de vigas.



(a) Viga V1 (L=4800 mm)



(b) Viga V2 (L=1440mm)

Figura 4.9-6: Sistema de aplicación de carga e instrumentación en vigas ensayadas a flexión (Correia, 2004).

Análisis

La sección transversal de las vigas estudiadas está conformada por laminados compuestos $[90,0_4]_s$, siendo conocidos los materiales componentes de las capas del laminado (ver Sección 3.4 y Figura 3.4-5). En la Tabla 4.9-2 se incluyen las propiedades usadas en los materiales individuales de las capas del laminado.

Tabla 4.9-2: Propiedades de los materiales que componen las capas del laminado (ver Sección 3.4)

	E [GPa]	ν	%Vol
Fibra	72.0	0.22	44 %
Matriz	3.2	0.38	56 %

Tal como se indicó en el Capítulo 3, en los casos donde se cuenta con las propiedades de los materiales componentes y su porcentaje de participación en volumen, las propiedades de la lámina se evalúan empleando el modelo de microestructura periódica (PMM, Barbero & Luciano 1995), resultando

- $E_1 = 33.5 \text{ GPa}$; $E_2 = 8.1 \text{ GPa}$
- $G_{12} = 2.8 \text{ GPa}$; $G_{13} = 2.8 \text{ GPa}$; $G_{23} = 2.7 \text{ GPa}$
- $\nu_{12} = 0.30$

Usando estas propiedades dentro de las expresiones (4.6-7) se calculan los coeficientes de rigidez para la sección transversal:

- $E_{33} = EI_{\tilde{y}} = 7.5179 \times 10^8 \text{ kN mm}^2$
- $E_{77} = k_2 GA = 2.8963 \times 10^4 \text{ kN}$

El comportamiento a flexión de la viga con sección I se reproduce resolviendo las ecuaciones diferenciales parciales (4.8-3c) y (4.8-3e), que al no presentar fuerzas ni momentos distribuidos se reducen a

$$E_{77} (\tilde{w}_c'' + \theta_{\tilde{y}}') = 0 \quad (4.9-2a)$$

$$-E_{77} (\tilde{w}_c' + \theta_{\tilde{y}}) + E_{33} \theta_{\tilde{y}}'' = 0 \quad (4.9-2b)$$

Suponiendo que por simetría solo se resuelve la mitad de la viga, las condiciones de contorno aplicadas a la expresión (4.9-2) son

- Giro en el centro del vano: $\theta_{\tilde{y}}(L/2) = 0$.
- Giro permitido en el apoyo: $\theta_{\tilde{y}}'(0) = 0$.
- Deflexión en el apoyo: $\tilde{w}_c(0) = 0$.
- Fuerza aplicada (al integrar 4.8-3c): $E_{77} (\tilde{w}_c'(L/2) + \theta_{\tilde{y}}(L/2)) = Q_{\tilde{z}}/2$

con

- L : Distancia entre apoyos.
- $Q_{\tilde{z}} = -100 \text{ kN}$: Fuerza aplicada en el centro del vano.

Los desplazamientos obtenidos al resolver las EDP de la expresión (4.9-2) para la viga V1 se incluyen en la Figura 4.9-7.

La Figura 4.9-8 muestra las relaciones fuerza-desplazamiento calculadas usando las EDP para vigas con esbeltoces (L/h) entre 5 y 25, y las compara con las obtenidas por Correia (2004) en sus ensayos experimentales.

Comentarios

De la Figura 4.9-7 se obtiene una relación fuerza-desplazamiento e 0.553 kN/mm , que al compararla con la medida por Correia resulta una diferencia aproximada del 6% validando de esta forma la metodología de cálculo de propiedades y las EDP para esta viga.

En la Figura 4.9-8 se reitera lo mencionado en el párrafo anterior, la relación fuerza-desplazamiento para la viga de mayor distancia entre apoyos (V1, $L = 4000$

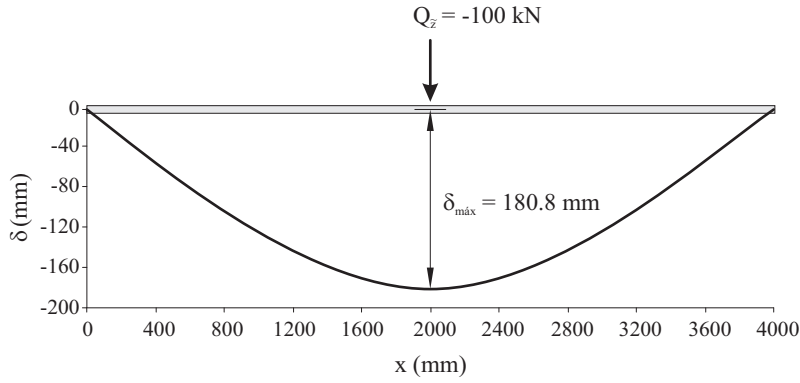


Figura 4.9-7: Deformada obtenida usando las EDP para la viga V1 ($L=4000$ mm) en laminados compuestos.

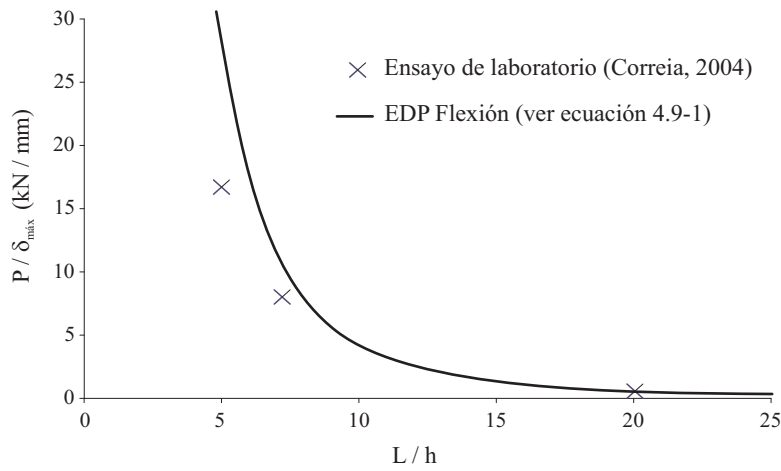


Figura 4.9-8: Comparación relaciones fuerza-desplazamiento. EDP definidas en la Sección 4.8 vs ensayo laboratorio de Correia (2004).

mm) se aproxima al valor medido por Correia. Por otra parte, se observa que no es posible definir con claridad el rango de aplicación de la metodología de cálculo de propiedades junto a las EDP al tener pocos puntos experimentales.

CAPÍTULO 5

Elementos finitos unidimensionales *BSW*

Se formulan tres elementos finitos unidimensionales con grado de continuidad C_0 para el estudio de vigas de sección abierta y laminados compuestos siguiendo las metodologías empleadas por Oñate (1992) para “*elementos de barra más avanzados*”, por Lee (2005) para análisis a flexión de vigas de materiales compuestos y por Back & Will (2008) para vigas de materiales compuestos con sección “I”.

Estos elementos se han denominado de forma genérica *BSW* (*Beam with Shear and Warping*) por considerar dentro de su cinemática los desplazamientos debidos a las deformaciones por corte inducidas por flexión, por torsión y por alabeo torsional y de acuerdo con la función de aproximación usada en cada uso se denominan:

1. *L-BSW*: Elemento de aproximación lineal de 2 nodos.
2. *Q-BSW*: Elemento de aproximación cuadrática de 3 nodos.
3. *C-BSW*: Elemento de aproximación cúbica de 4 nodos.

5.1 Aspectos generales

La formulación de los elementos finitos requiere de algunos aspectos que han sido tratados en profundidad en el Capítulo 4 y que se incluyen aquí a manera de resumen. Entre otros se mencionan los sistemas de coordenadas usados en la formulación, el campo de desplazamientos definido para las vigas de sección abierta en materiales compuestos, el campo de deformaciones correspondiente, la

formulación variacional del sistema y sus ecuaciones de equilibrio, sus relaciones constitutivas contemplando que se trata de materiales compuestos.

5.1-1 Sistema de coordenadas

En la Figura 5.1-1 se muestra el sistema cartesiano $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$, que es usado en la formulación y desarrollo de los elementos finitos planteados en este capítulo. Este sistema de coordenadas tiene su origen en el eje neutro de la sección transversal de la viga o , y está asociado a los vectores unitarios $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ siendo el vector \hat{e}_1 paralelo a la directriz de la viga.

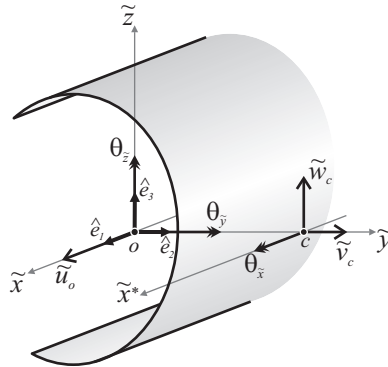


Figura 5.1-1: Sistema de coordenadas usado en los elementos finitos y disposición de los movimientos en la sección transversal

5.1-2 Campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos de una viga de sección abierta y pared delgada, definido para un punto sobre la línea media de la sección transversal es

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \tilde{u}_o - \tilde{y}\theta_z + \tilde{z}\theta_y - \omega\phi_\omega \\ \tilde{v} &= \tilde{v}_c - (\tilde{z} - \tilde{z}_c)\theta_x \\ \tilde{w} &= \tilde{w}_c + (\tilde{y} - \tilde{y}_c)\theta_x\end{aligned}\tag{5.1-1}$$

donde \tilde{u}_o , \tilde{v}_c y \tilde{w}_c son los desplazamientos de cuerpo rígido en los ejes \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} respectivamente; θ_x , θ_y y θ_z son las rotaciones alrededor de los ejes \tilde{x} , \tilde{y} y \tilde{z} ; ϕ_ω es la intensidad de alabeo por torsión a la que está sometida la sección; y ω es la función de alabeo definida desde el centro de esfuerzos cortantes c .

En la ecuación (5.1-1) se observa que el campo de desplazamientos depende de las coordenadas del punto de interés con respecto al eje neutro, del centro de

esfuerzos cortantes y del vector de movimientos definido como

$$\mathbf{u}^T = \{\tilde{u}_o, \tilde{v}_c, \tilde{w}_c, \theta_{\tilde{x}}, \theta_{\tilde{y}}, \theta_{\tilde{z}}, \phi_\omega\} \quad (5.1-2)$$

5.1-3 Deformaciones

El vector de deformaciones generalizadas es

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{\varepsilon_{\tilde{x}}^o, \kappa_{\tilde{z}}, \kappa_{\tilde{y}}, \kappa_\omega, \kappa_{\tilde{x}s}, \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o, \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o, \gamma_t\} \quad (5.1-3)$$

y está relacionado con el vector de movimientos a través del operador \mathcal{D} , tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{u} \quad (5.1-4)$$

donde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{x}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial_{\tilde{x}} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.1-5)$$

5.1-4 Formulación variacional

La energía potencial del sistema (Π) es la suma de la energía de deformación (\mathcal{U}) y la energía potencial de las cargas aplicadas (\mathcal{V}):

$$\Pi = \mathcal{U} + \mathcal{V} \quad (5.1-6)$$

La variación de la energía de deformación se obtiene aplicando el principio de los trabajos virtuales

$$\delta\mathcal{U} = \int_{\ell^{(e)}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\tilde{x} \quad (5.1-7)$$

siendo $\ell^{(e)}$ la longitud del elemento y $\boldsymbol{\sigma}$ el vector de tensiones generalizadas

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{N_{\tilde{x}}, M_{\tilde{z}}, M_{\tilde{y}}, B_\omega, M_t, Q_{\tilde{y}}, Q_{\tilde{z}}, T\} \quad (5.1-8)$$

la variación de la energía potencial de las cargas aplicadas se obtiene de igual forma como

$$\delta\mathcal{V} = \int_{\ell^{(e)}} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\tilde{x} + [\delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}]_0^{\ell^{(e)}} \quad (5.1-9)$$

con

$$\mathbf{b}^T = \{p_{\tilde{x}}, p_{\tilde{y}}, p_{\tilde{z}}, m_{\tilde{x}}, m_{\tilde{y}}, m_{\tilde{z}}, b_{\omega}\} \quad (5.1-10a)$$

$$\mathbf{q}^T = \{P_{\tilde{x}}, P_{\tilde{y}}, P_{\tilde{z}}, M_{\tilde{x}}, M_{\tilde{y}}, M_{\tilde{z}}, B_{\omega}\} \quad (5.1-10b)$$

donde: $p_{\tilde{x}}$, $p_{\tilde{y}}$ y $p_{\tilde{z}}$ son fuerzas distribuidas; $m_{\tilde{x}}$, $m_{\tilde{y}}$ y $m_{\tilde{z}}$ son momentos actuando a lo largo de la viga; b_{ω} es el bimomento distribuido; $P_{\tilde{x}}$, $P_{\tilde{y}}$ y $P_{\tilde{z}}$ son fuerzas puntuales; $M_{\tilde{x}}$, $M_{\tilde{y}}$ y $M_{\tilde{z}}$ son momentos concentrados; y B_{ω} es el bimomento concentrado.

Usando el principio de que la variación de la energía potencial de sistema es cero:

$$\delta\Pi = \delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{V} = 0 \quad (5.1-11)$$

se obtiene la ecuación de equilibrio:

$$\int_{\ell^{(e)}} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\tilde{x} = \int_{\ell^{(e)}} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} \, d\tilde{x} + [\delta\mathbf{u}^T \mathbf{q}]_0^{\ell^{(e)}} \quad (5.1-12)$$

5.1-5 Relaciones constitutivas

La relación entre el vector de fuerzas internas y el vector de deformaciones generalizadas para una viga de sección abierta y materiales compuestos es

$$\begin{Bmatrix} N_{\tilde{x}} \\ M_{\tilde{z}} \\ M_{\tilde{y}} \\ B_{\omega} \\ M_t \\ Q_{\tilde{y}} \\ Q_{\tilde{z}} \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} & E_{17} & E_{18} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} & E_{27} & E_{28} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} & E_{37} & E_{38} \\ & & & E_{44} & E_{45} & E_{46} & E_{47} & E_{48} \\ & & & & E_{55} & E_{56} & E_{57} & E_{58} \\ & & & & & E_{66} & E_{67} & E_{68} \\ & & & & & & E_{77} & E_{78} \\ & & & & & & & E_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\tilde{x}}^o \\ \kappa_{\tilde{z}} \\ \kappa_{\tilde{y}} \\ \kappa_{\omega} \\ \kappa_{\tilde{x}s} \\ \gamma_{\tilde{x}\tilde{y}}^o \\ \gamma_{\tilde{x}\tilde{z}}^o \\ \gamma_t \end{Bmatrix} \quad (5.1-13)$$

Escrita en forma compacta

$$\boldsymbol{\sigma} = \tilde{\mathbf{E}}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (5.1-14)$$

5.2 Formulación de elementos finitos unidimensionales

Se definen los desplazamientos en términos de desplazamientos nodales y funciones de interpolación; se establecen como funciones de forma e interpolación los polinomios de Lagrange y se evalúan para elementos de 2, 3 y 4 nodos, se calculan sus derivadas y se determina el jacobiano de cada tipo de elemento; y se define la matriz de deformación en el sistema de coordenadas del elemento y en el sistema normalizado.

También se determinan los coeficientes de la matriz de rigidez, el vector de fuerzas externas para cada elemento y el vector de fuerzas residuales resultante de aplicar un incremento de desplazamientos. Se indica que estos coeficientes corresponden a integrales en la longitud del elemento que deben ser evaluadas mediante métodos de integración numérica.

Por último se detallan los procedimientos usados para la definición de las matrices de transformación del sistema de coordenadas local a global para las matrices elementales de rigidez y vectores elementales de fuerzas, permitiendo su posterior ensamblaje en la matriz de rigidez global y del vector de fuerzas global respectivamente.

5.2-1 Desplazamientos

El campo de desplazamientos \mathbf{u} (ver ec. 5.1-2) para cualquier punto dentro del elemento unidimensional puede calcularse usando el vector de desplazamientos en cada nodo del elemento y funciones de interpolación nodal de la siguiente forma

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2-1)$$

donde

$$\mathbf{N} = [N_1 \mathbf{I}_7, N_2 \mathbf{I}_7, \dots, N_n \mathbf{I}_7] \quad (5.2-2)$$

y

$$\mathbf{a}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_1^{(e)} \\ \mathbf{a}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^{(e)} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{a}_i^{(e)} = \begin{Bmatrix} \tilde{u}_{o_i} \\ \tilde{v}_{c_i} \\ \tilde{w}_{c_i} \\ \theta_{\tilde{x}_i} \\ \theta_{\tilde{y}_i} \\ \theta_{\tilde{z}_i} \\ \phi_{\omega_i} \end{Bmatrix} \quad (5.2-3)$$

son, respectivamente, la matriz de funciones de interpolación \mathbf{N} , la matriz identidad de 7×7 \mathbf{I}_7 , el número de nodos del elemento n , el vector de desplazamientos del elemento $\mathbf{a}^{(e)}$, y de un nodo $\mathbf{a}_i^{(e)}$ (ver Figura 5.2-1).

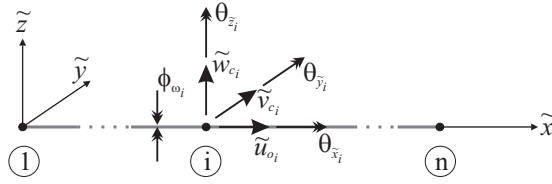


Figura 5.2-1: Desplazamientos nodales en el nodo i para un elemento unidimensional de n nodos.

5.2-2 Funciones de forma e interpolación

El vector de deformaciones depende de las componentes del vector de desplazamientos y de sus primeras derivadas (ver ecuaciones 5.1-12, 5.1-4 y 5.1-5), tal como se muestra en la formulación variacional del problema (ecuación 5.1-5). Esta condición exige garantizar que las componentes del vector de desplazamientos sean continuas dentro del elemento y entre elementos, es decir, se requiere garantizar un grado de continuidad C_o .

Por lo anterior, en este capítulo se usan como funciones de forma los polinomios de Lagrange, garantizando de esta forma la continuidad C_o en los elementos. Los polinomios se utilizan haciendo coincidir en su definición los puntos que se desean interpolar con la posición de los nodos del elemento (\tilde{x}_k)

$$N_i(\tilde{x}) = \prod_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \left(\frac{\tilde{x} - \tilde{x}_j}{\tilde{x}_i - \tilde{x}_j} \right) \tag{5.2-4}$$

donde, $N_i(\tilde{x})$ es el valor de la función de forma asociada al nodo i y evaluada en la coordenada \tilde{x} del elemento, n es el número de nodos del elemento, \tilde{x}_i es la coordenada \tilde{x} del nodo i , y \tilde{x}_j es la coordenada \tilde{x} del nodo j .

Las funciones de forma lagrangianas tienen como particularidad que toman como valor la unidad cuando se evalúan en la coordenada del nodo al que se asocian y cero en las coordenadas de los nodos restantes, esto es

$$N_i(\tilde{x}_k) = \begin{cases} 1 & \text{para } i = k \\ 0 & \text{para } i \neq k \end{cases} \tag{5.2-5}$$

En la Figura 5.2-2 se muestran las funciones de forma lagrangianas usadas para la interpolación lineal y cuadrática del campo de desplazamientos \mathbf{u} de un punto localizado en la coordenada \tilde{x} del elemento.

Las funciones de forma para un sistema de coordenadas normalizado basado en la variable ξ , donde la longitud del elemento es 2 y la coordenada $\xi \in [-1, 1]$

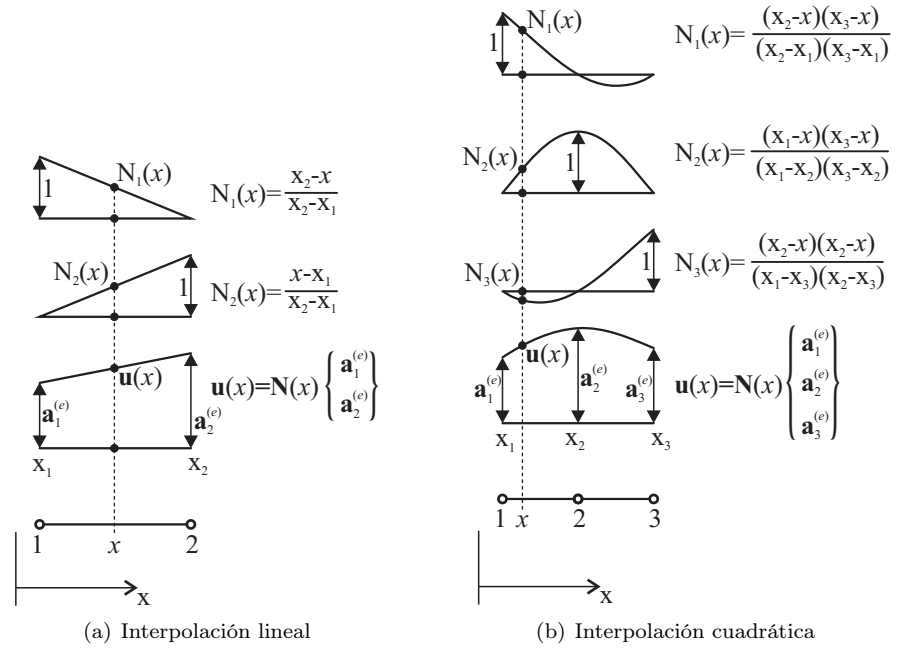


Figura 5.2-2: Funciones de forma lagrangianas para interpolación lineal y cuadrática.

corresponden a

$$N_i(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^n \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \tag{5.2-6}$$

El cálculo de la coordenada de un punto dentro del elemento se realiza utilizando las coordenadas de los nodos del elemento y las funciones de forma como funciones de interpolación, es decir, se aplica una formulación isoparamétrica en el cálculo de coordenadas. Así, la coordenada de un punto dentro del elemento en función de su coordenada normalizada (ξ) es

$$\tilde{x}(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) \tilde{x}_i \tag{5.2-7}$$

El jacobiano del elemento ($J^{(e)}$) es la relación entre la magnitud física del elemento y la longitud de referencia o la relación diferencial entre el sistema de coordenadas del elemento y el normalizado

$$J^{(e)} = \frac{d\tilde{x}(\xi)}{d\xi} \tag{5.2-8}$$

Reemplazando la ecuación (5.2-7) en la definición del jacobiano (5.2-8), resulta

$$J^{(e)} = \frac{d}{d\xi} \left(\sum_{i=1}^n N_i(\xi) \tilde{x}_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} \tilde{x}_i \quad (5.2-9)$$

Usando la regla de la cadena y la relación diferencial entre el sistema de coordenadas del elemento y el normalizado $J^{(e)}$, puede evaluarse la derivada de las funciones de forma en coordenadas del elemento dependiendo de la derivada de las funciones de forma en coordenadas normalizadas

$$\partial_{\tilde{x}} N_i(\tilde{x}) = \left(\frac{1}{J^{(e)}} \right) \partial_{\xi} N_i(\xi) \quad (5.2-10)$$

Funciones de forma para elementos de 2 nodos

El elemento de dos nodos (ver Figura 5.2-3) se desarrolla a partir de la definición de las funciones de forma lagrangianas en coordenadas normalizadas (ver ecuación 5.2-6), usando $n = 2$ resulta

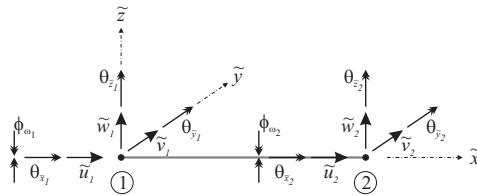


Figura 5.2-3: Elemento de 2 nodos (L-BSW).

$$N_1(\xi) = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \quad (5.2-11a)$$

$$N_2(\xi) = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \quad (5.2-11b)$$

En la Tabla 5.2-1 se incluyen las coordenadas normalizadas usadas para el cálculo de las funciones de forma, el valor de la función de forma en cada nodo y de su derivada.

Tabla 5.2-1: Funciones de forma en coordenadas normalizadas y sus derivadas para el elemento de 2 nodos.

Nodo (i)	ξ_i	$N_i(\xi)$	$\partial_{\xi} N_i$
1	-1	$\frac{1}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2}$
2	1	$\frac{1}{2}(1 + \xi)$	$\frac{1}{2}$

En la Tabla 5.2-1 se observa que las funciones de forma corresponden a polinomios de grado 1, o funciones de aproximación lineal, por esta razón al nombre del elemento de dos nodos se le incluye el prefijo *L* (*Linear* en inglés).

El cálculo del jacobiano del elemento se realiza reemplazando los valores de las derivadas de las funciones de forma (ver Tabla 5.2-1) en la ecuación (5.2-9)

$$J^{(e)} = \sum_{i=1}^2 \frac{dN_i(\xi)}{d\xi} x_i = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{\ell^{(e)}}{2} \quad (5.2-12)$$

Funciones de forma para elementos de 3 nodos

El elemento de tres nodos (ver Figura 5.2-4) se evalúa ajustando el procedimiento de cálculo de las funciones de forma, derivadas y jacobiano usado en el elemento de dos nodos.

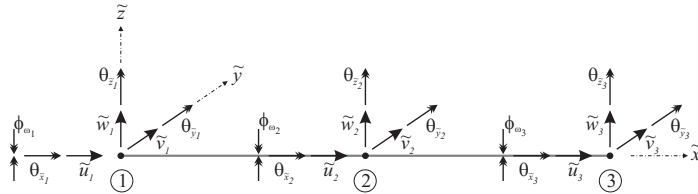


Figura 5.2-4: Elemento de 3 nodos (Q-BSW).

En la Tabla 5.2-2 se incluyen las coordenadas normalizadas usadas para el cálculo de las funciones de forma, el valor de la función de forma en cada nodo y de su derivada. Se observa que las funciones de forma corresponden a polinomios en la coordenada normalizada ξ de grado 2, por lo que se incluye al nombre del elemento el prefijo *Q* (*Quadratic* en inglés).

Tabla 5.2-2: Funciones de forma en coordenadas normalizadas y sus derivadas para el elemento de 3 nodos.

Nodo (<i>i</i>)	ξ_i	$N_i(\xi)$	$\partial_\xi N_i$
1	-1	$-\frac{\xi}{2}(1 - \xi)$	$-\frac{1}{2} + \xi$
2	0	$1 - \xi^2$	-2ξ
3	1	$\frac{\xi}{2}(1 + \xi)$	$\frac{1}{2} + \xi$

El cálculo del jacobiano del elemento, al igual que en el elemento de dos nodos resulta:

$$J^{(e)} = \frac{\ell^{(e)}}{2} \quad (5.2-13)$$

Funciones de forma para elementos de 4 nodos

El elemento de cuatro nodos (ver Figura 5.2-5) se evalúa ajustando el procedimiento de cálculo de las funciones de forma, derivadas y jacobiano usado en el elemento de dos y tres nodos.

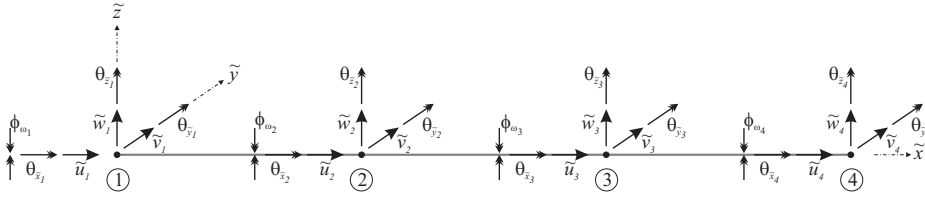


Figura 5.2-5: Elemento de 4 nodos (C-BSW).

En la Tabla 5.2-3 se incluyen las coordenadas normalizadas usadas para el cálculo de las funciones de forma, el valor de la función de forma en cada nodo y de su derivada. Se observa que las funciones de forma corresponden a polinomios en la coordenada normalizada ξ de grado 3, por lo que se incluye al nombre del elemento el prefijo *C* (*Cubic* en inglés).

Tabla 5.2-3: Funciones de forma en coordenadas normalizadas y sus derivadas para el elemento de 4 nodos.

Nodo (<i>i</i>)	ξ_i	$N_i(\xi)$	$\partial_\xi N_i$
1	-1	$-\frac{9}{16}(\xi^2 - \frac{1}{9})(\xi - 1)$	$-\frac{9}{16} [(\xi^2 - \frac{1}{9}) + 2\xi(\xi - 1)]$
2	$-\frac{1}{3}$	$\frac{27}{16}(\xi - \frac{1}{3})(\xi^2 - 1)$	$\frac{27}{16} [2\xi(\xi - \frac{1}{3}) + (\xi^2 - 1)]$
3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{27}{16}(\xi + \frac{1}{3})(\xi^2 - 1)$	$-\frac{27}{16} [2\xi(\xi + \frac{1}{3}) + (\xi^2 - 1)]$
4	1	$\frac{9}{16}(\xi^2 - \frac{1}{9})(\xi + 1)$	$\frac{9}{16} [(\xi^2 - \frac{1}{9}) + 2\xi(\xi + 1)]$

El cálculo del jacobiano del elemento, al igual que en los elementos de dos y tres nodos resulta:

$$J^{(e)} = \frac{\ell^{(e)}}{2} \tag{5.2-14}$$

5.2-3 Matriz de deformación del elemento

La matriz de deformación del elemento **B** relaciona el vector de desplazamientos nodales **a**^(e) con las deformaciones generalizadas de la sección transversal de la viga ϵ (ver ecuación 5.1-3), de la siguiente forma

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_i \mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{B} \mathbf{a}^{(e)} \tag{5.2-15}$$

Reemplazando la definición de los desplazamientos \mathbf{u} (ecuación 5.2-1), en el vector de deformaciones generalizado (ecuación 5.1-4) se obtiene

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{D}\mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2-16)$$

y comparando la expresión obtenida con la ecuación (5.2-15) resulta que

$$\mathbf{B} = \mathcal{D}\mathbf{N} \quad (5.2-17)$$

y para un nodo i

$$\mathbf{B}_i = \mathcal{D}N_i \quad (5.2-18)$$

Así, la matriz de deformación para un nodo i en el sistema de coordenadas del elemento es

$$\mathbf{B}_i(\tilde{x}) = \begin{bmatrix} \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 & 0 & N_i \\ 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_i \\ 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\tilde{x}} N_i & 0 & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad (5.2-19)$$

y en el sistema de coordenadas normalizado

$$\mathbf{B}_i(\xi) = \frac{1}{J^{(e)}} \begin{bmatrix} \partial_{\xi} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\xi} N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\xi} N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_{\xi} N_i \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\xi} N_i & 0 & 0 & J^{(e)} N_i \\ 0 & \partial_{\xi} N_i & 0 & 0 & 0 & -J^{(e)} N_i & 0 \\ 0 & 0 & \partial_{\xi} N_i & 0 & J^{(e)} N_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \partial_{\xi} N_i & 0 & 0 & -J^{(e)} N_i \end{bmatrix} \quad (5.2-20)$$

Alternativamente podría fraccionarse la matriz de deformación del elemento y extraer de ella matrices de deformación de flexión, de cortante y de torsión del elemento, sin embargo, en el ensamblaje de la matriz de rigidez del elemento tendrían que realizarse las operaciones adecuadas que permitan conservar los mecanismos de acoplamiento de flexión-torsión propios de vigas de materiales compuestos.

5.2-4 Matriz de rigidez y vector de fuerzas externas

La matriz de rigidez del elemento se evalúa usando el incremento de la energía de deformación (ver ecuación 5.1-7) en términos de la matriz de deformación del

elemento (ecuación 5.2-15) y las relaciones constitutivas del material (ecuación 5.1-14)

$$\delta\mathcal{U} = \int_{\ell^{(e)}} \delta \left(\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \right)^T \left(\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}\mathbf{a}^{(e)} \right) d\tilde{x} \quad (5.2-21a)$$

$$= \delta\mathbf{a}^{(e)T} \left(\int_{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B} d\tilde{x} \right) \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2-21b)$$

$$= \delta\mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2-21c)$$

donde la matriz de rigidez del elemento se define como

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^T \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B} d\tilde{x} \quad (5.2-22)$$

De igual forma, el vector de fuerzas externas se evalúa usando el incremento de la energía potencial de las cargas aplicadas (ver ecuación 5.1-9) en términos del vector de desplazamientos del elemento (5.2-3) y las fuerzas puntuales del elemento (5.1-10b)

$$\delta\mathcal{V} = \int_{\ell^{(e)}} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{b} d\tilde{x} + \delta\mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{q}^{(e)} \quad (5.2-23a)$$

$$= \int_{\ell^{(e)}} \delta \left(\mathbf{N}\mathbf{a}^{(e)} \right)^T \mathbf{b} d\tilde{x} + \delta\mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{q}^{(e)} \quad (5.2-23b)$$

$$= \delta\mathbf{a}^{(e)T} \left(\int_{\ell^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\tilde{x} + \mathbf{q}^{(e)} \right) \quad (5.2-23c)$$

$$= \delta\mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} \quad (5.2-23d)$$

donde el vector de fuerzas externas del elemento ($\mathbf{f}^{(e)}$), se define por

$$\mathbf{f}^{(e)} = \int_{\ell^{(e)}} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\tilde{x} + \mathbf{q}^{(e)} \quad (5.2-24)$$

Usando las ecuaciones (5.2-21c) y (5.2-23) en el principio de la variación nula de la energía potencial del sistema (ecuación 5.1-11) resulta

$$\delta\mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \delta\mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{f}^{(e)} = 0 \quad (5.2-25)$$

Sacando los incrementos de desplazamientos nodales como un factor común

$$\delta\mathbf{a}^{(e)T} \left(\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} \right) = 0 \quad \forall \quad \delta\mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2-26)$$

se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento de n nodos

$$\mathbf{K}^{(e)} \mathbf{a}^{(e)} - \mathbf{f}^{(e)} = 0 \quad (5.2-27)$$

donde $\mathbf{K}^{(e)}$ es la matriz de rigidez del elemento de $(7 \times n) \times (7 \times n)$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{1j}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{1n}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{K}_{i1}^{(e)} & & \mathbf{K}_{ij}^{(e)} & & \mathbf{K}_{in}^{(e)} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n1}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{nj}^{(e)} & \cdots & \mathbf{K}_{nn}^{(e)} \end{bmatrix} \quad (5.2-28)$$

cada submatriz $\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ es simétrica y de tamaño 7×7 y está formada por los coeficientes

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{11} &= \int_{\ell^{(e)}} E_{11} N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{12} &= \int_{\ell^{(e)}} E_{16} N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{13} &= \int_{\ell^{(e)}} E_{17} N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{14} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{15} + E_{18}) N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{15} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{13} N_j' + E_{17} N_j) N_i' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{16} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{12} N_j' - E_{16} N_j) N_i' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{17} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{14} N_i' N_j' + E_{15} N_i' N_j \\ &\quad - E_{18} N_i' N_j] d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{22} &= \int_{\ell^{(e)}} E_{66} N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{23} &= \int_{\ell^{(e)}} E_{67} N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{24} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{56} + E_{68}) N_i' N_j' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{25} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{36} N_j' + E_{67} N_j) N_i' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{26} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{26} N_j' - E_{66} N_j) N_i' d\tilde{x} \\ [\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{27} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{46} N_i' N_j' + E_{56} N_i' N_j \\ &\quad - E_{68} N_i' N_j] d\tilde{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{33} &= \int_{\ell^{(e)}} E_{77} N'_i N'_j \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{34} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{57} + E_{78}) N'_i N'_j \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{35} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{37} N'_j + E_{77} N_j) N'_i \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{36} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{27} N'_j - E_{67} N_j) N'_i \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{37} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{47} N'_i N'_j + E_{57} N'_i N_j \\
&\quad - E_{78} N'_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{44} &= \int_{\ell^{(e)}} (E_{55} + 2E_{58} + E_{88}) N'_i N'_j \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{45} &= \int_{\ell^{(e)}} [(E_{35} + E_{38}) N'_i N'_j \\
&\quad + (E_{57} + E_{78}) N'_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{46} &= \int_{\ell^{(e)}} [(E_{25} + E_{28}) N'_i N'_j \\
&\quad - (E_{56} + E_{68}) N'_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{47} &= \int_{\ell^{(e)}} [(E_{45} + E_{48}) N'_i N'_j \\
&\quad + (E_{55} - E_{88}) N'_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{55} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{33} N'_i N'_j + E_{37} (N'_i N_j + N_i N'_j) \\
&\quad + E_{77} N_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{56} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{23} N'_i N'_j + E_{27} N_i N'_j - E_{36} N'_i N_j \\
&\quad - E_{67} N_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{57} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{34} N'_i N'_j + (E_{35} - E_{38}) N'_i N_j \\
&\quad + E_{47} N_i N'_j + (E_{57} - E_{78}) N_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{66} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{22} N'_i N'_j - E_{26} (N'_i N_j + N_i N'_j) \\
&\quad + E_{66} N_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{67} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{24} N'_i N'_j + (E_{25} - E_{28}) N'_i N_j \\
&\quad - E_{46} N_i N'_j - (E_{56} + E_{68}) N_i N_j] \, d\tilde{x} \\
[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{77} &= \int_{\ell^{(e)}} [E_{44} N'_i N'_j + (E_{45} - E_{48}) (N_i N'_j \\
&\quad + N'_i N_j) + (E_{55} - 2E_{58} + E_{88}) N_i N_j] \, d\tilde{x} \tag{5.2-29}
\end{aligned}$$

donde $N'_i = \partial_{\tilde{x}} N_i$, y los coeficientes E_{ij} se definen de acuerdo con las relaciones constitutivas de la sección transversal (ver ecuación 5.1-13).

El vector de fuerzas nodales del elemento $\mathbf{f}^{(e)}$ se evalúa como la sumatoria del vector de fuerzas equivalentes debidas a fuerzas distribuidas $\mathbf{f}_b^{(e)}$ y el vector de

fuerzas concentradas aplicadas en cada nodo $\mathbf{q}^{(e)}$, así

$$\mathbf{f}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^{(e)} \\ \mathbf{f}_2^{(e)} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n^{(e)} \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{f}_i^{(e)} = \mathbf{f}_{\mathbf{b}_i}^{(e)} + \mathbf{q}_i^{(e)} \quad (5.2-30)$$

con

$$\mathbf{f}_{\mathbf{b}_i}^{(e)} = \int_{\ell^{(e)}} N_i \mathbf{b} \, d\tilde{x} \quad (5.2-31)$$

$$\mathbf{q}_i^{(e)} = \{P_{\tilde{x}i}, P_{\tilde{y}i}, P_{\tilde{z}i}, M_{\tilde{x}i}, M_{\tilde{y}i}, M_{\tilde{z}i}, B_{\omega i}\}^T \quad (5.2-32)$$

donde: $P_{\tilde{x}}$, $P_{\tilde{y}}$ y $P_{\tilde{z}}$ son fuerzas puntuales; $M_{\tilde{x}}$, $M_{\tilde{y}}$ y $M_{\tilde{z}}$ son momentos concentrados; B_{ω} es el bimomento concentrado; y \mathbf{b} es el vector de fuerzas distribuidas tal como se definió en la ecuación (5.1-10a).

5.2-5 Aporte de los desplazamientos al vector de fuerzas residuales

El cálculo de las fuerzas residuales $\Delta \mathbf{R}^{(e)}$ generadas por desplazamientos impuestos se realiza partiendo del principio de los trabajos virtuales para un elemento unidimensional aislado sin fuerzas exteriores en el que

$$\int_{\ell^{(e)}} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\tilde{x} - \delta \mathbf{a}^{(e)T} \Delta \mathbf{R}^{(e)} = 0 \quad (5.2-33)$$

Reemplazando el incremento de las deformaciones ($\delta \boldsymbol{\varepsilon}$) por su equivalente en términos de la matriz de deformación (\mathbf{B}) de acuerdo con la ecuación (5.2-15) se tiene que

$$\int_{\ell^{(e)}} \delta \mathbf{a}^{(e)T} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\tilde{x} - \delta \mathbf{a}^{(e)T} \Delta \mathbf{R}^{(e)} = 0 \quad (5.2-34)$$

y sacando los incrementos de desplazamientos nodales impuestos como un factor común

$$\delta \mathbf{a}^{(e)T} \left\{ \int_{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\tilde{x} - \Delta \mathbf{R}^{(e)} \right\} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{a}^{(e)} \quad (5.2-35)$$

se define el vector de fuerzas residuales resultante de aplicar un incremento de desplazamientos como

$$\Delta \mathbf{R}^{(e)} = \int_{\ell^{(e)}} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\tilde{x} \quad (5.2-36)$$

5.2-6 Ensamblaje

El ensamblaje se realiza después de transformar las variables nodales, algunas localizadas en el eje neutro y otras en el centro de torsión según la formulación de vigas, a un punto arbitrario p de coordenadas $(\tilde{y}_p, \tilde{z}_p)$ en la sección transversal.

En los casos donde el elemento finito es parte de un conjunto de elementos se transforman los desplazamientos nodales del sistema de coordenadas del elemento al sistema de coordenadas global.

A continuación se detallan los procedimientos utilizados para definir las matrices de transformación descritas y con ellas el ensamblaje de la matriz de rigidez y del vector de fuerzas en el sistema de coordenadas global.

Transformación de variables nodales

Suponiendo que cambiar el punto de aplicación de las variables nodales no tiene influencia en el alabeo de la viga por cuanto su centro de esfuerzos cortantes permanece constante, se obtienen los desplazamientos usados en la formulación del elemento (\mathbf{u}) en función de los desplazamientos aplicados en un punto arbitrario (\mathbf{u}_p) como

$$\mathbf{u} = \mathbf{L}\mathbf{u}_p \quad (5.2-37)$$

Considerando que la relación entre las componentes del vector de desplazamientos en la formulación y en un punto arbitrario p de coordenadas $(\tilde{y}_p, \tilde{z}_p)$ es

$$\begin{aligned} \tilde{u}_o &= \tilde{u}_p + \tilde{y}_p \theta_{\tilde{z}} - \tilde{z}_p \theta_{\tilde{y}} \\ \tilde{v}_c &= \tilde{v}_p + (\tilde{z}_p - \tilde{z}_c) \theta_{\tilde{x}} \\ \tilde{w}_c &= \tilde{w}_p - (\tilde{y}_p - \tilde{y}_c) \theta_{\tilde{x}} \end{aligned} \quad (5.2-38)$$

se define

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\tilde{z}_p & \tilde{y}_p & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_{\tilde{z}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta_{\tilde{y}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \begin{aligned} \Delta_{\tilde{y}} &= \tilde{y}_p - \tilde{y}_c \\ \Delta_{\tilde{z}} &= \tilde{z}_p - \tilde{z}_c \end{aligned} \quad (5.2-39)$$

De igual forma se tiene que la relación entre el vector de desplazamientos nodales usado en la formulación para un nodo i y el vector de desplazamientos en un

punto arbitrario es

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{a}_{i_p}^{(e)} \quad (5.2-40)$$

Transformación de sistema de coordenadas

Suponiendo que el elemento finito hace parte de un conjunto de elementos definidos dentro de un sistema arbitrario de coordenadas cartesianas asociado a los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ y denominado sistema global (x, y, z) (ver Figura 5.2-6), y que el sistema de coordenadas del elemento $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ definido en la Sección 5.1 se denomina sistema local, se establece que la transformación del vector de desplazamientos del sistema de coordenadas global a local se realiza a partir de la transformación de los vectores unitarios $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ a $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

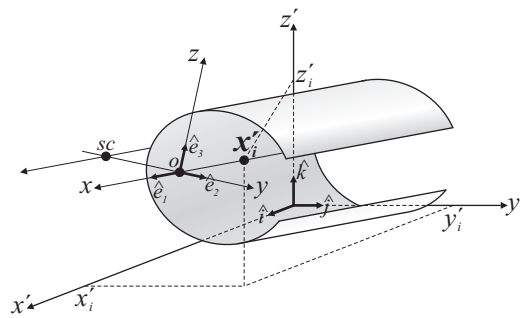


Figura 5.2-6: Sistemas de coordenadas global y local de los elementos finitos

De la Figura 5.2-6 se determina que las coordenadas globales de un punto localizado sobre el eje neutro de la viga son:

$$\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)^T \quad (5.2-41)$$

Así, la matriz de transformación \mathcal{R} que transforma el vector de desplazamientos en coordenadas globales (\mathbf{u}') al vector de desplazamientos en coordenadas locales (\mathbf{u})

$$\mathbf{u} = \mathcal{R}\mathbf{u}' \quad (5.2-42)$$

se define usando la matriz de transformación \mathcal{T} de coordenadas globales a locales como

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} \mathcal{T} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{T} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2-43)$$

De igual forma el vector de desplazamientos nodales en coordenadas locales para un nodo i se obtienen aplicando la matriz de transformación \mathcal{R} al vector de desplazamientos nodales en coordenadas globales

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \mathcal{R} \mathbf{a}'_i^{(e)} \quad (5.2-44)$$

La matriz de transformación de coordenadas globales a locales \mathcal{T} se define como

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} e_{1_i} & e_{1_j} & e_{1_k} \\ e_{2_i} & e_{2_j} & e_{2_k} \\ e_{3_i} & e_{3_j} & e_{3_k} \end{bmatrix} \quad (5.2-45)$$

Suponiendo que la directriz de la viga es una línea recta que pasa por los puntos \mathbf{x}_1 y \mathbf{x}_n , se define el vector unitario \hat{e}_1

$$\hat{e}_1 = \frac{\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1}{\ell^{(e)}} = e_{1_i} \hat{i} + e_{1_j} \hat{j} + e_{1_k} \hat{k} \quad ; \quad \ell^{(e)} = \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_1\| \quad (5.2-46)$$

donde $\ell^{(e)}$ es la longitud del elemento.

Una vez se conoce el vector \hat{e}_1 se evalúan los vectores \hat{e}_2 y \hat{e}_3 siguiendo el procedimiento descrito a continuación:

- Vector \hat{e}_1 *paralelo* al vector \hat{k} (eje z). Se supone que el vector \hat{e}_2 es paralelo a \hat{i} (eje x) y el vector unitario \hat{e}_3 se completa siguiendo la regla de la mano derecha (ver Figura 5.2-7).

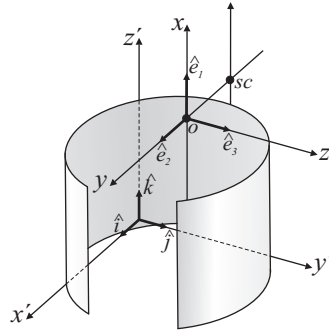


Figura 5.2-7: Dirección vectores unitarios del sistema local cuando \hat{e}_1 es paralelo a \hat{k}

resultando la matriz \mathcal{T}

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.2-47)$$

- Vector \hat{e}_1 diferente al vector \hat{k} (eje z). Se usa un vector auxiliar paralelo al eje \hat{k} (\vec{P}_z) para definir los vectores unitarios del sistema de coordenadas del elemento, tal que

$$\hat{e}_2 = \vec{P}_z \times \hat{e}_1 = e_{2_i} \hat{i} + e_{2_j} \hat{j} + e_{2_k} \hat{k} \quad (5.2-48a)$$

$$\hat{e}_3 = \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = e_{3_i} \hat{i} + e_{3_j} \hat{j} + e_{3_k} \hat{k} \quad (5.2-48b)$$

Reemplazando el vector \vec{P}_z por sus componentes $(0, 0, 1)$ en la ecuación (5.2-48a) y operando las expresiones, se obtienen las componentes de los vectores unitarios del sistema local en términos de las componentes del vector \hat{e}_1

$$\hat{e}_2 = -e_{1_j} \hat{i} + e_{1_i} \hat{j} + 0 \hat{k} \quad (5.2-49a)$$

$$\hat{e}_3 = -(e_{1_i} e_{1_k}) \hat{i} - (e_{1_j} e_{1_k}) \hat{j} + (e_{1_i}^2 + e_{1_j}^2) \hat{k} \quad (5.2-49b)$$

resultando la matriz \mathcal{T}

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} e_{1_i} & e_{1_j} & e_{1_k} \\ -e_{1_j} & e_{1_i} & 0 \\ -e_{1_i} e_{1_k} & -e_{1_j} e_{1_k} & e_{1_i}^2 + e_{1_j}^2 \end{bmatrix} \quad (5.2-50)$$

Transformación de la matriz de rigidez y vector de fuerzas

Las transformaciones de la matriz de rigidez y el vector de fuerzas externas se basan en las transformaciones aplicadas al vector de desplazamientos nodales, que en su orden son:

- Transformación del sistema global de coordenadas al sistema del elemento (\mathcal{R}).
- Transformación de las variables nodales desde un punto arbitrario en su sección transversal (\mathbf{L}) hasta su eje neutro y centro de torsión de acuerdo con la formulación de vigas.

Así, la matriz de transformación total se define como

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathcal{R} \quad (5.2-51)$$

De tal forma que \mathbf{L} permite expresar los desplazamientos nodales de la formulación del elemento ($\mathbf{a}_i^{(e)}$) en función de los desplazamientos nodales aplicados en un

punto arbitrario de la sección transversal y definidos en el sistema global de coordenadas ($\mathbf{a}'_i^{(e)}$).

$$\mathbf{a}_i^{(e)} = \mathbf{L}\mathbf{a}'_i^{(e)} \quad (5.2-52)$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales ($\mathbf{K}'_{ij}^{(e)}$) se obtiene teniendo en cuenta que el incremento de energía en el sistema es independiente al sistema de coordenadas, así, la variación de la energía de deformación (5.2-21c) escrita en notación indicial se define en términos de los desplazamientos de la ecuación (5.2-52)

$$\delta\mathcal{U} = \delta\mathbf{a}_i^{(e)\top} \mathbf{K}'_{ij}^{(e)} \mathbf{a}_j^{(e)} \quad (5.2-53a)$$

$$= \delta \left(\mathbf{L}\mathbf{a}'_i^{(e)} \right)^\top \mathbf{K}'_{ij}^{(e)} \left(\mathbf{L}\mathbf{a}'_j^{(e)} \right) \quad (5.2-53b)$$

$$= \delta\mathbf{a}'_i^{(e)\top} \left(\mathbf{L}^\top \mathbf{K}'_{ij}^{(e)} \mathbf{L} \right) \mathbf{a}'_j^{(e)} \quad (5.2-53c)$$

$$= \delta\mathbf{a}'_i^{(e)\top} \mathbf{K}'_{ij}^{(e)} \mathbf{a}'_j^{(e)} = \delta\mathcal{U}' \quad (5.2-53d)$$

resultando la matriz de rigidez del elemento en coordenadas globales ($\mathbf{K}'_{ij}^{(e)}$) como

$$\mathbf{K}'_{ij}^{(e)} = \mathbf{L}^\top \mathbf{K}_{ij}^{(e)} \mathbf{L} \quad (5.2-54)$$

Aplicando la definición de la matriz de rigidez en coordenadas locales (ver ecuación 5.2-22) se reescribe la matriz en coordenadas globales de la siguiente forma

$$\mathbf{K}'_{ij}^{(e)} = \int_{\ell^{(e)}} \mathbf{B}_i^\top \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{B}_j' d\ell^{(e)} \quad (5.2-55)$$

donde la matriz de deformación en coordenadas globales corresponde a

$$\mathbf{B}'_i = \mathbf{B}_i \mathbf{L} \quad (5.2-56)$$

De igual forma, el vector de fuerzas en el sistema de coordenadas globales ($\mathbf{f}'_i^{(e)}$) se obtiene usando el incremento de la energía potencial de las cargas aplicadas en términos de los desplazamientos nodales en coordenadas globales (5.2-52)

$$\delta\mathcal{V} = \delta\mathbf{a}_i^{(e)\top} \mathbf{f}_i^{(e)} \quad (5.2-57a)$$

$$= \delta \left(\mathbf{L}\mathbf{a}'_i^{(e)} \right)^\top \mathbf{f}_i^{(e)} \quad (5.2-57b)$$

$$= \delta\mathbf{a}'_i^{(e)\top} \left(\mathbf{L}^\top \mathbf{f}_i^{(e)} \right) \quad (5.2-57c)$$

$$= \delta \mathbf{a}'_i{}^{(e)\top} \mathbf{f}'_i{}^{(e)} = \delta \mathcal{V}' \quad (5.2-57d)$$

siendo

$$\mathbf{f}'_i{}^{(e)} = \mathbf{L}^\top \mathbf{f}_i{}^{(e)} \quad (5.2-58)$$

5.3 Integración numérica

Por la complejidad que presenta el cálculo de algunas integrales de la matriz de rigidez (5.2-28), su evaluación se simplificará empleando uno de los métodos más conocidos de integración numérica, el método de Gauss-Legendre, que permiten evaluar la integral de una función como un sumatorio de productos.

A continuación se incluye una breve descripción del método de Gauss-Legendre y se presenta el procedimiento utilizado para la integración de la matriz de rigidez.

5.3-1 Método de Gauss-Legendre

El método de integración numérica de Gauss-Legendre permite calcular la integral de una función $f(\xi)$ en el intervalo $\xi \in [-1, 1]$

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (5.3-1)$$

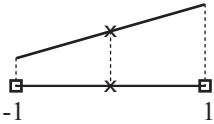
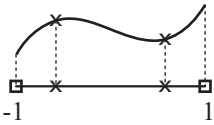
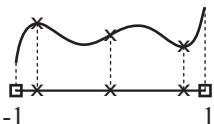
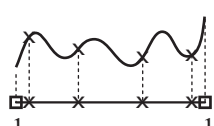
como una suma de los productos de los valores del integrando en una serie de puntos conocidos en el interior del intervalo por unos factores de peso determinados. Es decir, para un número de puntos conocidos m (también denominados cuadraturas), se tiene

$$I_m = \sum_{i=1}^m [f(\xi_i) W_i] \quad (5.3-2)$$

donde W_i es el factor de peso correspondiente al punto de integración localizado en ξ_i y m es el número de puntos conocidos utilizado para la integración. Se destaca que la cuadratura de Gauss-Legendre de orden m integra exactamente un polinomio de grado $(2m - 1)$ o menor.

En la Tabla 5.3-1 se muestran las coordenadas normalizadas (ξ_i , $\xi \in [-1, 1]$) y el factor de peso (W_i) para las primeras 4 cuadraturas de Gauss-Legendre.

Tabla 5.3-1: Localización de puntos y factores de peso para las cuadraturas de Gauss. (Adaptado de Kuhl & Meschke 2003)

m^*	$(2m - 1)$	$f(\xi_i)$	Localización ξ_i	Factor de peso W_i
1	1		0	2
2	3		$\pm\sqrt{1/3}$	1
3	5		$\pm\sqrt{0.6}$ 0	5/9 8/9
4	7		$\pm\sqrt{\frac{3-\sqrt{4.8}}{7}}$ $\pm\sqrt{\frac{3+\sqrt{4.8}}{7}}$	$\frac{18+\sqrt{30}}{36}$ $\frac{18-\sqrt{30}}{36}$

* m : Número de cuadraturas.

5.3-2 Integración de la matriz de rigidez

La integración numérica de la matriz de rigidez se realiza coeficiente a coeficiente en función del orden de los polinomios que los conforman. A manera de ejemplo, en la Tabla 5.3-2 se incluye el orden del polinomio en la coordenada normalizada ξ para el coeficiente $[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{11}$ (ver ecuación 5.2-29) en función del número de nodos del elemento.

$$[\mathbf{K}_{ij}^{(e)}]_{11} = \int_{\ell^{(e)}} E_{11} N_i' N_j' d\tilde{x} \tag{5.3-3}$$

Tabla 5.3-2: Orden del polinomio a integrar en función del número de nodos del elemento

Número de nodos	Orden del polinomio en ξ	Referencia
2	0	Tabla 5.2-1
3	2	Tabla 5.2-2
4	4	Tabla 5.2-3

En las ecuaciones (5.2-29) se observa que los coeficientes de las matrices de rigidez

$\mathbf{K}_{ij}^{(e)}$ pueden agruparse en submatrices según las componentes de funciones de forma que incluyen

$$\mathbf{K}_{ij}^{(e)} = \begin{bmatrix} [A]_{4 \times 4} & [B]_{4 \times 3} \\ sim. & [C]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (5.3-4)$$

Estas submatrices se presentan en la Tabla 5.3-3, donde se indican los términos relacionados con funciones de forma que definen cada submatriz, se establece el orden del polinomio que se requiere integrar en función de los términos mencionados y el número de cuadraturas necesarias para integrar exactamente el polinomio.

Tabla 5.3-3: Orden de los polinomios y cuadraturas requeridas en las submatrices para integrar la matriz de rigidez en función del número de elementos.

Submatriz	Términos involucrados			Orden del polinomio en ξ	m^*
	$N'_i \cdot N'_j$	$N'_i \cdot N_j$	$N_i \cdot N_j$		
A	✓	✗	✗	$2n^{**} - 4$	$n - 1$
B	✓	✓	✗	$2n - 3$	$n - 1$
C	✓	✓	✓	$2n - 2$	n

* m : Número de puntos requeridos para la integración numérica.

** n : Número de nodos del elemento.

La Tabla 5.3-3 muestra que la submatriz C requiere n cuadraturas para evaluar de forma exacta la integral frente a las submatrices A y B que requieren $n - 1$, siendo n el número de nodos del elemento.

Los elementos desarrollados incluyen deformaciones tangenciales en su cinemática, esto los hace sensibles a fenómenos de bloqueo, entendiendo por bloqueo la incapacidad intrínseca que tiene un elemento de satisfacer la condición de deformación transversal nula cuando su longitud tiende al infinito.

El fenómeno de bloqueo por tensiones tangenciales condiciona al elemento a sufrir un fenómeno de soberrrigidez numérica a medida que la longitud del elemento aumenta hasta llegar a “bloquear” la solución. Una alternativa para sortear este problema consiste en subintegrar los términos que incluyen deformaciones transversales utilizando un número de puntos de integración inferior al necesario para su cálculo exacto (Oñate, 1992).

En la Sección 5.4 se muestra que es necesario integrar selectivamente el elemento de aproximación lineal para evitar el fenómeno de bloqueo por tensiones tangenciales, de esta forma la integración de la matriz C (ver Tabla 5.3-3) se realiza usando únicamente 1 punto de integración.

5.4 Estudio de la integración numérica exacta vs. reducida

En esta sección se incluyen los análisis realizados con los elementos finitos implementados (*L-BSW*, *Q-BSW* y *C-BSW*) para determinar las diferencias entre aplicar integración numérica exacta de la matriz de rigidez del elemento e integración reducida.

Los análisis incluyen el estudio de resultados para diferentes relaciones de esbeltez de viga (análisis de bloqueo por tensiones tangenciales), y para diferentes niveles de discretización (análisis de convergencia).

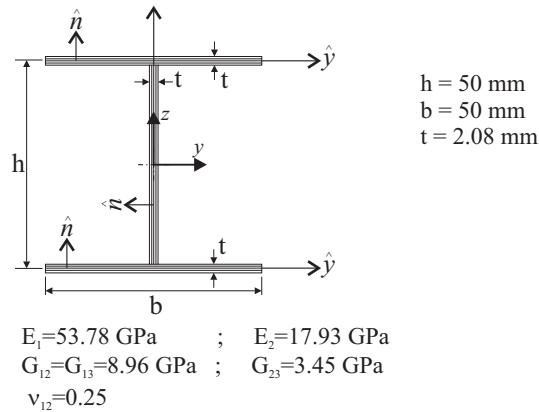


Figura 5.4-1: Geometría de la viga con sección I y propiedades de las láminas que la conforman.

En la Figura 5.4-1 se incluye la geometría y las propiedades de la viga de laminados compuestos usada para el análisis de influencia del método de integración numérica de la matriz de rigidez del elemento. Los laminados son unidireccionales $[\varphi]_{16}$ con $\varphi \in [0, 15, 30, 45, 75, 90]$ y las propiedades de las capas que conforman los laminados corresponden a láminas en fibra de vidrio con matriz epóxica (Gl.Ep. Reddy 2004). Se indica que la geometría elegida para la sección y las propiedades de lámina fueron las consideradas por Back & Will (2008); Sheikh & Thomsen (2008); Kim et al. (2006); Lee (2005) en sus análisis.

El estudio del método de integración numérica se realiza para vigas sometidas a torsión y a flexión de forma separada, los resultados obtenidos con los elementos implementados se comparan con los resultados de modelos creados con elementos cuadriláteros tipo *S9R5* (ABAQUS, 2006c). En la Figura 5.4-2 se muestra uno de los modelos utilizados para verificación de resultados que corresponde al análisis de torsión de una viga de 1000 mm de longitud.

El análisis a flexión se realiza sobre vigas en voladizo con una carga vertical de 2 kN impuesta en el extremo libre, de cada una se extrae el desplazamiento vertical w del centro de esfuerzos cortantes de la viga. De igual forma, en el análisis a torsión se impone un momento torsor de 1 kN mm en el extremo libre y de cada viga se extrae el giro por torsión θ de la sección transversal alrededor del centro de esfuerzos cortantes.

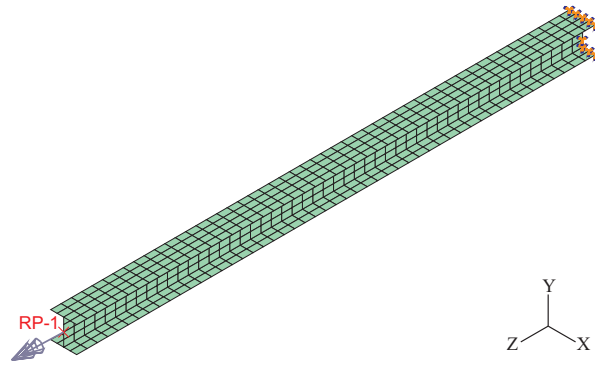


Figura 5.4-2: Modelo de elementos cuadriláteros *S9R5* (ABAQUS, 2006c), usado para simular una viga *I* de 1000 mm de longitud sometida a torsión.

5.4-1 Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales

El bloqueo por tensiones tangenciales se estudia para los casos de integración numérica exacta y reducida de la matriz de rigidez del elemento variando la relación de esbeltez λ entre 1 y 20 ($\lambda = L/h$). Los resultados obtenidos con los elementos implementados se etiquetan con *BSW* y se comparan con resultados de modelizaciones con elementos cuadriláteros, que a su vez se etiquetan con *S9R5* (ABAQUS, 2006c).

Integración exacta

En las Figuras 5.4-3 y 5.4-4 se incluyen los resultados del análisis a flexión y torsión respectivamente, realizado para vigas conformadas por laminados unidireccionales $[\varphi]_{16}$.

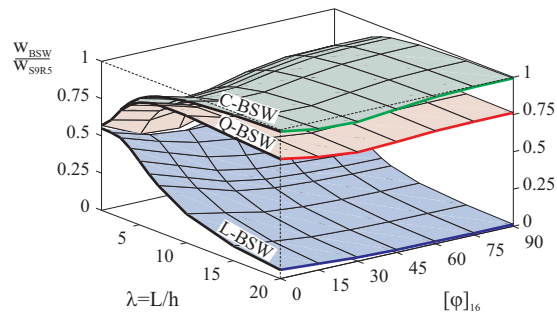


Figura 5.4-3: Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a flexión. Integración exacta de la matriz de rigidez.

En las Figuras 5.4-3 y 5.4-4 se observa que el elemento *L-BSW* presenta bloqueo, sus resultados tienden a cero a medida que aumenta la longitud de la viga,

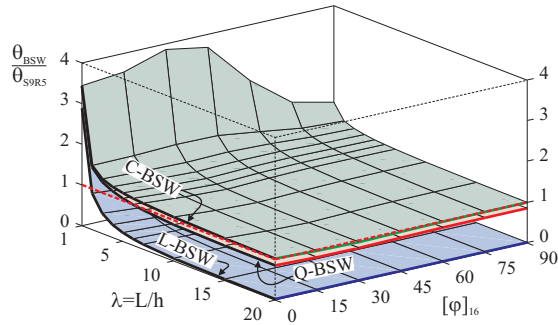


Figura 5.4-4: Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a torsión. Integración exacta de la matriz de rigidez.

mostrando un comportamiento más acusado para el análisis a torsión que a flexión.

El elemento *Q-BSW* no presenta bloqueo y sus resultados para la máxima esbeltez considerada ($\lambda = 20$) se aproximan a los de modelizaciones con cuadriláteros *S9R5* (ABAQUS, 2006c) entre un 70 % y un 80 % para el análisis a flexión, y entre un 80 % y un 85 % para el análisis a torsión, dependiendo del ángulo del laminado.

Los resultados del elemento *C-BSW* no muestran bloqueo y en la máxima esbeltez analizada se acercan más a lo obtenido con los modelos de elementos cuadriláteros que los elementos *Q-BSW*, variando para el análisis a flexión entre un 93 % y un 99 %, y entre un 95 % y un 99 % para el análisis a torsión, según el ángulo del laminado.

Integración reducida

En las Figuras 5.4-5 y 5.4-6 se incluyen los resultados del análisis a flexión y a torsión respectivamente, al utilizar integración reducida de la matriz de rigidez para modelos de vigas conformadas por laminados unidireccionales $[\varphi]_{16}$.

En las Figuras 5.4-5 y 5.4-6 se observa que la integración reducida eliminó el fenómeno bloqueo en el elemento *L-BSW*, obteniendo resultados más aproximados a los de modelos con elementos cuadriláteros, por ejemplo, para una esbeltez de 20 se aproximan entre un 70 % y un 75 % en el análisis a flexión, y entre un 93 % y un 95 % en el análisis a torsión, dependiendo del ángulo del laminado.

Mejoran los resultados obtenidos con los elementos *Q-BSW* y no se aprecian diferencias con los modelos que usan elementos *C-BSW*, sus resultados varían para el análisis a flexión entre un 93 % y un 99 %, y entre un 98 % y un 99 % para el análisis a torsión, dependiendo del ángulo del laminado.

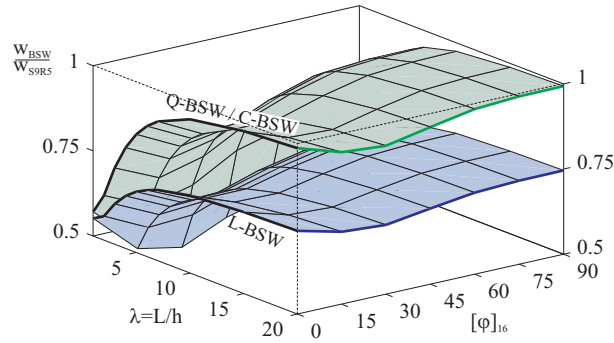


Figura 5.4-5: Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a flexión. Integración reducida de la matriz de rigidez.

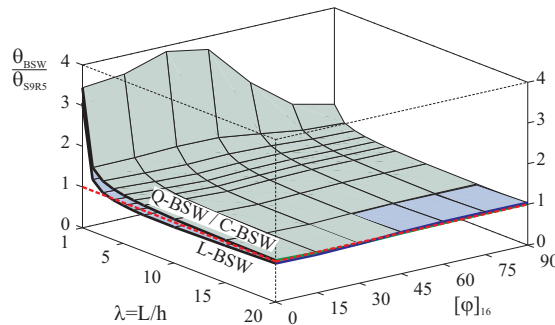


Figura 5.4-6: Análisis de bloqueo por tensiones tangenciales en una viga sometida a torsión. Integración reducida de la matriz de rigidez.

Comparación

En las Figuras 5.4-7 y 5.4-8 se comparan algunos resultados de integración exacta e integración reducida entre sí.

En su orden y de acuerdo con las Figuras 5.4-7 y 5.4-8, los resultados que más se aproximan a los obtenidos con las modelizaciones de elementos cuadráticos para flexión y torsión pertenecen a los elementos *C-BSW* con integración exacta y *Q-BSW* con integración reducida, destacando que entre ellos no hay diferencias apreciables, después se encuentran los resultados del elemento *Q-BSW* con integración exacta y por último los resultados de *L-BSW* con integración reducida.

5.4-2 Análisis de convergencia

Se estudia la convergencia de los elementos implementados (*L-BSW*, *Q-BSW* y *C-BSW*) para los casos en que se utiliza integración numérica exacta y reducida de la matriz de rigidez del elemento finito. El análisis se realiza en vigas de longitud constante (esbeltez $\lambda = 20$) variando el número de elementos en cada modelo.

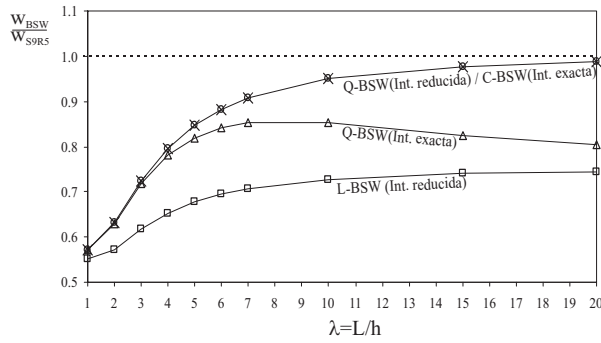


Figura 5.4-7: Comparación de resultados en análisis de bloqueo entre integración exacta de elementos *Q-BSW* y *C-BSW*, e integración reducida de *L-BSW* y *Q-BSW* para una viga sometida a flexión.

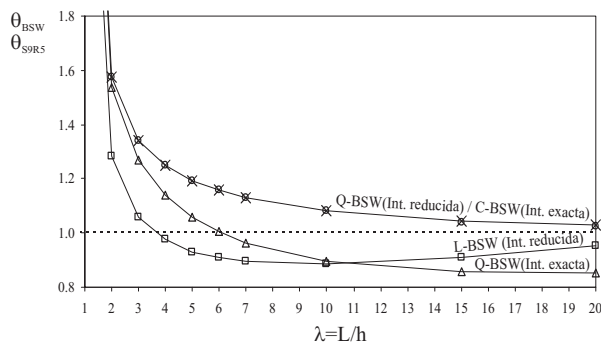


Figura 5.4-8: Comparación de resultados en análisis de bloqueo entre integración exacta de elementos *Q-BSW* y *C-BSW*, e integración reducida de *L-BSW* y *Q-BSW* para una viga sometida a torsión.

Los resultados obtenidos con los elementos implementados se etiquetan con *BSW* y se comparan con los resultados de modelizaciones con elementos cuadriláteros etiquetados con *S9R5* (ABAQUS, 2006c).

Integración exacta

En las Figuras 5.4-9 y 5.4-10 se incluyen los resultados del análisis a flexión y torsión respectivamente, realizado para vigas conformadas por laminados unidireccionales [45]₁₆.

En estas Figuras se observa que incluso con 8 elementos *L-BSW* los resultados obtenidos no pueden considerarse válidos, esto a causa del fenómeno de bloqueo en el elemento revisado en la Sección 5.4-1

Los modelos que usan elementos *Q-BSW* convergen a los resultados obtenidos con los modelos de *C-BSW* a partir de 5 elementos. Los modelos de vigas a flexión

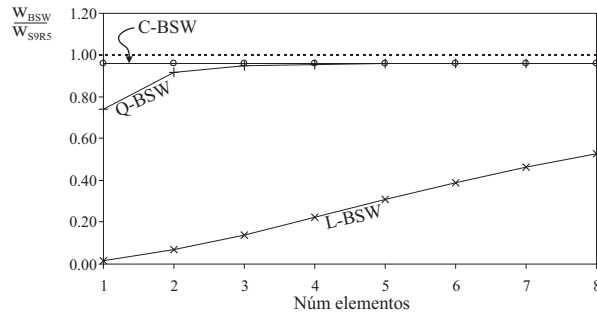


Figura 5.4-9: Análisis de convergencia en una viga sometida a flexión. Integración exacta de la matriz de rigidez.

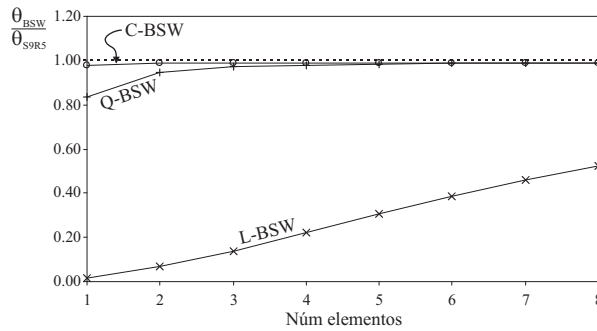


Figura 5.4-10: Análisis de convergencia en una viga sometida a torsión. Integración exacta de la matriz de rigidez.

analizados con elementos *C-BSW* presentan convergencia con un elemento, y en los modelos a torsión se requiere de al menos dos elementos.

Integración reducida

En las Figuras 5.4-11 y 5.4-12 se incluyen los resultados del análisis a flexión y a torsión respectivamente, al utilizar integración reducida de la matriz de rigidez para modelos de vigas conformadas por laminados unidireccionales [45]₁₆.

En la Figura 5.4-11 se observa que el modelo con *L-BSW* requiere de más de 8 elementos para aproximarse a los resultados obtenidos con el modelo que usa elementos *Q-BSW*, y en la Figura 5.4-12 se muestra que requiere solamente 6 elementos.

Los modelos de vigas a flexión con elementos *Q-BSW* presentan convergencia con un elemento, y en los modelos con vigas a torsión, se requiere de al menos dos elementos, mientras que los modelos con elementos *C-BSW* presentan convergencia con un solo elemento.

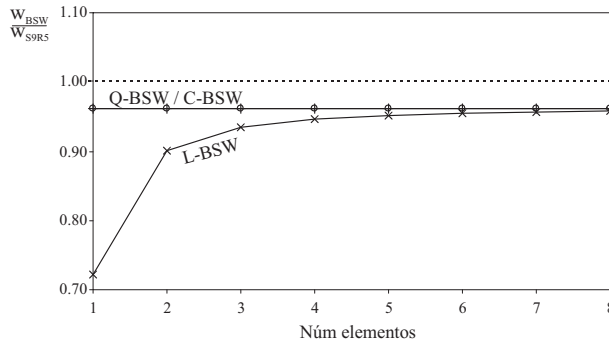


Figura 5.4-11: Análisis de convergencia en una viga sometida a flexión. Integración reducida de la matriz de rigidez.

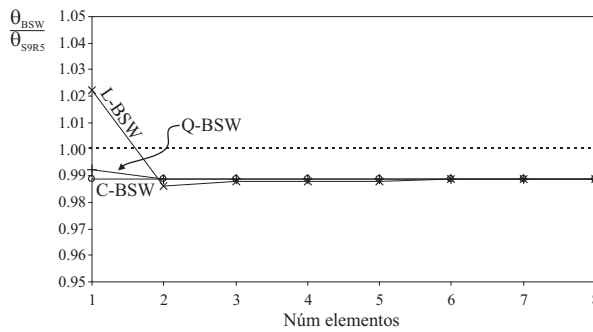


Figura 5.4-12: Análisis de convergencia en una viga sometida a torsión. Integración reducida de la matriz de rigidez.

Comparación

En las Figuras 5.4-13 y 5.4-14 se comparan algunos resultados de integración exacta e integración reducida entre sí.

En su orden, los resultados que más se aproximan a los obtenidos con las modelizaciones de elementos cuadráticos para flexión y torsión pertenecen a los elementos *C-BSW* con integración exacta y *Q-BSW* con integración reducida, destacando que entre ellos no hay diferencias apreciables.

En los análisis a flexión se encuentra que los resultados del elemento *Q-BSW* con integración exacta se aproximan más a los de elementos *C-BSW* que los resultados de *L-BSW* con integración reducida, mientras que en los análisis a torsión sucede lo contrario.

En las Figuras 5.4-15 y 5.4-16 se comparan los resultados obtenidos con los elementos *L-BSW*, *Q-BSW* y *C-BSW* teniendo como parámetro de comparación el número de nudos. No se incluyen los resultados de los modelos con elementos de aproximación lineal *L-BSW* e integración exacta por presentar bloqueo de la

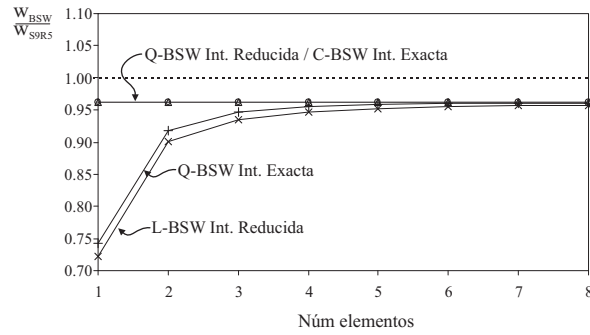


Figura 5.4-13: Comparación de resultados en análisis de convergencia entre integración exacta de elementos Q-BSW y C-BSW, e integración reducida de L-BSW y Q-BSW para una viga sometida a flexión.

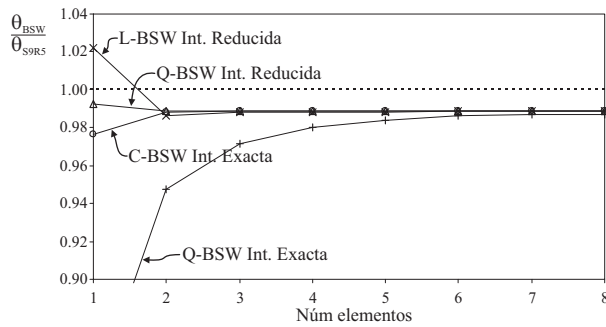


Figura 5.4-14: Comparación de resultados en análisis de convergencia entre integración exacta de elementos Q-BSW y C-BSW, e integración reducida de L-BSW y Q-BSW para una viga sometida a torsión.

solución.

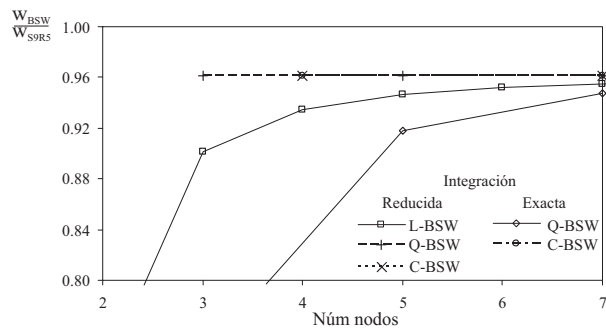


Figura 5.4-15: Comparación de resultados en análisis de convergencia según el número de nodos para una viga sometida a flexión.

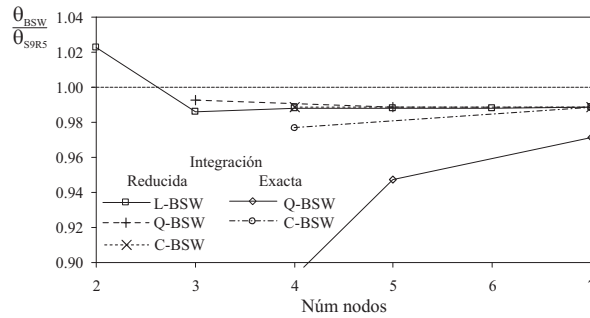


Figura 5.4-16: Comparación de resultados en análisis de convergencia según el número de nodos para una viga sometida a torsión.

Las Figuras 5.4-15 y 5.4-16 muestran que los modelos con elementos *L-BSW* e integración reducida presentan un mejor comportamiento que los de elementos *Q-BSW* con integración exacta para el mismo número de nodos.

También se observa que no hay diferencias importantes entre los resultados obtenidos con modelos de elementos *Q-BSW* con integración reducida y con modelos de elementos *C-BSW*.

5.5 Ejemplos de aplicación

Se analiza una viga con sección *C* usando los elementos finitos unidimensionales de dos nodos con integración reducida *L-BSW* formulados en este capítulo. La viga está sometida a dos cargas puntuales excéntricas respecto a su centro de torsión tal como se muestra en la Figura 5.5-1.

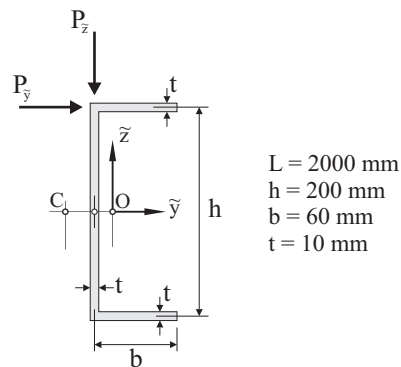


Figura 5.5-1: Viga con sección *C*, con dos cargas puntuales en el otro.

El análisis se divide en cuatro casos donde varían las condiciones de contorno de la viga (voladizo y biempotrado) y su material (homogéneo y en laminados compuestos), con las siguientes propiedades de material

Material homogéneo: Acero

$$E = 210000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.30$$

Laminado compuesto $[90, 0_4]_s$ ($t = 10 \text{ mm}$), Propiedades de cada capa:

$$E_1 = 53780 \text{ MPa}$$

$$E_2 = 17930 \text{ MPa}$$

$$G_{12} = 8960 \text{ MPa}$$

$$G_{13} = 8960 \text{ MPa}$$

$$G_{23} = 3450 \text{ MPa}$$

$$\nu_{12} = 0.25$$

Previo al análisis de la viga se requiere transformar las fuerzas puntuales $P_{\bar{y}}$ y $P_{\bar{z}}$ excéntricas respecto al centro de torsión a fuerzas y momentos equivalentes impuestos en el centro de torsión, tal como se muestra en la Figura 5.5-2.

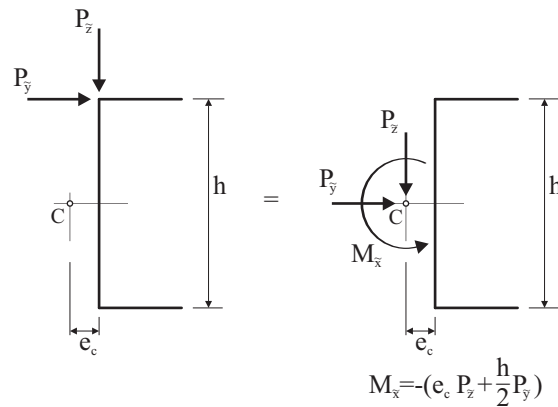


Figura 5.5-2: Transformación de las fuerzas puntuales $P_{\bar{y}}$ y $P_{\bar{z}}$ a sus equivalentes en el centro de torsión.

5.5-1 Viga con sección C en voladizo

El primer caso corresponde a una viga con sección C en voladizo sometida a dos cargas puntuales en el extremo libre tal como lo muestra la Figura 5.5-3. En este caso se estudia el comportamiento de la viga para dos tipos de material: homogéneo isótropo y laminado compuesto.

Las modelizaciones se realizan usando 20 elementos unidimensionales de dos nodos con integración reducida (*L-BSW*) y sus resultados se comparan con los obtenidos de un modelo de verificación con 550 elementos cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c) de 9 nodos con 5 puntos de integración (ver Figura 5.5-4).

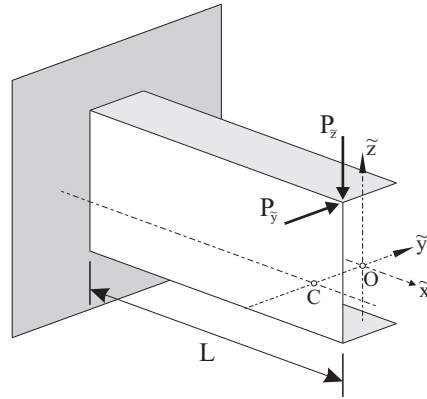


Figura 5.5-3: Viga con sección C , empotrada en un extremo y con dos cargas puntuales en el otro.

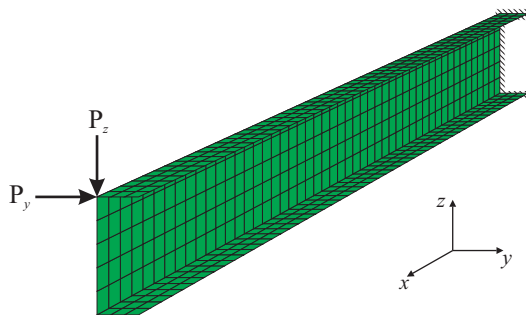


Figura 5.5-4: Viga en voladizo. Modelo con 550 elementos cuadriláteros tipo S9R5 (ABAQUS, 2006c).

Material homogéneo e isótropo

El análisis de la viga con sección C en voladizo conformada por un material homogéneo e isótropo se realiza aplicando las siguientes cargas puntuales (ver Figura 5.5-3)

$$P_y = 1000 \text{ N}$$

$$P_z = 1000 \text{ N}$$

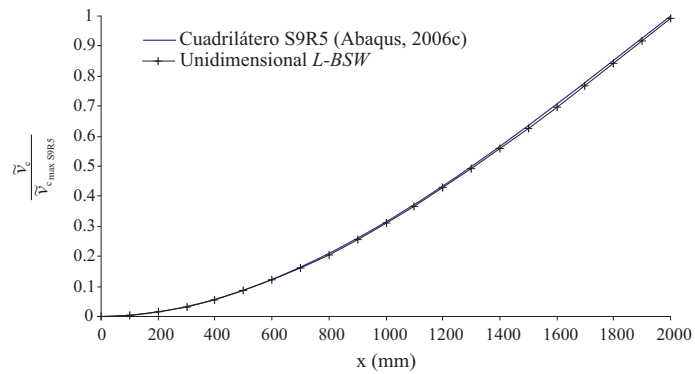
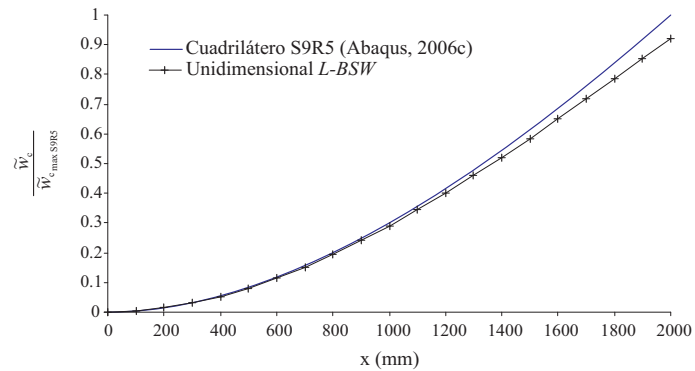
Los resultados obtenidos se incluyen en la Tabla 5.5-1, donde se muestran los valores máximos de desplazamiento horizontal (\tilde{v}_c), vertical (\tilde{w}_c) y de giro por torsión ($\theta_{\tilde{x}}$) en el extremo libre de la viga. Los datos se miden en el centro de torsión de la viga y se compararán con los recopilados en el modelo elaborado con elementos cuadriláteros.

En las Figuras 5.5-5, 5.5-6 y 5.5-7 se muestra la variación de los desplazamientos \tilde{v}_c , \tilde{w}_c y $\theta_{\tilde{x}}$ respectivamente, del centro de torsión en la longitud de la viga. Se indica que los resultados se presentan normalizados respecto al máximo valor

Tabla 5.5-1: Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga homogénea en voladizo.

	Elementos	
	Unidimensionales <i>L-BSW</i>	Cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c)
\tilde{v}_c mm	12.076	12.187
\tilde{w}_c mm	-0.689	-0.747
$\theta_{\tilde{x}}$ rad	-0.022	-0.020

obtenido con el modelo de elementos cuadriláteros en cada caso.

**Figura 5.5-5:** Viga en voladizo (material homogéneo). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.**Figura 5.5-6:** Viga en voladizo (material homogéneo). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.

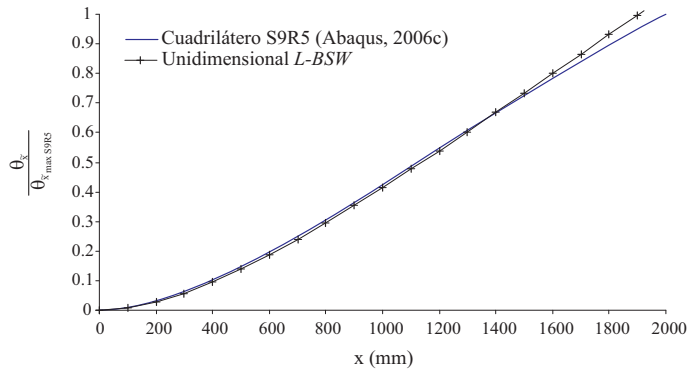


Figura 5.5-7: Viga en voladizo (material homogéneo). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.

Laminados compuestos

El análisis de la viga conformada por laminados compuestos se realiza usando las siguientes cargas puntuales (ver Figura 5.5-3)

$$P_{\tilde{y}} = 250 \text{ N}$$

$$P_{\tilde{z}} = 250 \text{ N}$$

En la Tabla 5.5-2 se incluyen los resultados obtenidos del análisis y se muestran los valores máximos de desplazamiento horizontal (\tilde{v}_c), vertical (\tilde{w}_c) y de giro por torsión ($\theta_{\tilde{x}}$) en el extremo libre de la viga. Los datos se miden en el centro de torsión de la viga y se compararán con los recopilados en el modelo elaborado con elementos cuadriláteros.

Tabla 5.5-2: Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga en laminados compuestos en voladizo.

	Elementos	
	Unidimensionales <i>L-BSW</i>	Cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c)
\tilde{v}_c mm	13.662	13.676
\tilde{w}_c mm	-0.787	-0.790
$\theta_{\tilde{x}}$ rad	-0.044	-0.045

En las Figuras 5.5-8, 5.5-9 y 5.5-10 se muestra la variación de los desplazamientos \tilde{v}_c , \tilde{w}_c y $\theta_{\tilde{x}}$ respectivamente, del centro de torsión en la longitud de la viga. Se indica que los resultados se presentan normalizados respecto al máximo valor obtenido con el modelo de elementos cuadriláteros en cada caso.

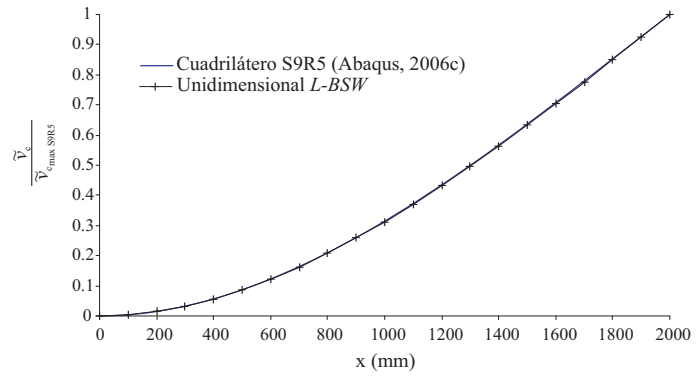


Figura 5.5-8: Viga en voladizo (laminado compuesto). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.

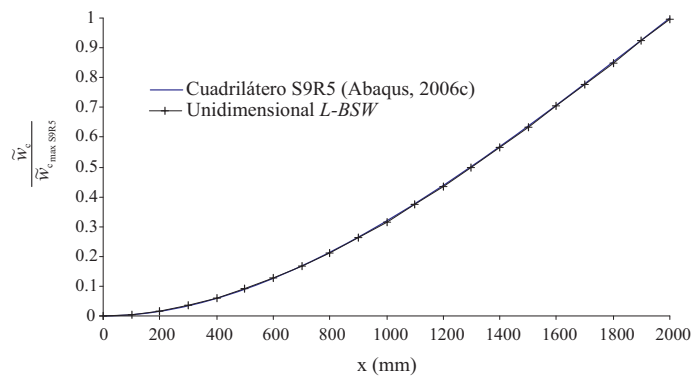


Figura 5.5-9: Viga en voladizo (laminado compuesto). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.

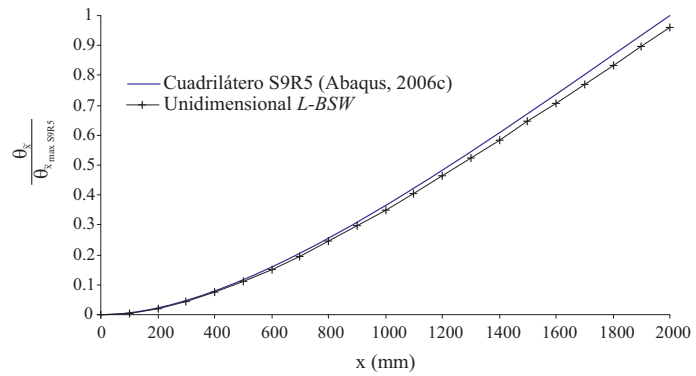


Figura 5.5-10: Viga en voladizo (laminado compuesto). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.

5.5-2 Análisis de una viga biempotrada con cargas en el centro del vano

El segundo caso trata de una viga con sección C biempotrada sometida a dos cargas puntuales en el centro del vano. Al igual que en el primer caso se estudia el comportamiento de la viga para materiales homogéneos y laminados compuestos. Los análisis se realizan usando 20 elementos unidimensionales de dos nodos con integración reducida (*L-BSW*) y sus resultados se comparan con los obtenidos de un modelo de verificación con 550 elementos cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c) de 9 nodos con 5 puntos de integración (ver Figura 5.5-11).

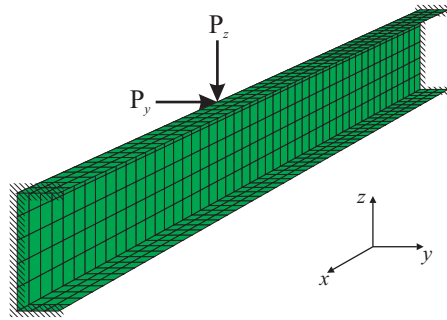


Figura 5.5-11: Viga biempotrada. Modelo con 550 elementos cuadriláteros tipo S9R5 (ABAQUS, 2006c).

Material homogéneo e isótropo

El análisis de la viga con sección C conformada por un material homogéneo e isótropo se realiza aplicando las siguientes cargas puntuales (ver Figura 5.5-3)

$$P_y = 2500 \text{ N}$$

$$P_z = 2500 \text{ N}$$

Los resultados obtenidos se incluyen en la Tabla 5.5-3, donde se muestran los valores máximos de desplazamiento horizontal (\tilde{v}_c), vertical (\tilde{w}_c) y de giro por torsión ($\theta_{\tilde{x}}$) en el centro del vano de la viga. Los datos se miden en el centro de torsión de la viga y se compararán con los recopilados en el modelo elaborado con elementos cuadriláteros.

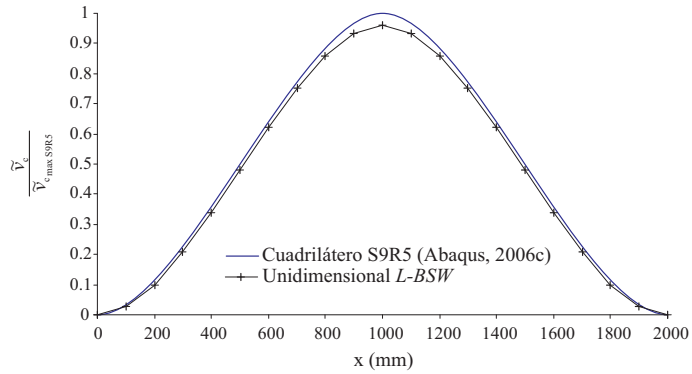
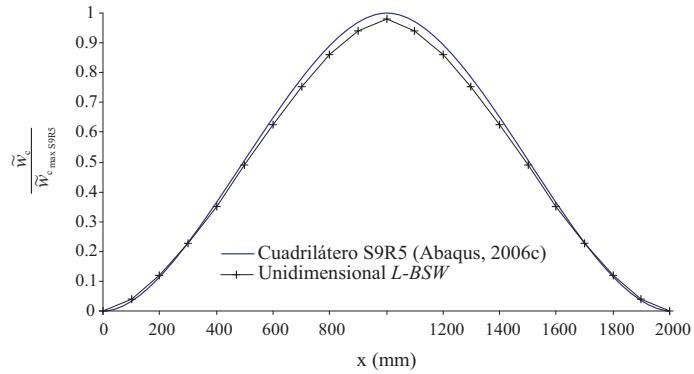
En las Figuras 5.5-12, 5.5-13 y 5.5-14 se muestra la variación de los desplazamientos \tilde{v}_c , \tilde{w}_c y $\theta_{\tilde{x}}$ respectivamente, del centro de torsión en la longitud de la viga. Se indica que los resultados se presentan normalizados respecto al máximo valor obtenido con el modelo de elementos cuadriláteros en cada caso.

Laminados compuestos

El análisis de la viga conformada por laminados compuestos se realiza usando las siguientes cargas puntuales (ver Figura 5.5-3)

Tabla 5.5-3: Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga homogénea biempotrada.

	Elementos	
	Unidimensionales <i>L-BSW</i>	Cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c)
\tilde{v}_c mm	0.473	0.492
\tilde{w}_c mm	-0.0321	-0.0328
$\theta_{\tilde{x}}$ rad	-0.0051	-0.0052

**Figura 5.5-12:** Viga biempotrada (material homogéneo). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.**Figura 5.5-13:** Viga biempotrada (material homogéneo). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.

$$P_{\tilde{y}} = 250 \text{ N}$$

$$P_{\tilde{z}} = 250 \text{ N}$$

En la Tabla 5.5-4 se incluyen los resultados obtenidos del análisis y se muestran

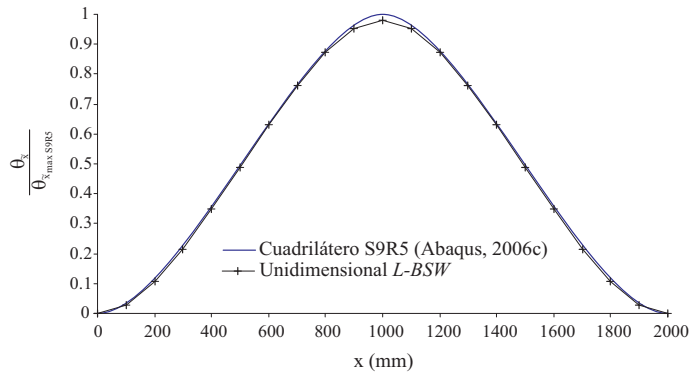


Figura 5.5-14: Viga biempotrada (material homogéneo). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.

los valores máximos de desplazamiento horizontal (\tilde{v}_c), vertical (\tilde{w}_c) y de giro por torsión ($\theta_{\tilde{x}}$) en el extremo libre de la viga. Los datos se miden en el centro de torsión de la viga y se compararán con los recopilados en el modelo elaborado con elementos cuadriláteros.

Tabla 5.5-4: Desplazamientos y giros máximos del centro de torsión de la viga biempotrada en laminados compuestos.

	Elementos	
	Unidimensionales <i>L-BSW</i>	Cuadriláteros S9R5 (ABAQUS, 2006c)
\tilde{v}_c mm	0.217	0.233
\tilde{w}_c mm	-0.01733	-0.01762
$\theta_{\tilde{x}}$ rad	-0.00281	-0.00292

En las Figuras 5.5-15, 5.5-16 y 5.5-17 se muestra la variación de los desplazamientos \tilde{v}_c , \tilde{w}_c y $\theta_{\tilde{x}}$ respectivamente, del centro de torsión en la longitud de la viga. Se indica que los resultados se presentan normalizados respecto al máximo valor obtenido con el modelo de elementos cuadriláteros en cada caso.

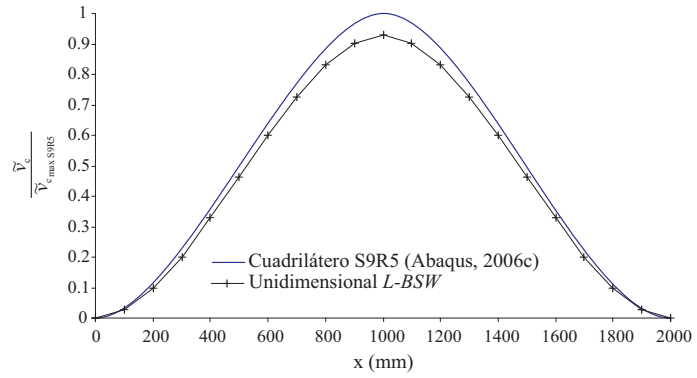


Figura 5.5-15: Viga biempotrada (laminado compuesto). Variación del desplazamiento horizontal del centro de torsión a lo largo de la viga.

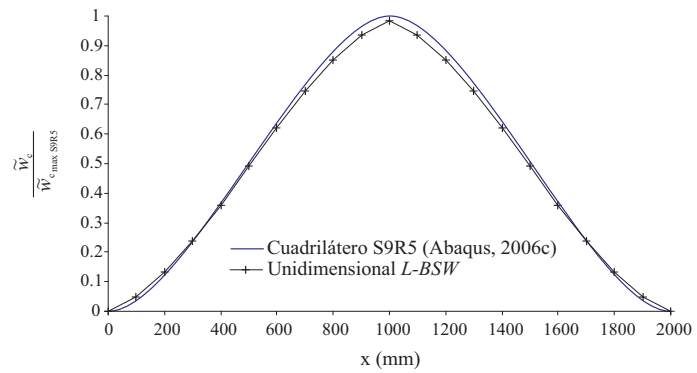


Figura 5.5-16: Viga biempotrada (laminado compuesto). Variación del desplazamiento vertical del centro de torsión a lo largo de la viga.

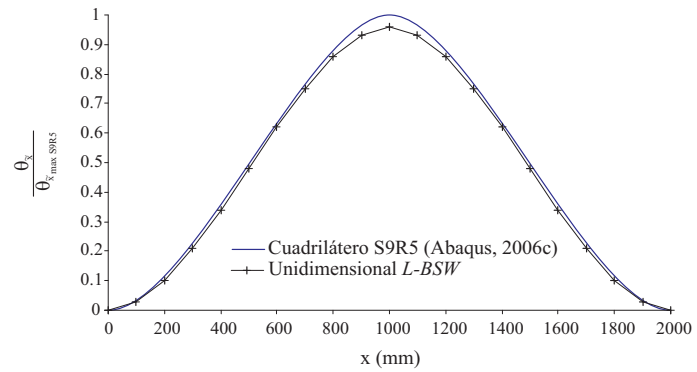


Figura 5.5-17: Viga biempotrada (laminado compuesto). Variación del giro por torsión a lo largo de la viga.

CAPÍTULO 6

Conclusiones y líneas futuras de investigación

6.1 Conclusiones

Como conclusión general de la Tesis se indica que se han formulado e implementado elementos finitos de aproximación lineal *L-BSW*, cuadrática *Q-BSW* y cúbica *C-BSW* para el estudio del comportamiento a flexión y torsión de vigas de sección abierta en laminados compuestos con alabeo restringido en los cuales se contempla la influencia de las deformaciones tangenciales por flexión y torsión, comprobando la validez de los resultados obtenidos al compararlos con resultados de modelizaciones de verificación creadas con elementos cuadriláteros *S9R5* (ABAQUS, 2006c) y con la literatura.

Sobre las vigas homogéneas e isotrópicas

Se ha establecido un campo de desplazamientos que permite estudiar el comportamiento de vigas homogéneas de pared delgada incluyendo las deformaciones tangenciales por flexión y por torsión determinando las tensiones generalizadas que actúan en una sección transversal en función de la matriz de rigidez generalizada e incluyendo las expresiones para evaluar las tensiones en cada punto de la sección en función de las tensiones generalizadas.

Las expresiones que se han desarrollado muestran que incluir el alabeo secundario junto a la hipótesis de deformaciones angulares (Wu & Sun, 1992) permite definir de forma natural las ecuaciones generales que desacoplan los tipos de torsión que actúan en la sección transversal de las vigas que se analizan, es decir, la torsión en el espesor de la pared y la torsión por deformaciones de corte.

Se ha demostrado la importancia de incluir el alabeo restringido dentro de la

formulación de vigas de sección abierta y pared delgada indicando que induce tensiones longitudinales comparables a las presentadas en la viga por flexión.

Aplicar las ecuaciones diferenciales formuladas en vigas con sección I y C permite verificar que las deformaciones tangenciales por torsión no son relevantes en los análisis que se han realizado debido a la baja relación entre el módulo de rigidez torsional y la inercia polar (GJ/GI_{t_c}) que presentan, sin embargo, al aplicarlas a una viga con sección cerrada se evidencia la importancia de considerar las deformaciones de corte en el análisis.

Sobre los laminados de materiales compuestos

Se han planteado los conceptos básicos para el tratamiento de laminados compuestos incluyendo como formulación base la teoría de laminados de primer orden (FSDT). Se ha implementado la formulación establecida en *Fortran 90* usándola como una subrutina tipo usuario UGenS (ABAQUS, 2006b) en ABAQUS (2006c) para determinar la influencia de las propiedades de los materiales componentes de un laminado en el cálculo de su módulo a flexión, contrastando los resultados obtenidos con los de los ensayo elaborados por Correia (2004), encontrando diferencias inferiores al 10 % para los rangos de propiedades usados respecto a los datos experimentales.

Una vez se ha validado la correcta implementación de la formulación, esta ha permitido analizar vigas de materiales compuestos mediante la integración de las rigideces de cada laminado en función de la posición y orientación que ocupan dentro de la sección transversal de la viga.

Sobre las vigas de sección abierta en laminados compuestos

Se ha propuesto una metodología para el cálculo de la matriz de rigidez de secciones transversales de vigas de sección abierta en laminados compuestos y se ha comprobado que usar una *condición de esfuerzos nulos en el contorno* permite aproximarse mejor a los resultados obtenidos con modelos de verificación frente a los resultados obtenidos con la *condición de tensiones nulas en el contorno*.

Se ha comprobado que al usar la condición de tensiones nulas en el contorno de las capas es limitado y aplicable solo en aquellos casos donde los laminados son unidireccionales o presentan esquemas de apilamiento con capas a 0° y 90° por no considerar el efector de acoplamiento entre las diferentes capas del laminado, mientras que la condición de esfuerzos nulos en el contorno del laminado es más general y aproximada frente a los resultados obtenidos mediante modelos de verificación.

Se ha analizado una viga sometida a torsión, contrastando los resultado de un modelo de verificación usando 550 elementos cuadriláteros frente a las ecuaciones diferenciales parciales - EDP del problema de torsión usando los coeficientes de rigidez obtenidos aplicando la metodología propuesta. Se ha observado que el ángulo máximo de giro por torsión con los elementos cuadriláteros es de 1.5225×10^{-3} rad, frente a 1.4566×10^{-3} rad obtenido con las EDP, presentando una diferencia del 4.3 %, mostrando que la metodología de cálculo de los coeficientes de rigidez permite obtener una buena precisión frente al modelo de 550 elementos.

Sobre los elementos finitos unidimensionales BSW

Se ha estudiado la influencia entre aplicar integración numérica exacta y reducida de la matriz de rigidez del elemento, observando que cuando se utiliza integración exacta los elementos de aproximación lineal *L-BSW* presentan bloqueo mientras que los de aproximación cuadrática y cúbica no. También se ha observado que se requiere de al menos 5 elementos de aproximación cuadrática *Q-BSW* para obtener los mismos resultados que en los modelos que utilizan elementos de aproximación cúbica *C-BSW*.

Al utilizar la integración reducida se eliminó el fenómeno de bloqueo en los elementos de aproximación lineal, sin embargo, los resultados obtenidos aún se encuentran alejados de los obtenidos con los modelos de elementos cuadriláteros *Q-BSW*.

Los resultados de los elementos de aproximación cuadrática se ajustaron a los obtenidos con elementos de aproximación cúbica *C-BSW* y estos últimos no presentan variación en sus resultados cuando cambia el tipo de integración (reducida o exacta).

Se ha observado que los elementos de aproximación cuadrática convergen con dos elementos a los resultados obtenidos con modelos de elementos de aproximación cúbica, éstos últimos presentan convergencia con un solo elemento.

El elemento que presenta convergencia con menor número de nodos es el de aproximación cuadrática *Q-BSW* e integración reducida tanto en flexión como en torsión y sus resultados no presentan diferencias apreciables con respecto a los obtenidos con elementos que tienen funciones de aproximación cúbica *C-BSW*.

Las modelizaciones realizadas en los ejemplos de aplicación al final del capítulo demuestran que los elementos de aproximación lineal e integración reducida se acercan bastante a los valores obtenidos usando modelos de verificación con elementos cuadriláteros (diferencias inferiores al 5%), indicando que dichos modelos de verificación cuentan con un número de elementos equivalente a un orden de magnitud mayor al usado con los elementos unidimensionales.

6.2 Líneas futuras de investigación

La investigación objeto de esta Tesis corresponde a un primer paso en el análisis de vigas en laminados compuestos, y al haber obtenido resultados con los elementos finitos formulados que se aproximan muy bien a modelos de verificación en problemas de pequeños desplazamientos, pequeñas rotaciones y materiales elásticos lineales, se generan las siguientes actividades por realizar:

- Preparar una metodología que permita utilizar los elementos formulados como rigidizadores de láminas.
- Extender los alcances de los elementos incluyendo formulaciones adecuadas que permitan considerar no linealidades por fallo o degradación del material a nivel de capas, laminados e incluso de la sección transversal de las vigas.

- Extender la formulación de torsión propuesta para vigas de sección abierta de laminados compuestos a vigas de sección cerrada.
- Reformular los campos de deformaciones con el fin de introducir no linealidades geométricas.

Bibliografía

- ABAQUS (2006a). *Analysis User's manual: version 6.6*. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
- ABAQUS (2006b). *User Subroutines Reference Manual: version 6.6*. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
- ABAQUS (2006c). *User's manual: version 6.6*. Hibbit, Karlsson & Sorensen, Inc.
- Alfano, G., de Sciarra, F. M., & Rosati, L. (1996). Automatic analysis of multicell thin-walled sections. *Computers & Structures*, 59(4):641 – 655.
- Back, S. Y. & Will, K. M. (1998). A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43:1173–1191.
- Back, S. Y. & Will, K. M. (2008). Shear-flexible thin-walled element for composite I-beams. *Engineering Structures*, 30(5):1447 – 1458.
- Bank, L. C. (2006a). Application of FRP Composites to Bridges in the USA. In *The International Colloquium on Application of FRP to Bridges*, pages 9–16.
- Bank, L. C. (2006b). *Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials*. John Wiley & Sons, INC.
- Bank, L. C., Gentry, T. R., Nuss, K. H., Hurd, S. H., Lamanna, A. J., Duich, S. J., & Oh, B. (2000). Construction of a pultruded composite structure: case study. *Journal of Composites for Construction*, 4(3):112–119.
- Barbero, E. J. (1999). *Introduction to Composite Materials Design*. Taylor & Francis.
- Barbero, E. J., Lopez-Anido, R., & Davalos, J. F. (1993). On the Mechanics of Thin-Walled Laminated Composite Beams. *Journal of Composite Materials*, 27(8):806–829.

- Barbero, E. J. & Luciano, R. (1995). Micromechanical formulas for the relaxation tensor of linear viscoelastic composites with transversely isotropic fibres. *Int. J. Solids Structures*, 32(13):1859–1872.
- Bauld, N. R. & Tzeng, L.-S. (1984). A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections. *International Journal of Solids and Structures*, 20(3):277–297.
- Bažant, Z. P. & Cedolin, L. (2003). *Stability of structures. Elastic, inelastic, fracture, and damage theories*. Dover publications Inc.
- Berdichevskii, V. L. (1979). Variational-asymptotic method of constructing a theory of shells : Pmm vol. 43, no.4, 1979, pp. 664-687. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 43(4):711 – 736.
- Berdichevsky, V. L., Armanios, E. A., & Badir, A. M. (1992). Theory of anisotropic thin-walled closed-section beams. *Composites Engineering*, 2(5-7):411–432.
- Cesnik, C. & Hodges, D. H. (1997). VABS: A new concept for composite rotor blade cross-sectional modeling. *Journal of The American Helicopter Society*, 42(1):27–38.
- Chakravarty, U. K. (2011). On the modeling of composite beam cross-sections. *Composites: Part B*, 42:982–991.
- Clarke, J. L., editor (1996). *Structural Design of Polymer Composite. EUROCOMP Design Code and Handbook*. E & FN SPON.
- Coda, H. B. & Paccola, R. R. (2010). Improved finite element for 3D laminate frame analysis including warping for any cross-section. *Applied Mathematical Modelling*, 34:1107–1137.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., & Witt, R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, Inc.
- Correia, J. R. (2004). Perfis pultrudidos de fibra de vidro (grfp) aplicação de vigas mistas grfp-betão na construção. Master's thesis, Universidade Técnica de Lisboa. Instituto Superior Técnico.
- Feo, L. & Mancusi, G. (2010). Modeling shear deformability of thin-walled composite beams with open cross-section. *Mechanics Research Communications*, 37(3):320 – 325.
- Fiberline Composites A/S (2003). *Fiberline Design Manual*. www.fiberline.com.
- Gere, J. M. (2005). *TIMOSHENKO Resistencia de Materiales*. THOMSON, 5^a edition.
- Gjelsvik, A. (1981). *Theory of thin-walled bars*. John Wiley and Sons Ltd.
- Hoogenboom, P. & Borgart, A. (2005). Method for including restrained warping in traditional frame analyses. *HERON*, 50(1):55–68.
- Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis.

- Karbhari, V. M. & Zhao, L. (2000). Use of composites for 21st century civil infrastructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 185:433–454.
- Kaw, A. K. (2006). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor & Francis.
- Keller, T. (1999). Towards structural forms for composite fibre materials. *Structural Engineering International*, 9(4):297–300.
- Keller, T. (2002). Fiber reinforced polymers in building construction. In *Symposium Towards a Better Built Environment - International Association for Bridge and Structural Engineering IABSE*, Melbourne Australia.
- Keller, T., Bai, Y., & Vallée, T. (2007). Long-term performance of a glass fiber-reinforced polymer truss bridge. *Journal of Composites for Construction*, 11(1):99–108.
- Kim, N.-I., Shin, D. K., & Kim, M.-Y. (2006). Exact solutions for thin-walled open-section composite beams with arbitrary lamination subjected to torsional moment. *Thin-Walled Structures*, 44(6):638 – 654.
- Kollar, L. P. & Pluzsik, A. (2002). Analysis of Thin-Walled Composite Beams with Arbitrary Layup. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21(16):1423–1465.
- Kollbrunner, C. F. & Basler, K. (1969). *Torsion in Structures. An Engineering Approach*. Springer-Verlag.
- Kollár, L. P. (2001). Flexural-torsional buckling of open section composite columns with shear deformation. *International Journal of Solids and Structures*, 38(42-43):7525 – 7541.
- Kuhl, D. & Meschke, G. (2003). *Finite Element Methods in Linear Structural Mechanics. Lecture Notes*. Ruhr University Bochum. Institute for Structural Mechanics.
- Lee, J. (2005). Flexural analysis of thin-walled composite beams using shear-deformable beam theory. *Composite Structures*, 70(2):212 – 222.
- Lee, J. & Lee, S. (2004). Flexural-torsional behavior of thin-walled composite beams. *Thin-walled Structures*, 42:1293–1305.
- Librescu, L. & Song, O. (2006). *Thin-Walled Composite Beams. Theory and Application*. Springer.
- Malvern, L. E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall Inc.
- Massa, J. C. & Barbero, E. J. (1998). A Strength of Materials Formulation for Thin Walled Composite Beams with Torsion. *Journal of Composite Materials*, 32(17):1560–1594.
- MATLAB (2004). *The Language of Technical Computing. R14*. MathWorks.
- Miravete, A. (2000). *Materiales Compuestos I*. Editorial Reverté S.A.

- Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos - Análisis elástico lineal*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería – CIMNE.
- Oller, S. (2003). *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería – CIMNE.
- Pluzsik, A. & Kollar, L. P. (2002). Effects of Shear Deformation and Restrained Warping on the Displacements of Composite Beams. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21(17):1517–1541.
- Prokic, A. (1996). New warping function for thin-walled beams. I:Theory. *Journal of Structural Engineering*, 122(12):1437–1442.
- Prokic, A. (2000). Computer program for determination of geometrical properties of thin-walled beams with open-closed section. *Computers & Structures*, 74(6):705 – 715.
- Pulido, M. D. G. & Sobrino, J. A. (2002). Hacia la aplicación de los materiales compuestos en el diseño de pasarelas. In Oller, S., editor, *Análisis y cálculo de estructuras de materiales compuestos*, pages 547–576. Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería – CIMNE.
- Qiao, P., Zou, G., & Davalos, J. (2003). Flexural-torsional buckling of fiber-reinforced plastic composite cantilever I-beams. *Composites and Structures*, 60(2):205–217.
- Rastellini, F. G. (2006). *Modelización numérica de la no-linealidad constitutiva de laminados compuestos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Reddy, J. (2004). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. CRC Press, second edition.
- Saadé, K. (2004). *Finite element modelling of shear thin-walled beams with single warping function*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles.
- Sheikh, A. & Thomsen, O. (2008). An efficient beam element for the analysis of laminated composite beams of thin-walled open and closed cross sections. *Composites Science and Technology*, 68:2273–2281.
- Sika (2005). Sika at Work – Construction and Strengthening of GFRP Structures with Sikadur Structural Adhesives [on-line]. <http://www.sika.com/en/group/Publications/SikaatWork.html>, [Consultado en julio 2007].
- Sobrino, J. A. & Pulido, M. D. G. (2002). Towards advanced composite material footbridges. *Structural Engineering International*, 12(2):84–86.
- Soden, P. D., Hinton, M. J., & Kaddour, A. S. (1998). Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates. *Compos Sci Technol*, 58:1011–1022.
- Timoshenko, S. P. & Gere, J. M. (1963). *Theory of elastic stability*. McGraw-Hill.

- Tonti, E. (1972). On the mathematical structure of a large class of physical theories. *Lincei - Rendiconti della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali*, 52:48–56.
- Topglass Composites Solutions S.p.A. (2010). *Technical data. Material properties Triglass profiles. Structural profiles. www.topglass.it.*
- Vinson, J. R. & Sierakowski, R. L. (2004). *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Kluwer Academic Publishers, second edition.
- Vlasov, V. Z. (1961). *Thin-walled Elastic Beams*. Israel Program for Scientific Translations.
- Wu, X. & Sun, C. T. (1992). Simplified theory for composite thin-walled beams. *AIAA Journal*, 30:2945–2951.
- Yu, W. (2002). *Variational asymptotic modeling of composite dimensionally reducible structures*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology, School of Aerospace Engineering.
- Yu, W., Volovoi, V. V., Hodges, D. H., & Hong, X. (2002). Effects of joint geometry and bolt torque on the structural performance of single bolt tension joints in pultruded grp sheet material. *AIAA Journal*, 40(10):2105–2113.
- Zureick, A. (1998). FRP pultruded structural shapes. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 1(2):143–149.

ANEXO A

Estudio de una viga homogénea con sección C

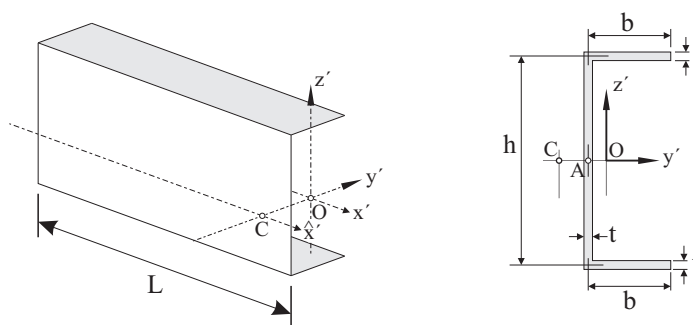


Figura A.0-1: Viga con sección C

En este apéndice se estudia una viga de pared delgada con sección C aplicando la hipótesis de que no existen deformaciones tangenciales por torsión. El estudio se divide en dos partes, en la primera se obtienen los coeficientes de la matriz de rigidez de la viga, y en la segunda se analiza el valor del bimomento cuando la sección está sometida a cargas puntuales excéntricas respecto del centro de torsión.

A.1 Coeficientes de la matriz de rigidez

La obtención de los coeficientes de la matriz de rigidez requiere la determinación del eje neutro y los ejes principales de la sección.

Una vez se han evaluado los ejes principales se calcula el centro de torsión de la sección usando los momentos de inercia respecto a los ejes y respecto a la coordenada sectorial medida desde el eje neutro.

Finalmente se obtiene la rigidez al alabeo usando la función de alabeo en términos de la coordenada sectorial normalizada.

A.1-1 Eje neutro y ejes principales

El eje neutro se calcula usando los parámetros constitutivos $\hat{D}_{mb\bar{y}}$, $\hat{D}_{mb\bar{z}}$ y \hat{D}_m .

$$\bar{z}_0 = \frac{\hat{D}_{mb\bar{y}}}{\hat{D}_m} = \frac{\iint_A E \bar{z} dA}{\iint_A E dA} \quad (\text{A.1-1a})$$

$$\bar{y}_0 = \frac{\hat{D}_{mb\bar{z}}}{\hat{D}_m} = \frac{\iint_A E \bar{y} dA}{\iint_A E dA} \quad (\text{A.1-1b})$$

Por tratarse de una sección isótropa homogénea se reduce a

$$\bar{z}_0 = \frac{Q_{\bar{y}}}{A} = \frac{\iint_A \bar{z} dA}{A} \quad (\text{A.1-2a})$$

$$\bar{y}_0 = \frac{Q_{\bar{z}}}{A} = \frac{\iint_A \bar{y} dA}{A} \quad (\text{A.1-2b})$$

donde $Q_{\bar{y}}$ y $Q_{\bar{z}}$ corresponden a los momentos del área respecto a los ejes \bar{y} y \bar{z} respectivamente.

El cálculo de los momentos de área se realiza dividiendo la sección en tres segmentos rectilíneos \overline{DA} , \overline{AB} y \overline{BF} (ver Figura A.1-1) e integrando respecto al eje curvilíneo s .

Se incluyen algunas integrales respecto al eje s que serán de utilidad en el cálculo de las propiedades geométricas de la sección.

- Segmento \overline{DA} .

$$\begin{aligned} \int_0^b s ds &= \frac{b^2}{2} \\ \int_0^b s^2 ds &= \frac{b^3}{3} \end{aligned} \quad (\text{A.1-3})$$

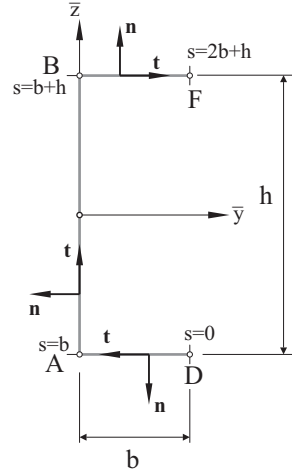


Figura A.1-1: Sistema de ejes en la viga y segmentos \overline{DA} , \overline{AB} y \overline{BF} .

- Segmento \overline{AB} .

$$\int_b^{b+h} s \, ds = \frac{1}{2} (2bh + h^2) = bh + \frac{h^2}{2}$$

$$\int_b^{b+h} s^2 \, ds = \frac{1}{3} (3b^2h + 3bh^2 + h^3) = b^2h + bh^2 + \frac{h^3}{3}$$
(A.1-4)

- Segmento \overline{BF} .

$$\int_{b+h}^{2b+h} s \, ds = \frac{1}{2} (3b^2 + 2bh) = \frac{3b^2}{2} + bh$$

$$\int_{b+h}^{2b+h} s^2 \, ds = \frac{1}{3} (7b^3 + 9b^2h + 3bh^2) = \frac{7b^3}{3} + 3b^2h + bh^2$$
(A.1-5)

A continuación se evalúa el aporte de cada segmento a los momentos de área respecto a los ejes de la sección.

- Segmento \overline{DA} : $0 \leq s \leq b$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $\bar{y} = b - s$; $\bar{z} = -h/2 + \zeta$

$$Q_{\bar{y}(\overline{DA})} = \iint_A \bar{z} \, dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} \left(-\frac{h}{2} + \zeta \right) d\zeta \, ds$$

$$= \int_0^b \left(-\frac{ht}{2} \right) ds = -\frac{bht}{2}$$
(A.1-6)

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{z}(\overline{DA})} &= \iint_A \bar{y} \, dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} (b-s) \, d\zeta \, ds \\
&= \int_0^b (bt - st) \, ds = \frac{b^2 t}{2}
\end{aligned} \tag{A.1-7}$$

- Segmento \overline{AB} : $b \leq s \leq b+h$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $\bar{y} = \zeta$; $\bar{z} = -b - h/2 + s$

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{y}(\overline{AB})} &= \iint_A \bar{z} \, dA = \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} \left(-b - \frac{h}{2} + s\right) \, d\zeta \, ds \\
&= \int_b^{b+h} \left(-bt - \frac{ht}{2} + st\right) \, ds = 0
\end{aligned} \tag{A.1-8}$$

$$Q_{\bar{z}(\overline{AB})} = \iint_A \bar{y} \, dA = \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} \zeta \, d\zeta \, ds = 0 \tag{A.1-9}$$

- Segmento \overline{BF} : $b+h \leq s \leq 2b+h$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $\bar{y} = s - b - h$; $\bar{z} = h/2 + \zeta$

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{y}(\overline{BF})} &= \iint_A \bar{z} \, dA = \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{h}{2} + \zeta\right) \, d\zeta \, ds \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} \left(\frac{ht}{2}\right) \, ds = \frac{bht}{2}
\end{aligned} \tag{A.1-10}$$

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{z}(\overline{BF})} &= \iint_A \bar{y} \, dA = \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (s - b - h) \, d\zeta \, ds \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} (st - bt - ht) \, ds = \frac{b^2 t}{2}
\end{aligned} \tag{A.1-11}$$

Resultando:

$$\begin{aligned}
Q_{\bar{y}} &= Q_{\bar{y}(\overline{DA})} + Q_{\bar{y}(\overline{AB})} + Q_{\bar{y}(\overline{BF})} = -\frac{bht}{2} + 0 + \frac{bht}{2} = 0 \\
Q_{\bar{z}} &= Q_{\bar{z}(\overline{DA})} + Q_{\bar{z}(\overline{AB})} + Q_{\bar{z}(\overline{BF})} = \frac{b^2 t}{2} + 0 + \frac{b^2 t}{2} = b^2 t
\end{aligned} \tag{A.1-12}$$

Conociendo que el área de la sección transversal de la viga es $A = 2bt + ht$, el eje neutro se localiza en

$$\bar{z}_0 = \frac{Q_{\bar{y}}}{A} = \frac{0}{2bt + ht} = 0 \tag{A.1-13a}$$

$$\bar{y}_0 = \frac{Q_{\bar{z}}}{A} = \frac{b^2 t}{2bt + ht} = \frac{b^2}{2b + h} \quad (\text{A.1-13b})$$

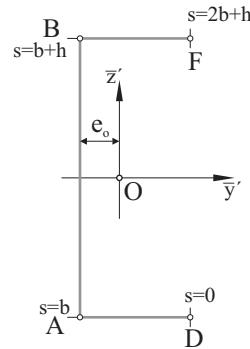


Figura A.1-2: Distancia entre el alma de la viga y el eje neutro e_o .

Denominando e_o a la distancia entre el alma de la viga y el eje neutro (ver Figura A.1-2) se define

$$e_o = \bar{y}_0 = \frac{b^2}{2b + h} \quad (\text{A.1-14})$$

Conocida la posición del eje neutro de la sección se define que el sistema de ejes localizado en el eje neutro corresponde a

$$\bar{z}' = \bar{z} - \bar{z}_0 = \bar{z} \quad (\text{A.1-15a})$$

$$\bar{y}' = \bar{y} - \bar{y}_0 = \bar{y} - e_o \quad (\text{A.1-15b})$$

Se evalúa el producto de inercia $I_{\bar{y}'\bar{z}'}$ para determinar si el sistema coordenado \bar{y}', \bar{z}' corresponde a los ejes principales.

- Segmento \overline{DA} : $0 \leq s \leq b$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $\bar{y}' = b - e_o - s$; $\bar{z}' = -h/2 + \zeta$

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}'\bar{z}'}(\overline{DA}) &= \iint_A \bar{y}' \bar{z}' dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} (b - e_o - s) \left(-\frac{h}{2} + \zeta \right) d\zeta ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^b (-bht + hte_o + hts) ds = \frac{bhte_o}{2} - \frac{b^2 ht}{4} \end{aligned} \quad (\text{A.1-16})$$

- Segmento \overline{AB} : $b \leq s \leq b+h$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $\bar{y}' = -e_o + \zeta$; $\bar{z}' = -b - h/2 + s$

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}'\bar{z}'}(\overline{AB}) &= \iint_A \bar{y}'\bar{z}' dA = \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (-e_o + \zeta) \left(-b - \frac{h}{2} + s\right) d\zeta ds \\ &= \int_b^{b+h} \left(bte_o + \frac{ht\bar{y}_0}{2} - t\bar{y}_0s\right) ds = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1-17})$$

- Segmento \overline{BF} : $b+h \leq s \leq 2b+h$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $\bar{y}' = s - b - h - e_o$; $\bar{z}' = h/2 + \zeta$

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}'\bar{z}'}(\overline{BF}) &= \iint_A \bar{y}'\bar{z}' dA = \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (s - b - h - e_o) \left(\frac{h}{2} + \zeta\right) d\zeta ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{b+h}^{2b+h} (hts - bht - h^2t - hte_o) ds = \frac{b^2ht}{4} - \frac{bhte_o}{2} \end{aligned} \quad (\text{A.1-18})$$

Sumando la contribución de cada segmento el producto de inercia resulta:

$$\begin{aligned} I_{\bar{y}'\bar{z}'} &= I_{\bar{y}'\bar{z}'}(\overline{DA}) + I_{\bar{y}'\bar{z}'}(\overline{AB}) + I_{\bar{y}'\bar{z}'}(\overline{BF}) \\ &= \left(\frac{bhte_o}{2} - \frac{b^2ht}{4}\right) + (0) + \left(\frac{b^2ht}{4} - \frac{bhte_o}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.1-19})$$

Al obtener un producto de inercia nulo, se establece que el sistema coordenado \bar{y}', \bar{z}' corresponde a los ejes principales, por lo que

$$y' = \bar{y}' \quad (\text{A.1-20a})$$

$$z' = \bar{z}' \quad (\text{A.1-20b})$$

A.1-2 Centro de torsión y momentos de inercia

Definiendo el centro de torsión en términos de momentos de inercia y considerando que los ejes y' y z' son ejes principales se tiene que

$$z'_c = \frac{I_{z'\omega_s^0}}{I_{z'}} \quad (\text{A.1-21a})$$

$$y'_c = -\frac{I_{y'}\omega_s^0}{I_{y'}} \quad (\text{A.1-21b})$$

donde $I_{y'}$ e $I_{z'}$ son los momentos de inercia respecto a los ejes principales, y $I_{y'}\omega_s^0$ e $I_{z'}\omega_s^0$ son los productos de los ejes principales respecto a la coordenada sectorial ω_s^0 evaluada en el eje neutro.

A continuación se evalúa la contribución de cada segmento a la coordenada sectorial medida desde el eje neutro y a los momentos de inercia.

- Segmento \overline{DA} : $0 \leq s \leq b$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $y' = b - e_o - s$; $z' = -h/2 + \zeta$; $c_{n_o} = h/2$

$$\omega_s^0(\overline{DA}) = \int_0^s c_{n_o} ds = \frac{h}{2}s \quad (\text{A.1-22})$$

$$\begin{aligned} I_{y'}(\overline{DA}) &= \iint_A z'^2 dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} \left(-\frac{h}{2} + \zeta\right)^2 d\zeta ds \\ &= \int_0^b \left(\frac{h^2 t}{4} + \frac{t^3}{12}\right) ds = \frac{bh^2 t}{4} + \frac{bt^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.1-23})$$

$$\begin{aligned} I_{z'}(\overline{DA}) &= \iint_A y'^2 dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} (b - e_o - s)^2 d\zeta ds \\ &= \int_0^b (b^2 - 2be_o - 2bs + e_o^2 + 2e_o s + s^2) t ds \\ &= \frac{b^3 t}{12} + bt \left(\frac{b}{2} - e_o\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{A.1-24})$$

$$\begin{aligned} I_{y'}\omega_s^0(\overline{DA}) &= \iint_A z'\omega_s^0 dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} \left(-\frac{h}{2} + \zeta\right) \left(\frac{h}{2}s\right) d\zeta ds \\ &= \int_0^b \left(-\frac{h^2 t s}{4}\right) ds = -\frac{b^2 h^2 t}{8} \end{aligned} \quad (\text{A.1-25})$$

$$\begin{aligned} I_{z'}\omega_s^0(\overline{DA}) &= \iint_A y'\omega_s^0 dA = \int_0^b \int_{-t/2}^{t/2} (b - e_o - s) \left(\frac{h}{2}s\right) d\zeta ds \\ &= \int_0^b (bt - te_o - ts) \left(\frac{h}{2}s\right) ds = \frac{b^2 h t}{4} \left(\frac{b}{3} - e_o\right) \end{aligned} \quad (\text{A.1-26})$$

- Segmento \overline{AB} : $b \leq s \leq b+h$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $y' = -e_o + \zeta$; $z' = -b-h/2+s$; $c_{n_o} = e_o$

$$\omega_s^0(\overline{AB}) = \frac{bh}{2} + \int_b^{b+h} c_{n_o} ds = \frac{bh}{2} - be_o + e_o s \quad (\text{A.1-27})$$

$$\begin{aligned} I_{y'}(\overline{AB}) &= \iint_A z'^2 dA = \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} \left(-b - \frac{h}{2} + s\right)^2 d\zeta ds \\ &= \int_b^{b+h} \left(\frac{h^2 t}{4} + bht - hts + b^2 t - 2bts + ts^2\right) ds = \frac{h^3 t}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.1-28})$$

$$\begin{aligned} I_{z'}(\overline{AB}) &= \iint_A y'^2 dA = \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (-e_o + \zeta)^2 d\zeta ds \\ &= \int_b^{b+h} \left(te_o^2 + \frac{t^3}{12}\right) ds = hte_o^2 + \frac{ht^3}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.1-29})$$

$$\begin{aligned} I_{y'\omega_s^0}(\overline{AB}) &= \iint_A z'\omega_s^0 dA \\ &= \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} \left(-b - \frac{h}{2} + s\right) \left(\frac{bh}{2} - be_o + e_o s\right) d\zeta ds \\ &= \int_b^{b+h} \left(-b - \frac{h}{2} + s\right) \left(\frac{bh}{2} - be_o + e_o s\right) t ds = \frac{h^3 te_o}{12} \end{aligned} \quad (\text{A.1-30})$$

$$\begin{aligned} I_{z'\omega_s^0}(\overline{AB}) &= \iint_A y'\omega_s^0 dA \\ &= \int_b^{b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (-e_o + \zeta) \left(\frac{bh}{2} - be_o + e_o s\right) d\zeta ds \\ &= \int_b^{b+h} (-e_o t) \left(\frac{bh}{2} - be_o + e_o s\right) ds = -\frac{h^2 te_o}{2} (b + e_o) \end{aligned} \quad (\text{A.1-31})$$

- Segmento \overline{BF} : $b+h \leq s \leq 2b+h$; $-t/2 \leq \zeta \leq t/2$; $y' = s - b - h - e_o$; $z' = h/2 + \zeta$; $c_{n_o} = h/2$

$$\omega_s^0(\overline{BF}) = \frac{bh}{2} + he_o + \int_{b+h}^s c_{n_o} ds = -\frac{h^2}{2} + he_o + \frac{hs}{2} \quad (\text{A.1-32})$$

$$\begin{aligned}
I_{y'(\overline{BF})} &= \iint_A z'^2 dA = \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (h/2 + \zeta)^2 d\zeta ds \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} \left(\frac{h^2 t}{4} + \frac{t^3}{12} \right) ds = \frac{bh^2 t}{4} + \frac{bt^3}{12}
\end{aligned} \tag{A.1-33}$$

$$\begin{aligned}
I_{z'(\overline{BF})} &= \iint_A y'^2 dA = \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (s - b - h - e_o)^2 d\zeta ds \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} (s - b - h - e_o)^2 t ds = \frac{b^3 t}{12} + bt \left(\frac{b}{2} - e_o \right)^2
\end{aligned} \tag{A.1-34}$$

$$\begin{aligned}
I_{y'\omega_s^0(\overline{BF})} &= \iint_A z'\omega_s^0 dA \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{h}{2} + \zeta \right) \left(-\frac{h^2}{2} + he_o + \frac{hs}{2} \right) d\zeta ds \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} \left(\frac{h}{2} \right) \left(-\frac{h^2}{2} + he_o + \frac{hs}{2} \right) t ds = \frac{bh^2 te_o}{2} + \frac{3b^2 h^2 t}{8}
\end{aligned} \tag{A.1-35}$$

$$\begin{aligned}
I_{z'\omega_s^0(\overline{BF})} &= \iint_A y'\omega_s^0 dA \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} \int_{-t/2}^{t/2} (s - b - h - e_o) \left(-\frac{h^2}{2} + he_o + \frac{hs}{2} \right) d\zeta ds \\
&= \int_{b+h}^{2b+h} (ts - bt - ht - e_o t) \left(-\frac{h^2}{2} + he_o + \frac{hs}{2} \right) ds \\
&= \frac{5b^3 ht}{12} - \frac{b^2 hte_o}{4} + bhte_o^2
\end{aligned} \tag{A.1-36}$$

Los momentos de inercia son:

$$\begin{aligned}
I_{y'} &= I_{y'(\overline{DA})} + I_{y'(\overline{AB})} + I_{y'(\overline{BF})} \\
&= \left(\frac{bh^2 t}{4} + \frac{bt^3}{12} \right) + \left(\frac{h^3 t}{12} \right) + \left(\frac{bh^2 t}{4} + \frac{bt^3}{12} \right) \\
&= \frac{h^2 t}{12} (6b + h) + \frac{bt^3}{6}
\end{aligned} \tag{A.1-37}$$

$$\begin{aligned}
I_{z'} &= I_{z'}(\overline{DA}) + I_{z'}(\overline{AB}) + I_{z'}(\overline{BF}) \\
&= \left(\frac{b^3 t}{12} + bt \left(\frac{b}{2} - e_o \right)^2 \right) + \left(hte_o^2 + \frac{ht^3}{12} \right) \\
&\quad + \left(\frac{b^3 t}{12} + bt \left(\frac{b}{2} - e_o \right)^2 \right) \\
&= \frac{b^3 t}{6} + 2bt \left(\frac{b}{2} - e_o \right)^2 + hte_o^2 + \frac{ht^3}{12}
\end{aligned} \tag{A.1-38}$$

$$\begin{aligned}
I_{y'\omega_s^0} &= I_{y'\omega_s^0}(\overline{DA}) + I_{y'\omega_s^0}(\overline{AB}) + I_{y'\omega_s^0}(\overline{BF}) \\
&= \left(-\frac{b^2 h^2 t}{8} \right) + \left(\frac{h^3 t e_o}{12} \right) \\
&\quad + \left(\frac{bh^2 t e_o}{2} + \frac{3b^2 h^2 t}{8} \right) \\
&= \frac{b^2 h^2 t}{4} + \frac{h^2 t e_o}{12} (6b + h)
\end{aligned} \tag{A.1-39}$$

$$\begin{aligned}
I_{z'\omega_s^0} &= I_{z'\omega_s^0}(\overline{DA}) + I_{z'\omega_s^0}(\overline{AB}) + I_{z'\omega_s^0}(\overline{BF}) \\
&= \left(\frac{b^2 ht}{4} \left(\frac{b}{3} - e_o \right) \right) + \left(-\frac{h^2 t e_o}{2} (b + e_o) \right) \\
&\quad + \left(\frac{5b^3 ht}{12} - \frac{b^2 h t e_o}{4} + b h t e_o^2 \right) \\
&= \frac{b^3 ht}{2} - \left(\frac{b^2 ht}{2} + \frac{bh^2 t}{2} \right) e_o - \frac{ht}{2} (2b + h) e_o^2 \\
&= \frac{b^3 ht}{2} - \left(\frac{b^2 ht}{2} + \frac{bh^2 t}{2} \right) e_o - \frac{b^2 h t e_o}{2} \\
&= \frac{b^3 ht}{2} - \frac{bht}{2} (2b + h) e_o = 0
\end{aligned} \tag{A.1-40}$$

y la constante de rigidez torsional, por ser una sección abierta de pared delgada es

$$\begin{aligned}
J &= \iint_A \left((y' - y'_c) \frac{\partial \omega}{\partial z'} - (z' - z'_c) \frac{\partial \omega}{\partial y'} + (y' - y'_c)^2 + (z' - z'_c)^2 \right) dA \\
&\approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (t_i t_i^3) \quad ; \quad \text{espesor de la pared } t_i = t = \text{cte} \\
&= \frac{t^3 (2b + h)}{3}
\end{aligned} \tag{A.1-41}$$

Conocidos los momentos de inercia, se evalúa el centro de torsión como

$$z'_c = \frac{I_{z'} \omega_s^0}{I_{z'}} = 0 \quad (\text{A.1-42a})$$

$$\begin{aligned} y'_c &= -\frac{I_{y'} \omega_s^0}{I_{y'}} \\ &= -\frac{\frac{b^2 h^2 t}{4} + \frac{h^2 t e_o}{12} (6b + h)}{\frac{h^2 t}{12} (6b + h) + \frac{bt^3}{12}} ; \quad t \ll h \Rightarrow t^3 \text{ es despreciable} \\ &\approx -\left(\frac{3b^2}{6b + h} + e_o \right) \end{aligned} \quad (\text{A.1-42b})$$

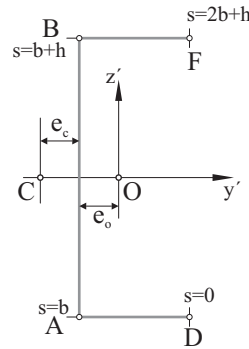


Figura A.1-3: Distancia entre el centro de torsión y el alma de la viga e_c .

Denominando e_c la distancia entre el centro de torsión y el alma de la viga (ver Figura A.1-3) se define

$$e_c = -y'_c - e_o = \frac{3b^2}{6b + h} \quad (\text{A.1-43})$$

A.1-3 Función de alabeo y rigidez al alabeo

El cálculo de la función de alabeo requiere normalizar la coordenada sectorial ω_s medida desde el centro de torsión de la sección.

$$g_s = \omega_s + \omega_D \quad (\text{A.1-44})$$

donde g_s es la coordenada sectorial normalizada y ω_D es el parámetro de normalización, siendo $\omega_D = -\omega_m$. Se define ω_m como el valor medio de la coordenada sectorial en la sección.

A continuación se evalúa la distribución de la coordenada sectorial medida desde el centro de torsión y con ella se obtiene el valor medio de la coordenada sectorial.

- Segmento \overline{DA} : $0 \leq s \leq b$; $c_n = h/2$

$$\omega_{s(\overline{DA})} = \int_0^s c_n ds = \frac{h}{2}s \quad (\text{A.1-45})$$

- Segmento \overline{AB} : $b \leq s \leq b+h$; $c_n = -e_c$

$$\omega_{s(\overline{AB})} = \frac{bh}{2} + \int_b^s c_n ds = \frac{bh}{2} - e_c s + be_c \quad (\text{A.1-46})$$

- Segmento \overline{BF} : $b+h \leq s \leq 2b+h$; $c_n = h/2$

$$\omega_{s(\overline{BF})} = \frac{bh}{2} - he_c + \int_{b+h}^s c_n ds = -\frac{h^2}{2} - he_c + \frac{hs}{2} \quad (\text{A.1-47})$$

El valor medio de la coordenada sectorial ω_m es

$$\begin{aligned} \omega_m &= \frac{1}{2b+h} \int_0^{2b+h} \omega_s ds \\ &= \frac{1}{2b+h} \left\{ \int_0^b \frac{h}{2}s ds + \int_b^{b+h} \left(\frac{bh}{2} - e_c s + be_c \right) ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{b+h}^{2b+h} \left(-\frac{h^2}{2} - he_c + \frac{hs}{2} \right) ds \right\} \quad (\text{A.1-48}) \\ &= \frac{1}{2b+h} \left\{ \frac{h}{2} (b - e_c) (2b+h) \right\} \\ &= \frac{h}{2} (b - e_c) \end{aligned}$$

Entonces, la distribución de la coordenada sectorial normalizada $g_s = \omega_s + \omega_D$ resulta

$$g_s = \frac{h}{2} (s - b + e_c) \quad ; \quad 0 \leq s \leq b \quad (\text{A.1-49a})$$

$$g_s = e_c \left(\frac{h}{2} + b - s \right) \quad ; \quad b \leq s \leq b+h \quad (\text{A.1-49b})$$

$$g_s = \frac{h}{2} (s - h - b - e_c) \quad ; \quad b+h \leq s \leq 2b+h \quad (\text{A.1-49c})$$

Despreciando la variación del alabeo en el espesor se establece que la función de alabeo ω es

$$\omega = g_s \quad (\text{A.1-50})$$

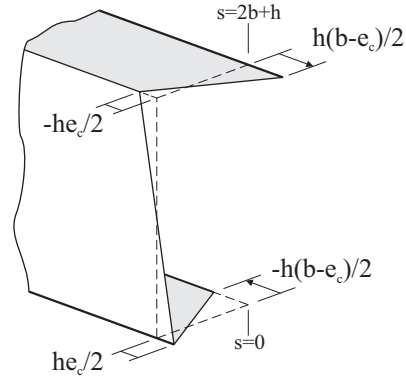


Figura A.1-4: Valor de la coordenada sectorial normalizada g_s .

Se obtiene la inercia al alabeo de la sección

$$\begin{aligned}
 I_\omega &= \iint_A \omega^2 dA \\
 &= \int_0^b \left(\frac{h}{2} (s - b + e_c) \right)^2 t ds + \int_b^{b+h} \left(e_c \left(\frac{h}{2} + b - s \right) \right)^2 t ds \\
 &\quad + \int_{b+h}^{2b+h} \left(\frac{h}{2} (s - h - b - e_c) \right)^2 t ds \\
 &= \frac{h^2 t}{12} (2b^3 + he_c - 6be_c(b - e_c)) \\
 &= \frac{b^3 h^2 t}{12} \left(\frac{3b + 2h}{6b + h} \right)
 \end{aligned} \tag{A.1-51}$$

A.1-4 Coeficientes de la matriz de rigidez

Con las propiedades de la sección evaluadas se calculan los coeficientes de la matriz de rigidez de la sección isótropa

$$\hat{D}_a = \iint_A E dA = EA = Et(2b + h) \tag{A.1-52a}$$

$$\hat{D}_{s_{y'}} = k_{y'} \iint_A G dA = k_{y'} Gt(2b + h) \tag{A.1-52b}$$

$$\hat{D}_{s_{z'}} = k_{z'} \iint_A G dA = k_{z'} Gt(2b + h) \tag{A.1-52c}$$

$$\hat{D}_{b_{y'}} = \iint_A E(z')^2 dA = EI_{y'} = \frac{Eh^2 t}{12} (6b + h) + \frac{Ebt^3}{12} \tag{A.1-52d}$$

$$\hat{D}_{b_z'} = \iint_A E(y')^2 dA = EI_{z'} = \frac{Eb^3t}{6} + 2Ebt \left(\frac{b}{2} - e_o \right)^2 + Ehte_o^2 + \frac{Eht^3}{12} \quad (\text{A.1-52e})$$

$$\hat{D}_t = GJ = \frac{Gt^3(2b+h)}{3} \quad (\text{A.1-52f})$$

$$\hat{D}_\omega = \iint_A E(\omega)^2 dA = EI_\omega = \frac{Eb^3h^2t}{12} \left(\frac{3b+2h}{6b+h} \right) \quad (\text{A.1-52g})$$

donde $k_{y'} = k_{z'} = 5/6$ por tratarse de segmentos rectangulares.

A.2 Cálculo del bimomento

En esta sección se obtienen las expresiones que permiten calcular el valor del bimomento (B_ω) cuando la sección está sometida momentos de torsión.

Partiendo de la definición del momento torsor

$$M_{\tilde{x}} = M_{sv} - M_\omega \quad (\text{A.2-1})$$

donde M_{sv} es la torsión de Saint-Venant

$$M_{sv} = GJ\theta_{\tilde{x}}' \quad (\text{A.2-2})$$

y M_ω es la derivada del bimomento B_ω definido como

$$B_\omega = EI_\omega\theta_{\tilde{x}}'' \quad (\text{A.2-3})$$

por lo que

$$M_\omega = EI_\omega\theta_{\tilde{x}}''' \quad (\text{A.2-4})$$

resultando

$$M_{\tilde{x}} = GJ\theta_{\tilde{x}}' - EI_\omega\theta_{\tilde{x}}''' \quad (\text{A.2-5})$$

Del equilibrio se obtiene que

$$M_{\tilde{x}}' + m_{\tilde{x}} = 0 \quad (\text{A.2-6})$$

siendo $m_{\tilde{x}}$ un momento torsor distribuido a lo largo del eje elástico de la viga.

Suponiendo que la sección es constante ($EI_\omega = \text{cte}$ y $GJ = \text{cte}$), reemplazando las ecuaciones (A.2-1), (A.2-2) y (A.2-4) en (A.2-6) se tiene que

$$EI_\omega \theta_{\tilde{x}}'''' - GJ \theta_{\tilde{x}}'' = m_{\tilde{x}} \quad (\text{A.2-7})$$

Ecuación diferencial parcial

Reescribiendo la ecuación (A.2-7) se establece la ecuación diferencial parcial - *EDP* que debe resolverse

$$\theta_{\tilde{x}}'''' - \frac{k^2}{L^2} \theta_{\tilde{x}}'' = \frac{m_{\tilde{x}}}{EI_\omega} \quad (\text{A.2-8})$$

con el parámetro adimensional k definido como

$$k = L \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \quad (\text{A.2-9})$$

La solución de la ecuación diferencial parcial - *EDP* (A.2-8) es

$$\theta_{\tilde{x}} = C_1 + C_2 \left(\frac{\tilde{x}}{L} \right) + C_3 \sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + C_4 \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + \bar{\theta}_{\tilde{x}} \quad (\text{A.2-10})$$

donde $\bar{\theta}_{\tilde{x}}$ es la solución particular de la ecuación diferencial.

Derivando la ecuación (A.2-10) se obtiene

$$\theta_{\tilde{x}}' = C_2 \left(\frac{1}{L} \right) + C_3 \left(\frac{k}{L} \right) \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + C_4 \left(\frac{k}{L} \right) \sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + \bar{\theta}_{\tilde{x}}' \quad (\text{A.2-11})$$

$$\theta_{\tilde{x}}'' = \frac{GJ}{EI_\omega} \left(C_3 \sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + C_4 \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) \right) + \bar{\theta}_{\tilde{x}}'' \quad (\text{A.2-12})$$

$$\theta_{\tilde{x}}''' = \frac{GJ}{EI_\omega} \left(C_3 \left(\frac{k}{L} \right) \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + C_4 \left(\frac{k}{L} \right) \sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) \right) + \bar{\theta}_{\tilde{x}}''' \quad (\text{A.2-13})$$

Reemplazando las ecuaciones (A.2-11) y (A.2-13) en la definición del momento torsor (A.2-5)

$$M_{\tilde{x}} = GJ \left(\frac{C_2}{L} + \bar{\theta}_{\tilde{x}}' \right) - EI_\omega \bar{\theta}_{\tilde{x}}''' \quad (\text{A.2-14})$$

y la ecuación (A.2-12) en la definición bimomento (ver ecuación A.2-3)

$$\begin{aligned} B_\omega &= EI_\omega \theta_{\tilde{x}}'' \\ &= GJ \left[C_3 \sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) + C_4 \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) \right] + EI_\omega \bar{\theta}_{\tilde{x}}'' \end{aligned} \quad (\text{A.2-15})$$

Las constantes de integración C_2 , C_3 y C_4 deben calcularse a partir de las condiciones de contorno de la viga.

Viga en voladizo con momento puntual en el extremo libre

La viga está sometida a un momento puntual T en el extremo libre y considerando que no existen momentos distribuidos a lo largo de la viga se establece que la solución particular de la EDP es

$$\bar{\theta}_{\tilde{x}} = 0 \quad (\text{A.2-16})$$

Las condiciones de contorno de este caso son:

- Momento torsor en el apoyo: $M_{\tilde{x}}(\tilde{x} = 0) = -T$ (ver ecuación A.2-14)

$$C_2 = -\frac{TL}{GJ} \quad (\text{A.2-17})$$

- Variación del ángulo de giro en el apoyo empotrado: $\theta'_{\tilde{x}}(\tilde{x} = 0) = 0$ (ver ecuación A.2-11)

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{C_2}{k} \\ &= \frac{TL}{kGJ} \end{aligned} \quad (\text{A.2-18})$$

- Bimomento en el extremo libre: $B_{\omega}(\tilde{x} = L) = 0$ (ver ecuación A.2-15)

$$\begin{aligned} C_4 &= -C_3 \tanh k \\ &= -\frac{TL}{kGJ} \tanh k \end{aligned} \quad (\text{A.2-19})$$

En las ecuaciones (A.2-17), (A.2-18) y (A.2-19) se definen las constantes de integración para el caso de la viga en voladizo con un momento torsor en el extremo libre, así, el bimomento corresponde a

$$\begin{aligned} B_{\omega} &= GJ \left(\frac{TL}{kGJ} \right) \left[\sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) - \tanh k \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) \right] \\ &= \left(\frac{TL}{k} \right) \left[\sinh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) - \tanh k \cosh \left(k \frac{\tilde{x}}{L} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.2-20})$$

de tal forma que en el apoyo vale

$$B_{\omega}(\tilde{x} = 0) = -TL \frac{\tanh k}{k} \quad (\text{A.2-21})$$

ANEXO B

Solución de EDP con Matlab

A continuación se incluyen los comandos usados para resolver las ecuaciones diferenciales con ayuda de MATLAB 2004.

Se incluye la rutina usada para dar solución de forma general a las ecuaciones diferenciales planteadas. Esta rutina tiene como argumento de entrada las propiedades del material, geometría, momento torsor aplicado y las condiciones iniciales requeridas para la solución de las ecuaciones parciales.

```
%-----  
% Autor: Pablo E Vargas  
% Última revisión: Ene/2011  
%-----  
% Solución de Ecuaciones diferenciales problema de Torsión  
%-----  
function solEDTorsion(T,E,G,L,Iy,Iz,J,Iw,initSV,...  
    initVlasov,initGEN,cond1SV,cond2VLASOV,...  
    cond2GEN,cond3GEN)  
  
%.....  
% Torsión Saint-Venant  
%.....  
  
eqSV='GJ*D2q=0';  
qSV=dsolve(eqSV,cond1SV,initSV,'x')  
ThetaSV=eval(vectorize(qSV));  
plot(x,ThetaSV);  
hold;  
  
%.....  
% Torsión Vlasov  
%.....
```

```

eqVlasov='EIw*D4q-GJ*D2q=0';
qVlasov=dsolve(eqVlasov,cond1SV,cond2VLASOV,initVlasov,'x')
ThetaVLASOV=eval(vectorize(qVlasov));
plot(x,ThetaVLASOV);
hold;

%.....
% Torsión Vlasov + Cortante x torsión
%.....

    % q = Theta; ángulo de torsión
    % f = phi; intensidad alabeo

eqn1='EIw*D3f-GJ*D2q+GJ*(D2q-Df)/2=0';
eqn2='D2q-k1*Df=0';
[fGEN,qGEN]=dsolve(eqn1,eqn2,cond1SV,cond2GEN,...
    cond3GEN,initGEN,'x')
ThetaGEN=eval(vectorize(qGEN));
plot(x,ThetaGEN);

```

Viga sección I en voladizo

A continuación se muestran los argumentos usados para solucionar este ejemplo

```

%-----
% Viga en voladizo, momento de torsión aplicado
% en el extremo libre
%-----
% Ejemplo Viga DobleT

T = 1000;          % N-mm

% Propiedades de material
E = 730;          % N/mm2
G = 280;          % N/mm2

% Propiedades geométricas de la viga
L = 4000.00;      % mm
Iy = 4.307e7;     % mm4
Iz = 5.75e4;      % mm4
J = 2.0e4;        % mm4
Iw = 2.1333e9;    % mm6

% q : ángulo de giro por torsión
% f : intensidad de alabeo

initSV='GJ*Dq(L)=T';          % ecuación Saint-Venant
initVlasov='GJ*Dq(L)-EIw*D3q(L)=T'; % ecuación Vlasov
initGEN='GJ*Dq(L)-EIw2*D2f(L)-GJ*(Dq(L)-f(L))/2=T'; % ec gral

```

```

cond1SV='q(0)=0'; % giro restringido
% en el apoyo
cond2VLASOV='Dq(0)=0,D2q(L)=0'; % Alabeo restringido en
% el apoyo y bimomento
% libre en el extremo

cond2GEN = 'Df(L)=0'; % Bimomento libre en
% el extremo
cond3GEN = 'f(0)=0,Dq(0)=0'; % Alabeo restringido y
% sin cortante en el apoyo
%-----
solEDTorsion(T,E,G,L,Iy,Iz,J,Iw,initSV,...
initVlasov,initGEN,cond1SV,cond2VLASOV,...
cond2GEN,cond3GEN);

```

Viga sección C en voladizo

```

%-----
% Viga en voladizo, momento de torsión aplicado
% en el extremo libre
%-----
% Ejemplo Viga C
%
T = 1000; % kN·m

% Propiedades de material
E = 30e6; % kN/m2
G = 13e6; % kN/m2

% Propiedades geométricas de la viga
L = 25.00; % m
Iy = 10.60; % m4
Iz = 16.49; % m4
J = 0.032; % m4
Iw = 14.09; % m6

% q : ángulo de giro por torsión
% f : intensidad de alabeo

initSV='GJ*Dq(L)=T'; % ecuación Saint-Venant
initVlasov='GJ*Dq(L)-EIw*D3q(L)=T'; % ecuación Vlasov
initGEN='GJ*Dq(L)-EIw*D2f(L)-GJ*(Dq(L)-f(L))/2=T'; % ec. gral

cond1SV='q(0)=0'; % giro restringido
% en el apoyo
cond2VLASOV='Dq(0)=0,D2q(L)=0'; % Alabeo restringido en
% el apoyo y bimomento
% libre en el extremo

```

```

cond2GEN = 'Df(L)=0';           % Bimomento libre en
                                % el extremo
cond3GEN = 'f(0)=0,Dq(0)=0';   % Alabeo restringido y
                                % sin cortante en el apoyo
%-----

solEDTorsion(T,E,G,L,Iy,Iz,J,Iw,initSV,...
             initVlasov,initGEN,cond1SV,cond2VLASOV,...
             cond2GEN,cond3GEN);

```

Viga de sección cerrada biapoyada

```

%-----
%CASO http://heron.tudelft.nl/heron.html
% HERON, Vol. 50, No 1 (2005)
% Hoogenboom (2005)–Method for including restrained warping
% in traditional frame analyses
%-----
%
% Viga biempotrada, momento de torsión aplicado en el centro
% del vano
%
T = 269e5;           %Nm

% Propiedades de material
E = 0.30e11;         %N/m2
nu = 0.15;
G = E/(2*(1.0+nu)); %N/m2

% Propiedades geométricas de la viga
L = 60.00;           %m
A = 7.24;            %m2
Iy = 95.21;          %m4
Iz = 8.16;           %m4
J = 20.62;           %m4
Iw = 39.44;          %m6

initSV='GJ*Dq(L/2)=T/2';           % ecuación Saint-Venant
initVlasov='GJ*Dq(L/2)-EIw*D3q(L/2)=T/2'; % ecuación Vlasov
initGEN='GJ*Dq(L/2)-EIw*D2f(L/2)-GJ*(Dq(L/2)-f(L/2))/2=T/2';

cond1SV='q(0)=0';           % giro restringido en el
                                % apoyo
cond2VLASOV='Dq(L/2)=0,D2q(0)=0'; % Alabeo restringido en
                                % el centro del vano y
                                % bimomento libre en el
                                % apoyo

```

```
cond2GEN = 'Df(0)=0';           % Bimomento libre en el
                                % apoyo

cond3GEN = 'f(L/2)=0,Dq(L/2)=0'; % Alabeo restringido en el
                                % centro del vano y sin
                                % deformaciones de corte en
                                % el centro

%-----

solEDTorsion(T,E,G,L,Iy,Iz,J,Iw,initSV,...
             initVlasov,initGEN,cond1SV,cond2VLASOV,...
             cond2GEN,cond3GEN);
```