



Universidad Nacional de Salta

**FACULTAD DE
INGENIERIA**

**MODELO ANALÍTICO NUMÉRICO PARA EL
ESTUDIO Y OPTIMIZACIÓN DE PLACAS
GRUESAS LAMINADAS**

Ing. Rita Fernanda Rango

Tesis presentada como requerimiento parcial
para acceder al grado académico de
DOCTOR EN INGENIERÍA

Diciembre de 2012

**Directores: Dra. Liz Graciela Nallim - Univ. Nacional de Salta
Dr. Sergio Oller Martínez - Univ. Politécnica de Cataluña**

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi sincero agradecimiento a las personas que me acompañaron y me brindaron su apoyo durante la realización de esta tesis.

Especialmente deseo agradecer a mi directora, Dra. Liz Nallim, por ser una constante guía, por su invaluable colaboración en el desarrollo de esta tesis, por brindarme sus conocimientos y su tiempo, por su inalterable energía, su desinteresada predisposición y su calidad humana. A mi co-director, Dr. Sergio Oller, por su dedicación y enseñanzas, su gran capacidad, amabilidad y paciencia, por orientar siempre mis trabajos y por el generoso apoyo que siempre me ha brindado. A ellos, mi gratitud y admiración.

A mis compañeros y amigos, estudiantes de doctorado e integrantes del Aula CIMNE – UNSa: Facundo Bellomo, Paul Kohan, Ricardo Quinteros y Sergio Alejandro Oller, con quienes he compartido largas jornadas de trabajo y han sido mi diaria y preciada compañía.

A las autoridades de la Facultad de Ingeniería a través de su decano Ing. Jorge F. Almazán, a los docentes, amigos y compañeros de trabajo que me brindaron su apoyo. Al personal no docente, a través de la Sra. Gloria Burgos, por todas las gestiones y las atenciones recibidas.

Al personal del INIQUI, a través de las Sras. Elisa Martínez y Margarita Gallo, y al CONICET, que me permitió a través de las becas Tipo I y II contar con los medios para dedicarme al desarrollo de este trabajo. A mis compañeros becarios y doctorandos de la Facultad de Ingeniería.

Al Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE) y a la Red de Aulas CIMNE donde he realizado varias estancias de investigación, así como a la Universidad Politécnica de Cataluña y a la Agencia Española de Cooperación Internacional (AECID) que financiaron mis estadías en Barcelona.

A quienes están siempre para darme una mano, una sonrisa, un consejo. A Luis, a Jonatan, Paola, Hernán, Fabiana, José y Alejandra. A María, Anita y Andrés.

A mis padres que son a la vez, un faro que me orienta, un mar que me impulsa y una costa firme que me sostiene. A mis hermanos, dos balsas y un límpido cielo azul. A mis familiares y amigos, que completan el hermoso paisaje que Dios me regaló.

RESUMEN

El progreso tecnológico se traduce, entre otros aspectos, en una continua expansión de los tipos de materiales empleados con fines estructurales. Generalmente, los nuevos materiales emergen debido a una aspiración natural de mejorar las estructuras propuestas. A su vez, estos materiales crean nuevas oportunidades para actualizar totalmente tanto las metodologías de diseño como las de fabricación. Una de las más claras manifestaciones de este proceso interrelacionado es el desarrollo y aplicación de materiales compuestos. Las necesidades de la industria aeroespacial llevaron al desarrollo y aplicación de materiales compuestos, debido al interesante panorama que éstos presentan por su bajo peso, y elevadas resistencia y rigidez. Actualmente, los materiales compuestos se han tornado imprescindibles en aplicaciones que van desde equipamiento deportivo hasta estructuras de alto desempeño en muchas ramas de la ingeniería.

Mientras los materiales compuestos tienen muchas ventajas en relación a los denominados materiales convencionales, también presentan problemas complejos y desafiantes para analistas y diseñadores. Una variedad de elementos estructurales tales como cilindros, vigas, placas y cáscaras pueden potencialmente emplearse para el análisis de compuestos laminados. Durante las últimas décadas se ha incrementado el empleo de placas de material compuesto en diversas aplicaciones de ingeniería. La

elevada relación rigidez-peso conectada con la flexibilidad para la elección del esquema de laminación, el cual que puede adaptarse a los requerimientos de diseño, hacen que las placas laminadas sean un componente estructural atractivo en diversas industrias.

La deformación global de placas de material compuesto laminado está, en el caso general, caracterizada por complejos acoplamientos entre modos de extensión, flexión, torsión y cortante. Por otra parte, debido a la baja rigidez cortante transversal, las placas compuestas laminadas exhiben una deformación cortante transversal bastante más significativa, aún para bajas relaciones espesor-lado, que placas isótropas homogéneas con las mismas dimensiones geométricas. A efectos de considerar en el análisis y diseño de placas laminadas los aspectos mencionados, y aprovechar las ventajas potenciales que estos materiales ofrecen, es necesario que las metodologías de análisis incluyan los efectos mencionados. Además, es necesario contar con herramientas de análisis precisas que permitan realizar diseños adecuados a los requerimientos cada vez más estrictos y que a la vez sean versátiles permitiendo realizar cálculos a gran escala.

Por las razones expuestas, en esta Tesis se presenta la formulación de un modelo general que permite analizar el comportamiento mecánico de placas de material compuesto laminado, que posean cualquier relación longitud/espesor y de formas geométricas diversas. En particular, el estudio de placas gruesas se aborda mediante la utilización de una teoría de orden superior que incluye la deformación por corte en sus expresiones cinemáticas.

Por un lado se propone un macro elemento para aplicar el Método de Ritz en placas moderadamente gruesas (empleando la teoría de deformación por corte de primer orden). El Método de Ritz se aplica a dominios cuadriláteros generales empleando coordenadas naturales para aproximar la geometría de la placa, junto con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt como funciones coordenadas para aproximar el campo de desplazamientos.

La idea anterior se generaliza y extiende de manera de considerar dominios más generales y obtener un planteo que permita su aplicación en estructuras de placas laminadas de mayor envergadura. Por ello, en esta tesis se presenta también la formulación de un macro elemento finito jerárquico basado en los conceptos anteriores. Este elemento se define en coordenadas naturales empleando una transformación de

espacios, mientras que se emplean polinomios generados con las fórmulas de recurrencia de Gram-Schmidt para enriquecer la aproximación del campo de desplazamientos, que tiene como base funciones de soporte local constituidas por polinomios de Hermite. Para darle mayor generalidad al modelo, la obtención de las ecuaciones de equilibrio se lleva a cabo mediante el principio de los trabajos virtuales. Además, se describe el proceso de ensamblaje de los macro elementos formulados.

La formulación del macro elemento se presenta en forma secuencial, comenzando con la aproximación del campo de desplazamiento provista por la teoría clásica de placas laminadas (placas delgadas), luego se considera la cinemática correspondiente a la teoría de deformación por corte de primer orden (placas moderadamente gruesas). Finalmente, con el fin de evitar el uso de factores de corrección por corte y obtener mayor precisión en el modelo se considera una teoría de deformación por corte de orden superior. Así se llega a la formulación de un macro elemento finito jerárquico para placas gruesas laminadas considerando una teoría trigonométrica de deformación por corte.

El macro elemento finito formulado, así como el proceso de ensamblaje ha sido implementado en un programa de computadora. El estudio mecánico de estas placas abarca tanto el análisis estático, como el análisis dinámico. En cuanto el análisis estático, la formulación presentada permite determinar las respuestas debido a flexión por carga transversal, incluyendo determinación de tensiones normales y tangenciales. En el caso dinámico se incluye la determinación de las características de vibración libre, es decir, frecuencias y formas modales.

Se presentan diversos resultados que abarcan placas de distintos materiales, formas geométricas, relaciones de espesor y características mecánicas. Los resultados presentados permiten observar la potencialidad y versatilidad de la formulación propuesta. Además, para validar el modelo se muestran análisis de convergencia y comparaciones con soluciones obtenidas por otros autores mediante otros métodos.

ÍNDICE

1. CAPÍTULO 1: PRESENTACIÓN E INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA	
1.1. INTRODUCCIÓN	1
1.2. MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS DE LA TESIS	4
1.3. CONTENIDO DE LA TESIS	7
2. CAPÍTULO 2: MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL CONOCIMIENTO ACTUAL	
2.1. INTRODUCCIÓN	11
2.2. DESCRIPCIÓN DE LAS TEORÍAS EMPLEADAS EN ESTA TESIS	11
2.2.1 TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS LAMINADAS (CLPT)	12
2.2.2 TEORÍA DE PRIMER ORDEN DE DEFORMACIÓN POR CORTE (FSDT)	14
2.2.3 TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR (HOSDT)	17
2.3. ESTADO DEL CONOCIMIENTO ACTUAL	19
2.4. PLACAS DE FORMAS DIVERSAS	24
2.5. COMENTARIOS FINALES	25

3. CAPÍTULO 3: FORMULACIÓN DE UN MACRO ELEMENTO ENRIQUECIDO PARA PLACAS LAMINADAS DE KIRCHHOFF	
3.1. INTRODUCCIÓN	29
3.2. CAMPOS DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES RELACIONES CONSTITUTIVAS DE UNA LÁMINA	31
3.3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	33
3.4. ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO	36
3.5. ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO	38
3.6. DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LA PLACA	39
3.7. OPERADORES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE ESPACIOS	42
3.8. MATRICES ELEMENTALES EN COORDENADAS NATURALES	45
3.9. GENERACIÓN DE LAS FUNCIONES DE APROXIMACIÓN	46
3.10. ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES	50
3.11. ESTUDIOS DE CONVERGENCIA Y VALIDACIÓN	53
3.11.1 PLACA CUADRADA CON BORDES LIBRES	53
3.11.2 PLACAS CUADRADA Y TRAPEZOIDAL CON APOYOS PUNTUALES	55
3.11.3 VALIDACIÓN DEL ENSAMBLAJE	57
3.12. EJEMPLOS NUMÉRICOS CON UN MACRO ELEMENTO	59
3.12.1 PLACA CUADRADA CON DIVERSAS CONDICIONES DE BORDE	59
3.12.2 PLACA CUADRILÁTERA GENERAL	64
3.13. EJEMPLO DE ENSAMBLAJE EN PLACA LAMINADA	65
3.14. CONSIDERACIONES FINALES	68
4. CAPÍTULO 4: FORMULACIÓN DE UN MACRO ELEMENTO PARA EL ANÁLISIS DE PLACAS LAMINADAS GRUESAS: TEORÍA DE PRIMER ORDEN	
4.1. INTRODUCCIÓN	69
4.2. FORMULACIÓN BASADA EN EL MÉTODO DE RITZ	71

4.2.1. COMPONENTES DEL FUNCIONAL DE ENERGÍA	71
4.2.2. CONDICIONES DE BORDE Y FUNCIONES DE APROXIMACIÓN	73
4.2.3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ	74
4.2.4. RESULTADOS NUMÉRICOS	77
4.3. FORMULACIÓN DEL MACRO ELEMENTO	83
4.3.1. CAMPO DE DEFORMACIONES	83
4.3.2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	84
4.3.3. ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO	86
4.3.4. ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO	88
4.3.5. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN – MATRICES ELEMENTALES EN COORDENADAS NATURALES	90
4.3.6. ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES	92
4.3.7. ESTUDIO DE CONVERGENCIA Y COMPARACIÓN DE DEFLEXIONES TRANSVERSALES ESTÁTICAS	93
4.3.8. ESTUDIO DE CONVERGENCIA Y COMPARACIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES	95
4.3.9. APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN A PLACAS ROMBOIDALES	98
4.3.10. EJEMPLO DE ENSAMBLAJE DE MACRO ELEMENTOS	101
4.4. CONSIDERACIONES FINALES	103
5. CAPÍTULO 5: DESARROLLO Y FORMULACIÓN DE UN MACRO ELEMENTO PARA EL ESTUDIO DE PLACAS LAMINADAS GRUESAS: TEORÍA TRIGONOMÉTRICA	
5.1. INTRODUCCIÓN	105
5.2. CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES	108
5.3. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	109

5.4. ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO	115
5.5. ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO	119
5.6. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN	122
5.7. ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES	123
5.8. ESTUDIOS DE CONVERGENCIA Y VALIDACIÓN	124
5.8.1. PLACA ISÓTROPA	125
5.8.2. PLACAS ANISÓTROPAS	126
5.8.3. PLACAS LAMINADAS	131
5.8.4. ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE TENSIONES EN EL ESPESOR	135
5.8.5. EJEMPLO DE COMPARACIÓN DE CLPT, FSDT Y TSDT	138
5.9. EJEMPLO NUMÉRICO PLACA ROMBOIDAL	143
5.10. EJEMPLOS NUMÉRICOS: ENSAMBLAJE	146
5.10.1. PLACA TRAPEZOIDAL CON SINGULARIDADES EN SU PLANO	146
5.10.2. PLACA TRIANGULAR PERFORADA	149
5.11. CONSIDERACIONES FINALES	152
6. CAPÍTULO 6: CONCLUSIONES GENERALES, CONTRIBUCIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN	
6.1. CONCLUSIONES	155
6.2. CONTRIBUCIONES Y PUBLICACIONES DE ESTA TESIS	158
6.3. BECAS Y PARTICIPACIÓN EN PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN	159
6.4. SUGERENCIAS PARA LINEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN	161
A. ANEXO A: CUERPO ANISÓTROPO - ECUACIONES DE LA ELASTICIDAD	

A.1. INTRODUCCIÓN	163
A.2. CINEMÁTICA	163
A.2.1. DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO	164
A.2.2. DEFORMACIONES Y RELACIONES	
DEFORMACIÓN – DESPLAZAMIENTO	165
A.3. CINÉTICA	167
A.3.1. TENSIONES	167
A.3.2. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	169
A.4. ECUACIONES CONSTITUTIVAS	171
A.4.1. LEY DE HOOKE GENERALIZADA	171
A.4.2. REGLAS DE TRANSFORMACIÓN	173
A.4.3. DISTINTOS TIPOS DE SIMETRÍA ELÁSTICA	176
1) Un plano de simetría elástica	176
2) Dos planos de simetría elástica	178
3) Un plano de isotropía	179
4) Simetría completa, cuerpo isótropo	179
A.4.4. RELACIÓN DEFORMACIÓN – TENSIÓN	
PARA MATERIALES ANISÓTROPAS	180
A.4.5. CONSTANTES DE INGENIERÍA PARA MATERIALES	
ANISÓTROPAS	184
B. ANEXO B: MATERIALES COMPUESTOS – LÁMINAS ANISÓTROPAS	
B.1. INTRODUCCIÓN	187
B.2. MATERIAL COMPUESTO - DEFINICIÓN	187
B.2.1. CLASIFICACIÓN Y CARACTERÍSTICAS	188

B.2.2. COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES COMPUESTOS	188
B.3. ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE UNA LÁMINA	190
B.3.1. COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE UNA LÁMINA	191
B.3.2. DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS EN OTRO SISTEMA DE REFERENCIA	195
B.3.3. COMPORTAMIENTO ELÁSTICO EN LA DIRECCIÓN DEL ESPESOR DE LA LÁMINA	203
C. ANEXO C: PLACAS LAMINADAS: ESFUERZOS RESULTANTES	
C.1. INTRODUCCIÓN	205
C.2. ESFUERZOS RESULTANTES EN UN ELEMENTO PLACA	205
D. ANEXO D: MÉTODO DE RITZ – FUNCIONES COORDENADAS	
D.1. INTRODUCCIÓN	213
D.2. EL MÉTODO DE RITZ	213
D.3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES COORDENADAS	216
D.4. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ PARA EL ANÁLISIS DE PLACAS	217
D.5. ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DISTINTIVAS DEL MÉTODO DE RITZ	218
REFERENCIAS	221

ÍNDICE DE FIGURAS

CAPÍTULO 1

Página

Figura 1.1. Laminado compuesto por láminas en diferentes orientaciones. Descripción general de la posición de las láminas en el espesor del laminado (Adaptado de Kollár and Springer, 2003) 4

CAPÍTULO 2

Figura 2.1. Geometría deformada y no deformada de una placa bajo las hipótesis de Kirchhoff 13

Figura 2.2. Geometría deformada y no deformada de una placa bajo las hipótesis de la teoría FSDT. 16

Figura 2.3. Deformación de una normal transversal de acuerdo a la teoría clásica, de primer orden y de tercer orden de placas. (Adaptada de Reddy, 2003). 18

CAPÍTULO 3

Figura 3.1. Esquema de laminación y definición del sistema de coordenadas cartesianas en un laminado simétrico	32
Figura 3.2. Designación de las direcciones n, s normal y tangente al contorno de la placa. (Adaptado de Reddy, 2003)	35
Figura 3.3. Transformación de espacios. A la derecha: placa real. A la izquierda: placa de referencia o elemento mapeado	40
Figura 3.4. Regla para la unicidad de la transformación en elementos bidimensionales. (Zienkiewicz y Taylor, 1991)	41
Figura 3.5. Polinomios de Hermite	47
Figura 3.6. Polinomios de Gram-Schmidt	49
Figura 3.7. Funciones enriquecidas	50
Figura 3.8. Esquema genérico para el armado de las matrices globales del sistema mecánico en coordenadas naturales	52
Figura 3.9. Valor del coeficiente de frecuencia $\bar{\omega}_1$ en función de la cantidad de polinomios GS	54
Figura 3.10. Valor del coeficiente de frecuencia $\bar{\omega}_2$ en función de la cantidad de polinomios GS	54
Figura 3.11. Valor del coeficiente de frecuencia $\bar{\omega}_3$ en función de la cantidad de polinomios GS	55
Figura 3.12. Placas con longitud de referencia a para estudio de convergencia	55

Figura 3.13. Valor de los coeficientes de frecuencia $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ de placa cuadrada en función de la cantidad de polinomios GS	56
Figura 3.14. Valor de los coeficientes de frecuencia $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ de placa trapezoidal en función de la cantidad de polinomios	57
Figura 3.15. A la izquierda: placa para estudio de convergencia. A la derecha: placa discretizada en dos macro elementos	57
Figura 3.16. Frecuencias naturales, formas modales y líneas nodales asociadas para placa totalmente libre. *No se muestran las que corresponden a movimiento de cuerpo rígido	59
Figura 3.17. Frecuencias naturales, formas modales y líneas nodales asociadas para placa con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas	61
Figura 3.18. Frecuencias naturales, formas modales y líneas nodales asociadas para placa con apoyos puntuales en tres esquinas	62
Figura 3.19. Placa cuadrilátera con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas. $a = 2b$	64
Figura 3.20. Forma modal y líneas nodales asociadas a $\bar{\omega}_1$	65
Figura 3.21. Forma modal y líneas nodales asociadas a $\bar{\omega}_2$	65
Figura 3.22. Forma modal y líneas nodales asociadas a $\bar{\omega}_3$	65
Figura 3.23a Placa con lados empotrados y libres	66
Figura 3.23b Placa discretizada en tres macro elementos	66

Figura 3.24. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_1$	67
Figura 3.25. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_2$	67
Figura 3.26. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_3$	67
Figura 3.27. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_4$	68
 CAPÍTULO 4	
Figura 4.1. Placa laminada rectangular	71
Figura 4.2. Contorno de momentos resultantes para diferentes placas laminadas ($S_1S_1C_3C_3$)	81
Figura 4.3. Contorno de momentos resultantes para diferentes placas laminadas ($S_1F_4C_3C_3$)	81
Figura 4.4. Contorno de momentos resultantes para diferentes placas laminadas ($C_1F_1S_4S_4$)	82
Figura 4.5. Variación del coeficiente adimensional de deflexión estática en el centro de una placa cuadrada para diferentes relaciones b/h .	82
Figura 4.6. Variación de la deflexión adimensional con el ángulo de orientación de la fibra para $b/h=20$.	83
Figura 4.7. Laminados de formas diversas.	93

Figura 4.8. Deflexiones estáticas de placa romboidal (0/30/0) con $b = 2a$ y $h/a = 0.05$, obtenida con la formulación propuesta.	99
Figura 4.9. Formas modales y líneas nodales de placa romboidal (0/30/0) con $b = 2a$ y $h/a = 0.05$, obtenidas con la formulación propuesta.	100
Figura 4.10. Geometría de una placa laminada de forma L	101
Figura 4.11. Frecuencias y formas modales de una placa L laminada.	102
CAPÍTULO 5	
Figura 5.1. Esquema de laminación de la placa	108
Figura 5.2. Esquema genérico para el armado de las matrices globales del sistema mecánico en coordenadas naturales (TSDT)	124
Figura 5.3. Mallado tipo de una placa con elementos finitos sólidos 3D en SAP 2000	127
Figura 5.4. Valores de frecuencias $\bar{\omega}_i$ en función de la cantidad de polinomios GS	128
Figura 5.5. Variación de desplazamiento y tensiones en el espesor de la placa	129
Figura 5.6. Formas modales para placas cuadradas SSSS	130
Figura 5.7. Deformada de la placa laminada cross-ply cuadrada SFSF sujeta a carga uniforme.	133

Figura 5.8. Variación de desplazamiento y tensiones en el espesor de placas (30/-30/30)	134
Figura 5.9. Formas modales de placa cuadrada laminada (30/-30/30) SSSS	135
Figura 5.10. Variación de la tensión $\bar{\sigma}_{xx}$ en el espesor de un laminado	136
Figura 5.11. Variación de la tensión $\bar{\sigma}_{yy}$ en el espesor de un laminado	136
Figura 5.12. Variación de la tensión $\bar{\tau}_{xz}$ en el espesor de un laminado	137
Figura 5.13. Variación de la tensión $\bar{\tau}_{yz}$ en el espesor de un laminado	137
Figura 5.14. Variación de \bar{u} en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT	138
Figura 5.15. Variación de $\bar{\sigma}_{xx}$ en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT	140
Figura 5.16. Variación de $\bar{\tau}_{xz}$ en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT	141
Figura 5.17. Geometría de la placa cuadrilátera laminada SSSS, con diagonales a y $b = 2a$, sujeta a carga uniformemente distribuida	143
Figura 5.18. Geometría de la placa laminada en voladizo (a) y malla de macro elementos (b)	146
Figura 5.19. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ interfaz caso 1.	147

Figura 5.20. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ interfaz caso 2.	148
Figura 5.21. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ interfaz caso 3.	149
Figura 5.22. Geometría de la placa triangular con perforación y mallado considerado.	150
Figura 5.23. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ placa triangular perforada.	150
 ANEXO A	
Figura A.1 Cinemática de la deformación de un medio continuo. [Reddy (2003)]	166
Figura A.2 Componentes del tensor de tensión sobre los planos coordenados. (a) vector tensión. (b) componentes de tensión	168
Figura A.3 Rotación de un sistema de referencia con vectores base \mathbf{e}_i a otro con vectores base \mathbf{e}'_i	174
Figura A.4 Las tensiones normales producen deformaciones tangenciales en un material con anisotropía generalizada (derecha) y no producen deformaciones tangenciales en un material monoclinico (izquierda).	178
Figura A.5 Significado físico de los términos de la relación tensión deformación para materiales anisótropos	183
 ANEXO B	
Figura B.1 Niveles de análisis de una estructura de material compuesto laminado (Kollár and Springer, 2003)	190

Figura B.2 Estado plano de tensión en una lámina	193
Figura B.3 Cáscara cilíndrica con refuerzos de fibras helicoidales	195
Figura B.4 Rotación positiva de los ejes materiales principales desde los ejes xy	196
Figura B.5 Lámina con refuerzo de fibra unidireccional, especialmente ortótropa. [Jones (1999)]	197
ANEXO C	
Figura C.1 Esfuerzos y momentos resultantes en un elemento placa [Reddy (2003)]	207
Figura C.2 Axiles, Momentos y cortes resultantes en una placa laminada, acoplamientos	210

ÍNDICE DE TABLAS

CAPÍTULO 3

	Página
Tabla 3.1. Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa FFFF	54
Tabla 3.2. Valores de los cuatro primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa cuadrada apoyada en sus esquinas	56
Tabla 3.3. Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa trapezoidal apoyada en sus esquinas	56
Tabla 3.4. Valores de los cuatro primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de la estructura de Fig. 3.15	58
Tabla 3.5. Valores de los coeficientes de deflexión $\bar{w}(x,y) = w(x,y) \frac{D}{qa}$ de la estructura de Fig. 3.15	58

Tabla 3.6: Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa Fig.3.19	64
---	----

Tabla 3.7 Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de la estructura de Fig. 3.23	67
--	----

Tabla 3.8: Valores de los adimensionales de deflexión $\bar{w} = w D / (q a^4)$ de la estructura de Fig. 3.23	68
--	----

CAPÍTULO 4

Tabla 4.1. Notación par las distintas combinaciones de contorno clásicas en laminados no-simétricos, en las que n y s indican las direcciones normal y tangente a los respectivos bordes de la placa.	74
--	----

Tabla 4.2. Convergencia y validación de resultados para laminados antisimétricos	78
---	----

Tabla 4.3. Convergencia y validación de resultados para $S_2S_2S_2S_2$, laminado cruzado (0/90)	79
---	----

Tabla 4.4. Respuesta estática de placas laminadas con diferentes condiciones de contorno, laminación y espesor.	80
--	----

Tabla 4.5. Estudio de convergencia de placa laminada cuadrada SFSF (90/0/90/0/90) $\left(\bar{w} = w_0 \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100 \right)$	94
---	----

Tabla 4.6. Deflexión central de placa laminada cuadrada SSSS (0/90/0) $\left(\bar{w} = w_0 \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100 \right)$	95
---	----

Tabla 4.7. Deflexión central de placa laminada sesgada SSSS (0/90/0) $\left(\bar{w} = w_0 \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100 \right)$	95
--	----

Tabla 4.8. Estudio de convergencia para una placa laminada trapezoidal SFSF con $a = 2b$ y $h = 0.1b$	96
$\left(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right)$	
Tabla 4.9. Frecuencias adimensionales de placas laminadas cuadradas (0/90/0)	97
$\left(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \right)$	
Tabla 4.10. Frecuencias adimensionales de placas trapezoidales con $a = 1$, $b = 0.5$ y $h = 0.1b$	98
$\left(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right)$	
Tabla 4.11. Deflexiones estáticas y frecuencias de vibración libre de placas laminadas romboidales con $a = b/2$	99
$\left(\bar{w} _A = w_0 _A \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100, \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right)$	
CAPÍTULO 5	
Tabla 5.1. Placa isótropa cuadrada SSSS sujeta a carga uniforme.	126
Tabla 5.2. Valores de deflexiones centrales y frecuencias en función de la cantidad de polinomios GS	127
Tabla 5.3. Valores de deflexiones centrales y frecuencias para placas cuadradas SSSS	128
Tabla 5.4. Valores de la primera frecuencia $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ de placa cuadrada SSSS (0/90/90/0)	131
Tabla 5.5. Placa laminada <i>cross-ply</i> (0/90/0/90/0) SFSF sujeta a carga uniforme.	132
Tabla 5.6. Valores de deflexiones centrales y frecuencias para placas laminadas (30/-30/30) SSSS	133
Tabla 5.7. Placa romboidal laminada SSSS sujeta a carga uniforme.	144
Tabla 5.8. Valores de frecuencias $\bar{\omega}$ de placa laminada romboidal SSSS	145

Tabla 5.9. Valores de frecuencias $\bar{\omega}$ de placa laminada romboidal CCCC 145

ANEXO A

TABLA A.1. Notación compacta y notación tensorial para tensiones y deformaciones 172

TABLA A.2. Característica de la matriz de flexibilidad para diferentes simetrías materiales (caso tridimensional) 182

CAPÍTULO 1

PRESENTACIÓN E INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA

1.1 INTRODUCCIÓN

Los materiales compuestos y los compuestos laminados son muy importantes en diversas aplicaciones en muchos campos de la ingeniería. Además de presentar una elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso, tienen la ventaja que sus propiedades estructurales pueden modificarse mediante el cambio de la orientación de las fibras de refuerzo, la forma, proporción y disposición de las mismas, el número de láminas y la secuencia de apilamiento. En particular, placas laminadas de distintas formas geométricas construidas con materiales compuestos reforzados con fibras tienen excelentes ventajas y son ampliamente utilizadas en componentes estructurales de alto desempeño. Frente al incremento del uso de los materiales compuestos se plantea la necesidad de un mayor esfuerzo en el desarrollo de sistemas estructurales y paralelamente la generación de métodos de cálculo que permitan analizar y diseñar estructuras, o partes de las mismas, elaboradas con estos materiales. Los materiales compuestos reforzados con fibras son, además, resistentes a la corrosión, térmicamente estables y resultan especialmente adecuados para estructuras en las que el peso constituye una variable fundamental en el proceso de diseño. Más aún, en general, los materiales compuestos pueden diseñarse para satisfacer requerimientos de resistencia,

rigidez, y otros parámetros en cualquier dirección. Las características mencionadas y especialmente la reducción de peso que el uso de estos materiales implica, han hecho que los mismos sean de particular interés en la fabricación de piezas para las industrias aeronáutica, aeroespacial, naval y de automóviles.

Los materiales compuestos de polímero reforzado por fibra (FRP - *Fiber Reinforced Polymer*) combinan las características de los materiales individuales que los conforman para obtener un nuevo material que proporciona mejores propiedades que las de sus componentes por separado, de esta manera, mientras la fibra se diseña para soportar las cargas, la resina actúa como medio de transferencia de tensiones entre fibras adyacentes (Karbhari and Zhao, 2000). Los FRP normalmente presentan fibras de vidrio, carbono o aramida dentro de una matriz de resina termoestable epóxica, de poliéster, viniléster o fenólica, en una concentración mayor al 30% en volumen de fibra del compuesto.

La aplicación de materiales compuestos con fines estructurales en obras civiles comienza a ser relevante en las últimas décadas. La introducción de los materiales compuestos en el campo de la ingeniería civil ha sido lenta principalmente por razones económicas, empleándose fundamentalmente en rehabilitación estructural, refuerzo estructural y sustitución de elementos estructurales, mejorando el comportamiento de la estructura existente sin alterar su configuración geométrica. Asimismo, son materiales livianos y no demandan cambios en la distribución del sistema estructural o en la cimentación. Las ventajas que ofrecen estos materiales hacen posible que sean considerados como una alternativa de solución durante la etapa de diseño, es por esto que comienzan a ser empleados en diferentes tipos de estructuras como edificios, pasarelas y puentes (Keller, 1999; Bank et al., 2000; Keller, 2002; Sobrino y Pulido, 2002; Bank, 2006a; Keller et al., 2007) dando respuesta a requerimientos difíciles de cumplir empleando materiales convencionales.

Además, en la industria de la construcción se aplican en estructuras sometidas a la acción de ambientes agresivos, en partes de plataformas *offshore*, en depósitos, en refuerzos de estructuras, en tableros para pasarelas, y en recubrimiento de túneles (Oller Ed., 2002).

Los materiales compuestos reforzados con fibras para aplicaciones estructurales se construyen a menudo en forma de una capa delgada, denominada *lámina* (Figura

1.1a). Una lámina es una macro unidad de material cuyas propiedades se determinan a través de ensayos apropiados de laboratorio. Elementos estructurales, tales como barras, vigas, columnas o placas pueden estar formados por una secuencia de láminas o capas, constituyendo *laminados* (Figura 1.1b). Estas capas se disponen secuencialmente (Figura 1.1c) de modo de alcanzar determinados valores de resistencia y de rigidez adecuados para aplicaciones específicas.

Entre los elementos estructurales de mayor uso y difusión se encuentran las *placas anisótropas* homogéneas y no homogéneas, las cuales son de interés tanto como elementos únicos o formando parte de estructuras más complejas.

Las placas anisótropas pueden formarse a partir de diferentes configuraciones, a saber:

- **Placas formadas por una única capa.** Estas configuraciones incluyen: isotropía, ortotropía especial (las coordenadas materiales principales *coinciden* con las coordenadas de la placa que son naturales al contorno), ortotropía general (las coordenadas materiales principales *no coinciden* con las coordenadas de la placa) y anisotropía (Anexo B).
- **Placas formadas por conjuntos de láminas.** Cuando las propiedades del material, ubicación y esquema de laminación, son simétricas respecto del plano medio, el laminado se denomina *laminado simétrico*. En caso contrario, el laminado se denomina *asimétrico*. Desde el punto de vista de la producción, los laminados simétricos no tienen tendencia a torcerse por las contracciones térmicas que se inducen durante el enfriamiento posterior al proceso de curado.

El esquema de apilado que define un laminado se denota por una secuencia de ángulos de orientación (α, β, \dots) , donde α es la orientación de la primera capa, β la de la segunda y así sucesivamente hasta definir todas las capas. Las capas se numeran en la dirección positiva del eje normal al laminado $\hat{n} \cong z$ (Reddy, 2003). Para identificar un laminado simétrico se acostumbra incluir la letra *s* como subíndice en el esquema del apilado, por ejemplo:

$$(-45 / 45 / 45 / -45) = (-45 / 45)_s = (\mp 45)_s$$

$$(45 / 45 / 45 / 45) = (45 / -45)_s = (\pm 45)_s$$

En apilados que incluyen secuencias repetitivas, éstas se indican mediante un subíndice que señala el número de veces que se repite, es decir $(30/60/30/60) = (30/60)_2$. Los subíndices también se usan para indicar que una capa se repite de forma consecutiva, por ejemplo:

$$(45/0/0/30/30/30) = (45/0_2/30_3)$$

Para indicar laminados cuyas capas presentan diferentes espesores se emplean subíndices en cada capa: $(\alpha_{t_1} / \alpha_{t_2} / \dots)$.

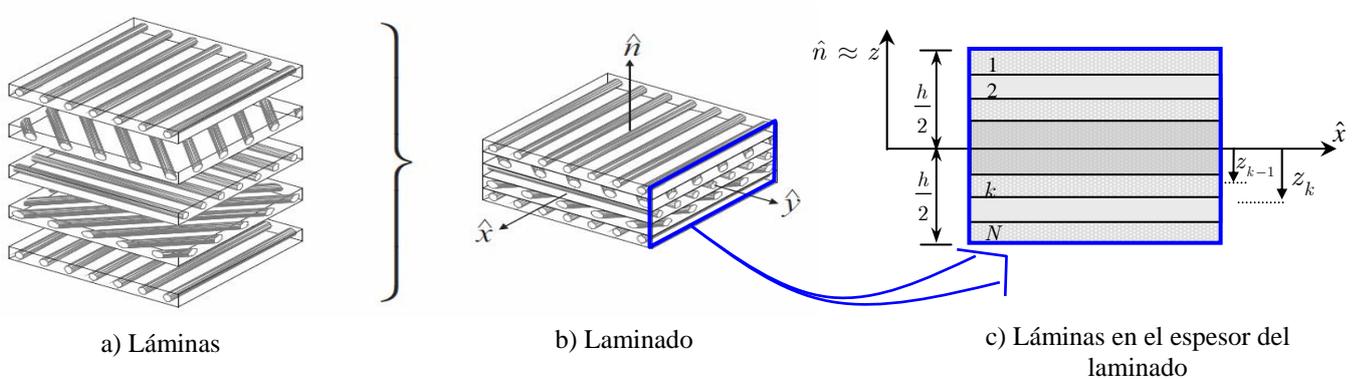


Figura 1.1. Laminado compuesto por láminas en diferentes orientaciones. Descripción general de la posición de las láminas en el espesor del laminado (Adaptado de Kollár and Springer, 2003)

A continuación se hace una breve reseña de los modelos para placas laminadas relacionados con esta investigación, lo cual conduce a los objetivos planteados en esta tesis.

1.2 MOTIVACIÓN Y OBJETIVOS DE LA TESIS

Los modelos para el análisis, diseño u optimización de placas laminadas pueden seguir diferentes enfoques. Entre éstos, están las teorías de capa única equivalente (*Equivalent single-layer theories*) ESL por sus siglas en inglés (Reddy, 2003; Whitney, 1987; Kollár and Springer, 2003). A través de estas teorías una placa laminada heterogénea es considerada como estáticamente equivalente a una placa constituida por una única lámina con un comportamiento constitutivo complejo. Esta complejidad produce diferentes grados de acoplamiento entre los efectos membranales, flexionales

y torsionales. Estos acoplamientos, y la consideración de distintas formas geométricas, son la fuente de dificultades analíticas y de complicadas estructuras matemáticas para las condiciones de contorno que hacen sumamente difícil o imposible el tratamiento exacto del problema. Es por esto que, en general, cuando se analizan placas laminadas de forma arbitraria se recurre a diferentes técnicas numéricas, que proveen un esquema global de trabajo para placas generales. Sin embargo, resultan en problemas que invariablemente tienen un elevado número de grados de libertad. Luego, para problemas de diseño a gran escala o análisis de desempeño y optimización, donde se requieren cálculos repetitivos, es conveniente pensar en la aplicación de métodos como el de Ritz el cual, en su forma convencional, no necesita de la generación de mallas, ya que se puede utilizar un único macro elemento en el proceso completo (Lim et al., 1996). En este sentido, Nallim et. al. (2005a) desarrollaron una metodología que permite estudiar placas laminadas simétricas de formas geométricas complejas mediante un tratamiento unificado. La técnica consiste en realizar una adecuada transformación de espacios, empleando coordenadas naturales para aproximar la geometría de la placa, obteniendo un único macro elemento que representa a la placa completa. En este macro elemento se aplica el Método de Ritz con conjuntos de polinomios ortogonales de Gram-Schmidt para formar las funciones de aproximación. Posteriormente, Nallim y Oller (2008, 2010) extendieron y generalizaron este procedimiento para su aplicación a laminados no simétricos en donde lograron soluciones estables resolviendo el problema estático y dinámico incluyendo las rigideces de acoplamiento extensionales, flexionales y flexo-torsionales. Nallim y colaboradores (2003, 2005a,b, 2008, 2010) demostraron que el uso de estos polinomios para el estudio de placas anisótropas generales es altamente satisfactorio. Esto se debe a que los mismos conforman conjuntos linealmente independientes y completos, se pueden generar de manera automática mediante fórmulas de recurrencia a partir de un polinomio base y generan soluciones estables y convergentes. Estas últimas propiedades se verifican no sólo para las denominadas respuestas globales de las estructuras, sino también cuando se determinan respuestas que involucran a las derivadas de las componentes del campo de desplazamientos.

El análisis de placas laminadas con el uso de la teoría clásica produce resultados apropiados cuando la relación entre la longitud característica y el espesor es superior a cincuenta (dependiendo del esquema de laminación). Para relaciones inferiores se debe recurrir a teorías que consideran la deformación por corte en sus relaciones cinemáticas.

Por otra parte, la teoría de primer orden requiere de factores de corrección, los cuales son difíciles de determinar cuando se analizan placas compuestas arbitrariamente laminadas, ya que dependen de los esquemas de laminación y de parámetros geométricos (Messina y Soldatos, 2002; Setoodeh y Karami, 2003; Oktem y Chauhuri, 2008a; Stephen, 1997; Hull, 2006). Las teorías de orden superior utilizan polinomios de mayor orden o funciones trigonométricas en la expansión de las componentes de desplazamiento en la coordenada del espesor del laminado (Ferreira et al., 2005; Carrera, 2000; Carrera, 2002; Lo et al., 1977; Bert, 1984; Mallikarjuna y Kant, 1993; Kant y Swaminathan, 2002; Oktem y Chaudhuri, 2009; Karama et al., 2009; Aydogdu, 2009). Estos enfoques producen una variación del campo de desplazamiento que hacen nulas las tensiones transversales por corte en las superficies superior e inferior del laminado. Por esta razón no es necesario el uso de factores de corrección por corte. Partiendo de estas teorías y del uso del concepto de elemento mapeado como fue desarrollado por Nallim et al. (2005a) y Nallim y Oller (2008, 2010) permite pensar en la reformulación de esta técnica para la aplicación del método de Ritz a placas laminadas de distintos espesores, así como en el desarrollo de un macro elemento finito jerárquico enriquecido con polinomios de Gram-Schmidt.

De acuerdo a lo expresado anteriormente, el objetivo general de esta tesis es:

- La formulación de un modelo general para el estudio del comportamiento mecánico de placas de material compuesto laminado. Concretamente se aborda el estudio de placas de diferentes espesores mediante la aplicación de una teoría de orden superior que incluye la deformación por corte en sus expresiones cinemáticas. Este objetivo comprende la obtención de una herramienta numérica que trate como macro elementos a placas con distintos parámetros geométricos y mecánicos, y que sea aplicable tanto al análisis estático como dinámico. El desarrollo de esta herramienta está también orientado a reducir el tiempo y mejorar la calidad de diseño de esta tipología estructural. La herramienta así concebida, resulta de utilidad en el área de diseño y optimización asistido por ordenador, para desarrollar piezas estructurales con materiales compuestos de alta tecnología.

Este objetivo general comprende los siguientes objetivos particulares:

- Formular un macro elemento finito enriquecido para el estudio del comportamiento mecánico de placas laminadas.
- Desarrollar un algoritmo basado en el método variacional de Ritz para el análisis de placas gruesas, de formas geométricas diversas, constituidas de material compuesto laminado.
- Desarrollar una metodología de cálculo estático y dinámico de placas anisótropas basada en el uso de estos macro elementos, aplicando la técnica de ensamblaje de elementos.
- Incorporar estos macro elementos en un programa global de elementos finitos.
- Determinar la respuesta estática y dinámica, esfuerzos, tensiones, etc.

1.3 CONTENIDO DE LA TESIS

A efectos de una mejor comprensión de los modelos estructurales para placas desarrollados en esta tesis, se ha realizado una redacción secuencial que permite una introducción gradual a la formulación global del macro elemento finito jerárquico para placas gruesas laminadas.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

Capítulo 1: Presentación e introducción al problema.

En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico y una descripción del estado del conocimiento actual y de las formas de tratar el problema en la literatura, de manera de brindar un panorama general del enfoque de la tesis. A efectos de ordenar y clarificar la redacción de este documento, el estado del conocimiento se complementa con otras referencias en los siguientes capítulos, considerando la relación directa con los pasos adoptados en el desarrollo del modelo propuesto.

En el Capítulo 3 se formula el macro elemento finito enriquecido partiendo del Principio de los Trabajos Virtuales para placas laminadas de Kirchhoff. Además, se presenta la técnica de ensamblaje de los macro elementos propuestos, para poder así

representar cualquier estructura tipo placa, mallando su superficie total en macro elementos cuadriláteros.

En el Capítulo 4 se incorpora la cinemática correspondiente a la Teoría de Primer Orden de Deformación por Corte (FSDT) en la formulación del macro elemento, para extender su aplicación al estudio de placas medianamente gruesas. Se emplea para ello, en primer lugar el método de Ritz en un único macro elemento, y se muestran diversos ejemplos numéricos. Luego, para posibilitar el uso de esta formulación en placas de geometrías complejas y condiciones de borde arbitrarias se generaliza la formulación desarrollada en el Capítulo 3. Se incluyen ejemplos de validación y aplicación del macro elemento finito obtenido, en geometrías simples y complejas, para lo cual se desarrolla la técnica de ensamblaje de los macro elementos formulados.

En el Capítulo 5 se realiza, en primer lugar, una breve descripción del comportamiento mecánico de placas gruesas laminadas, a efectos de sentar las bases conceptuales y establecer de manera inequívoca la importancia del empleo de modelos adecuados para estas tipologías estructurales. Siguiendo estos lineamientos se propone una generalización y extensión del macro elemento finito enriquecido formulado en los capítulos previos. Se considera para este fin una teoría trigonométrica de deformación por corte. Para establecer las variables primarias y secundarias, necesarias para el modelo, se aplica el principio de los trabajos virtuales. Luego este planteo variacional general se aplica para obtener las ecuaciones gobernantes. Finalmente, se generaliza al caso de placas gruesas laminadas, el proceso de ensamblaje propuesto en los Capítulos 3 y 4. El método propuesto permite resolver placas laminadas de diferente espesor, desde delgadas hasta gruesas, con diferentes formas geométricas y condiciones de apoyo. Se presentan ejemplos de validación, así como estudios dinámicos y estáticos de placas complejas que demuestran la versatilidad y aplicabilidad de la metodología propuesta.

En los Capítulos 2 a 5 se presentan una serie de consideraciones finales a modo de conclusiones particulares de los temas desarrollados.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones generales de la Tesis, las contribuciones y publicaciones realizadas durante el desarrollo de la misma, y las sugerencias para líneas de investigación futura.

Este trabajo se completa con una serie de anexos en los que se desarrollan algunos aspectos que ayudan a una mejor comprensión de las formulaciones y metodología propuestas.

En el Anexo A se presentan las ecuaciones básicas de la elasticidad para materiales anisótropos.

En el Anexo B se tratan las definiciones básicas de materiales compuestos.

En el Anexo C se establecen algunos conceptos fundamentales referidos a placas anisótropas laminadas.

Finalmente, en el Anexo D se presenta el método de Ritz y se explica el procedimiento para la obtención de los polinomios ortogonales de Gram-Schmidt como funciones coordenadas.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO Y ESTADO DEL CONOCIMIENTO ACTUAL

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el marco teórico general, realizando una descripción de las hipótesis cinemáticas que comprenden las diferentes teorías de placas laminadas, haciendo énfasis en las que están relacionadas de manera directa con esta tesis. En la segunda parte, se presenta una revisión del estado del conocimiento actual que está directamente relacionado con la formulación presentada en esta tesis.

Es importante destacar, que en los Capítulos 3, 4 y 5 se complementa la revisión de referencias, incorporando aquellas que guardan directa relación con los tópicos abordados y con los modelos desarrollados en cada uno de los capítulos mencionados.

2.2 DESCRIPCIÓN DE LAS TEORÍAS EMPLEADAS EN ESTA TESIS

En los últimos tiempos se han desarrollado numerosos modelos que permiten analizar el comportamiento estático y dinámico de placas laminadas. Sin embargo, el tratamiento de placas laminadas gruesas requiere aún de gran dedicación, en especial

debido a la necesidad de una determinación más precisa de los parámetros mecánicos que resultan fundamentales para su diseño.

El análisis de placas laminadas con el uso de la teoría clásica (CLPT – *Classical Laminated Plate Theory*) produce resultados apropiados cuando la relación entre la longitud característica y el espesor es superior a cincuenta. Para relaciones inferiores se debe recurrir a teorías que consideren la deformación por corte en sus relaciones cinemáticas. La teoría de primer orden (FSDT – *First Order Shear Deformation Theory*) requiere de factores de corrección para salvar la discrepancia entre la real variación de las tensiones de corte en el espesor de la placa (al menos cuadrática y nula en los extremos) y la variación lineal que esta teoría predice. Las teorías de orden superior (HOSDT – *Higher Order Shear Deformation Theory*) utilizan polinomios de mayor orden o funciones trigonométricas en la expansión de las componentes de desplazamiento en la coordenada del espesor del laminado. Estos enfoques producen una variación del campo de desplazamiento que hacen nulas las tensiones transversales por corte en las superficies superior e inferior del laminado; lo que evita el uso de factores de corrección por corte.

A continuación se realiza una breve descripción de estas teorías, que son posteriormente usadas en la formulación del macro elemento finito jerárquico.

2.2.1 TEORÍA CLÁSICA DE PLACAS LAMINADAS (CLPT)

Esta teoría, para materiales anisótropos, comenzó a desarrollarse en la década de 1960 especialmente para el diseño de piezas hechas de materiales compuestos, en esa época denominados “avanzados”, es decir de alta rigidez y resistencia en relación al peso, para aplicaciones aeronáuticas. La teoría se basó fundamentalmente en trabajos de elasticidad teórica y del análisis de placas anisótropas publicados por Lekhnitskii (1963, 1968). Los primeros trabajos fueron motivados en parte por el cálculo de estructuras de madera.

Las hipótesis de Kirchhoff (Figura 2.1) que se detallan a continuación, constituyen la base de esta teoría:

1. Todos los puntos contenidos en una normal al plano medio de la placa tienen el mismo desplazamiento vertical.

2. Los puntos sobre rectas normales al plano medio antes de la deformación, permanecen sobre rectas también ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación.
3. Siendo el espesor muy pequeño (comparado con las otras dimensiones) la tensión normal σ_z sea considera despreciable.

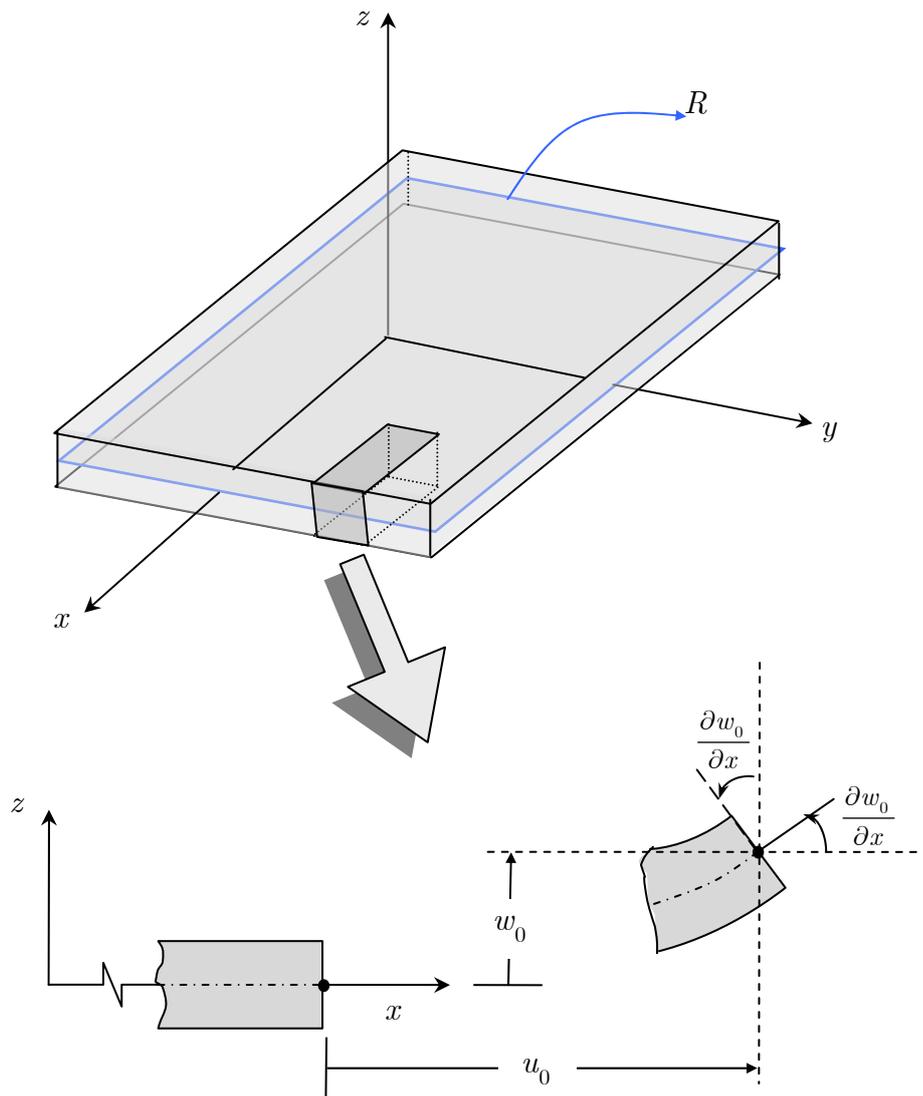


Figura 2.1. Geometría deformada y no deformada de una placa bajo las hipótesis de Kirchhoff.

En la formulación de la teoría se establecen además las siguientes suposiciones o restricciones:

- El material de la placa es linealmente elástico y en general anisótropo, pero tiene un plano de simetría elástica que es paralelo al plano medio.

- Las deformaciones y los desplazamientos son pequeños.
- Se consideran despreciables los efectos de la inercia rotatoria.

Las hipótesis de Kirchhoff permiten reducir el problema en tres dimensiones (3D) al estudio de la deformación del plano medio de la placa. En virtud de las hipótesis (1) y (2), el campo de desplazamientos se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde (u_0, v_0, w_0) son los desplazamientos según los ejes coordenados de los puntos ubicados en el plano xy .

Utilizando el campo de desplazamientos dado por (2.1) se determina el campo de deformaciones, que resulta:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\
 \varepsilon_{zz} &= 0 \\
 \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \\
 \gamma_{yz} &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2.2 TEORÍA DE PRIMER ORDEN DE DEFORMACIÓN POR CORTE (FSDT)

La teoría de primer orden de deformación por corte (Reissner, 1945; Mindlin, 1951) incluye de manera aproximada las deformaciones cortantes transversales, relajando la hipótesis de Kirchhoff de conservación de las secciones ortogonales a la superficie deformada. La FSDT considera que las rectas normales al plano medio antes

de la deformación no permanecen ortogonales a la deformada del plano medio después de la deformación (ver Figura 2.2). Se mantiene la planaridad de las secciones y se conserva la hipótesis de inextensibilidad transversal, por lo que w_0 no es función de la coordenada z del espesor de la placa.

El campo de desplazamientos de la teoría de primer orden, puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde (u_0, v_0, w_0) son los desplazamientos en las direcciones (x, y, z) respectivamente, de los puntos ubicados sobre el plano medio, siendo:

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.4)$$

las rotaciones alrededor de los ejes y y x respectivamente.

La FSDT extiende la cinemática de la CLPT incluyendo la deformación por corte transversal en las expresiones del campo de desplazamiento; la tensión de corte transversal se asume constante en la coordenada del espesor. La FSDT requiere, como se dijo, el uso de factores corrección por corte que son difíciles de determinar para estructuras de placas laminadas arbitrarias. Los factores de corrección por corte no sólo dependen del esquema de laminación y de los parámetros geométricos, sino también de las cargas y condiciones de contorno (Reddy, 2003; Whitney, 1987).

Bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, la relación entre el campo de desplazamientos y el campo de deformaciones está dada por (Anexo A):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x}, & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \end{aligned} \quad (2.5)$$

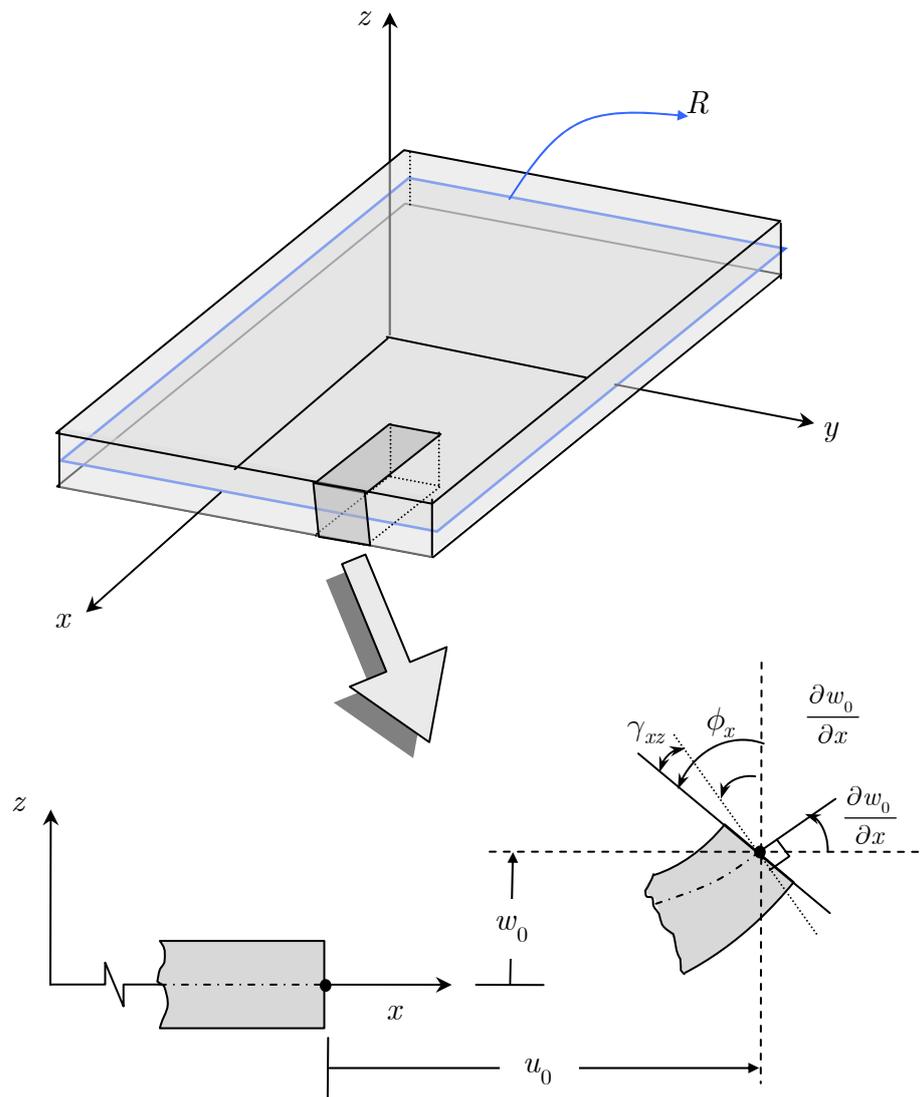


Figura 2.2. Geometría deformada y no deformada de una placa bajo las hipótesis de la teoría FSDT.

En laminados simétricos no existe acoplamiento entre extensión y flexión. Por otra parte, en ausencia de cargas en el plano los desplazamientos u_0 y v_0 serán nulos. En consecuencia, las Ecs. (2.3) se reducen a:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= z\phi_x(x, y, t) \\
 v(x, y, z, t) &= z\phi_y(x, y, t) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

2.2.3 TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR (HOSDT)

La Teoría Clásica de Placas Laminadas (CLPT) y la Teoría de Primer Orden de Deformación por Corte (FSDT) son las teorías de capa única equivalente (ESL – *Equivalent Single Layer*) más simples, y describen adecuadamente el comportamiento cinemático de muchos de los laminados. Sin embargo, las Teorías de Orden Superior (HOSDT – *Higher-order Shear Deformation Theory*) representan mejor la cinemática de estos elementos estructurales, tienen la ventaja de no precisar el uso de factores de corrección por corte y pueden reproducir de manera más precisa la distribución de tensiones interlaminares.

En principio, es posible expandir el campo de desplazamientos, mediante expresiones polinómicas, en términos de la coordenada del espesor al grado deseado. Sin embargo, la complejidad y el esfuerzo computacional elevado que requieren estas teorías desalientan el uso para orden superior a tres.

La razón de expandir el campo de desplazamientos con un término cúbico en la coordenada del espesor, es obtener una variación cuadrática de las deformaciones y tensiones transversales por cortante en cada capa (ver Figura 2.3). Esto elimina la necesidad del factor de corrección por corte usado en la teoría de primer orden (FSDT). La teoría original de tercer orden de deformación por corte (TODT) para placas laminadas de Reddy (1984a, 1984b) contiene como casos particulares teorías de orden menor: la de primer orden (FSDT) y la teoría clásica de placas (CLPT). En esta teoría de tercer orden, se relaja la hipótesis de planaridad y normalidad de la sección transversal de la placa luego de la deformación. El campo de desplazamientos está dado por:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) - c_1 z^3 \left(\phi_x + c_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\
 v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) - c_1 z^3 \left(\phi_y + c_0 \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\
 w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

donde c_1 y c_0 son parámetros que se introducen para incluir los campos de desplazamiento de la CLPT y de la FSDT como casos particulares; con igual significado físico que en la FSDT se tienen las rotaciones:

$$\begin{aligned}\phi_x &= \varphi_x - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \phi_y &= \varphi_y - c_0 \frac{\partial w_0}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.8}$$

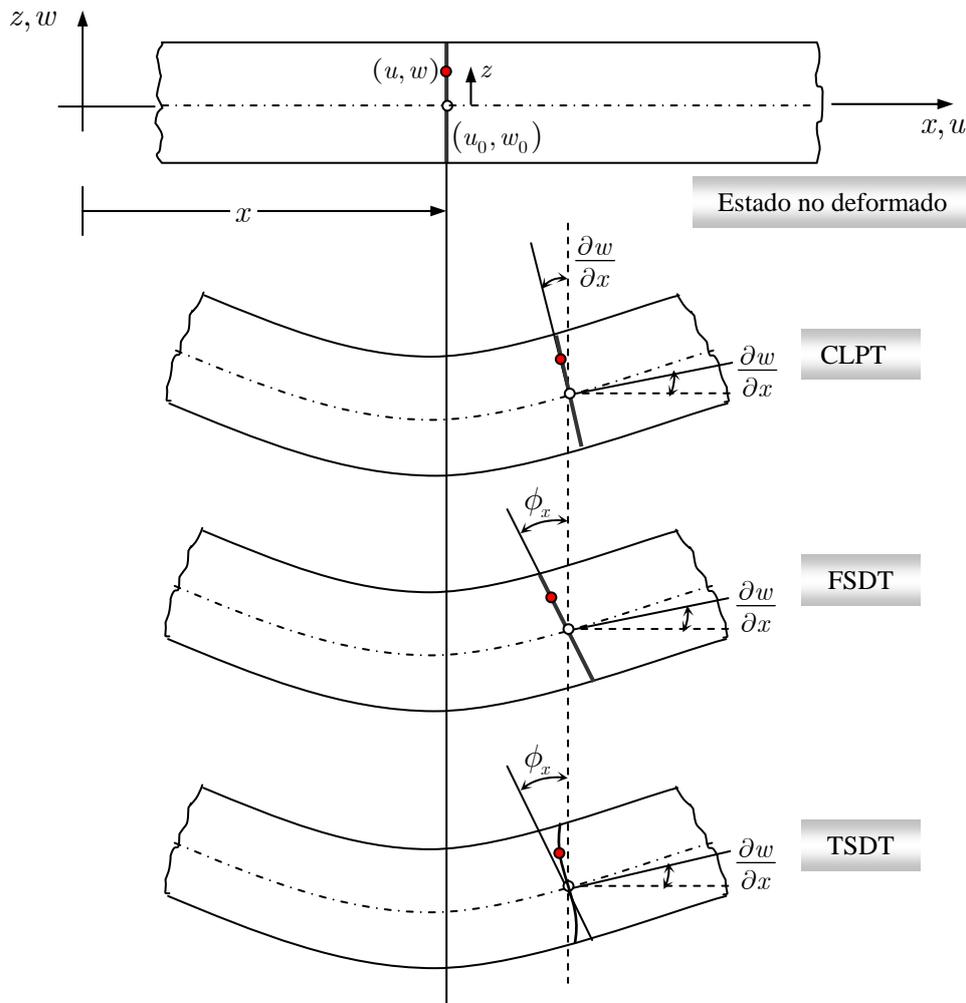


Figura 2.3. Deformación de una normal transversal de acuerdo a la teoría clásica, de primer orden y de tercer orden de placas. (Adaptada de Reddy, 2003).

A partir de las Ecs. (2.7), si se adopta $c_0 = c_1 = 0$ se recupera el campo de desplazamiento de la FSDT. Mientras que si $c_0 = 1$ y $\varphi_x = \varphi_y = 0$ se recupera el campo de desplazamiento correspondiente a CLPT.

Otro tipo de teorías refinadas de orden superior, son las llamadas teorías trigonométricas. Éstas se caracterizan por emplear funciones trigonométricas para

aproximar el campo de desplazamientos. Basado en la Teoría Trigonométrica de Deformación por Corte (TSDT), el campo de desplazamientos de la placa es:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde nuevamente u, v son las componentes de desplazamiento en el plano, w es el desplazamiento transversal y ϕ_x, ϕ_y son las rotaciones de la normal al plano medio, alrededor de los ejes y y x respectivamente. Se observa que en esta teoría se incluye una variación sinusoidal que depende de la coordenada z en el espesor de la placa.

El campo de deformaciones se expresa como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \sin \frac{\pi z}{h} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \sin \frac{\pi z}{h} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} + \sin \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \phi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \phi_y \end{aligned} \quad (2.10)$$

A continuación se presenta una reseña del estado del conocimiento actual del tema en estudio.

2.3 ESTADO DEL CONOCIMIENTO ACTUAL

Los materiales compuestos presentan probadas ventajas por sobre aquellos convencionales. Su elevada relación resistencia-peso y rigidez-peso son especialmente adecuadas en la industria aeroespacial, aeronáutica y automotriz, entre otras. Entre los diferentes tipos de materiales compuestos, los laminados reforzados con fibras son muy importantes como componentes estructurales de placas.

La teoría clásica de placas (Timoshenko y Woinowsky-Krieger, 1959; Kirchhoff, 1850; Lekhnitskii, 1968) basada en las hipótesis mencionadas en la sección

2.2.1, ha sido ampliamente usada para la obtención de la respuesta mecánica de placas laminadas. Sin embargo, estas placas tienen una rigidez al corte transversal relativamente baja, siendo, en consecuencia, las deformaciones transversales por corte más evidentes para placas laminadas que para placas isótropas.

La teoría clásica de placas predice la respuesta de placas isótropas delgadas con una exactitud razonable, pero normalmente no proporciona una precisión adecuada cuando se analizan placas laminadas de configuración geométrica similar. Debido a esta razón la CLPT subestima las deflexiones y sobrestima las frecuencias naturales y cargas de pandeo, incluso en laminados que pueden considerarse geoméricamente como delgados.

Existen numerosas teorías de placas que incluyen las deformaciones por corte transversal en el análisis (Noor y Burton, 1989; Maiti y Sinha, 1996; Liew et al., 1996; Reddy, 2003; entre otras). La teoría de primer orden de deformación por corte (FSDT) propuesta por Reissner (1945) y Mindlin (1951), que asume que los planos normales al plano medio permanecen rectos pero no necesariamente normales después de la deformación, contempla los efectos de las tensiones transversales por corte. Girkmann y Beer (1958) extendieron la teoría de Reissner a placas ortótropas. Posteriormente, Ambartsumyan (1970) estudió placas laminadas simétricas conformadas por láminas ortótropas con ejes materiales principales alineados con los ejes de la placa. Whitney (1969) extendió este análisis a placas laminadas simétricas formadas por láminas ortótropas orientadas arbitrariamente.

Debido a que la FSDT considera un estado constante de tensiones de corte transversal, como se mencionó en la sección 2.2.2, se necesitan coeficientes de corrección por corte para rectificar la variación no real de la deformación/tensión tangencial a lo largo del espesor y que finalmente define la energía de deformación por corte. Es sabido que mientras la FSDT es adecuada para estudiar el comportamiento estructural global (por ejemplo deflexiones transversales, frecuencias fundamentales de vibración o cargas críticas de pandeo), no es adecuada para una predicción precisa de parámetros de respuesta local, como ser la distribución de tensiones interlaminares (Qi y Knight, 1996) o frecuencias correspondientes a modos superiores de vibración.

Las soluciones de forma cerrada para placas de material compuesto laminado usando FSDT han sido desarrolladas para algunas condiciones de borde simples y para

esquemas de laminación particulares (Whitney, 1987; Reddy, 2003; Vinson y Sierakowski, 1990). Otras soluciones analíticas aproximadas, obtenidas por el método de Ritz, emplean funciones viga trigonométricas e hiperbólicas como funciones de aproximación. Sin embargo, la aproximación para placas con anisotropía general lleva a momentos flectores y torsores resultantes que tienden a oscilar alrededor de un valor relativamente constante, como demostraron Nallim y Grossi (2003).

Moleiro et al. (2008) y Auricchio et al. (2006) presentaron el análisis estático de placas cuadradas usando una teoría de primer orden (FSDT) en un modelo de elementos finitos. Wang et al. (2002) analizaron el comportamiento estático y dinámico de placas rectangulares usando un método sin malla con el uso de la FSDT. Otros autores desarrollaron también diversas soluciones alternativas para placas anisótropas rectangulares empleando la teoría de primer orden de deformación por corte y la teoría refinada zigzag (Fares y Elmarghany, 2008) o la teoría de deformación por corte junto con métodos sin malla (Xiang et al., 2009).

Para problemas que involucran diferentes teorías comunes o refinadas de placas, se han propuesto numerosas soluciones analíticas y numéricas aproximadas (Tessler, 1993; Nguyen et al., 2005; Daghia et al., 2008; Fares y Elmarghany, 2008; Xiang et al., 2009; Bodaghi y Saidi, 2010). La mayoría de los artículos de diversos investigadores se limitan a placas laminadas *cross-ply* o *angle-ply* con determinadas condiciones de borde y formas geométricas simples.

Las limitaciones de la CLPT y de la FSDT hicieron necesario el desarrollo y aplicación de teorías de orden superior de deformación por corte, que permitan suprimir el uso de factores de corrección por corte, incluir un alabeo correcto de la sección y obtener una variación más realista de las tensiones y deformaciones por corte transversal en el espesor de la placa. Reissner (1963), Provan y Koeller (1970) y Lo et al. (1977, 1978) desarrollaron teorías de orden superior basadas en expansiones de funciones expresadas en el espesor de la placa, y Levinson (1980) y Reddy (1984b) las modificaron para obtener la distribución parabólica de tensiones de corte a lo largo del espesor de la placa y satisfacer la condición de tensiones de corte nulas en las superficies inferior y superior de la misma. Krishna Murty (1977, 1986), Savitri y Varadan (1992) y Soldatos (1988) desarrollaron teorías de tercer orden construidas

sobre la base de la teoría clásica, que fueron revisadas y generalizadas por Reddy (1990).

Las teorías de orden superior (HOSDT), incluyen el efecto de las deformaciones por corte transversal (Khdeir y Reddy, 1989; Reddy, 2003; Xiao et al., 2008; Oktem y Chaudhuri, 2008a,b). Noor y Burton (1989) y Ghugal y Shimpi (2002) presentaron revisiones completas de estas teorías, y de otra clase de teorías refinadas de deformación por corte, donde se tiene en cuenta el efecto de esta deformación a partir del uso de funciones trigonométricas. En 1877 Levy desarrolló una teoría refinada para placa gruesa isótropa usando por primera vez funciones sinusoidales en el campo de desplazamientos en términos de la coordenada del espesor. Sin embargo, la eficiencia de esta teoría particular de placa no fue validada por más de un siglo. Stein (1986) también propuso esta teoría para placas isótropas en una forma modificada. Las teorías que contienen funciones trigonométricas que involucran la coordenada del espesor en el campo de desplazamientos, son las llamadas teorías trigonométricas de deformación por corte.

Para el estudio de vigas laminadas, las teorías trigonométricas mencionadas, fueron aplicadas primeramente por Shimpi y Ainapure (2001) y posteriormente por Arya et al. (2002). Shimpi y Ainapure (2001) formularon un elemento finito unidimensional para vigas compuestas cross-ply de dos capas, simplemente apoyadas, basado en una teoría trigonométrica multicapa de deformación por corte que incorpora una variación sinusoidal de los desplazamientos en el plano a lo largo del espesor, con tensiones de corte nulas en las superficies superior e inferior del elemento viga, que muestra una distribución real de las tensiones transversales. En este elemento, libre de bloqueo por cortante, se satisface la compatibilidad de desplazamientos en las superficies correspondientes a las interfaces. Estos autores demostraron la convergencia de sus resultados a través de ejemplos de vigas sometidas a flexión estática y a vibraciones libres.

Posteriormente, y para el análisis de flexión estática, Ferreira et al. (2005) usaron por primera vez una teoría trigonométrica de deformación por corte para modelar placas laminadas simétricas cuadradas, mediante un método *meshless* (sin mallado) basado en funciones globales de base radial multicuadráticas, obteniendo muy buenos resultados. La extensión de la teoría trigonométrica para vigas (Arya et al., 2002) a placas

laminadas, provee muy buenos resultados y muestra un excelente comportamiento particularmente en tensiones de corte transversal. Luego, Roque et al. (2005) agregaron el concepto de multicapa a la teoría para placas laminadas de Ferreira et al. (2005), obteniendo muy buenos resultados en el análisis estático de placas laminadas simétricas de forma cuadrada.

A partir de los análisis estáticos detallados en el párrafo anterior, Xiang y Wang (2009) presentaron por vez primera el análisis de vibraciones libres de placas laminadas simétricas cuadradas, usando la teoría trigonométrica de deformación por corte y funciones de base radial multicuadráticas inversas, arribando a resultados óptimos de frecuencias naturales de vibración, para diversos parámetros materiales y geométricos (diferentes relaciones: lado/espesor).

Ghugal y Sayyad (2010) presentaron una teoría trigonométrica de deformación por corte para el estudio de la flexión estática de placas gruesas isotrópicas rectangulares, simplemente apoyadas, obteniendo valores de desplazamientos transversales en excelente concordancia con los resultados exactos.

Es a partir del año 2012, que se extendió el empleo de teorías trigonométricas de deformación por corte para el estudio de placas laminadas y placas sándwich. En la literatura se puede apreciar que su uso es muy reciente, y adquiere importancia, debido a los excelentes resultados que se logran.

Recientemente, Mantari et al. (2012a) desarrollaron una nueva teoría de deformación por corte para placas laminadas compuestas y placas sándwich, a partir de una combinación de funciones exponenciales y trigonométricas del espesor de la placa, con la ventaja ya conocida de no requerir factor de corrección por corte. Posteriormente, dichos autores presentaron por primera vez una teoría trigonométrica de deformación por corte para modelar este tipo de estructuras, cuadradas o rectangulares, en todos los casos formulando un elemento finito discreto (Mantari et al., 2012b; Mantari et al., 2012c). A estos estudios del comportamiento estático, sumaron el análisis de vibraciones libres de placas isotrópicas y laminadas (Mantari et al., 2012d), e incluyeron luego placas inhomogéneas en las cuales las propiedades materiales varían exponencialmente a lo largo del espesor, *graded plates* (Mantari and Guedes Soares, 2012).

En la sección siguiente se presenta una breve reseña de los estudios realizados por diversos investigadores para el análisis de placas de formas arbitrarias.

2.4 PLACAS DE FORMAS DIVERSAS

Durante varias décadas el análisis de placas de forma arbitraria ha sido de interés para el diseño estructural. El estudio de estas placas depende fuertemente de las condiciones de contorno y de las formas geométricas. Se sabe que soluciones “exactas” son posibles sólo para un conjunto limitado de condiciones de contorno, relaciones de espesor y formas geométricas simples (Timoshenko y Woinowsky-Krieger, 1959; Bares, 1981; Szilard, 1974; Whitney, 1987; Qatu, 2004; Reddy, 2003).

La vibración de placas delgadas de diferentes formas y configuraciones ha sido extensamente estudiada y está bien documentada. Los trabajos de Leissa (1969, 1978) y de Blevins (1993), muestran que la mayoría de los resultados son para placas de material isótropo y forma regular, tales como: rectangular, triangular, circular o elíptica. Bambill et al. (2002) analizan la vibración de placas circulares y anulares con anisotropía generalizada, mediante la aplicación del método de Rayleigh – Ritz y utilizando para la construcción de las funciones coordenadas un parámetro de optimización exponencial de Rayleigh. Nallim y Grossi (2008) desarrollaron una formulación para placas elípticas laminadas.

Para el análisis de placas de formas diversas se aplican usualmente, distintos métodos numéricos, tales como el método de los elementos finitos, el método de las diferencias finitas y el método de las bandas finitas (Szilard, 1974; Reddy, 1993; Reddy, 2003).

Saadatpour y Azhari (1998), utilizaron el método de Galerkin para realizar un análisis de placas isótropas de forma general. Emplearon coordenadas naturales para expresar la geometría de la placa en una forma simple. Realizaron el estudio estático de placas simplemente apoyadas empleando series trigonométricas para construir las funciones de aproximación. También determinaron las frecuencias naturales de vibración (Saadatpour et. al., 2000), utilizando funciones de peso obtenidas a partir del método de los multiplicadores de Lagrange.

Sin embargo, estudios sobre placas de forma cuadrilátera general o placas poligonales, con longitudes de lado desiguales son bastante limitados.

Nallim et al. (2005) y Nallim y Oller (2008) presentaron una formulación analítica basada en la teoría clásica de placas, usando el método de Ritz en conjunto con una transformación de coordenadas, para el estudio del comportamiento estático y dinámico de placas laminadas cuadriláteras arbitrarias.

En cuanto al estudio de placas gruesas de geometrías generales, la documentación es aún más escasa. Nguyen-Van et al. (2008) propusieron un elemento cuadrilátero basado en la teoría de primer orden para el análisis de vibración libre de estructuras de placas laminadas y presentaron las frecuencias de vibración obtenidas para placas laminadas sesgadas. También basada en la teoría de primer orden, Liu et al. (2008) presentaron una formulación sin malla para el análisis estático y dinámico de placas laminadas con presencia de perforaciones de distintas formas geométricas, en el interior de su superficie.

Ramesh et al. (2009) presentaron un elemento de placa triangular de alto orden basado en la teoría de deformación por corte de tercer orden para el análisis de la flexión de placas laminadas. Una interesante revisión de los elementos finitos formulados por diversos autores fue realizada por Zhang y Yang (2009). Allí se pone en evidencia el extenso uso de la teoría de primer orden en la formulación de elementos finitos en su versión h , así como el creciente uso de teorías de orden superior para el análisis de placas laminadas. Recientemente, Zamani et al. (2012) presentaron una transformación de coordenadas combinada con las ecuaciones diferenciales que modelan el problema de vibraciones libres, obtenidas a partir de la teoría de primer orden, usando un método de cuadratura diferencial generalizada para la obtención de las soluciones. Así, estudiaron las frecuencias naturales de placas laminadas trapeciales y sesgadas con distintos parámetros geométricos, diversas relaciones de aspecto y condiciones de borde.

2.5 COMENTARIOS FINALES

El análisis del comportamiento estático y dinámico de placas anisótropas laminadas gruesas es un problema de gran interés tanto en lo referente al diseño como a la optimización. A su vez, el análisis estático y/o dinámico de placas con formas geométricas diferentes de la rectangular es escaso, aún en el

caso de isotropía. Se puede apreciar que la mayoría de los modelos desarrollados para obtener soluciones aproximadas están destinados al estudio de placas cuadriláteras cuadradas o rectangulares, mayormente dirigidas a laminados cruzados, mientras que estudios sobre placas cuadriláteras generales son limitados.

El método de los elementos finitos es el más utilizado para resolver problemas estáticos y dinámicos de placas con formas geométricas complejas, lo cual involucra un proceso de discretización y generación de mallas, que invariablemente conduce a sistemas con elevado número de grados de libertad, haciendo que sean especialmente costosos cuando se trabaja en las etapas de diseño y optimización.

Por otro lado, la reciente aplicación de la teoría trigonométrica de deformación por corte para el estudio de placas gruesas laminadas, documentada en artículos científicos, muestra excelentes resultados en lo que respecta a la obtención de la respuesta de este tipo de estructuras y estimula su uso. La teoría trigonométrica usada en esta tesis conjuntamente con la técnica de mapeo de espacios y una formulación de elementos finitos, permite lograr un macro elemento jerárquico que, mediante el proceso de ensamblaje correspondiente, puede ser utilizado para el estudio satisfactorio de placas laminadas de cualquier geometría y condición de contorno.

En función del estado del conocimiento resumido en este capítulo los aportes de esta tesis se pueden dividir en tres partes:

- Se presenta el desarrollo de un algoritmo general basado en una formulación discreta que permite obtener la respuesta mecánica de placas laminadas. El desarrollo comienza con la aplicación de la teoría clásica de placas (CLPT), generalizándose luego mediante la implementación de la teoría de primer orden (FSDT) y finalmente la teoría trigonométrica de deformación por corte (TSDT).
- Se propone y formula un macro elemento finito jerárquico, obtenido empleando polinomios de Hermite y de Gram-Schmidt (como funciones de enriquecimiento), y mapeo de espacios, para representar la aproximación de las componentes del campo de desplazamiento del macro elemento completo.
- Se incluye el macro elemento formulado en un programa de elementos finitos capaz de llevar a cabo el ensamblaje de dos o más macro elementos, para obtener respuestas globales de placas complejas. La posibilidad de estudiar estas geometrías

arbitrarias con el mínimo número de macro elementos, es decir sin necesidad de densificar la malla de elementos finitos así como la precisión obtenida, representa una de las mayores ventajas de la formulación propuesta. Se minimiza de este modo la entrada de datos para llevar adelante las operaciones numéricas, lo que facilita el pre-proceso, lo cual es muy importante en problemas de diseño y optimización.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN DE UN MACRO ELEMENTO ENRIQUECIDO PARA PLACAS LAMINADAS DE KIRCHHOFF

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se presenta el desarrollo y la formulación de un macro elemento finito jerárquico enriquecido, apropiado para el análisis de placas laminadas delgadas. Para el planteo del elemento se utiliza como marco general el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV) y se considera la cinemática correspondiente a la teoría clásica de placas laminadas (CLPT). Más adelante, en los Capítulos 4 y 5 se generaliza y extiende esta metodología para el estudio de placas gruesas. Paralelamente, y a efectos de que el modelo propuesto pueda aplicarse a placas con formas diversas, como por ejemplo: placas sesgadas, trapeciales o romboidales, se trabaja con coordenadas naturales, incorporando la técnica de mapeo de espacios.

La idea que se sigue en este capítulo se explicó brevemente en el Capítulo 1 de esta tesis. Los conceptos básicos surgen de considerar una extensión del enfoque variacional que desarrollaron Nallim y colaboradores (Nallim et al., 2005; Nallim y Oller, 2008 y 2010) para el análisis de placas delgadas. En estos trabajos se obtuvieron formulaciones para placas cuadriláteras empleando el Método de Ritz en combinación

con conjuntos de polinomios de Gram-Schmidt como funciones coordenadas. Los modelos obtenidos tienen la ventaja de ser robustos desde el punto de vista computacional y, además, conducen a soluciones estables y convergentes. Sin embargo, no es posible emplearlos de manera directa para formas más complejas (formada por la unión de distintas formas simples), ni tampoco para casos no lineales. Por esta razón, y tomando como base los mismos conceptos empleados en los trabajos mencionados, se propone la formulación de un macro elemento finito que pueda luego ser ensamblado y que parta del PTV para darle al modelo mayor generalidad.

El Método de los Elementos Finitos (MEF) puede ser considerado como un caso especial de los métodos variacionales clásicos (Reddy, 1984c). La principal diferencia radica en la selección de las funciones admisibles usadas en las series que aproximan la solución. Normalmente la estructura se divide en un número de sub-dominios más pequeños llamados elementos finitos. Así, la solución es aproximada por funciones (polinomios) localmente admisibles (Zienkiewicz y Taylor, 1991; Oñate, 1995; Reddy, 1993).

La precisión de la solución puede ser mejorada de dos maneras. La primera, y más común, es refinar la malla de elementos finitos manteniendo el mismo grado de los elementos usados. Esta forma es conocida como la versión clásica o versión-h del MEF. La segunda forma implica fijar un tamaño de malla e incrementar el grado de las funciones polinómicas de aproximación. Este enfoque se conoce como versión-p del MEF o Método de Elementos Finitos Jerárquicos.

Más recientemente una versión híbrida, llamada versión h-p, ha sido desarrollada mediante la unión de los dos conceptos previos y es esta idea la que se utilizó en el desarrollo de la formulación que se presenta en esta tesis. Para este fin, los primeros cuatro modos de desplazamiento usados en la versión h se mantienen. Mientras que para los modos de orden más alto (mayor que 4) se propone utilizar polinomios generados mediante el proceso de Gram-Schmidt. Así, el campo de desplazamientos se define con los polinomios de Hermite y con polinomios ortogonales para obtener un macro elemento finito jerárquico h-p.

Es necesario disponer de elementos enriquecidos con una mejor aproximación que los estándares para problemas de compuestos laminados con la finalidad de trabajar

con mallas mucho menos densas, reduciendo no sólo los costes computacionales de cálculo sino también los de pre y post procesamiento.

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones que gobiernan el problema para la teoría considerada, se aplica la técnica de mapeo de espacios que permite resolver el problema en una placa cuadrada en coordenadas naturales, se aproxima el campo de desplazamientos con funciones de aproximación que surgen de la combinación lineal de los polinomios citados, y se formula el macro elemento (Rango et al., 2009). También se presenta en este capítulo el proceso de ensamblaje de los elementos formulados y se analiza la eficiencia del mallado de estructuras laminadas de diferentes geometrías (Rango et al., 2010, 2012a). La metodología de ensamblado se desarrolla y se aplica al estudio de la vibración libre y análisis estático de placas elásticas y de espesor uniforme. Esta metodología es general y permite considerar además diversas condiciones de contorno.

Se pueden determinar las frecuencias naturales, sus formas modales asociadas y la respuesta estática debido a cargas perpendiculares al plano medio. El análisis incluye un estudio de convergencia variando el número de polinomios de Gram-Schmidt, que permite concluir que la formulación produce soluciones estables y convergentes.

3.2 CAMPOS DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES – RELACIONES CONSTITUTIVAS DE UNA LÁMINA

Asumiendo válidas las hipótesis de Kirchhoff, enumeradas en la Sección 2.2.1, y considerando un elemento de placa delgada, cuadrilátero, de espesor h , el campo de desplazamientos que fue definido en el Capítulo 2 (se repite para mayor claridad) está dado por:

$$\begin{aligned}u &= -z\partial w / \partial x \\v &= -z\partial w / \partial y \\w &= w_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde u, v son las componentes de desplazamiento en las direcciones x, y y w es el desplazamiento transversal, el cual coincide con los desplazamientos transversales de los puntos ubicados en el plano medio (w_0).

De acuerdo a las componentes del campo de desplazamiento dadas por las Ecs. (3.1), el tensor de deformaciones resulta (se consideran pequeñas deformaciones):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \partial^2 w / \partial x^2 \\ -z \partial^2 w / \partial y^2 \\ -2z \partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

donde $\varepsilon_{xx}^{(1)}$, $\varepsilon_{yy}^{(1)}$, $\gamma_{xy}^{(1)}$ se denominan curvaturas y están dadas por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\partial^2 w / \partial x^2 \\ -\partial^2 w / \partial y^2 \\ -2\partial^2 w / \partial x \partial y \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

La relación entre las tensiones y las deformaciones, para la lámina k-ésima de una placa anisótropa laminada (Figura 3.1), puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (3.4)$$

donde \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) son las rigideces reducidas transformadas que están definidas en el Anexo C de esta tesis (Reddy, 2003).

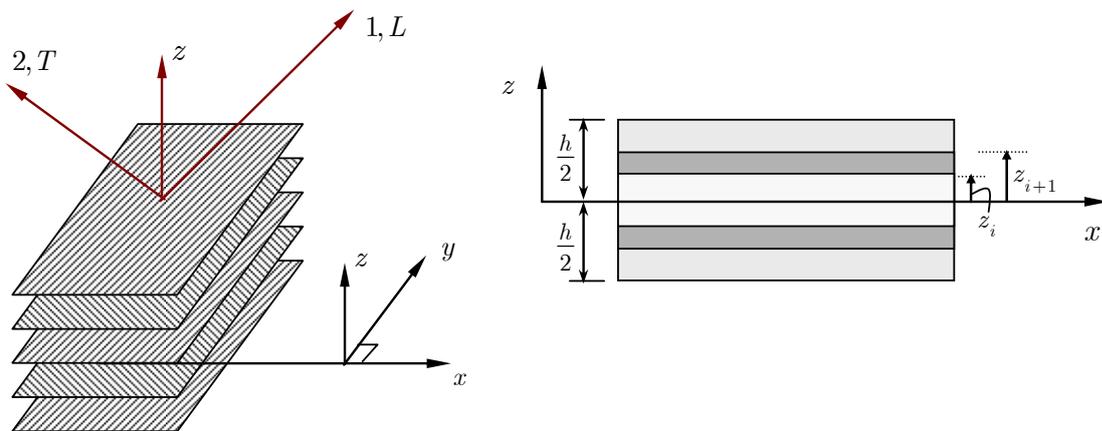


Figura 3.1. Esquema de laminación y definición del sistema de coordenadas cartesianas en un laminado simétrico

3.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

En la teoría CLPT las deformaciones transversales γ_{xz}, γ_{yz} y ε_{zz} son nulas por hipótesis. En consecuencia, las tensiones de corte transversales τ_{xz} y τ_{yz} son nulas para un laminado de capas ortótropas si se computan a partir de las relaciones constitutivas. La tensión normal σ_{zz} es distinta de cero según las relaciones constitutivas, debido al efecto Poisson. Sin embargo, estas tres tensiones no entran en la formulación porque la energía virtual de deformación de las mismas es nula, debido al hecho de que las deformaciones virtuales cinemáticamente consistentes deben ser cero ($\delta\gamma_{xz} = 0, \delta\gamma_{yz} = 0, \delta\varepsilon_{zz} = 0$). Estén o no presentes en la teoría, las tensiones transversales existen en la realidad para mantener la placa en equilibrio. Además, estas componentes de tensión deben ser especificadas en los bordes. Así, las tensiones transversales deben ser tenidas en cuenta en las condiciones de borde y el equilibrio de fuerzas (Reddy, 2003; Altenbach, 2004; Whitney, 1987).

Las ecuaciones que gobiernan el problema pueden derivarse usando el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\delta U + \delta V \equiv \delta W = 0 \quad (3.5)$$

donde δU es la energía virtual de deformación, δV es el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas y δW es el trabajo virtual de todas las fuerzas del sistema.

La versión dinámica del Principio de los Trabajos Virtuales está dada por:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V - \delta K) dt \quad (3.6)$$

donde δK es la energía virtual cinética del sistema mecánico.

La energía virtual de deformación, considerando el aporte virtual de las componentes de deformación (o tensión) que son no nulas de acuerdo a la CLPT, está dada por:

$$\delta U = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta\varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy}) dz dx dy \quad (3.7)$$

Reemplazando la Ec. (3.2) en la Ec. (3.7) se obtiene:

$$\delta U = \int_R \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy} z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + \tau_{xy} z \delta \gamma_{xy}^{(1)}) dz dx dy \right] \quad (3.8)$$

donde R es el área del plano medio de la placa en coordenadas cartesianas (Figura 3.2).

La expresión del trabajo virtual realizado por las fuerzas externas está dado por:

$$\delta V = - \int_R q(x, y) \delta w_0(x, y) dx dy - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} (\hat{\sigma}_{nm} \delta u_n + \hat{\tau}_{ns} \delta u_s + \hat{\tau}_{nz} \delta w_0) dz ds \quad (3.9)$$

donde: n, s son las direcciones normal y tangente al contorno de la placa, respectivamente, como se muestra en la Figura 3.2, y $\hat{\sigma}_{nm}, \hat{\tau}_{ns}, \hat{\tau}_{nz}$ son las componentes de tensiones especificadas en la porción Γ del contorno.

Reemplazando las expresiones de Ec. (3.1) en Ec. (3.9) se obtiene:

$$\delta V = - \int_R q(x, y) \delta w_0(x, y) dx dy - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} \left[\hat{\sigma}_{nm} \left(-z \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} \right) + \hat{\tau}_{ns} \left(-z \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} \right) + \hat{\tau}_{nz} \delta w_0 \right] dz ds \quad (3.10)$$

La energía virtual cinética puede escribirse como:

$$\delta K = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[z^2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \quad (3.11)$$

donde ρ es la densidad del material de la placa y $\dot{w}_0 = \frac{\partial w_0}{\partial t}$.

Sustituyendo las expresiones de δU , δV y δW dadas, respectivamente, por las Ecs. (3.8), (3.10) y (3.11), en la Ec. (3.6) y aplicando los pasos comunes del cálculo de variaciones a la expresión de los trabajos virtuales se llega a la ecuación de Euler-Lagrange (Reddy, 2003):

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

donde:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz, \quad \begin{Bmatrix} I_0 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho dz$$

Los términos relacionados con I_2 son los llamados términos de inercia rotatoria, generalmente despreciados cuando se trabaja con placas delgadas. Estos términos pueden contribuir a modos de vibración o frecuencias de orden superior.

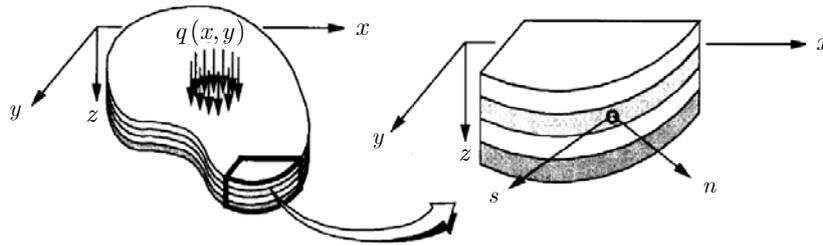


Figura 3.2. Designación de las direcciones n, s normal y tangente al contorno de la placa. (Adaptado de Reddy, 2003)

Las condiciones de borde naturales están dadas por (Reddy, 2003; Nallim, 2003):

$$Q_n - \hat{Q}_n = 0, \quad M_{nn} - \hat{M}_{nn} = 0, \quad M_{ns} - \hat{M}_{ns} = 0 \quad (3.13)$$

en el borde Γ , donde:

$$Q_n \equiv \left(M_{xx,x} + M_{xy,y} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \right) n_x + \left(M_{yy,y} + M_{xy,x} + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \right) n_y \quad (3.14)$$

donde n_x, n_y son las componentes del vector normal unitario al contorno de la placa.

Las variables primarias (desplazamientos generalizados), correspondientes a la teoría clásica de placas laminadas son: $w_0, \partial w_0 / \partial n$ y $\partial w_0 / \partial s$ y las variables secundarias (fuerzas generalizadas) son: Q_n, M_{nn} y M_{ns} . Teniendo en cuenta la condición de borde libre, $V_n \equiv Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \hat{Q}_n$, las condiciones de borde finalmente son (Reddy, 2003; Nallim, 2003):

$$w_0, \frac{\partial w_0}{\partial n} \text{ (esenciales), } V_n, M_{nn} \text{ (naturales)} \quad (3.15)$$

Lo presentado en esta sección permite establecer cuáles son las condiciones de contornos esenciales o geométricas, así como definir las variables primarias que se aplican luego en la formulación del macro elemento finito.

El desarrollo que se presenta en la sección siguiente contempla el análisis dinámico. Como caso especial, las ecuaciones de equilibrio estático se obtienen igualando a cero los términos que incluyen derivadas respecto del tiempo en la Ec. (3.12).

3.4 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO

Para llegar a la ecuación de equilibrio estático y poder formular el macro elemento, se reemplaza en la Ec. (3.6) las expresiones dadas por las Ecs. (3.7) y (3.10), suponiendo todas las variables independientes del tiempo. La expresión así obtenida resulta:

$$0 = \int_R \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right] dxdy - \int_R q(x, y) \delta w_0 dxdy \quad (3.16)$$

Reemplazando en la Ec. (3.16) las expresiones de las tensiones dadas por la Ec. (3.4) se puede escribir:

$$\begin{aligned} 0 = \int_R \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\bar{Q}_{11} \varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{12} \varepsilon_{yy} \delta \varepsilon_{xx} + \bar{Q}_{16} \gamma_{xy} \delta \varepsilon_{xx} + \right. \\ \bar{Q}_{12} \varepsilon_{xx} \delta \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{22} \varepsilon_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{26} \gamma_{xy} \delta \varepsilon_{yy} + \bar{Q}_{16} \varepsilon_{xx} \delta \gamma_{xy} + \bar{Q}_{26} \varepsilon_{yy} \delta \gamma_{xy} \\ \left. + \bar{Q}_{66} \gamma_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right] dxdy - \int_R q(x, y) \delta w_0 dxdy \end{aligned} \quad (3.17)$$

Si se reemplazan las expresiones de las deformaciones específicas de Ecs. (3.2) y las virtuales correspondientes en Ec. (3.17) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_R \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\bar{Q}_{11} z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + \bar{Q}_{12} z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + \bar{Q}_{16} 2z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} + \right. \right. \\
 & + \bar{Q}_{12} z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + \bar{Q}_{22} z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + \bar{Q}_{26} 2z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} + \\
 & \left. \left. + \bar{Q}_{16} 2z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{26} 2z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} + \bar{Q}_{66} 4z^2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) dz \right] dxdy \\
 & - \int_R q(x, y) \delta w_0 dxdy
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

La función incógnita w_0 , que define los desplazamientos verticales del plano medio de la placa, aproximada con funciones de forma admisibles (como se presenta en detalle en las secciones siguientes), puede escribirse como el producto de estas funciones por los desplazamientos nodales:

$$w_0(x, y) = \{N(x, y)\}^T \{c\} \tag{3.19}$$

y del mismo modo:

$$\delta w_0(x, y) = \{N(x, y)\}^T \{\delta c\} \tag{3.20}$$

En adelante se usará indistintamente $\{N(x, y)\} = \mathbf{N}$, $\{\delta c\} = \delta \mathbf{c}$, $\{c\} = \mathbf{c}$.

Reemplazando ahora las expresiones de Ecs.(3.19) y (3.20) en la Ec. (3.18) e integrando a lo largo del espesor de la placa se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 & \int_R D_{11} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + D_{12} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} + 2D_{16} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \\
 & + D_{12} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} + D_{22} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} + 2D_{26} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} + \\
 & + 2D_{16} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} + 2D_{26} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} + 4D_{66} \mathbf{c} \delta \mathbf{c} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} dxdy \\
 & = \int_R q(x, y) \delta \mathbf{c} \mathbf{N} dxdy
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

donde D_{ij} denotan las rigideces flexionales, torsionales y de acoplamiento

$$D_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz \text{ (Las mismas están desarrolladas en el Anexo C de esta tesis)}$$

Cancelando los desplazamientos nodales virtuales en ambos miembros, la Ec. (3.21) se puede expresar matricialmente de la siguiente manera:

$$\int_R \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dxdy \{c\} = \int_R q(x,y) \mathbf{N} dxdy \quad (3.22)$$

La Ec. (3.22) se puede escribir matricialmente como un sistema de ecuaciones de la forma:

$$[K]\{c\} = \{F\} \quad (3.23)$$

donde $[K]$ es la matriz de rigidez del sistema mecánico y está dada por:

$$[K] = \int_R \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \right\} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} dxdy \quad (3.24)$$

y $\{F\}$ es el vector de fuerzas, dado por:

$$\{F\} = \int_R q(x,y) \mathbf{N} dxdy \quad (3.25)$$

3.5 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO

A partir de considerar que $\delta V \equiv 0$ en la Ec. (3.6), en ausencia de fuerzas externas actuando en la placa, se obtiene la ecuación de vibración libre de la misma. Reemplazando en la Ec. (3.6) las expresiones dadas por las Ecs. (3.7) y (3.11), se obtiene:

$$0 = \int_0^T \left\{ \int_R \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz \right\} dxdy \quad (3.26)$$

$$- \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 \left(\frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \right) + \rho \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 dz \right\} dxdy dt$$

Como puede notarse, de acuerdo a lo desarrollado en la sección anterior, el primer término del miembro de mano derecha conduce al producto $[K]\{c\}\{\delta c\}$.

Se asumen desplazamientos periódicos en el tiempo, en los que ω es la frecuencia natural de vibración de la placa. Considerando la energía cinética máxima correspondiente a un ciclo vibratorio y teniendo en cuenta las aproximaciones dadas por Ecs. (3.19) y (3.20) se puede escribir la Ec. (3.26) como:

$$0 = [K]\{c\}\{\delta c\} - \omega^2 \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[z^2 \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^2 + z^2 \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right)^2 + (\mathbf{N})^2 \right] dz dxdy \{c\}\{\delta c\} \quad (3.27)$$

Despreciando los términos de orden superior, por tratarse de placas delgadas, integrando en el espesor y cancelando los desplazamientos nodales virtuales, se llega a:

$$0 = \left\{ [K] - \omega^2 \int_R [\rho h (\mathbf{N})^2] dxdy \right\} \{c\} \quad (3.28)$$

La Ec. (3.28) se puede escribir finalmente como:

$$\{[K] - \omega^2 [M]\} \{c\} = 0 \quad (3.29)$$

donde $[M]$ es la matriz de masa del laminado y está dada por:

$$[M] = \rho h \int_R (\mathbf{N})^2 dxdy \quad (3.30)$$

3.6 DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA DE LA PLACA

El método que se propone consiste en realizar una adecuada transformación de espacios, para formular y resolver el problema en un elemento de referencia. Para esta transformación se emplean coordenadas naturales (Zienkiewicz y Taylor, 1991), lo que permite obtener un único macro elemento que representa a la placa completa. De esta manera la placa real, de forma arbitraria, se convierte en una placa cuadrada de lados rectos en el espacio ficticio como se muestra en la Figura 3.3. (Nallim et al., 2005, 2008). Se denomina *placa de referencia*, *elemento generatriz* o *elemento mapeado* a la placa en el espacio ficticio.

La solución por vía analítica de placas de forma arbitraria es sumamente complicada, y en la mayoría de los casos imposible de obtener, aún en el caso de

material isótropo. Esto se debe, en parte, a la dificultad en la formación de una simple y adecuada función deflexión que pueda ser aplicada al dominio entero de la placa y que satisfaga las condiciones de contorno. La transformación de espacios que se emplea en esta tesis permite, mediante el uso del macro elemento formulado, resolver el problema planteado, tanto estático como dinámico, de manera general, y luego mediante el proceso de ensamblaje se pueden considerar geometrías más complejas.

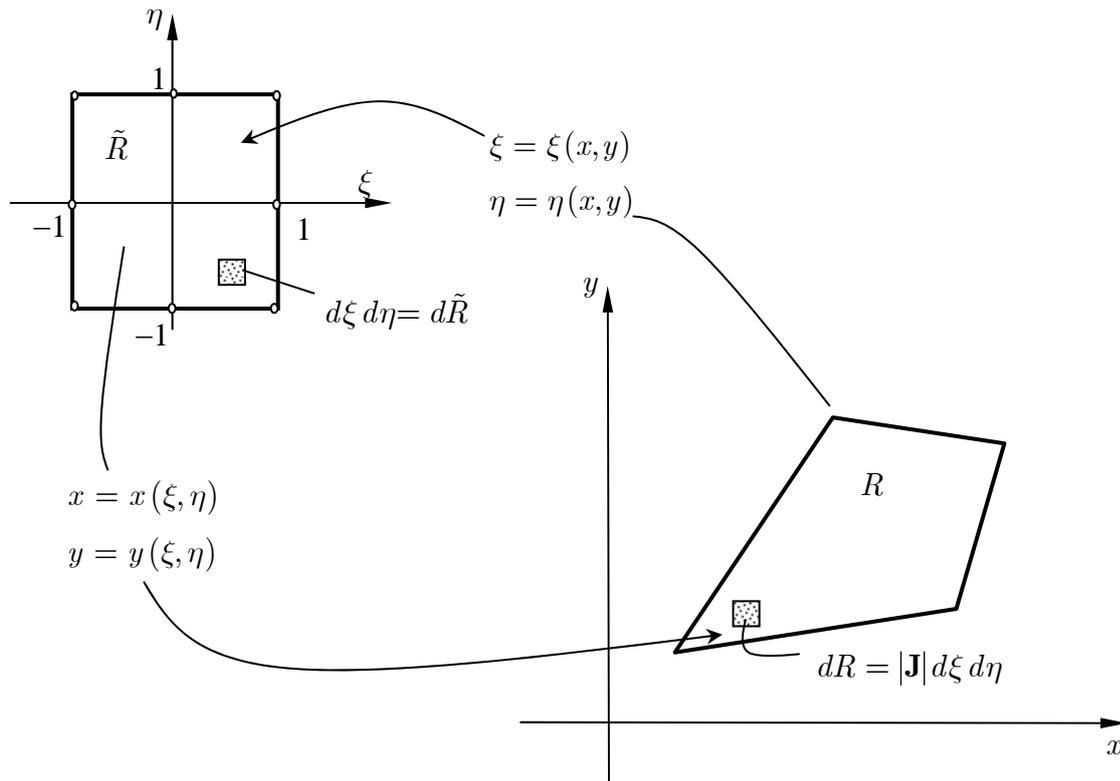


Figura 3.3. Transformación de espacios. A la derecha: placa real.
A la izquierda: placa de referencia o elemento mapeado

Sea una placa cuadrilátera arbitraria de lados rectos, que representa en coordenadas cartesianas un dominio R . Las expresiones analíticas correspondientes a la placa descrita pueden ser expresadas en otras variables mediante el uso de una aplicación que transforma un dominio cuadrado \tilde{R} en el dominio R (Figura 3.3). El dominio \tilde{R} corresponde a la placa de referencia o elemento generatriz y está definido en sus coordenadas naturales por las simples ecuaciones de su contorno $\xi = \pm 1$ y $\eta = \pm 1$.

La aplicación que realiza la transformación entre R y \tilde{R} (o lo que es equivalente, entre (x, y) y (ξ, η)) está dada por (Zienkiewicz y Taylor, 1991; Reddy, 1993):

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde $(x_i, y_i), i = 1, \dots, 4$ son las coordenadas de las cuatro esquinas de la región R y $N_i(\xi, \eta)$ son las funciones lineales de interpolación o funciones de forma que definen la geometría del elemento, y están dadas por:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi) \tag{3.32}$$

donde ξ_i y η_i son las coordenadas naturales de la i -ésima esquina.

Las expresiones (3.31) relacionan las coordenadas cartesianas de un punto y las naturales ξ y η . Esta relación debe ser biunívoca, para lo cual debe cumplirse que el determinante de la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas $xy \rightarrow \xi\eta$ (dicha matriz se define más adelante) sea de signo constante en todos los puntos del dominio transformado.

Puede demostrarse que en una transformación paramétrica basada en funciones de forma lineales (definidas por las expresiones 3.32), la condición necesaria es que ningún ángulo interior (como el α de la Figura 3.4) sea mayor de 180° (Zienkiewicz y Taylor, 1991; Oñate, 1995).

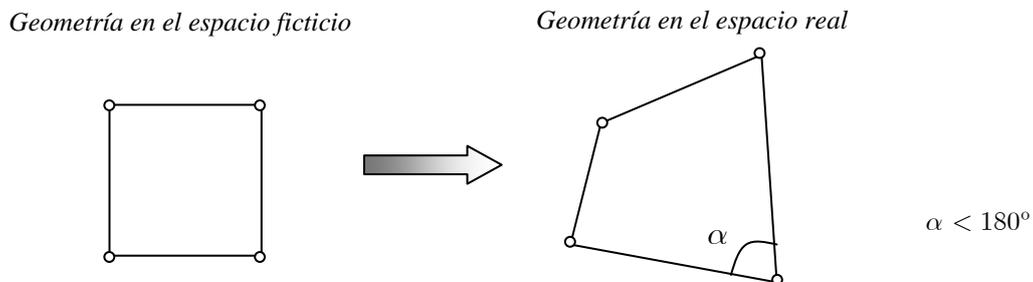


Figura 3.4.
Regla para la unicidad de la transformación en elementos bidimensionales
(Zienkiewicz y Taylor, 1991)

3.7 OPERADORES PARA LA TRANSFORMACIÓN DE ESPACIOS

Como se mencionó anteriormente, el objetivo de la transformación de espacios propuesta es aplicar la metodología en la placa cuadrada de referencia (Nallim et al., 2005; Nallim y Oller, 2008; Nallim y Oller, 2010). Para ello, es necesario escribir todas las funciones y las derivadas, que se encuentran en las expresiones de las matrices de rigidez (Ec. 3.24) y de masa (Ec. 3.30), y en el vector de fuerzas (Ec. 3.25) en las coordenadas naturales (ξ, η) , que son las variables en las que se definen las funciones de soporte local y de enriquecimiento del macro elemento. Para esto se aplica sucesivamente la regla de derivación de funciones compuestas a la función incógnita w , que define los desplazamientos verticales del plano medio de la placa, y se aproximará más adelante con funciones de forma admisibles. Entonces las derivadas parciales del campo de desplazamiento se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial \xi} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned}\tag{3.33}$$

O en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}\tag{3.34}$$

donde \mathbf{J} es la matriz jacobiana y sus elementos son:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i N_{i,\xi} & \sum y_i N_{i,\xi} \\ \sum x_i N_{i,\eta} & \sum y_i N_{i,\eta} \end{bmatrix}\tag{3.35}$$

Las derivadas en las coordenadas del espacio real se obtienen invirtiendo la matriz jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{|\mathbf{J}|} & -\frac{J_{12}}{|\mathbf{J}|} \\ -\frac{J_{21}}{|\mathbf{J}|} & \frac{J_{11}}{|\mathbf{J}|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix}\tag{3.36}$$

donde $|\mathbf{J}|$ es el determinante del Jacobiano de la transformación de coordenadas naturales a cartesianas:

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (3.37)$$

Al aplicar nuevamente la regla de derivación de funciones compuestas a las funciones definidas en las Ecs. (3.33) y operando algebraicamente (Nallim, 2003) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{J}_2)^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{J_{22}}{|J|} & -\frac{J_{12}}{|J|} \\ -\frac{J_{21}}{|J|} & \frac{J_{11}}{|J|} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

donde:

$$\mathbf{J}_2 = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 & \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 & 2\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^2 & J_{12}^2 & 2J_{12}J_{11} \\ J_{21}^2 & J_{22}^2 & 2J_{21}J_{22} \\ J_{11}J_{21} & J_{12}J_{22} & J_{11}J_{22} + J_{21}J_{12} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

y:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} &= J_{11,\xi}, & \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} &= J_{21,\eta}, & \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} &= J_{11,\eta} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2} &= J_{12,\xi}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \eta^2} &= J_{22,\eta}, & \frac{\partial^2 y}{\partial \xi \partial \eta} &= J_{22,\xi} \end{aligned} \quad (3.40)$$

La expresión (3.38) puede escribirse de una forma más compacta de la siguiente manera (Nallim y Oller, 2008):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = [Op^{(1)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \end{bmatrix} + [Op^{(2)}] \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

donde $[Op^{(1)}]$ y $[Op^{(2)}]$ son los operadores que permiten realizar la transformación de espacios y están dados por:

$$[Op^{(1)}] = \begin{bmatrix} a'_1 & a'_2 & -a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & -b'_3 \\ -c'_1 & -c'_2 & c'_3 \end{bmatrix} \quad [Op^{(2)}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^3 a'_i \alpha'_i & \sum_{i=1}^3 a'_i \beta'_i \\ \sum_{i=1}^3 b'_i \alpha'_i & \sum_{i=1}^3 b'_i \beta'_i \\ -\sum_{i=1}^3 c'_i \alpha'_i & -\sum_{i=1}^3 c'_i \beta'_i \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

y las componentes de los operadores están dados por:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{J_{22}^2}{|\mathbf{J}|^2}, & a'_2 &= \frac{J_{12}^2}{|\mathbf{J}|^2}, & a'_3 &= 2 \frac{J_{12} J_{22}}{|\mathbf{J}|^2} \\ b'_1 &= \frac{J_{21}^2}{|\mathbf{J}|^2}, & b'_2 &= \frac{J_{11}^2}{|\mathbf{J}|^2}, & b'_3 &= 2 \frac{J_{11} J_{21}}{|\mathbf{J}|^2} \\ c'_1 &= \frac{J_{21} J_{22}}{|\mathbf{J}|^2}, & c'_2 &= \frac{J_{11} J_{12}}{|\mathbf{J}|^2}, & c'_3 &= \frac{J_{11} J_{22} + J_{12} J_{21}}{|\mathbf{J}|^2} \\ \alpha'_1 &= \frac{-J_{11,\xi} J_{22} + J_{12,\xi} J_{21}}{|\mathbf{J}|}, & \alpha'_2 &= \frac{-J_{21,\eta} J_{22} + J_{22,\eta} J_{21}}{|\mathbf{J}|}, & \alpha'_3 &= \frac{J_{11,\eta} J_{22} - J_{22,\xi} J_{21}}{|\mathbf{J}|} \\ \beta'_1 &= \frac{J_{11,\xi} J_{12} - J_{12,\xi} J_{11}}{|\mathbf{J}|}, & \beta'_2 &= \frac{J_{21,\eta} J_{12} - J_{22,\eta} J_{11}}{|\mathbf{J}|}, & \beta'_3 &= \frac{-J_{11,\eta} J_{12} + J_{22,\xi} J_{11}}{|\mathbf{J}|} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Por otra parte, de la teoría de funciones de varias variables, se sabe que el diferencial de área en coordenadas naturales está dado por:

$$dx dy = |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.44)$$

3.8 MATRICES ELEMENTALES EN COORDENADAS NATURALES

La aproximación del campo de desplazamientos del macro elemento, cuya función incógnita es w ($w = w_0$ por Ec. (3.1)), puede representarse mediante una serie finita de m modos en la dirección ξ , y n modos en la dirección η :

$$w(\xi, \eta) = \sum_1^m \sum_1^n c_{ij} p_i(\xi) q_j(\eta) = \{N(\xi, \eta)\} \{c\} \quad (3.45)$$

donde $\{N(\xi, \eta)\}$ es el vector fila de las funciones de forma, dado por:

$$\begin{aligned} \{N(\xi, \eta)\} = & [p_1 q_1, p_1 q_2, p_1 q_3, p_1 q_4, p_1 q_5, \dots, p_1 q_n, \\ & p_2 q_1, p_2 q_2, p_2 q_3, p_2 q_4, p_2 q_5, \dots, p_2 q_n, \\ & p_3 q_1, p_3 q_2, p_3 q_3, p_3 q_4, p_3 q_5, \dots, p_3 q_n, \dots, \\ & p_m q_1, p_m q_2, p_m q_3, p_m q_4, p_m q_5, \dots, p_m q_n] \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde $p_i(\xi)$ y $q_j(\eta)$ ($i, j = 1 \dots 4$) son polinomios de Hermite y $p_i(\xi)$ ($i = 5 \dots m$) y $q_j(\eta)$ ($j = 5 \dots n$) son polinomios de Gram-Schmidt, los cuales se desarrollan en la próxima sección de este capítulo, y

$\{c\} = \{c_{11}, c_{12}, c_{13}, \dots, c_{1n}, c_{21}, c_{22}, c_{23}, \dots, c_{2n}, c_{m1}, c_{m2}, c_{m3}, \dots, c_{mn}\}_{(m \times n) \times 1}^T$ es el vector de desplazamientos incógnitas.

A partir de la Ec. (3.24) y la Ec. (3.45), e incluyendo el mapeo de espacios dado por las Ecs. (3.41) y (3.44) se obtiene, en el dominio \tilde{R} (en coordenadas naturales), la siguiente expresión para la matriz de rigidez del macro elemento finito:

$$[K^E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.47)$$

donde:

$$\mathbf{B}_1 = a'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi^2} + a'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta^2} - a'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 a'_i \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^3 a'_i \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta}$$

$$\mathbf{B}_2 = b'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi^2} + b'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta^2} - b'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 b'_i \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \sum_{i=1}^3 b'_i \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta} \quad (3.48)$$

$$\mathbf{B}_3 = -c'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi^2} - c'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta^2} + c'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} - \sum_{i=1}^3 c'_i \alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi} - \sum_{i=1}^3 c'_i \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta}$$

con $a'_i, b'_i, c'_i, \alpha'_i, \beta'_i$ ($i = 1 \dots 3$) dadas por Ecs. (3.43) y $\mathbf{N}_{\xi\eta} \equiv \{N(\xi, \eta)\}$ definida en Ec. (3.46).

La matriz de masa del macro elemento finito se obtiene a partir de su expresión en coordenadas cartesianas (x, y) dada por la Ec. (3.30), y las Ecs. (3.44) y (3.46) del mapeo de espacios como:

$$[M^E] = \rho h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{N}_{\xi\eta})^T \mathbf{N}_{\xi\eta} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.49)$$

El vector de fuerzas correspondiente a una carga transversal $q(x, y)$ aplicada sobre el macro elemento completo, se obtiene a partir de su expresión en coordenadas cartesianas (x, y) de la Ec. (3.25) y reemplazando en ésta las Ecs. (3.44) y (3.46):

$$[F^E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q(\mathbf{N}_{\xi\eta})^T |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.50)$$

3.9 GENERACIÓN DE LAS FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

Los cuatro primeros modos de desplazamiento del vector de funciones de forma $\{N(\xi, \eta)\}$ se definen con las funciones de soporte local dadas por los polinomios de Hermite, los cuales confieren desplazamientos y rotaciones unitarias en cada esquina del elemento. Sus expresiones en coordenadas naturales ξ, η , están dadas por:

$$\begin{aligned} p_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & q_1(\eta) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3 \\ p_2(\xi) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 & q_2(\eta) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 \\ p_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & q_3(\eta) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3 \\ p_4(\xi) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 & q_4(\eta) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 \end{aligned} \quad (3.51)$$

En la Figura 3.5 se representan gráficamente los polinomios de Hermite.

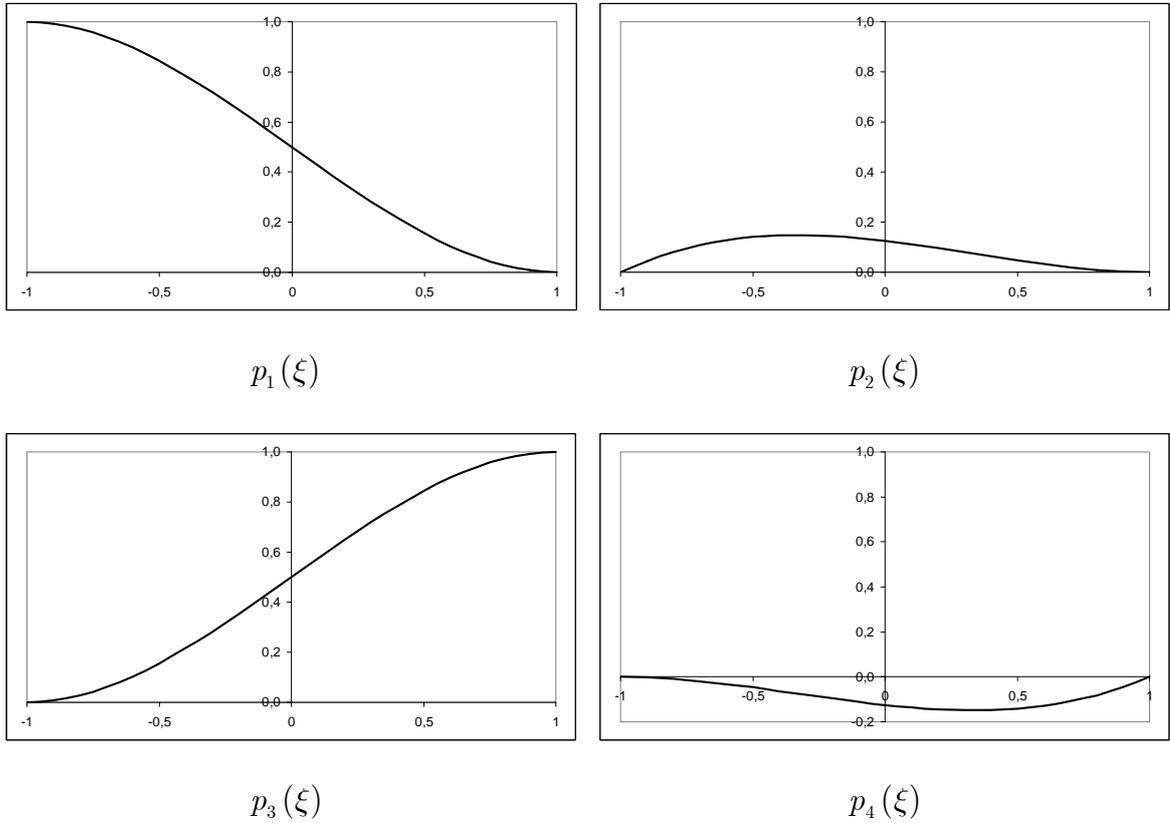


Figura 3.5. Polinomios de Hermite

Los polinomios de Gram-Schmidt que se usan para enriquecer la aproximación del campo de desplazamientos, se generan utilizando un polinomio base que satisface las condiciones de contorno geométricas correspondientes a una viga biempotrada, es decir el polinomio y su derivada primera evaluados en los extremos -1 y 1 son nulos. Así, en coordenadas naturales ξ, η , el primero de estos polinomios para la dirección ξ resulta:

$$p_5(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \quad (3.52)$$

El polinomio expresado por la Ec. (3.52) es el más simple y de menor grado que satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} p_5(\xi)|_{\xi=-1} = p_5(\xi)|_{\xi=1} = 0 \\ \left[\frac{\partial p_5(\xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=-1} = \left[\frac{\partial p_5(\xi)}{\partial \xi} \right]_{\xi=1} = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Los demás polinomios del conjunto $\{p_i(\xi)\}$ para $i = 6, \dots, m$ se generan utilizando el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt (Bhat, 1985a y 1985b):

$$p_6(\xi) = (\xi - B_6)p_5(\xi), \quad p_k(\xi) = (\xi - B_k)p_{k-1}(\xi) - C_k p_{k-2}(\xi) \quad (3.54)$$

donde

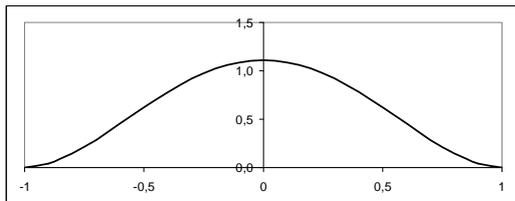
$$B_k = \frac{\int_{-1}^1 \xi (p_{k-1}(\xi))^2 d\xi}{\int_{-1}^1 (p_{k-1}(\xi))^2 d\xi}, \quad C_k = \frac{\int_{-1}^1 \xi p_{k-1}(\xi) p_{k-2}(\xi) d\xi}{\int_{-1}^1 (p_{k-2}(\xi))^2 d\xi}$$

Luego, los coeficientes de los polinomios son recalculados de manera que los polinomios resulten ortonormales:

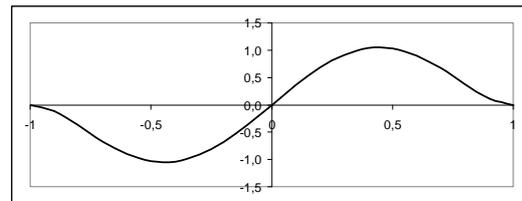
$$\int_{-1}^1 p_k^2(\xi) d\xi = 1 \quad (3.55)$$

Los polinomios correspondientes a la coordenada η se generan usando el mismo procedimiento.

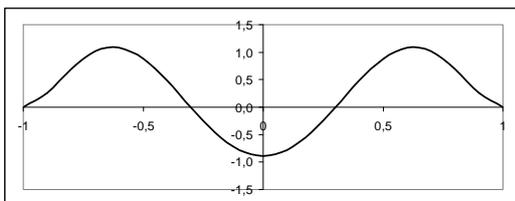
En la Figura 3.6 se representan gráficamente los polinomios de Gram-Schmidt para la coordenada natural ξ .



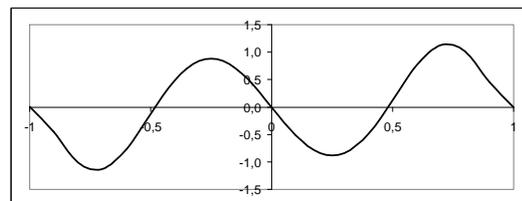
$p_5(\xi)$



$p_6(\xi)$



$p_7(\xi)$



$p_8(\xi)$

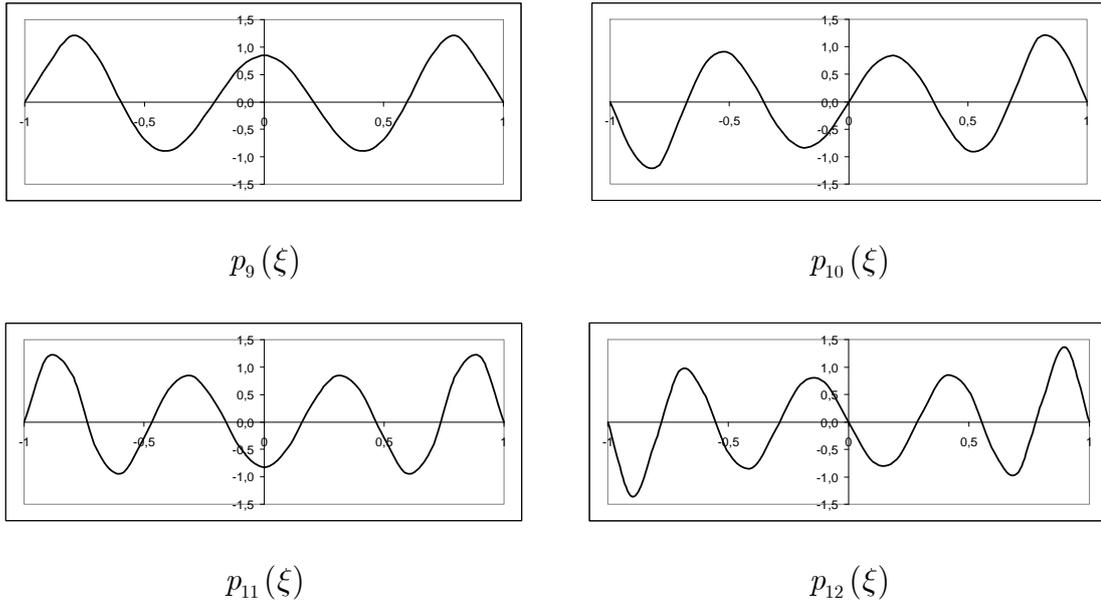


Figura 3.6. Polinomios de Gram-Schmidt

La generación de estos polinomios con las fórmulas de recurrencia dadas por las Ecs. (3.54) garantizan que todas las aproximaciones de orden mayor que cuatro tengan desplazamiento y pendiente nulos en cada extremo del elemento. Esta característica es particularmente importante, ya que estos modos sólo contribuyen o aportan al campo de desplazamiento interior del elemento y, por consiguiente, no afectan al desplazamiento a lo largo del borde del mismo. Sin embargo, cuando cualquiera de estos modos se usa junto con los de Hermite, éstos se sumarán a los grados de libertad a lo largo del borde del elemento. Por lo tanto, se puede simular condiciones de borde clásicas y, para juntas internas, garantizar que las interfaces elemento-elemento sean conformadas totalmente. En la Figura 3.7, a modo ilustrativo, se presentan algunas superficies generadas por los productos de funciones de soporte local y polinomios de Gram-Schmidt.

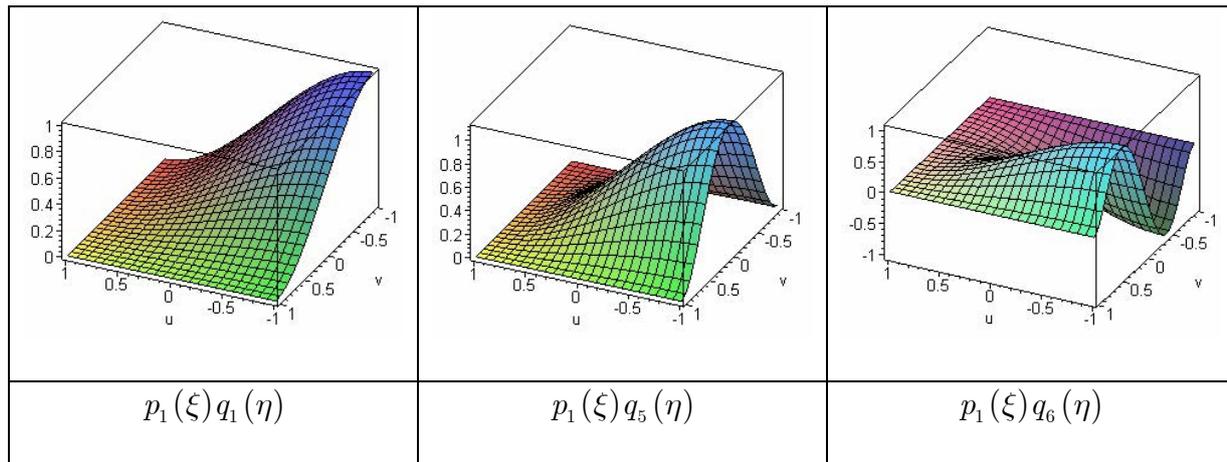


Figura 3.7. Funciones enriquecidas

La componente del desplazamiento correspondiente a la dirección z (perpendicular al plano de coordenadas naturales (ξ, η)) está dada por la función incógnita:

$$w = w_h + w_p \quad (3.56)$$

donde w_h corresponde a la contribución de la combinación de los polinomios de Hermite que trabajan como funciones de forma (de soporte local) y w_p corresponde a la contribución de los polinomios ortogonales generados mediante las fórmulas de recurrencia de Gram-Schmidt.

3.10 ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES

Los macro elementos individuales desarrollados no pueden ser meramente superpuestos para armar las matrices globales de rigidez y de masa, así como el vector global de fuerzas para el análisis de flexión estática. Debe prestarse atención a la estructura interna de cada elemento en la matriz de rigidez, luego, esta estructura se relaciona con la matriz de masa y con el vector de fuerzas (Bardell et al. 1995, Bardell et al. 1996). Cada fila y columna de la matriz $[K^E]$ (Ec. 3.47) corresponden a un determinado grado de libertad c_{ij} . El primer paso en el proceso de ensamblaje consiste en separar estos grados de libertad en nodales (N), de borde (B) y puramente internos (I), y luego reordenar los correspondientes elementos de la matriz de rigidez, de la matriz de masa y del vector de fuerzas para llegar a:

$$[K^E] = \begin{bmatrix} [NN] & [NB] & [NI] \\ [BN] & [BB] & [BI] \\ [IN] & [IB] & [II] \end{bmatrix} \quad [F^E] = \begin{bmatrix} [F^N] \\ [F^B] \\ [F^I] \end{bmatrix}$$

Las variables primarias del problema (para la CLPT), deflexiones w_0 y giros $\frac{\partial w_0}{\partial n}$ (Ec. 3.15) deben ser continuas en todo el dominio, incluyendo en los lados comunes de dos elementos; el ensamblaje de todos los elementos de una malla de elementos finitos está basado en la continuidad entre elementos adyacentes de las variables primarias y el balance de las variables secundarias. Esto exige, en la CLPT, la continuidad de la deflexión transversal y sus derivadas primeras.

Las distintas condiciones de contorno deben ser aplicadas a la estructura general formada por uno o más macro elementos, eliminando de las matrices de rigidez global $[K^G]$ y masa global $[M^G]$ las filas y columnas que corresponden a los grados de libertad asociados con un lado simplemente apoyado, empotrado o libre, o un nodo con apoyo simple. Esto brinda notoria flexibilidad en su uso.

Usando ahora las matrices globales de masa y rigidez en la Ec. (3.29), se obtienen las frecuencias naturales de vibración libre de la estructura:

$$\{[K^G] - \omega^2 [M^G]\} \{c^G\} = 0 \quad (3.57)$$

En correspondencia con cada autovalor ω se tienen los autovectores $\{c^G\}$. Un vector $\{c^G\}$ contiene coeficientes nodales, internos y de borde para cada macro elemento de la malla de la estructura. Se deduce entonces que hay valores de $\{c^G\}$ comunes a dos o más elementos. Por lo tanto, el movimiento de cualquier punto (ξ, η) de cada macro elemento puede calcularse sustituyendo el autovector $\{c^E\}$ apropiado, junto con las funciones de forma asociadas $p_i(\xi)(i = 1, \dots, m)$ y $q_j(\eta)(j = 1, \dots, n)$ en la Ec. (3.45). Así, se puede graficar la superficie deformada de cada elemento de la estructura, satisfaciendo las condiciones de borde y continuidad entre ellos, y obteniendo la deformada de la estructura completa. Mediante la transformación inversa

de coordenadas, la superficie deformada se grafica en coordenadas cartesianas (x, y) utilizando como datos las coordenadas reales de la estructura mallada.

Para el análisis de flexión por carga transversal, la ecuación matricial (3.23) que define la relación entre las cargas actuantes en los elementos y los desplazamientos para la estructura ensamblada viene dada por:

$$[K^G]\{c^G\} = [F^G] \tag{3.58}$$

Es necesario también, como se mencionó anteriormente, ensamblar el vector de fuerzas actuantes en cada macro elemento para resolver el sistema.

La Figura 3.8 muestra esquemáticamente los pasos correspondientes al proceso para el análisis de una estructura genérica, de acuerdo a lo descrito en este apartado y a las funciones de forma adoptadas para generar la formulación de elementos finitos enriquecida.

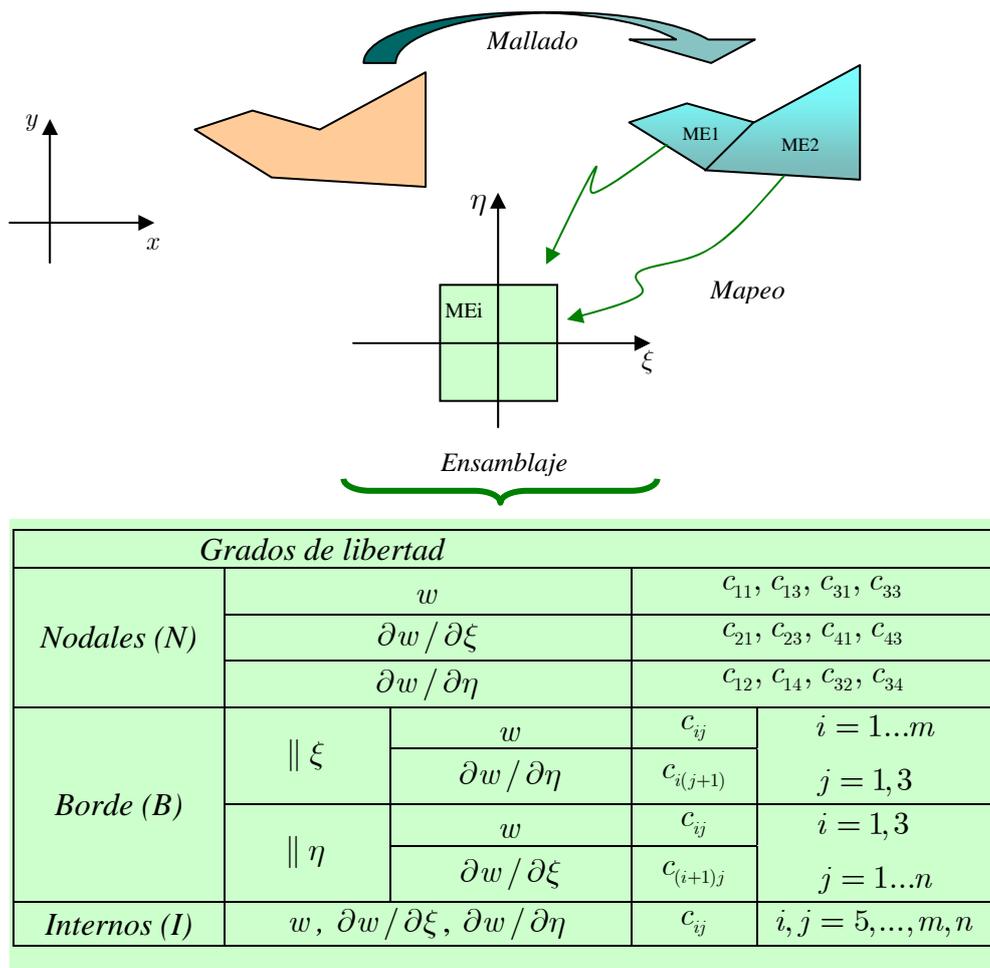


Figura 3.8. Esquema genérico para el armado de las matrices globales del sistema mecánico en coordenadas naturales

Finalmente, los esfuerzos de corte, normales y momentos, así como las tensiones y deformaciones específicas pueden ser obtenidos en todos los puntos de la estructura, en términos de las componentes de los desplazamientos.

3.11 ESTUDIOS DE CONVERGENCIA Y VALIDACIÓN

La metodología desarrollada, así como la formulación obtenida en este capítulo ha sido implementada en un programa desarrollado en lenguaje FORTRAN, con archivos de salida que permiten su lectura en el programa MAPLE. A efectos de validar la metodología propuesta se realizan a continuación una serie de estudios de convergencia y verificación que comprenden comparación con resultados de otros autores y una comprobación empleando elementos finitos clásicos. Los ejemplos presentados incluyen análisis estático y dinámico de placas con distintas configuraciones mecánicas y geométricas.

3.11.1 PLACA CUADRADA CON BORDES LIBRES

Se realiza a continuación un estudio de convergencia y verificación de coeficientes de frecuencias naturales de vibración de una placa isótropa (coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$), cuadrada de lado a y espesor h , que tiene todos sus bordes libres. El estudio de convergencia se lleva a cabo incrementando el número de polinomios de Gram-Schmidt utilizados para enriquecer la función de aproximación.

En la Tabla 3.1 se resumen los valores obtenidos para las tres primeras frecuencias de la placa, usando desde un polinomio de Gram-Schmidt hasta seis (se han obviado los modos correspondientes a movimiento de cuerpo rígido). Se puede observar que a partir del uso de tres polinomios, las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse, observándose además convergencia estable y sin oscilaciones. Por lo tanto se puede concluir que en este caso el uso de tres polinomios de Gram-Schmidt produce muy buenos resultados.

En las Figuras 3.9, 3.10 y 3.11 se muestran los gráficos correspondientes a los valores de las tres primeras frecuencias (Tabla 3.1) en función de la cantidad de polinomios de Gram-Schmidt usados para determinarlas.

Nº de polinomios GS	Frecuencia 1	Frecuencia 2	Frecuencia 3
1	13,66017199812880	19,72569603350630	24,54120329821670
2	13,46872634009140	19,72569603350200	24,54120329821570
3	13,46872634008910	19,59627012183840	24,27068144154140
4	13,46823892637490	19,59627012183230	24,27068144155250
5	13,46823892643140	19,59613789234940	24,27020603500140
6	13,46820515604600	19,59613789231630	24,27020603502720
Valores de referencia (Blevins, 1993)	13,49	19,79	24,43

Tabla 3.1. Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa FFFF

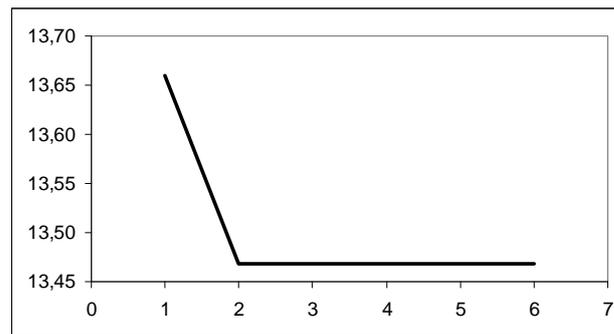


Figura 3.9. Valor del coeficiente de frecuencia $\bar{\omega}_1$ en función de la cantidad de polinomios GS

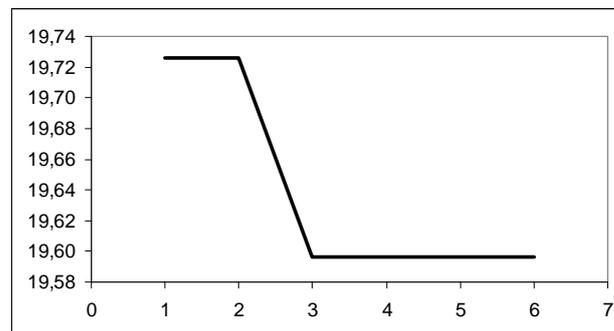


Figura 3.10. Valor del coeficiente de frecuencia $\bar{\omega}_2$ en función de la cantidad de polinomios GS

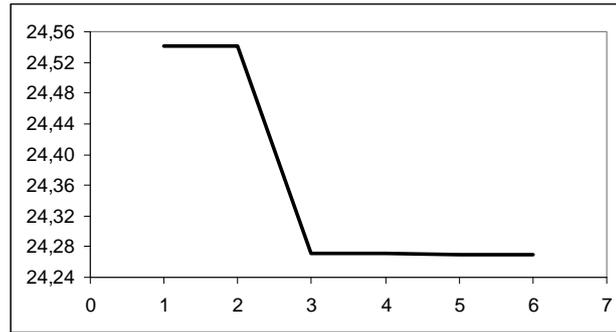


Figura 3.11. Valor del coeficiente de frecuencia $\bar{\omega}_3$ en función de la cantidad de polinomios GS

3.11.2 PLACAS CUADRADA Y TRAPEZOIDAL CON APOYOS PUNTUALES

Se realiza a continuación un estudio de convergencia y verificación de las frecuencias naturales de vibración de dos placas de geometrías distintas, una cuadrada y otra trapezoidal, del mismo material (isótropo) considerado en la sección anterior, ambas con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas (ver Figura 3.12).

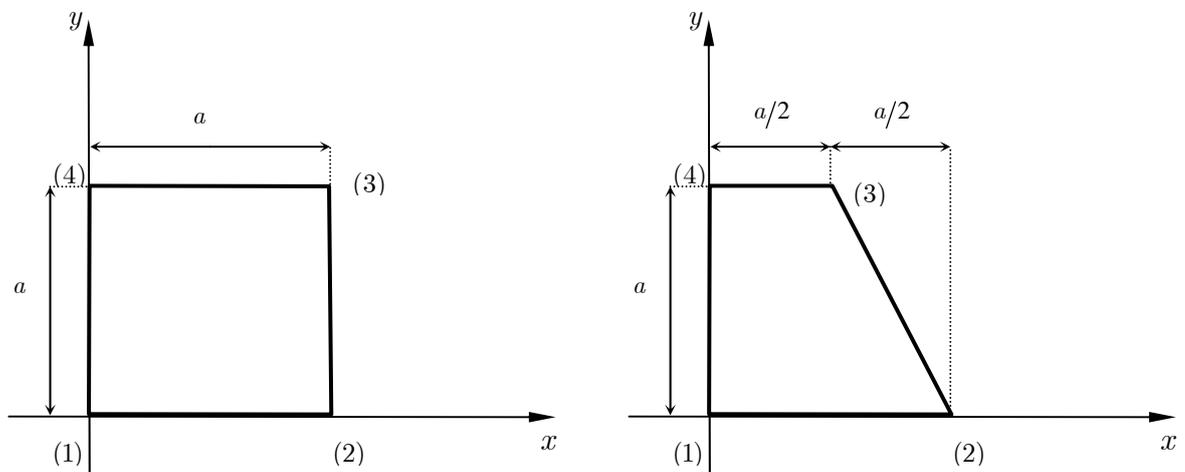


Figura 3.12. Placas con longitud de referencia a para estudio de convergencia

En las Tablas 3.2 y 3.3 se resumen los valores obtenidos para las cuatro primeras frecuencias de la placa cuadrada (comparados con los valores de referencia de Blevins, 1993) y de la placa trapezoidal, respectivamente, usando desde uno hasta seis polinomios de Gram-Schmidt. Se puede observar que a partir del uso de tres

polinomios, las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse, de manera similar al caso tratado en la sub-sección anterior. Por lo tanto, se puede concluir que el uso de tres polinomios de Gram-Schmidt produce muy buenos resultados.

Nº de polinomios GS	Coef. de frecuencia 1	Coef. de frecuencia 2	Coef. de frecuencia 3	Coef. de frecuencia 4
1	7,111799040	16,015934980	16,015934980	19,725696033
2	7,111799040	15,771568309	15,771568309	19,725696033
3	7,110934975	15,770464446	15,770464446	19,596270121
4	7,110934975	15,770314022	15,770314022	19,596270121
5	7,110891519	15,770265288	15,770265288	19,596137892
Valores de referencia (Blevins, 1993)	7,12	15,8	15,8	-

Tabla 3.2. Valores de los cuatro primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa cuadrada apoyada en sus esquinas

Nº de polinomios GS	Coef. de frecuencia 1	Coef. de frecuencia 2	Coef. de frecuencia 3
1	7,753119271	16,316619628	20,560814687
2	7,739953370	16,020258148	20,326099701
3	7,738827873	16,009042506	20,305469797
4	7,738388750	16,007996268	20,304515873
5	7,738252166	16,007849950	20,304057988

Tabla 3.3. Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa trapezoidal apoyada en sus esquinas

En las Figuras 3.13 y 3.14 se muestran los gráficos correspondientes a los valores de las tres primeras frecuencias de la placa cuadrada (Tabla 3.2) y de la placa trapezoidal (Tabla 3.3) respectivamente, en función de la cantidad de polinomios de Gram-Schmidt usados para determinarlas.

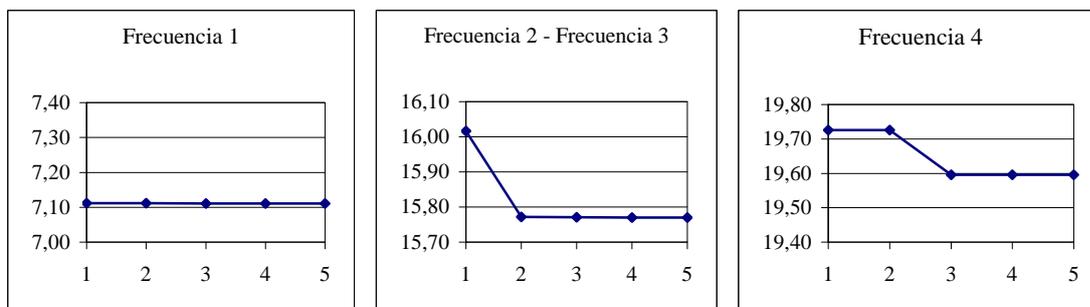


Figura 3.13. Valor de los coeficientes de frecuencia $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ de placa cuadrada en función de la cantidad de polinomios GS

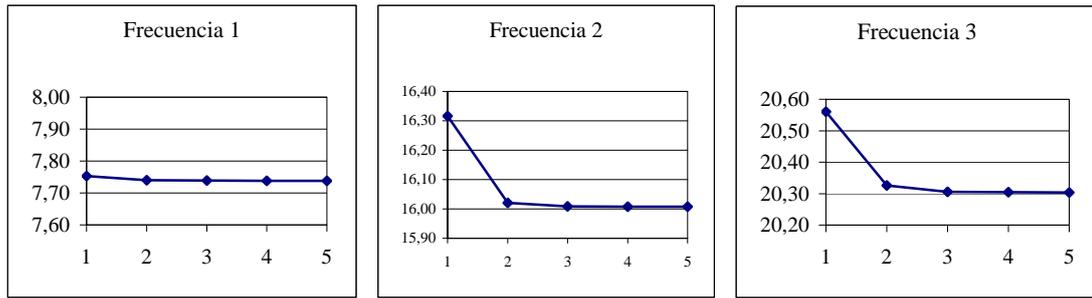


Figura 3.14. Valor de los coeficientes de frecuencia $\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ y $\bar{\omega}_3$ de placa trapezoidal en función de la cantidad de polinomios

3.11.3 VALIDACIÓN DEL ENSAMBLAJE

En este apartado se presenta un estudio de convergencia y verificación de las frecuencias naturales de vibración y de las deflexiones estáticas de una placa dividida en dos macro elementos de distintas geometrías. Se considera un material isótropo con coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. La estructura tiene cuatro apoyos puntuales, ubicados en las esquinas 3 y 4 del elemento ME1, y en las esquinas 1 y 2 del elemento ME2 (ver Figura 3.15).

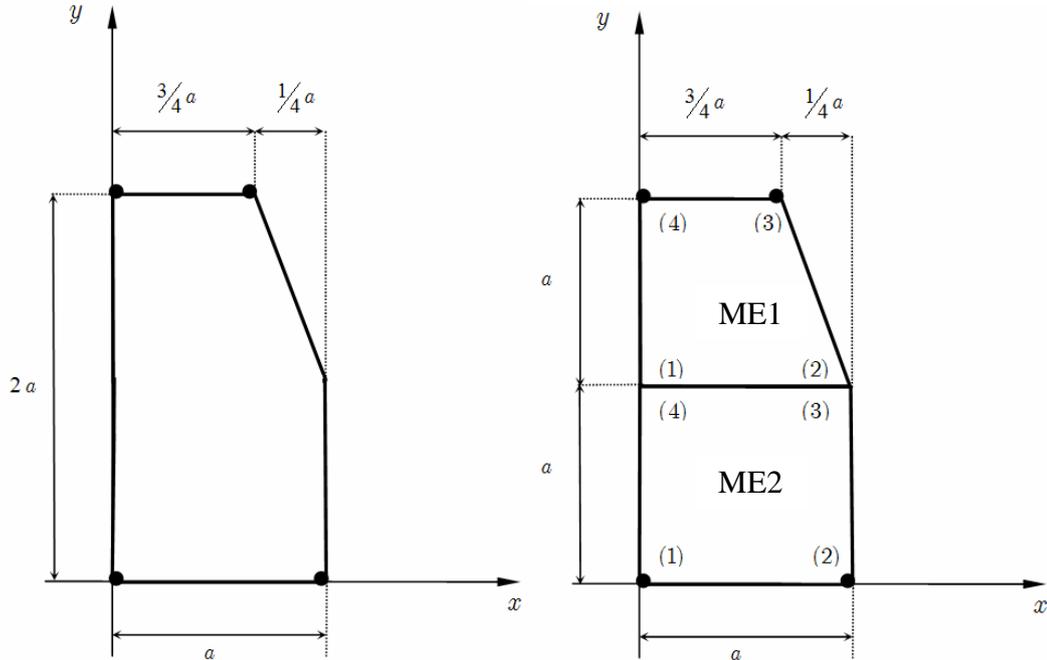


Figura 3.15. A la izquierda: placa para estudio de convergencia.
A la derecha: placa discretizada en dos macro elementos

El estudio de convergencia se lleva a cabo incrementando el número de polinomios de Gram-Schmidt utilizados para enriquecer la función de aproximación. El

programa desarrollado calcula las matrices elementales de rigidez y de masa, y los vectores elementales de fuerza y luego los ensambla a partir de igualar los desplazamientos y giros que se relacionan con el lado que comparten los dos elementos. Las condiciones de borde son tenidas en cuenta, como es usual en elementos finitos, en las matrices y vector globales de la estructura.

Nº de polinomios GS	Frecuencia 1	Frecuencia 2	Frecuencia 3	Frecuencia 4
1	2,33444	6,94634	8,64661	14,71341
2	2,33429	6,93137	8,64058	14,53915
3	2,33421	6,93130	8,63918	14,52755
Valor SAP (200 elementos)	2,33076	6,75273	8,65357	14,38109

Tabla 3.4. Valores de los cuatro primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de la estructura de Fig. 3.15

En la Tabla 3.4 se resumen los valores obtenidos para las cuatro primeras frecuencias de vibración libre de la estructura, usando desde un polinomio de Gram-Schmidt hasta tres, y se muestran los valores de referencia que se obtienen del análisis con elementos finitos convencionales (*shell element de 4 nodos*) llevado a cabo con el programa comercial SAP 2000 versión 11 (CSI Analysis Reference Manual, 2007), que se realizó mallando la estructura en 200 elementos finitos clásicos. Se puede observar que a partir del uso de dos polinomios de Gram-Schmidt las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse observándose, como en los casos anteriores, convergencia sin oscilaciones.

Nº de polinomios GS	punto a (0.5a, 0)	punto b (a, 0.5a)	punto c (a, a)	punto d (0.8a, 1.8a)
1	0,02571	0,16359	0,22890	0,07628
2	0,02571	0,16359	0,22889	0,07645
3	0,02566	0,16354	0,22886	0,07657
Valor SAP (200 elem.)	0,02511	0,16954	0,24003	0,078367
Nº de polinomios GS	Punto e (0.375a, 2a)	punto f (0, 1.5a)	punto g (0, a)	punto h (0, 0.5a)
1	0,00936	0,17479	0,24469	0,17437
2	0,00939	0,17482	0,24473	0,17438
3	0,00936	0,17483	0,24474	0,17438
Valor SAP (200 elem.)	0,00885	0,17008	0,23737	0,16967

Tabla 3.5. Valores de los coeficientes de deflexión $\bar{w}(x,y) = w(x,y) \frac{D}{qa^4}$ de la estructura de Fig. 3.15

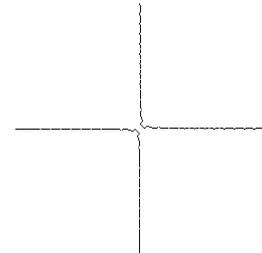
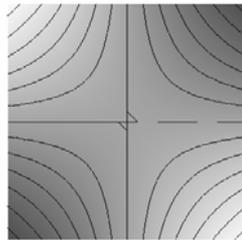
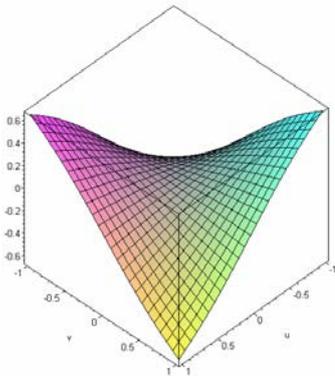
En el caso de las deflexiones estáticas, los resultados adimensionalizados son los que muestra la Tabla 3.5, para diversos puntos de la estructura, para los cuales se especifican sus coordenadas cartesianas en función de la longitud a . Análogamente, se observa una convergencia estable y muy buena concordancia con los resultados obtenidos cuando se usan elementos finitos en su versión h.

3.12 EJEMPLOS NUMÉRICOS CON UN MACRO ELEMENTO

3.12.1 PLACA CUADRADA CON DIVERSAS CONDICIONES DE BORDE

En esta sección se presentan las frecuencias naturales, las formas modales y las líneas nodales asociadas, correspondientes a placas isótropas totalmente libres (Figura 3.16) y con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas (Figura 3.17) y en tres esquinas (Figura 3.18), obtenidas formulando estas placas como macro elementos.

$$\bar{\omega}_1 = 13.468205^*$$



$$\bar{\omega}_2 = 19.596138$$

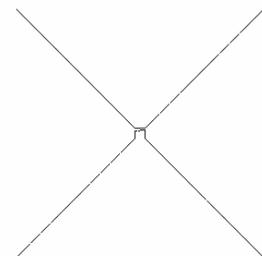
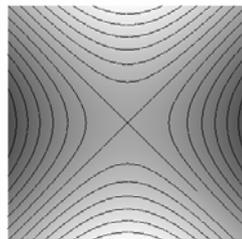
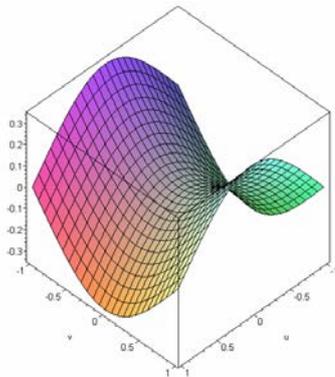


Figura 3.16. Frecuencias naturales, formas modales y líneas nodales asociadas para placa totalmente libre. *No se muestran las que corresponden a movimiento de cuerpo rígido

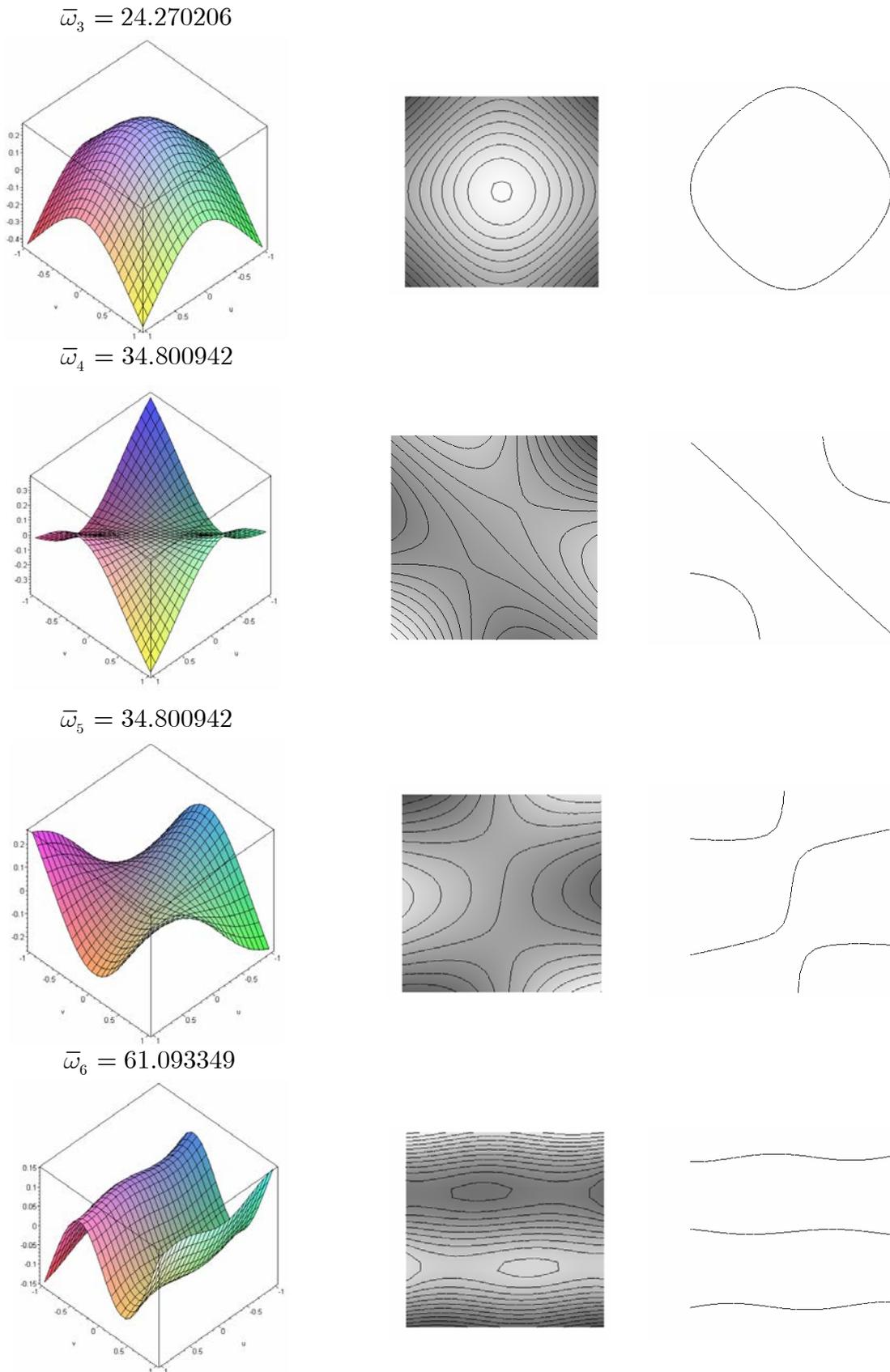


Figura 3.16. Continuación

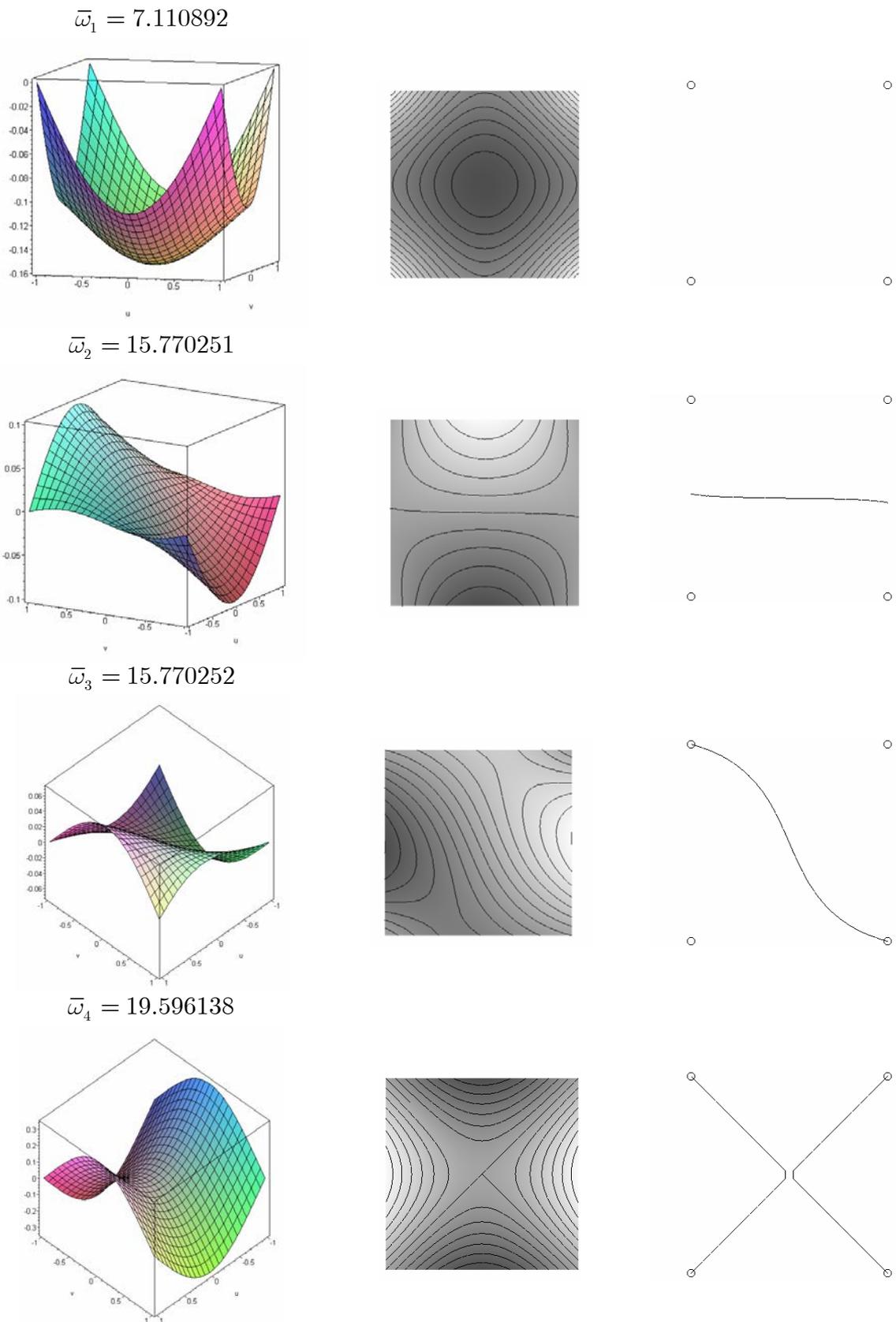


Figura 3.17. Frecuencias naturales, formas modales y líneas nodales asociadas para placa con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas

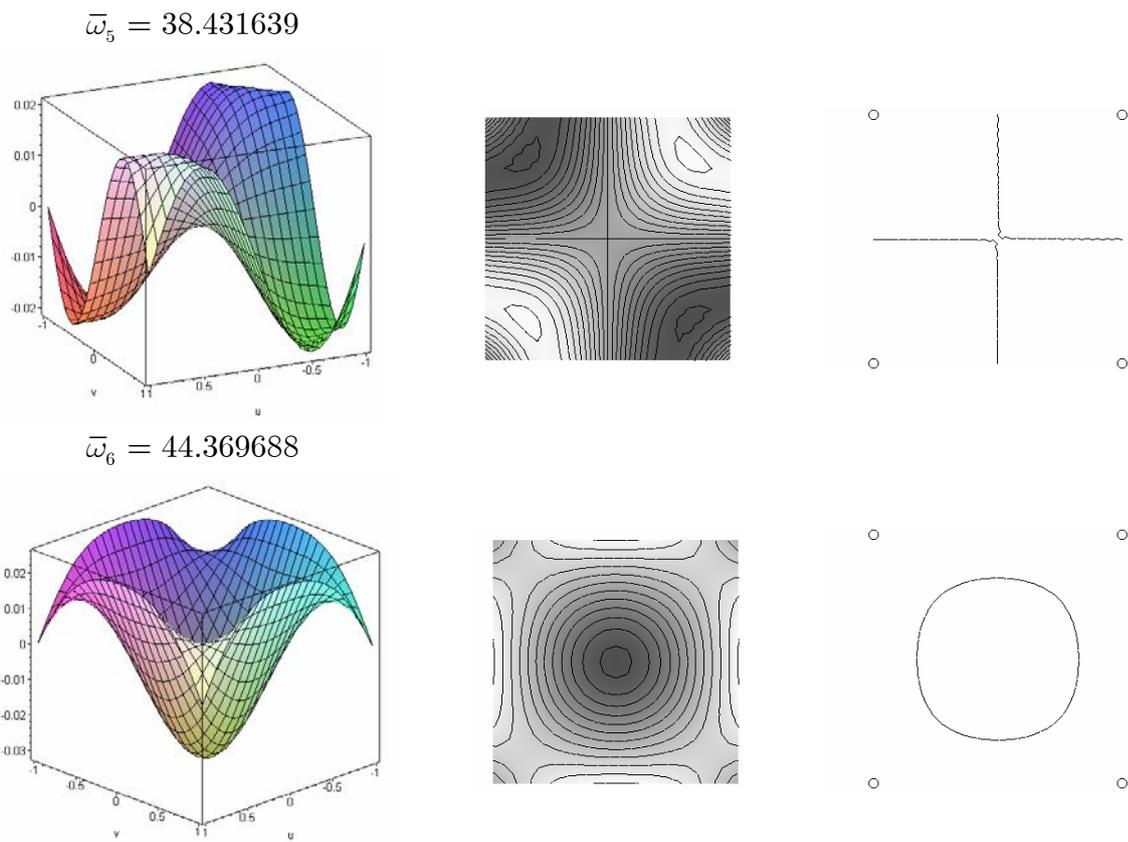


Figura 3.17. (Continuación)

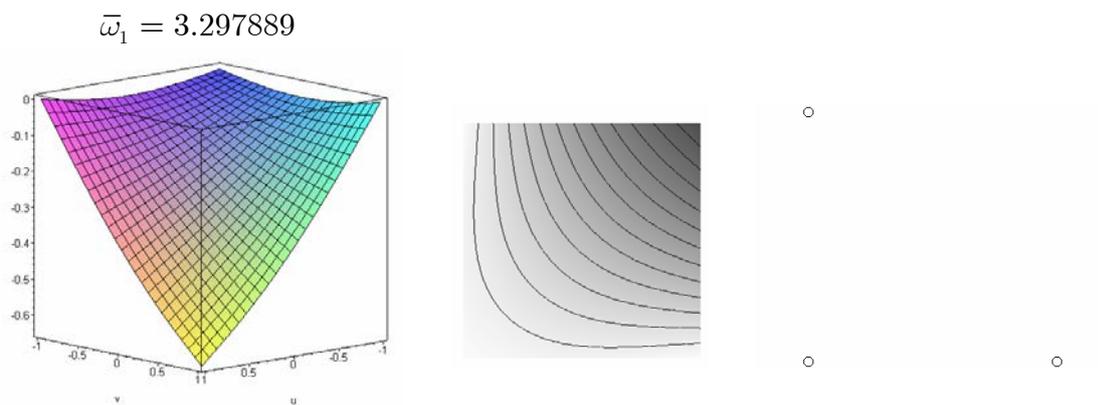


Figura 3.18. Frecuencias naturales, formas modales y líneas nodales asociadas para placa con apoyos puntuales en tres esquinas

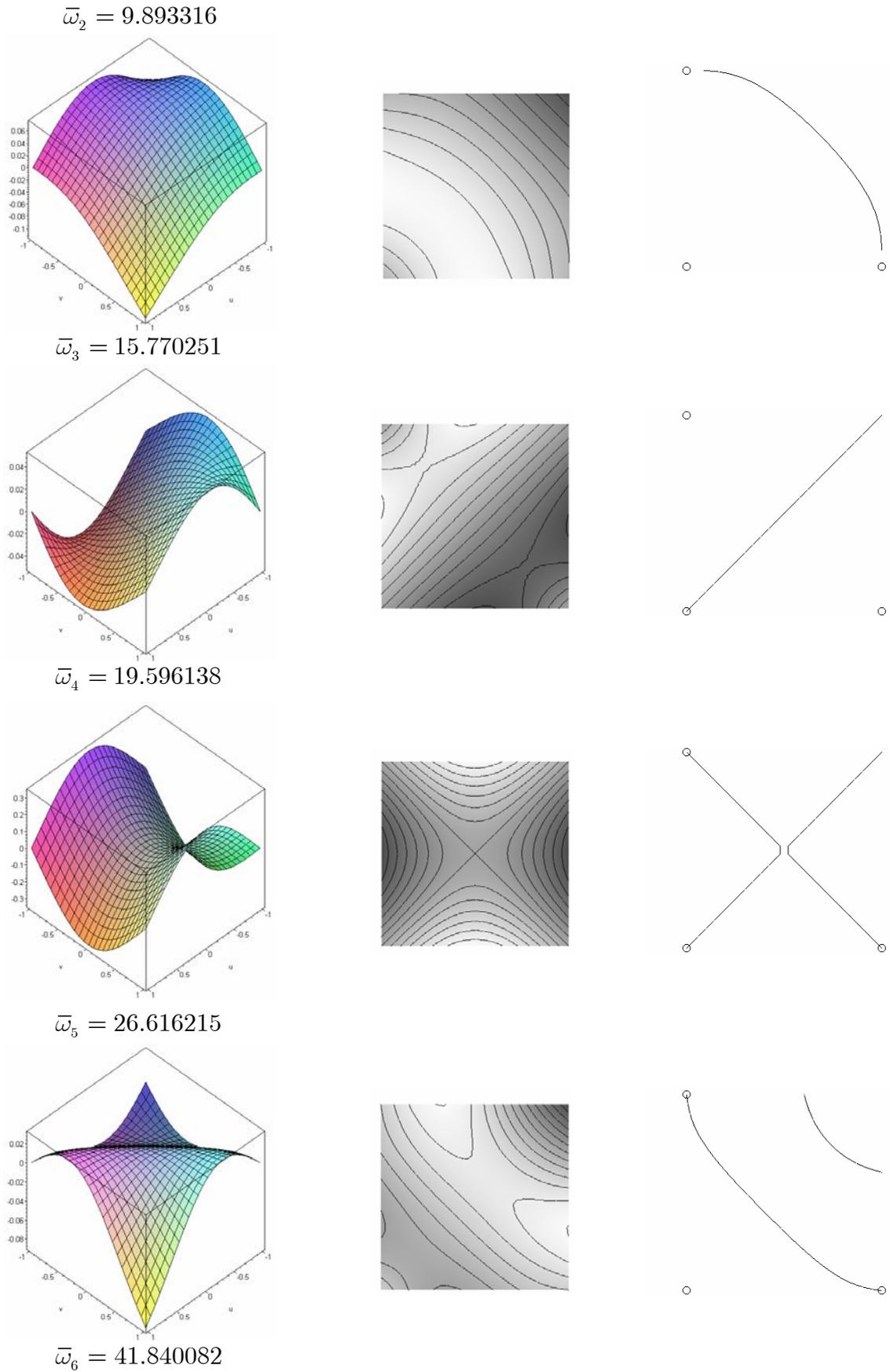


Figura 3.18. Continuación

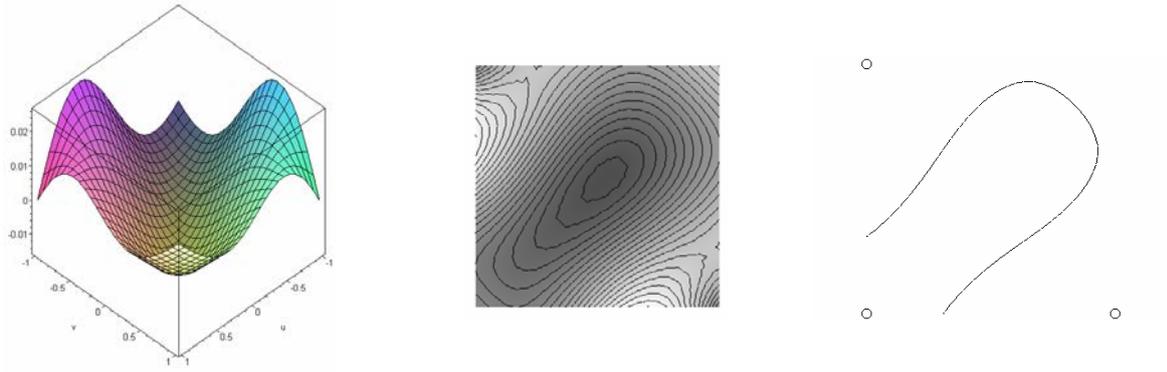


Figura 3.18. Continuación

3.12.2 PLACA CUADRILÁTERA GENERAL

En este apartado se presentan las frecuencias naturales, las formas modales y las líneas nodales asociadas, correspondientes a la placa isótropa que se muestra en la Figura 3.19, con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas. Los resultados se lograron usando los cuatro polinomios de Hermite más tres polinomios de Gram-Schmidt.

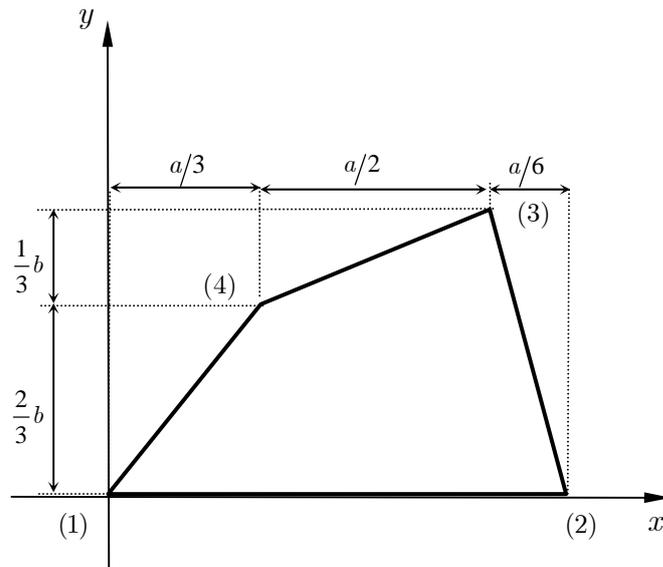


Figura 3.19. Placa cuadrilátera con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas. $a = 2b$

Los valores de los tres primeros coeficientes de frecuencia para esta placa son los que se resumen en Tabla 3.6:

Frecuencia 1	Frecuencia 2	Frecuencia 3
14,9622432189	36,7040088409	59,6808134212

Tabla 3.6: Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de placa Fig.3.19

Las formas modales y las líneas nodales asociadas se muestran en Fig. 3.20, Fig. 3.21 y Fig. 3.22.

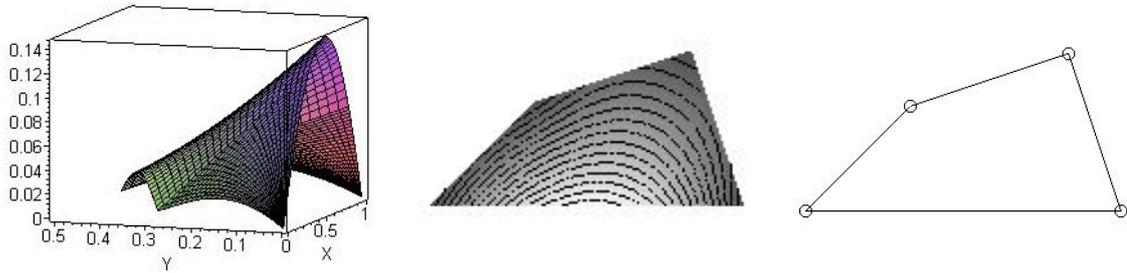


Figura 3.20. Forma modal y líneas nodales asociadas a $\bar{\omega}_1$

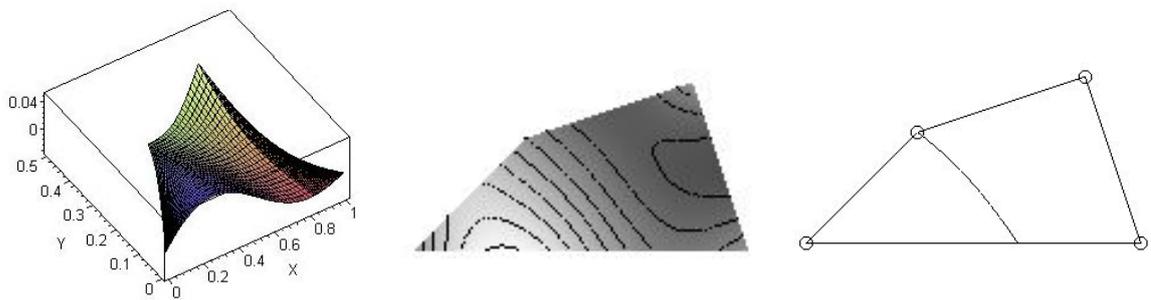


Figura 3.21. Forma modal y líneas nodales asociadas a $\bar{\omega}_2$

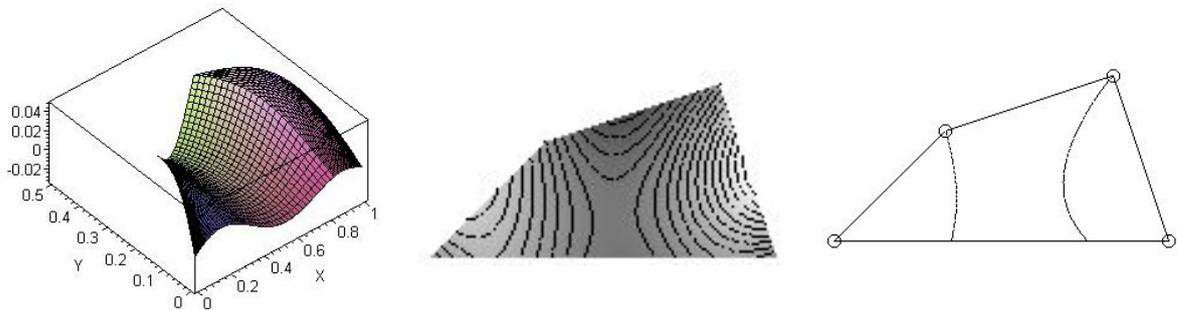


Figura 3.22. Forma modal y líneas nodales asociadas a $\bar{\omega}_3$

3.13 EJEMPLO DE ENSAMBLAJE EN PLACA LAMINADA

Finalmente, en esta sección se presentan las frecuencias naturales y las deflexiones estáticas debidas a una carga transversal uniformemente distribuida, correspondientes a la placa que se muestra en la Figura 3.23a. Se consideran las condiciones de contorno que muestra la figura mencionada y se presentan los resultados correspondientes a material isótropo con coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$ y a un laminado de tres capas de E-glass/epoxi, con secuencia de apilamiento $(0, \beta, 0)$. Las

propiedades materiales de cada lámina del laminado son: $E_1 = 60.7 \text{ GPa}$, $E_2 = 24.8 \text{ GPa}$, $G_{12} = 12 \text{ GPa}$ y $\nu_{12} = 0.23$.

En este caso, la placa ha sido discretizada en dos macro elementos como se observa en la Figura 3.23b.

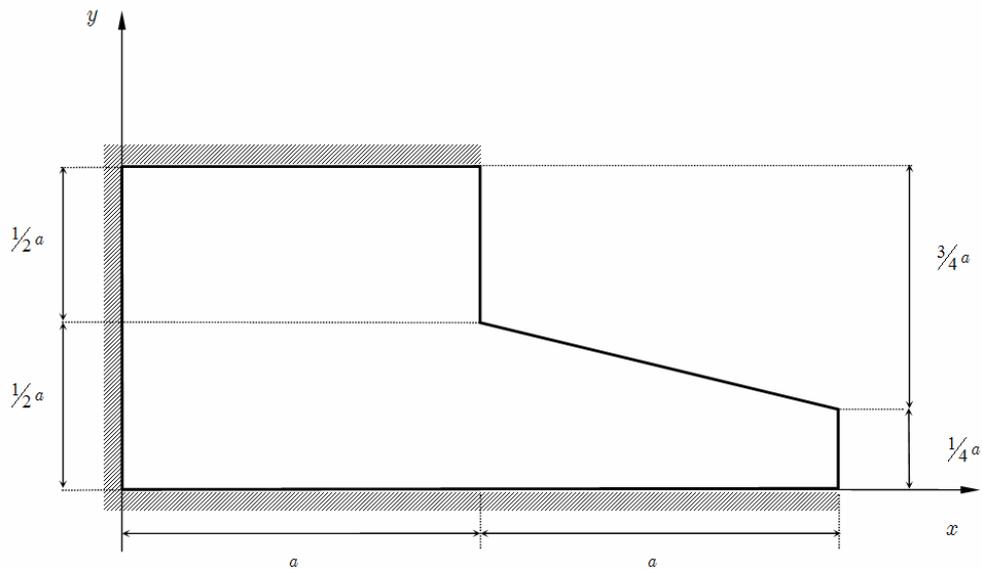


Figura 3.23a Placa con lados empotrados y libres

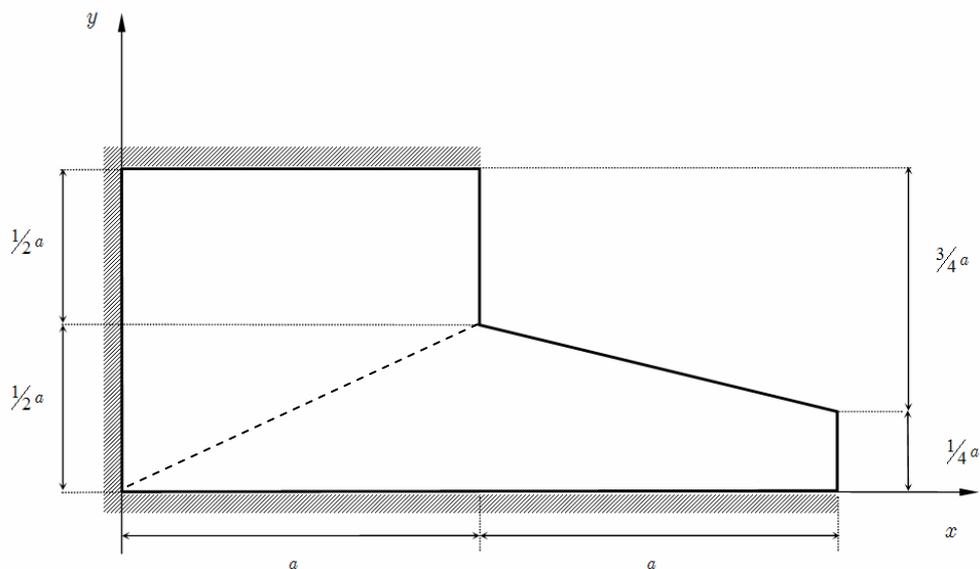


Figura 3.23b Placa discretizada en tres macro elementos

Los valores de los tres primeros coeficientes adimensionales de frecuencia para la placa, tanto isotrópica como laminada, son los que se resumen en Tabla 3.7.

	Frecuencia 1	Frecuencia 2	Frecuencia 3	Frecuencia 4
Placa isótropa	23,51056	31,91444	42,73982	55,73500
Placa laminada				
(0,30,0)	39,20399	57,22469	81,67730	103,89193
(0,45,0)	39,35864	57,38914	81,81391	104,27141
(0,90,0)	39,93704	57,82626	82,06063	105,34113

Tabla 3.7 Valores de los tres primeros coeficientes de frecuencias $\bar{\omega}_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}$ de la estructura de Fig. 3.23

En las Figuras 3.24 a 3.27, con fines ilustrativos, se muestran las formas modales asociadas de la placa isótropa (se tomó como ejemplo una longitud característica $a = 4$).

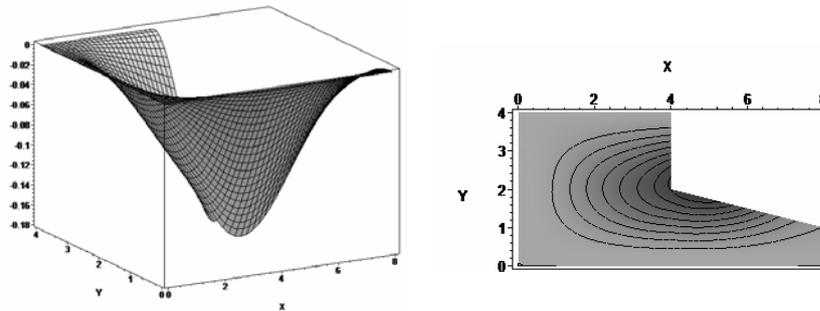


Figura 3.24. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_1$

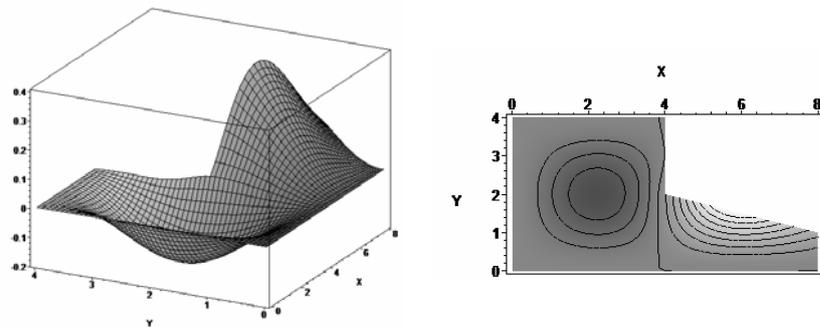


Figura 3.25. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_2$

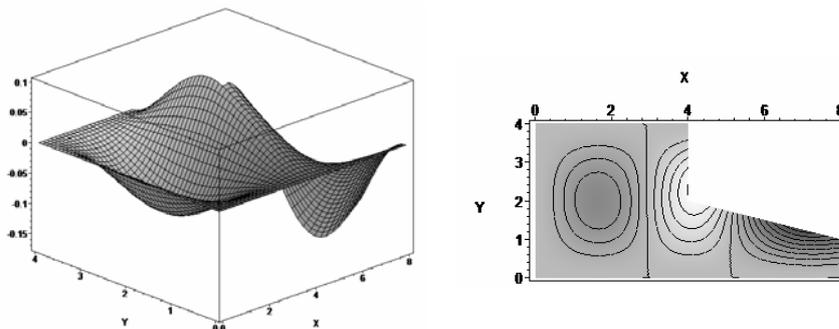


Figura 3.26. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_3$

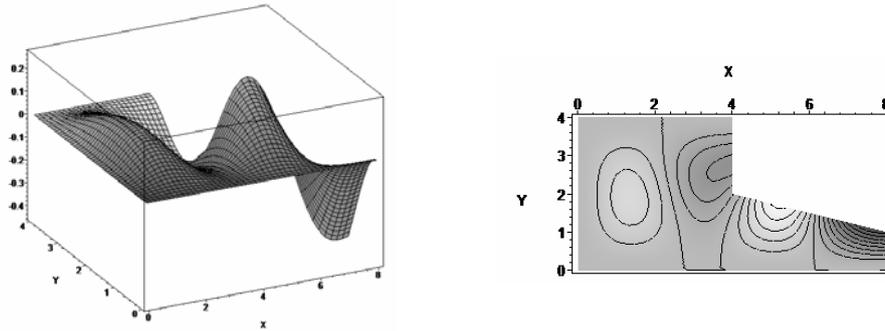


Figura 3.27. Forma modal asociada a $\bar{\omega}_4$

En la Tabla 3.8 se muestran valores de deflexiones estáticas para ciertos puntos de la estructura, los cuales se identifican a través de sus coordenadas cartesianas. Los resultados corresponden a una carga vertical uniformemente distribuida, tanto para la placa de material isótropo como laminada de tres capas (con ángulos de inclinación de las fibras $\beta = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$ y $\beta = 90^\circ$).

	punto <i>a</i> (2 <i>a</i> , 0.25 <i>a</i>)	punto <i>b</i> (<i>a</i> , 0.5 <i>a</i>)	punto <i>c</i> (0.5 <i>a</i> , 0.5 <i>a</i>)	punto <i>d</i> (<i>a</i> , 0.25 <i>a</i>)
Placa isótropa	0,000806745	0,003003683	0,001937195	0,001435145
Laminado (0,30,0)	0,002117481	0,006856578	0,003987181	0,003309322
Laminado (0,45,0)	0,002116139	0,006815916	0,003964420	0,003289367
Laminado (0,90,0)	0,002036793	0,006608259	0,003875722	0,002899421

Tabla 3.8: Valores de los adimensionales de deflexión $\bar{w} = w D / (q a^4)$ de la estructura de Fig. 3.23

Para el caso de material isótropo es $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ y para anisótropo es $D = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12} \nu_{21})$.

3.14 CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se presentó el desarrollo, formulación y las bases de la implementación computacional de un elemento finito enriquecido. Se ha formulado el elemento partiendo de su aplicación a placas delgadas isótropas y anisótropas laminadas, con esquema de laminación simétrico. Se ha demostrado, a través de ejemplos aplicados al análisis estático y dinámico que se obtienen muy buenos resultados, tanto en el uso de un único macro elemento, como en el caso de estructuras ensambladas. Además, es posible alcanzar una buena precisión usando un número bajo de polinomios y sin necesidad de densificar el mallado, ventaja ésta de notoria utilidad ya que permite reducir los tiempos de cálculo y el costo computacional de pre y post proceso. Los desarrollos realizados en este capítulo sirven de base para la formulación de los modelos para placas gruesas que se proponen en los Capítulos 4 y 5 de esta tesis.

CAPÍTULO 4

FORMULACIÓN DE UN MACRO ELEMENTO PARA EL ANÁLISIS DE PLACAS LAMINADAS GRUESAS: TEORÍA DE PRIMER ORDEN

4.1 INTRODUCCIÓN

Este capítulo está referido a los desarrollos correspondientes a placas gruesas empleando la Teoría de Primer Orden de Deformación por Corte (FSDT). Esta teoría, propuesta por Reissner (1944, 1945) y Mindlin (1951), ha sido ampliamente usada para formular modelos para el análisis de placas laminadas. Kim y Gupta (1990) estudiaron los efectos del esquema de laminación y el acoplamiento extensión-flexión en las frecuencias bajas de vibración y las correspondientes formas modales, analizando la vibración libre de placas compuestas usando método de elementos finitos con funciones de interpolación cuadráticas. Niyogi et al. (1999), a partir del uso de la FSDT, predijeron la respuesta de placas gruesas laminadas sometidas a vibración libre y forzada.

A pesar de requerir factores de corrección por corte, para compensar el error de asumir la distribución constante de las tensiones tangenciales en el espesor, esta teoría continúa siendo de interés para el desarrollo de diversos modelos, debido a su simplicidad y bajo costo computacional. Numerosas investigaciones han demostrado

que la FSDT es adecuada para el estudio del comportamiento estructural global de placas (por ejemplo, determinación de deflexiones transversales y frecuencias fundamentales de vibración, fuerzas y momentos resultantes). Diversos investigadores han propuesto soluciones numéricas y analíticas para el estudio de placas laminadas, obteniendo muy buenos resultados (Nguyen et al., 2005, 2008; Ferreira y Fasshauer, 2007; Daghia et al., 2008; Fares and Elmarghany, 2008; Liu et al., 2008; Xiang, 2009; Bodaghi and Saidi, 2010).

Whitney (1987) y Reddy (2003) proponen soluciones cerradas para placas laminadas basadas en la FSDT, para condiciones de borde simples y esquemas de laminación particulares. Otras soluciones analíticas obtenidas con el método de Ritz, emplean funciones viga trigonométricas o hiperbólicas para construir las funciones de forma aproximadas. Sin embargo, estas aproximaciones, empleadas en placas con anisotropía general, conduce a momentos resultantes que oscilan alrededor de un valor relativamente constante (Nallim y Grossi, 2003).

En este capítulo se presentan dos formulaciones. Por una parte, se emplea la FSDT en conjunto con el método de Ritz y polinomios ortogonales característicos para obtener una solución analítica general aproximada, para el estudio del comportamiento estático de placas compuestas laminadas arbitrarias, considerando todas las combinaciones posibles de condiciones de borde. En esta formulación se incluyen todos los efectos de acoplamiento, axil-flexión, axil-corte y flexión-torsión.

Por otra parte, se presenta el desarrollo de un macro elemento finito enriquecido basado en la FSDT, para el análisis de placas gruesas laminadas de formas geométricas complejas. Del mismo modo que en el Capítulo 3, para la obtención del modelo se trabaja con coordenadas naturales para aproximar la geometría de la placa. Se utilizan como funciones coordenadas polinomios de Hermite y polinomios ortogonales generados con las fórmulas de recurrencia de Gram-Scmidt. Mediante este procedimiento se obtiene una herramienta general, apropiada para estudiar el comportamiento estático y dinámico de placas laminadas con diferentes combinaciones de condiciones de contorno.

Para mostrar la precisión de las metodologías desarrolladas, se presentan estudios de convergencia y comparaciones con resultados publicados por otros autores. Algunos casos seleccionados se presentan de manera ilustrativa en gráficas

bidimensionales xy y también por medio de tablas. Los resultados incluyen placas laminadas con secuencias de laminación general, condiciones de contorno no simétricas y bordes libres.

4.2 FORMULACIÓN BASADA EN EL MÉTODO DE RITZ

4.2.1 COMPONENTES DEL FUNCIONAL DE ENERGÍA

En esta sección se trabaja con una placa laminada de forma rectangular, como se muestra en la Fig. 4.1. Se considera además que la secuencia de apilamiento puede ser arbitraria, incluyendo los casos de laminación simétrica y no-simétrica. El espesor del laminado es h , el plano x,y coincide con la superficie media de la placa, y el eje z es perpendicular a dicha superficie. En cada capa del laminado β denota el ángulo de orientación de la fibra y los ejes principales del material, en la dirección de la fibra y perpendicular a ella, se indican con $1 \equiv L$ y $2 \equiv T$ respectivamente.

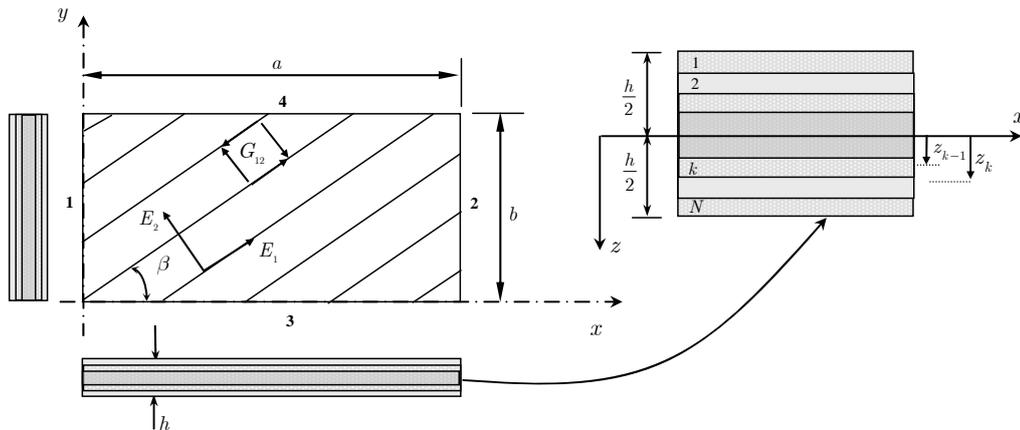


Figura 4.1. Placa laminada rectangular.

En la Teoría de Primer Orden (FSDT) la cinemática de la placa está gobernada por los desplazamientos del plano medio u_0, v_0, w_0 y por las rotaciones ϕ_x, ϕ_y dadas por Ec. (2.3), que se escribe a continuación para mayor claridad:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\phi_x(x, y) \\
 v(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\phi_y(x, y) \\
 w(x, y, z) &= w_0(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

donde z es la coordenada del espesor, cuyo origen se encuentra en el plano de referencia (Fig. 4.1).

Teniendo en cuenta la cinemática establecida y las hipótesis básicas del la FSDT, detalladas en la sección 2.2.2, la energía de deformación resulta dada por:

$$\begin{aligned}
U = & \frac{1}{2} \iint_R \left(A_{11} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} + A_{22} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \right)^2 + 2A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right. \\
& + 2A_{26} \frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right)^2 + k_s A_{44} \left(\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\
& + 2k_s A_{45} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) + k_s A_{55} \left(\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2B_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
& + 2B_{12} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + 2B_{22} \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + 2B_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \right. \\
& + \left. \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right) + 2B_{26} \left(\frac{\partial v_0}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right) \\
& + 2B_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
& + D_{11} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{22} \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right)^2 + 2D_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\
& + 2D_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right)^2 \Big) dx dy
\end{aligned} \tag{4.2}$$

donde R es el área de la superficie media y k_s es el factor de corrección por corte que puede estimarse a través de métodos especiales (Whitney, 1973, 1987).

En la Ec. (4.2) los coeficientes de rigidez extensional, de acoplamiento flexión - extensión, de rigidez flexional y torsional, y de cortante transversal, están dados respectivamente por:

$$\begin{aligned}
(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \\
A_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5
\end{aligned} \tag{4.3}$$

donde \bar{Q}_{ij} son las rigideces elásticas reducidas referidas a las coordenadas x, y (ver Anexo C).

La energía potencial de la carga transversal $q(x, y)$ distribuida sobre la superficie de la placa laminada está dada por:

$$V = - \iint_R q(x, y) w \, dx dy \quad (4.4)$$

4.2.2 CONDICIONES DE BORDE Y FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

La respuesta mecánica de placas laminadas no simétricas es más compleja que la correspondiente a placas con secuencia de apilamiento simétrica, debido al acoplamiento que se produce entre los desplazamientos coplanares y transversales. En realidad, existen cuatro diferentes condiciones de contorno para cada una de las condiciones denominadas clásicas: Simplemente apoyada (S), Empotrada (C) y Libre (F) (Jones, 1999; Rango et al., 2012b). Las combinaciones de estas condiciones se encuentran resumidas en la Tabla 4.1.

Cuando se aplica el Método de Ritz, sólo es necesario que las funciones de aproximación escogidas satisfagan las condiciones de contorno geométricas o estables del sistema mecánico (Rektorys, 1980; Wunderlich and Pilkey, 2003). Nallim et al. (2003, 2005, 2008) demostraron, como se mencionó anteriormente, que el uso de polinomios ortogonales de Gram-Schmidt para el estudio de placas anisótropas es altamente satisfactorio, ya que constituyen conjuntos linealmente independientes y completos, produciendo convergencia estable a la solución. Por otra parte no sobreestiman la rigidez del sistema porque la convergencia es prácticamente sin oscilaciones, no sólo para las respuestas globales de la estructura, sino también para aquellas que involucran a las derivadas de los desplazamientos (resultantes en fuerzas, momentos y tensiones). De acuerdo a lo expresado, se propone para aproximar las cinco componentes del campo de desplazamiento las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^u p_i^u(x) q_j^u(y) \\ v_0(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^v p_i^v(x) q_j^v(y) \\ w_0(x, y) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^w p_i^w(x) q_j^w(y) \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^{\phi_x} p_i^{\phi_x}(x) q_j^{\phi_x}(y)$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij}^{\phi_y} p_i^{\phi_y}(x) q_j^{\phi_y}(y)$$

donde $\{p_i^{(\bullet)}(x)\}$, $\{q_j^{(\bullet)}(y)\}$, $(\bullet) = u, v, w, \phi_x, \phi_y$, son conjuntos de polinomios ortogonales generados por el procedimiento de Gram-Schmidt (Bhat, 1985a,b; Nallim and Oller, 2008), c_{ij}^u , c_{ij}^v , c_{ij}^w , $c_{ij}^{\phi_x}$, $c_{ij}^{\phi_y}$ son los coeficientes desconocidos, y m , n son los números de polinomios ortogonales en cada dirección coordenada.

El primer miembro del conjunto de polinomios ortogonales, para cada una de las direcciones coordenadas está dado por $p_1(x) = \sum_{i=1}^5 a_i x^{i-1}$ y $q_1(y) = \sum_{i=1}^5 b_i y^{i-1}$ donde los coeficientes a_i , y b_i se obtienen a partir de satisfacer las condiciones de contorno geométricas de la viga equivalente en cada dirección. Los demás elementos del conjunto de polinomios ortogonales se construyen empleando el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, siguiendo el procedimiento indicado en el Capítulo 3, sección 3.9.

Restricciones transversales al plano	Restricciones en el plano			
	$u_n = 0$	$N_n = 0$	$u_s = 0$	$N_s = 0$
Empotrado: $w = 0$; $\phi_n = 0$	C_1	C_2	C_3	C_4
Simplemente apoyado: $w = 0$; $M_n = 0$; $\phi_s = 0$	S_1	S_2	S_3	S_4
Libre: $M_n = 0$; $M_{ns} = 0$; $Q_n = 0$	F_1	F_2	F_3	F_4

Tabla 4.1. Notación por las distintas combinaciones de contorno clásicas en laminados no-simétricos, en las que n y s indican las direcciones normal y tangente a los respectivos bordes de la placa.

4.2.3 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ

El funcional de energía total para el análisis estático de la placa laminada mostrada en la Figura 4.1 está dado por:

$$\Pi = U + V \quad (4.6)$$

donde U es la energía de deformación dada por la Ec. (4.2) y V es la energía potencial dada por la Ec. (4.4).

La aplicación del Método de Ritz requiere la minimización del funcional de energía (Ec. 4.6) con respecto a cada uno de los coeficientes desconocidos, de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}^u} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}^v} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}^w} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}^{\phi_x}} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}^{\phi_y}} = 0 \quad (i, j = 1, \dots, m, n) \quad (4.7)$$

Sustituyendo la Ec. (4.5) en la expresión del funcional (Ec. 4.6), y aplicando subsecuentemente la Ec. (4.7) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas que gobierna el problema de la flexión estática

$$[K]\{c\} = \{F\} \quad (4.8)$$

donde $\{F\}$ es el vector de carga, $[K]$ es la matriz de rigidez dada por:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{ijkh}^{uu}] & [K_{ijkh}^{uv}] & [K_{ijkh}^{uw}] & [K_{ijkh}^{u\phi_x}] & [K_{ijkh}^{u\phi_y}] \\ & [K_{ijkh}^{vv}] & [K_{ijkh}^{vw}] & [K_{ijkh}^{v\phi_x}] & [K_{ijkh}^{v\phi_y}] \\ & & [K_{ijkh}^{ww}] & [K_{ijkh}^{w\phi_x}] & [K_{ijkh}^{w\phi_y}] \\ & & & [K_{ijkh}^{\phi_x\phi_x}] & [K_{ijkh}^{\phi_x\phi_y}] \\ \text{sim} & & & & [K_{ijkh}^{\phi_y\phi_y}] \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

y el vector de coeficientes desconocidos es:

$$\{c\} = \{ \{c_{kh}^u\} \{c_{kh}^v\} \{c_{kh}^w\} \{c_{kh}^{\phi_x}\} \{c_{kh}^{\phi_y}\} \}^T \quad (4.10)$$

Los elementos de la matriz de rigidez están dados por:

$$K_{ijkh}^{uu} = A_{11} \iint_R p_i'^u p_k'^u q_j^u q_h^u dx dy + A_{16} \iint_R (p_i'^u p_k^u q_j^u q_h'^u + p_i^u p_k'^u q_j'^u q_h^u) dx dy \\ + A_{66} \iint_R p_i^u p_k^u q_j'^u q_h'^u dx dy$$

$$K_{ijkh}^{uw} = A_{12} \iint_R p_i'^u p_k^v q_j^u q_h'^v dx dy + A_{16} \iint_R p_i'^v p_k^u q_j^v q_h'^u dx dy \\ + A_{26} \iint_R p_i^v p_k^u q_j^v q_h'^u dx dy + A_{66} \iint_R p_i'^v p_k^u q_j^v p_h'^u dx dy$$

$$K_{ijkh}^{uv} = 0, K_{ijkh}^{vw} = 0$$

$$K_{ijkh}^{u\phi_x} = B_{11} \iint_R p_i'^u (p_k^{\phi_x}/a) q_j^u q_h^w dx dy + B_{16} \iint_R p_i'^u (p_k^{\phi_x}/a) q_j^u q_h'^w dx dy \\ + B_{16} \iint_R p_i^u (p_k^{\phi_x}/a) q_j^u q_h^w dx dy + B_{66} \iint_R p_i^u (p_k^{\phi_x}/a) q_j^u p_h'^w dx dy$$

$$K_{ijkh}^{u\phi_y} = B_{12} \iint_R p_i'^u p_k^w q_j^u (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + B_{16} \iint_R p_i'^u p_k^w q_j^u (q_h^{\phi_y}/b) dx dy \\ + B_{26} \iint_R p_i^u p_k^w q_j^u (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + B_{66} \iint_R p_i^u p_k^w q_j^u (q_h^{\phi_y}/b) dx dy$$

$$K_{ijkh}^{vv} = A_{22} \iint_R p_i^v p_k^v q_j^v q_h'^v dx dy + A_{26} \iint_R (p_i^v p_k^v q_j^v q_h^v + p_i^v p_k^v q_j^v q_h'^v) dx dy \\ + A_{66} \iint_R p_i^v p_k^v q_j^v q_h^v dx dy$$

$$K_{ijkh}^{v\phi_x} = B_{12} \iint_R p_i^v p_k^{\phi_x} q_j^v (q_h^w/a) dx dy + B_{16} \iint_R p_i^v p_k^{\phi_x} q_j^v (q_h^w/a) dx dy \\ + B_{26} \iint_R p_i^v p_k^{\phi_x} q_j^v (q_h^w/a) dx dy + B_{66} \iint_R p_i^v p_k^{\phi_x} q_j^v (q_h^w/a) dx dy$$

$$K_{ijkh}^{v\phi_y} = B_{22} \iint_R p_i^v p_k^w q_j^v (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + B_{26} \iint_R p_i^v p_k^w q_j^v (q_h^{\phi_y}/b) dx dy \\ + B_{26} \iint_R p_i^v p_k^w q_j^v (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + B_{66} \iint_R p_i^v p_k^w q_j^v (q_h^{\phi_y}/b) dx dy$$

$$K_{ijkh}^{ww} = A_{44} \iint_R p_i^w p_k^w q_j^w q_h'^w dx dy + A_{55} \iint_R p_i^w p_k^w q_j^w q_h^w dx dy \\ + A_{45} \iint_R (p_i^w p_k^w q_j^w q_h^w + p_i^w p_k^w q_j^w q_h'^w) dx dy$$

$$K_{ijkh}^{w\phi_x} = k_s \left(A_{45} \iint_R p_i^w (p_k^{\phi_x}/a) q_j^w q_h^w dx dy + A_{55} \iint_R p_i^w (p_k^{\phi_x}/a) q_j^w q_h^w dx dy \right)$$

$$K_{ijkh}^{w\phi_y} = k_s \left(A_{44} \iint_R p_i^w p_k^w q_j^{w'} (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + A_{45} \iint_R p_i^{w'} p_k^w q_j^w (q_h^{\phi_y}/b) dx dy \right)$$

$$\begin{aligned} K_{ijkh}^{\phi_x\phi_x} &= k_s A_{55} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a)(p_k^{\phi_x}/a) q_j^w q_h^w dx dy + D_{11} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a)(p_k^{\phi_x}/a) q_j^w q_h^w dx dy \\ &+ D_{16} \iint_R ((p_i^{\phi_x}/a)(p_k^{\phi_x}/a) q_j^w q_h^{w'} + (p_i^{\phi_x}/a)(p_k^{\phi_x}/a) q_j^{w'} q_h^w) dx dy \\ &+ D_{66} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a)(p_k^{\phi_x}/a) q_j^{w'} q_h^w dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ijkh}^{\phi_x\phi_y} &= k_s A_{45} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a) p_k^w q_j^w (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + D_{12} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a) p_k^w q_j^w (q_h^{\phi_y}/b) dx dy \\ &+ D_{16} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a) p_k^{w'} q_j^w (q_h^{\phi_y}/b) dx dy + D_{26} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a) p_k^w q_j^{w'} (q_h^{\phi_y}/b) dx dy \\ &+ D_{66} \iint_R (p_i^{\phi_x}/a) p_k^{w'} q_j^{w'} (q_h^{\phi_y}/b) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_{ijkh}^{\phi_y\phi_y} &= k_s A_{44} \iint_R p_i^w p_k^w (q_j^{\phi_y}/b)(q_h^{\phi_y}/b) dx dy + D_{22} \iint_R p_i^w p_k^w (q_j^{\phi_y}/b)(q_h^{\phi_y}/b) dx dy \\ &+ D_{26} \iint_R (p_i^w p_k^{w'} (q_j^{\phi_y}/b)(q_h^{\phi_y}/b) + p_i^{w'} p_k^w (q_j^{\phi_y}/b)(q_h^{\phi_y}/b)) dx dy \\ &+ D_{66} \iint_R p_i^{w'} p_k^{w'} (q_j^{\phi_y}/b)(q_h^{\phi_y}/b) dx dy \end{aligned}$$

4.2.4 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan una serie de ejemplos numéricos que permiten validar la formulación desarrollada con el método de Ritz y demostrar el correcto desempeño del algoritmo general obtenido para el análisis de placas laminadas no simétricas. Se presentan resultados para laminados con diferentes condiciones de contorno, relaciones de espesor y ángulos de orientación de la fibra. Para describir una determinada configuración de condiciones de contorno se emplea la siguiente terminología, por ejemplo: $S_i S_j C_i C_j$ identifica a una placa con bordes simplemente apoyados a lo largo de $x = 0$ y $x = a$, y empotrado a lo largo de $y = 0$ e $y = b$; los subíndices i ($i = 1, \dots, 4$) indican las restricciones en el plano de acuerdo a la Tabla 4.1. Para los casos presentados en esta sección, a excepción de la comparación realizada con Moleiro et al (2008), todos los resultados corresponden a placas laminadas para las que

se ha escogido un material grafito/epoxi con una relación de ortotropía elevada ($E_1/E_2 = 40$, $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$, $G_{23}/E_2 = 0.6$, $\nu_{12} = 0.25$). La rigidez de referencia se define como $D_0 = E_1 h^3 / 12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$.

En primer lugar se presentan estudios comparativos y análisis de convergencia para evaluar la precisión y estabilidad del algoritmo obtenido. La Tabla 4.2 muestra resultados para laminados antisimétricos ($\beta/-\beta$) con las siguientes condiciones de contorno: $S_1S_1C_1C_1$. Los resultados se presentan para la deflexión, momentos resultantes en el centro de la placa y fuerzas axiales resultantes en las esquinas del laminado. El número de polinomios (m, n) fue incrementado gradualmente desde 5 hasta 8 para analizar la convergencia. En la misma tabla se presentan los resultados obtenidos por Sheikh et al. (2002), quienes emplearon elementos triangulares de alta precisión, considerando el efecto de la deformación por corte tomando el desplazamiento transversal y la rotación como variables independientes. La comparación es muy buena y permite apreciar que los resultados obtenidos son precisos.

	$m \times n$	$10^3 w E_2 h^3 / p a^4$ $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$	$10^2 M_x h^2 / p a^2$ $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$	$10^2 M_y h^2 / p a^2$ $x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$	$10^2 N_x h^2 / p a^2$ $x = 0, y = 0$	$10^2 N_y h^2 / p a^2$ $x = 0, y = 0$
(15°/-15°)	Form. propuesta					
	5x5	7.32100	11.64450	1.35680	36.34265	46.64834
	6x6	7.16079	11.65627	1.35659	34.12295	45.44581
	7x7	7.15899	11.38646	1.22164	42.46526	45.61578
	8x8	7.16724	11.38790	1.21977	43.17482	45.70038
Sheikh et al. (2002)		7.16720	11.42900	1.23450	44.10700	45.77800
(30°/-30°)	Form. propuesta					
	5x5	7.86464	7.13211	2.78603	22.00543	31.14831
	6x6	7.76537	6.91782	2.66332	22.60426	30.60577
	7x7	7.76502	6.91691	2.66246	22.96999	30.68150
	8x8	7.77049	6.95257	2.68187	23.04376	30.57181
Sheikh et al. (2002)		7.77010	6.95370	2.68280	23.28200	30.66100
(45°/-45°)	Form. propuesta					
	5x5	7.42461	3.90210	3.90210	4.74293	4.74293
	6x6	7.33433	3.66572	3.66572	4.49922	4.49922
	7x7	7.33426	3.66458	3.66458	4.67624	4.67624
	8x8	7.33768	3.68020	3.68020	4.63219	4.63219
Sheikh et al. (2002)		7.33830	3.68040	3.68040	4.62080	4.62080

Tabla 4.2. Convergencia y validación de resultados para laminados antisimétricos.

La Tabla 4.3 muestra resultados correspondientes a deflexiones, momentos y cortantes transversales resultantes para placas laminadas cruzadas antisimétricas (0/90), simplemente apoyadas, sometidas a carga uniformemente distribuida. Las propiedades de las láminas son $E_1/E_2 = 25$, $G_{12}/E_2 = G_{13}/E_2 = 0.5$, $G_{23}/E_2 = 0.2$, $\nu_{12} = 0.25$. Los resultados para diferentes relaciones de espesor (b/h) se comparan con las publicadas por Moleiro et al. (2008), observándose un muy buen acuerdo.

(*)	$m \times n$	$10^2 w^A E_2 h^3 / pa^4$	$10 M_{yy}^A / pa^2$	$10 M_{xy}^B / pa^2$	$10 Q_y^C / pa$
<i>b/h=10</i>					
Form. propuesta	5x5	1.9556	0.6414	-0.1618	3.5091
	6x6	1.9470	0.6272	-0.1616	3.4795
	7x7	1.9470	0.6272	-0.1611	3.4631
	8x8	1.9469	0.6268	-0.1610	3.4657
Moleiro et al. (2008)		1.9469	0.6268	-0.1604	3.4703
<i>b/h=20</i>					
Form. propuesta	5x5	1.76747	0.64501	-0.15872	3.55178
	6x6	1.75838	0.62980	-0.15814	3.49859
	7x7	1.75840	0.6297	-0.1581	3.4786
	8x8	1.75825	0.6291	-0.1580	3.4854
Moleiro et al. (2008)		1.7582	0.6291	-0.1576	3.4880
<i>b/h=100</i>					
Form. propuesta	5x5	1.7074	0.6465	-0.1570	4.1771
	6x6	1.6982	0.6311	-0.1561	3.8143
	7x7	1.6982	0.6310	-0.1561	3.5224
	8x8	1.6980	0.6301	-0.1559	3.4948
Moleiro et al. (2008)		1.6980	0.6300	-0.1572	3.4926

(*) Puntos de referencia: $A : (x = a/2, y = b/2)$; $B : (x = 0, y = 0)$; $C : (x = a/2, y = 0)$

Tabla 4.3. Convergencia y validación de resultados para $S_2S_2S_2S_2$, laminado cruzado (0/90)

Finalmente, la formulación de Ritz desarrollada se aplica a continuación a diferentes placas laminadas para obtener la deflexión, momentos y fuerzas resultantes, considerando diferentes condiciones de contorno, secuencias de apilado y relaciones de espesor. La Tabla 4.4 muestra los resultados obtenidos para dos combinaciones de

condiciones de contorno, tres relaciones de espesor y cuatro esquemas de laminación que fueron escogidos como ejemplo. Las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 muestran gráficos de momentos resultantes.

		$S_1S_1C_3C_3$				$S_1S_1F_4F_4$			
b/h		$\frac{w^A D_0}{pa^2 b^2}$	$10^2 \frac{M_{xx}^A}{pa^2}$	$10^2 \frac{M_{yy}^A}{pa^2}$	$10^2 \frac{M_{xy}^B}{pa^2}$	$\frac{w^A D_0}{pa^2 b^2}$	$10^2 \frac{M_{xx}^A}{pa^2}$	$10^2 \frac{M_{yy}^A}{pa^2}$	$10^2 \frac{M_{xy}^B}{pa^2}$
0/90	10	1.91085	5.16985	3.10277	-0.15931	4.50222	12.44125	0.06638	-0.21960
	20	1.46203	4.70059	3.32673	-0.07967	3.82016	12.42912	0.07668	-0.20928
	100	1.31256	4.49614	3.43055	-0.01331	3.60204	12.42342	0.08115	-0.20198
30/-30	10	2.33660	6.73065	2.70848	-0.94762	5.00887	17.53942	5.55785	-7.63619
	20	1.87945	6.51884	2.59216	-0.05395	4.23181	16.90835	5.31326	-6.72788
	100	1.71707	6.37823	2.53948	1.37554	3.92325	16.31041	5.10021	-3.22217
0/45	10	2.29114	7.21433	2.09630	-4.67575	3.91459	13.07055	2.20518	3.44731
	20	1.79935	7.26791	2.03974	-3.89374	3.19469	13.04412	2.39501	5.06825
	100	1.62649	7.22313	1.97489	-1.43144	2.96609	13.01622	2.44544	8.02781
0/30	10	2.40472	9.45824	1.81181	-3.03480	3.22818	13.21586	1.52171	4.09556
	20	1.86325	9.78735	1.76011	-2.41140	2.46427	13.22517	1.54095	5.58218
	100	1.67733	9.80246	1.72394	-0.57772	2.21681	13.11340	1.52356	8.17810

		$S_1F_4C_3C_3$				$C_1F_1S_4S_4$			
0/90	10	2.37292	1.54299	3.92693	-0.41387	3.13604	1.01229	8.65299	-0.14203
	20	1.75334	1.35792	4.02024	-0.20051	2.59387	1.20841	8.43092	-0.06499
	100	1.55141	1.28573	4.06181	-0.02767	2.41851	1.28463	8.32839	-0.00914
30/-30	10	-0.02767	4.45259	2.93097	-2.85338	6.30485	2.73118	2.30205	-5.58008
	20	3.91322	4.29930	2.78252	-1.30692	-5.58008	2.90081	2.08945	-2.94748
	100	3.65247	4.19075	2.69676	1.11596	4.63883	3.11313	2.05653	-0.52289
0/45	10	4.34409	3.36795	3.50878	-6.12189	6.71910	2.40778	5.42696	-12.42389
	20	3.61144	3.45713	3.57674	-4.79724	5.43032	2.39852	5.01418	-10.41609
	100	3.34215	3.57463	3.58661	-1.99905	4.91878	2.40356	4.82715	-4.00303
0/30	10	5.88477	4.53894	3.09778	-8.46556	7.26061	-2.92413	0.17388	-23.32274
	20	5.16109	4.73620	3.05669	-6.20950	5.65240	-3.30340	0.23627	-19.35380
	100	4.88650	4.87695	3.03342	-3.00629	5.05097	-4.15112	-0.04051	-12.55993

Tabla 4.4. Respuesta estática de placas laminadas con diferentes condiciones de contorno, laminación y espesor.

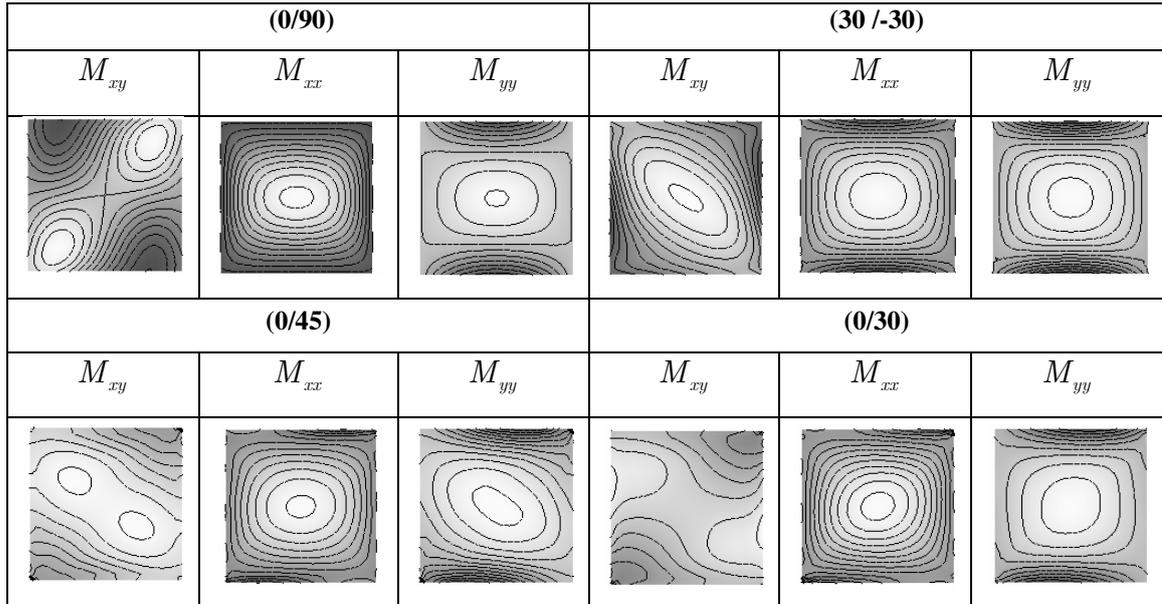


Figura 4.2. Contorno de momentos resultantes para diferentes placas laminadas ($S_1S_1C_3C_3$)

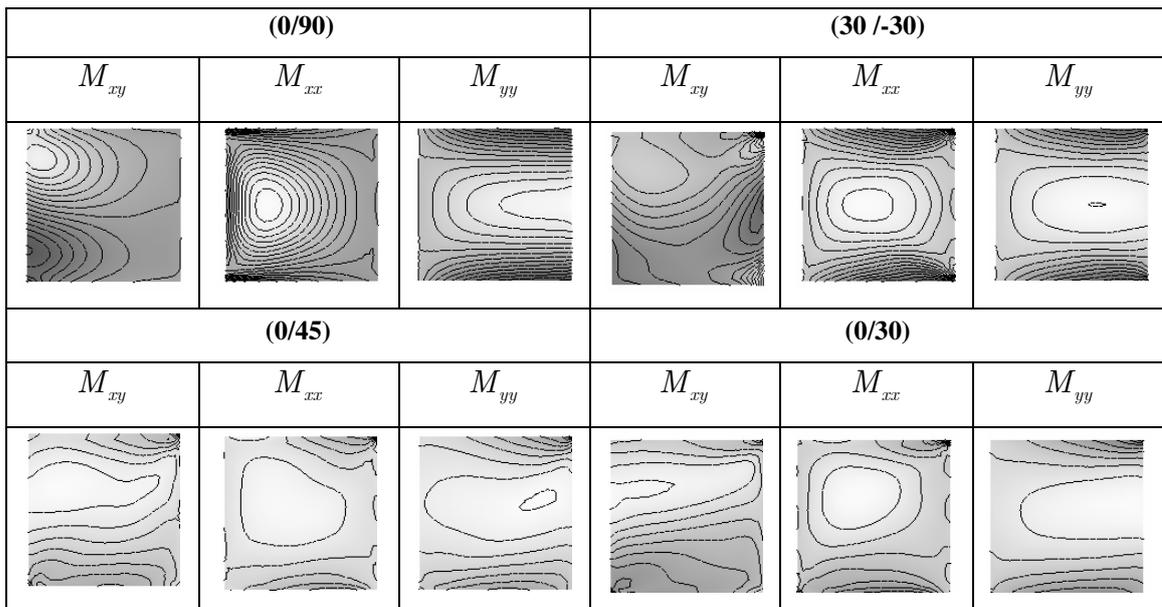


Figura 4.3. Contorno de momentos resultantes para diferentes placas laminadas ($S_1F_4C_3C_3$)

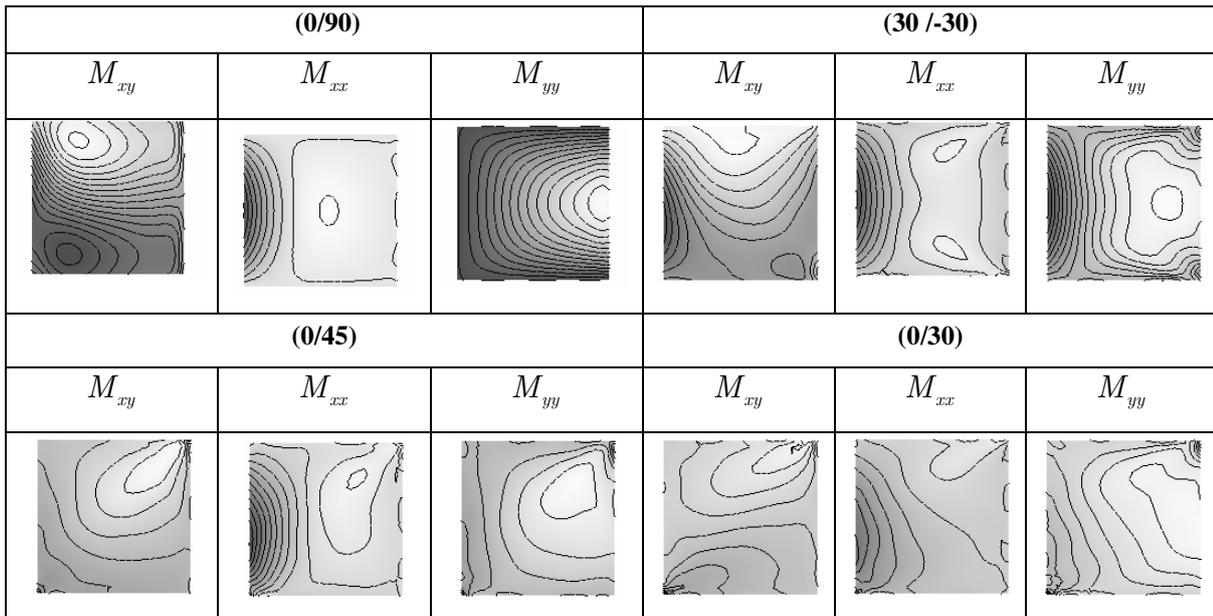


Figura 4.4. Contorno de momentos resultantes para diferentes placas laminadas (C₁F₁S₄S₄)

La Figura 4.5 muestra el efecto de la relación de espesor b/h en la deflexión central de laminados simétricos y antisimétricos, cruzados y equiangulares, con combinación de condiciones de contorno: S₁S₁C₂C₂. El coeficiente de deflexión adimensional disminuye a medida que b/h aumenta, pero la disminución es pequeña más allá de $b/h = 40$. El valor de la deflexión adimensional se torna, como era de esperarse, prácticamente constante para placas delgadas. Además, la diferencia entre resultados correspondientes a configuraciones de laminación simétricas y no simétricas es pequeña para laminados cruzados y mucho mayor para equiangulares.

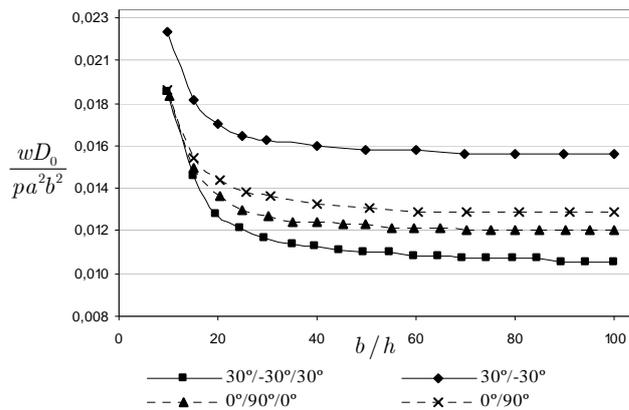


Figura 4.5. Variación del coeficiente adimensional de deflexión estática en el centro de una placa cuadrada para diferentes relaciones b/h .

En la Figura 4.6 se presentan los coeficientes de deflexión estática correspondiente al centro de placas laminadas cuadradas con diferentes condiciones de contorno: todos los bordes simplemente apoyados ($S_1S_1S_1S_1$), todos los bordes empotrados ($C_2C_2C_2C_2$) y combinación de los anteriores ($S_1S_1C_2C_2$). Se observa que un cambio en la orientación de la fibra lleva a un incremento en el parámetro de deflexión para el caso de todos los bordes empotrados, mientras que para los bordes simplemente apoyados o mixtos la deflexión adimensional muestra una variación con forma convexa.

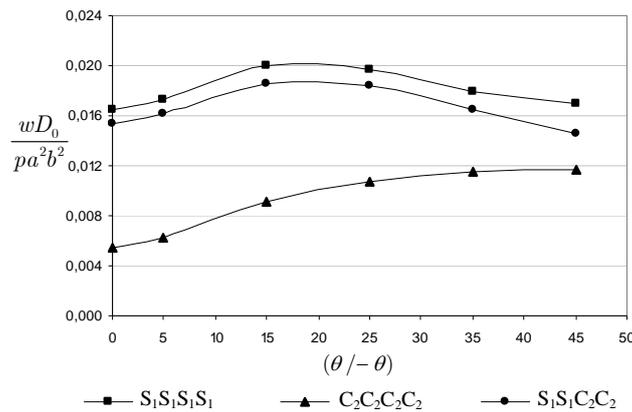


Figura 4.6. Variación de la deflexión adimensional con el ángulo de orientación de la fibra para $b/h = 20$.

4.3 FORMULACIÓN DEL MACRO ELEMENTO FINITO (FSDT)

Siguiendo la secuencia de la formulación del macro elemento para placas de Kirchhoff desarrollada en el Capítulo 3, se propone a continuación un macro elemento finito enriquecido para placas gruesas, empleando la cinemática de la FSDT (Rango et al., 2011, 2013). La ventaja de este macro elemento es su aplicabilidad al estudio de placas de formas geométricas complejas, posibilitando representar formas comúnmente usadas en el diseño de piezas de diversos campos de la ingeniería, como la ingeniería aeroespacial, naval, automotriz, etc.

4.3.1 CAMPO DE DEFORMACIONES

A partir del campo de desplazamientos dado por Ec. (4.1), y para el caso particular de laminados simétricos, el campo de deformaciones está dado por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial u / \partial x \\ \partial v / \partial y \\ \partial w / \partial y + \partial v / \partial z \\ \partial w / \partial x + \partial u / \partial z \\ \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \partial \phi_x / \partial x \\ z \partial \phi_y / \partial y \\ \partial w_0 / \partial y + \phi_y \\ \partial w_0 / \partial x + \phi_x \\ z (\partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x) \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

La Ec. (4.11) se puede escribir como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

donde:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \partial w_0 / \partial y + \phi_y \\ \partial w_0 / \partial x + \phi_x \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial \phi_x / \partial x \\ \partial \phi_y / \partial y \\ 0 \\ 0 \\ \partial \phi_x / \partial y + \partial \phi_y / \partial x \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

4.3.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones que gobiernan el problema se derivan a partir de la versión dinámica del Principio de los Trabajos Virtuales (Ec. 3.6). Las expresiones de la energía virtual de deformación δU , el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas δV y la energía virtual cinética δK , se pueden escribir respectivamente como:

$$\delta U = \int_R \left[\int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx} z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy} z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + \tau_{xy} z \delta \gamma_{xy}^{(1)} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)}) dz \right] dx dy \quad (4.14)$$

$$\delta V = - \int_R q(x, y) \delta w_0 dx dy - \int_{\Gamma} \int_{-h/2}^{h/2} [\hat{\sigma}_{nn} z \delta \phi_n + \hat{\sigma}_{ns} z \delta \phi_s + \hat{\sigma}_{nz} \delta w_0] dz ds \quad (4.15)$$

$$\delta K = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[z^2 (\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y \delta \dot{\phi}_y) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \quad (4.16)$$

donde: n, s son las direcciones normal y tangente al contorno de la placa, respectivamente, como se muestra en la Figura 3.2, $\hat{\sigma}_{nn}$, $\hat{\tau}_{ns}$, $\hat{\tau}_{nz}$ son las componentes de tensiones especificadas en la porción Γ del contorno, ρ es la densidad del material de la placa y $\dot{w}_0 = \frac{\partial w_0}{\partial t}$, $\dot{\phi}_x = \frac{\partial \phi_x}{\partial t}$, $\dot{\phi}_y = \frac{\partial \phi_y}{\partial t}$.

Sustituyendo las Ecs. (4.14), (4.15) y (4.16) en la Ec. (3.6) y aplicando los pasos comunes del cálculo de variaciones a la expresión de los trabajos virtuales se llega a la ecuación de Euler-Lagrange (Reddy, 2003):

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y &= I_2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

donde M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , \hat{M}_{nn} , \hat{M}_{ns} , \hat{Q}_n , I_0 , I_2 se encuentran definidas en el Capítulo 3 y en el Anexo C de esta tesis. Las fuerzas cortantes transversales resultantes están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.18)$$

Las condiciones de borde naturales están dadas por (Reddy, 2003):

$$\begin{aligned} Q_n - \hat{Q}_n &= 0 \\ M_{nn} - \hat{M}_{nn} &= 0 \\ M_{ns} - \hat{M}_{ns} &= 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

El desarrollo presentado a partir del PTV es sumamente útil ya que permite, por un lado, determinar las variables primarias y secundarias; y por otro, expresar el planteo general de la formulación débil que es donde se plantea el problema en elementos

finitos. En este caso las variables primarias (desplazamientos generalizados) son: w_0, ϕ_n, ϕ_s y las variables secundarias (fuerzas generalizadas) son: Q_n, M_{nn}, M_{ns} .

4.3.3 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO

Si se reemplazan las Ecs. (4.14) y (4.15) en la expresión del Principio de los Trabajos Virtuales dada por Ec. (3.6), suponiendo todas las variables independientes del tiempo, resulta la siguiente expresión:

$$0 = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx} z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy} z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + \tau_{xy} z \delta \gamma_{xy}^{(1)} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} \right) dz \Bigg] dx dy - \int_R q(x, y) \delta w_0 dx dy \quad (4.20)$$

Las relaciones constitutivas de cada lámina del laminado están dadas por (Anexo C):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (4.21)$$

Reemplazando las Ecs. (4.21) y (4.13) en la Ec. (4.20) se obtiene:

$$0 = \int_R \left[D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + D_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right. \\ + D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \\ + D_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + D_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \\ + A_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \delta \phi_y \right) + A_{45} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \delta \phi_y \right) \\ + A_{45} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \phi_x \right) + A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) \left(\frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \delta \phi_x \right) \Bigg] dx dy - \int_R q(x, y) \delta w_0 dx dy \quad (4.22)$$

donde A_{ij} , D_{ij} están dadas en Ec. (4.3).

Las funciones incógnitas, w_0, ϕ_x, ϕ_y , aproximadas con funciones de forma admisibles (las que se presentan en detalle en las secciones siguientes), pueden escribirse como el producto de funciones de forma por los desplazamientos nodales generalizados:

$$\begin{aligned} w_0(x, y) &= \{N(x, y)\}^T \{c^w\} \\ \phi_x(x, y) &= \{N(x, y)\}^T \{c^{\phi_x}\} \\ \phi_y(x, y) &= \{N(x, y)\}^T \{c^{\phi_y}\} \end{aligned} \quad (4.23)$$

usando indistintamente $\{N(x, y)\} = \mathbf{N}$ y $\{c^{(\bullet)}\} = \mathbf{c}^{(\bullet)}$ con $(\bullet) = w, \phi_x, \phi_y$.

Reemplazando ahora las expresiones de Ecs. (4.23) en la Ec. (4.22) se obtiene:

$$\begin{aligned} 0 = \int_R & \left[D_{11} \mathbf{c}^{\phi_x} \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + D_{12} \mathbf{c}^{\phi_y} \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + D_{16} \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \left(\mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right. \\ & + D_{12} \mathbf{c}^{\phi_x} \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + D_{22} \mathbf{c}^{\phi_y} \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + D_{26} \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \left(\mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ & + D_{16} \mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \left(\delta \mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) + D_{26} \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \left(\delta \mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) \\ & + D_{66} \left(\mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) \left(\delta \mathbf{c}^{\phi_x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right) \\ & + A_{44} \left(\mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \mathbf{c}^{\phi_y} \mathbf{N} \right) \left(\delta \mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \mathbf{N} \right) + A_{45} \left(\mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \mathbf{c}^{\phi_x} \mathbf{N} \right) \left(\delta \mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \delta \mathbf{c}^{\phi_y} \mathbf{N} \right) \\ & + A_{45} \left(\mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} + \mathbf{c}^{\phi_y} \mathbf{N} \right) \left(\delta \mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \mathbf{N} \right) + A_{55} \left(\mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \mathbf{c}^{\phi_x} \mathbf{N} \right) \left(\delta \mathbf{c}^w \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \delta \mathbf{c}^{\phi_x} \mathbf{N} \right) \Big] dx dy \\ & - \int_R q(x, y) \delta \mathbf{c}^w \mathbf{N} dx dy \end{aligned} \quad (4.24)$$

Si se cancelan los vectores de desplazamientos nodales virtuales, la Ec. (4.24) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
& \int_R \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} dx dy \\
& + \int_R \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ 0 & \mathbf{N} \\ \mathbf{N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 & \mathbf{N} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi_x} \\ \mathbf{c}^{\phi_y} \end{bmatrix} dx dy = \int_R q(x, y) \mathbf{N} dx dy
\end{aligned} \tag{4.25}$$

La Ec. (4.25) se puede escribir como un sistema de ecuaciones matricial de la forma:

$$[K^E] \{c^E\} = \{F^E\} \tag{4.26}$$

donde $[K^E]$ es la matriz de rigidez del laminado y está dada por:

$$\begin{aligned}
[K^E] &= \int_R \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \end{bmatrix} dx dy \\
& + \int_R \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ 0 & \mathbf{N} \\ \mathbf{N} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} & 0 & \mathbf{N} \\ \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} & \mathbf{N} & 0 \end{bmatrix} dx dy
\end{aligned} \tag{4.27}$$

y $\{F^E\}$ es el vector de fuerzas, dado por:

$$\{F^E\} = \int_R q(x, y) \mathbf{N} dx dy \tag{4.28}$$

4.3.4 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO

En ausencia de fuerzas externas actuando en la placa, $\delta V \equiv 0$ en la Ec. (3.6). Si se reemplazan allí las expresiones dadas por las Ecs. (4.14) y (4.16), se obtiene la ecuación de vibración libre de la placa laminada:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_0^T \left\{ \int_R \left[\int_{-h/2}^{h/2} \left(\sigma_{xx} z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + \sigma_{yy} z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + \tau_{xy} z \delta \gamma_{xy}^{(1)} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} \right) dz \right] dxdy \right. \\
 & \left. - \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[z^2 \left(\dot{\phi}_x \delta \dot{\phi}_x + \dot{\phi}_y \delta \dot{\phi}_y \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dxdy \right\} dt
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

De acuerdo a lo desarrollado en la sección anterior, el primer término del miembro de mano derecha conduce al producto $[K^E] \{c^E\} \{\delta c^E\}$.

Se asumen los desplazamientos periódicos en el tiempo, en los que ω es la frecuencia natural de vibración de la placa. Considerando la energía cinética máxima correspondiente a un ciclo vibratorio y teniendo en cuenta las aproximaciones dadas por Ecs. (4.23) se puede escribir la Ec. (4.29) como:

$$\begin{aligned}
 0 = & [K^E] \{c^E\} \{\delta c^E\} \\
 & - \omega^2 \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\mathbf{c}^w \delta \mathbf{c}^w (\mathbf{N})^2 + z^2 \mathbf{c}^{\phi x} \delta \mathbf{c}^{\phi x} (\mathbf{N})^2 + z^2 \mathbf{c}^{\phi y} \delta \mathbf{c}^{\phi y} (\mathbf{N})^2 \right] dz dxdy
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Integrando en el espesor y cancelando los desplazamientos nodales virtuales, se llega a:

$$0 = \left\{ [K^E] - \omega^2 \int_R \rho h \begin{bmatrix} \mathbf{N}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} \mathbf{N}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \mathbf{N}^2 \end{bmatrix} dxdy \right\} \{c^E\} \tag{4.31}$$

La Ec. (4.31) se puede escribir finalmente como:

$$\left\{ [K^E] - \omega^2 [M^E] \right\} \{c^E\} = 0 \tag{4.32}$$

donde $[M^E]$ es la matriz de masa del laminado y está dada por:

$$[M^E] = \int_R \rho h \begin{bmatrix} \mathbf{N}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} \mathbf{N}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \mathbf{N}^2 \end{bmatrix} dxdy \tag{4.33}$$

4.3.5 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN – MATRICES ELEMENTALES EN COORDENADAS NATURALES

A continuación se describe el proceso de generación de las componentes del campo de desplazamientos para formular el macro elemento finito enriquecido. Estas componentes se aproximan en coordenadas naturales mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^w p_i(\xi) q_j(\eta) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^w N_{ij}(\xi, \eta) \\
 \phi_x(\xi, \eta) &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^{\phi_x} p_i(\xi) q_j(\eta) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^{\phi_x} N_{ij}(\xi, \eta) \\
 \phi_y(\xi, \eta) &= \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^{\phi_y} p_i(\xi) q_j(\eta) = \sum_{i,j=1}^n c_{ij}^{\phi_y} N_{ij}(\xi, \eta)
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

donde $c_{ij}^w, c_{ij}^{\phi_x}, c_{ij}^{\phi_y}$ son los coeficientes incógnitas.

Para la formulación empleando la teoría de primer orden, los dos primeros polinomios que se usan son los clásicos polinomios lineales de Hermite de la versión h del Método de los Elementos Finitos (MEF), ya que bajo las hipótesis de la teoría FSDT las variables primarias son: w_0, ϕ_n, ϕ_s , de manera que no se requieren funciones de forma de soporte local que aproximen derivadas de cualquiera de las funciones incógnitas. Los polinomios lineales de Hermite están dados por:

$$\begin{aligned}
 p_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} & q_1(\eta) &= -\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2} \\
 p_2(\xi) &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} & q_2(\eta) &= \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{4.35}$$

Los subsiguientes polinomios son los polinomios ortogonales construidos con el procedimiento de Gram-Schmidt, detallado en el Capítulo 3 (Ec. 3.54). Estos polinomios contribuyen solamente a los desplazamientos y giros internos del macro elemento, por lo tanto no afectan los desplazamientos o giros a lo largo de sus lados.

En este caso el primer miembro de los polinomios de Gram-Schmidt está dado por:

$$p_3(\xi) = -1 + \xi^2 \tag{4.36}$$

y es el polinomio más simple que satisface la condición $p_3(\xi = -1) = p_3(\xi = 1) = 0$. La situación es idéntica para los polinomios en la coordenada η .

A partir de las Ecs. (4.27) y (4.34) e incluyendo el mapeo de espacios dado por las Ecs. (3.36) y (3.44) se obtiene, en el dominio \tilde{R} (coordenadas naturales), la siguiente expresión para la matriz de rigidez del macro-elemento finito:

$$\begin{aligned}
 [K^E] = & \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{B}_1 & 0 & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{B}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{B}_2 \\ 0 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta + \\
 & + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_1 \\ 0 & \mathbf{N}_{\xi\eta} \\ \mathbf{N}_{\xi\eta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 & 0 & \mathbf{N}_{\xi\eta} \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{N}_{\xi\eta} & 0 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}_1 &= \frac{J_{22}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta} \\
 \mathbf{B}_2 &= -\frac{J_{21}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}_{\xi\eta}}{\partial \eta}
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

y $\mathbf{N}_{\xi\eta} \equiv \{N(\xi, \eta)\}$ de Ec. (4.34).

La matriz de masa del macro elemento finito se obtiene a partir de su expresión en coordenadas cartesianas (x, y) dada por la Ec. (4.33), y la Ec. (3.44) del mapeo de espacios (Nallim et al., 2003) como:

$$[M^E] = \rho h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}_{\xi\eta})^T \mathbf{N}_{\xi\eta} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} (\mathbf{N}_{\xi\eta})^T \mathbf{N}_{\xi\eta} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} (\mathbf{N}_{\xi\eta})^T \mathbf{N}_{\xi\eta} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \tag{4.39}$$

El vector de fuerzas, correspondiente a una carga transversal $q(x, y)$ aplicada sobre el macro elemento completo, se obtiene a partir de su expresión en coordenadas cartesianas (x, y) de Ec. (4.28), y considerando en ésta la Ec. (3.44):

$$[F^E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 q (\mathbf{N}_{\xi\eta})^T |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (4.40)$$

4.3.6 ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES

Como se describió en el Capítulo 3, los macro elementos individuales desarrollados pueden ser ensamblados para conformar las matrices globales de rigidez y de masa, así como el vector global de fuerzas para el análisis de la respuesta mecánica del laminado. Para el caso de la FSDT, se deben ordenar los grados de libertad, c^w , c^{ϕ_x} , c^{ϕ_y} , separándolos en grados de libertad nodales (N), de borde (B) y puramente internos (I), y luego reordenar los correspondientes elementos de la matriz de rigidez, de la matriz de masa y del vector de fuerzas.

Las variables primarias del problema w , ϕ_x , ϕ_y deben ser continuas en todo el dominio y en los lados comunes de dos elementos; el ensamblaje de todos los elementos de una malla de elementos finitos está basado en la continuidad entre elementos adyacentes de las variables primarias y el balance de las variables secundarias.

Las distintas condiciones de contorno se aplican a la estructura general formada por uno o más macro elementos.

Usando ahora las matrices globales de masa y rigidez en la Ec. (3.57), se obtienen las frecuencias naturales de vibración libre de la estructura. En correspondencia con cada autovalor ω se tienen los autovectores $\{c^G\}$. Un vector $\{c^G\}$ contiene sub-vectores $\{c^E\}$ con coeficientes nodales, internos y de borde para cada macro elemento de la malla de la estructura, que para esta teoría están a su vez formados $\{c^w\}, \{c^{\phi_x}\}, \{c^{\phi_y}\}$. Como en el caso de la CLPT, hay valores de $\{c^G\}$ comunes a dos o más elementos.

Para el análisis de flexión por carga transversal, la ecuación matricial (3.58) define la relación entre las cargas actuantes en los elementos y los desplazamientos para la estructura ensamblada.

El procedimiento para el ensamblaje sigue el mismo esquema general que se ilustra gráficamente en la Figura 3.8.

4.3.7 ESTUDIO DE CONVERGENCIA Y COMPARACIÓN DE DEFLEXIONES TRANSVERSALES ESTÁTICAS

En adelante se presentan resultados numéricos de validación y aplicación del macro elemento finito desarrollado. Para designar las condiciones de borde de las placas consideradas se adopta la siguiente nomenclatura: por ejemplo, la designación CSFS, identifica una placa cuadrilátera con lado (1) empotrado, (2) simplemente apoyado, (3) libre y (4) simplemente apoyado. La numeración de los lados es la que se indica en la Figura 4.7.

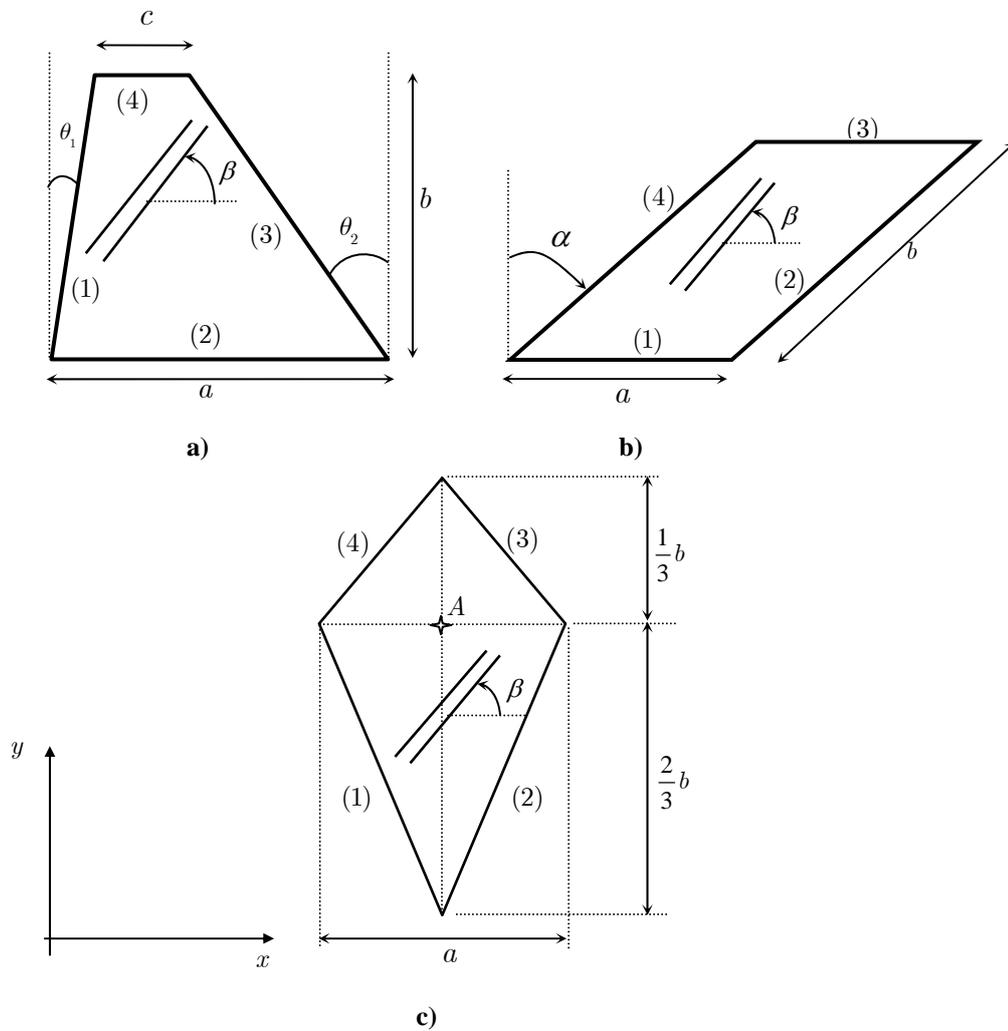


Figura 4.7. Laminados de formas diversas.

Las propiedades materiales de las capas de todos los laminados de esta sección son $E_1 = 25E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$, $G_{23} = 0.2E_2$, $\nu_{12} = 0.25$ y el factor de corrección por corte es $k_s = 5/6$. En todos los casos las deflexiones adimensionalizadas están dadas por: $\bar{w} = 100w_0E_2h^3/(a^4q_0)$.

En la Tabla 4.5 se presentan los resultados del estudio de convergencia correspondientes a las deflexiones transversales en el centro de una placa laminada cuadrada SFSF (Fig. 4.7a. con ángulos $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y $a = b$) sometida a carga uniformemente distribuida de intensidad q_0 . La secuencia de apilamiento adoptada es (90/0/90/0/90). El estudio de convergencia se realiza incrementando el número de polinomios de Gram-Schmidt usados en la aproximación del campo de desplazamientos en coordenadas naturales. A fin de comparar los resultados obtenidos se incluyen en la Tabla 4.5 los resultados de Moleiro et al. (2008) y se observa excelente acuerdo.

Cantidad de polinomios GS	h/a		
	0.01	0.05	0.10
Macro elemento FSDT $n = 3$	2.0768	2.1893	2.5410
Macro elemento FSDT $n = 4$	2.0875	2.3539	2.8415
Macro elemento FSDT $n = 5$	2.5957	2.7082	3.0599
Macro elemento FSDT $n = 6$	2.5957	2.7082	3.0600
Moleiro et al. (2008)	2.5957	2.7082	3.0600

Tabla 4.5. Estudio de convergencia de placa laminada cuadrada

$$\text{SFSF (90/0/90/0/90)} \left(\bar{w} = w_0 \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100 \right)$$

La precisión y confiabilidad de las deflexiones obtenidas con la formulación propuesta se demuestran en los dos casos siguientes, en los cuales se considera carga uniformemente distribuida q_0 y secuencia de laminación (0/90/0). En primer lugar, en la Tabla 4.6 se comparan los resultados obtenidos para la deflexión central de una placa laminada cuadrada simplemente apoyada en todo el contorno, con los valores presentados por Reddy (2003), Belinha y Dinis (2006) y Xiao et al. (2008). El segundo caso corresponde a una comparación de resultados numéricos para una placa sesgada

simplemente apoyada en todo su contorno (Fig. 4.7b). En la Tabla 4.7 se presentan las deflexiones centrales de una placa con inclinación de lados $\alpha = 30^\circ$ y $a = b = 1$ obtenidas con la presente formulación, y los valores de Chakrabarti y Sheikh (2004), observándose muy buena concordancia.

	h/a		
	0.05	0.10	0.20
Macro elemento FSDT	0.7712	1.0418	2.0357
Reddy (2003)	0.7572	1.0219	-
Belinha and Dinis (2006)	0.7583	1.0225	-
Xiao et al. (2008)	0.7256	0.9465	1.7572

Tabla 4.6. Deflexión central de placa laminada cuadrada SSSS (0/90/0) $\left(\bar{w} = w_0 \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100 \right)$

	h/a	
	0.10	0.20
Macro elemento FSDT	0.8619	1.6527
Chakrabarti y Sheikh FSDT (2004)	0.9182	1.8642
Chakrabarti y Sheikh RHSDT (2004)	0.8814	1.6811

Tabla 4.7. Deflexión central de placa laminada sesgada SSSS (0/90/0) $\left(\bar{w} = w_0 \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100 \right)$

4.3.8 ESTUDIO DE CONVERGENCIA Y COMPARACIÓN DE FRECUENCIAS NATURALES

En esta sección se presentan ejemplos de análisis de vibración libre de placas. En la Tabla 4.8 se observa la convergencia de los resultados obtenidos correspondientes

a las tres primeras frecuencias adimensionales $\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ de una placa trapezoidal

con $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 45^\circ$ (Fig. 4.7a) moderadamente gruesa SFSF, considerando dos secuencias de apilamiento distintas. Las propiedades del material compuesto usado en este caso son: $E_1 = 40E_2$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = 0.6E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ y el factor de corrección por corte es $k_s = 5/6$. Además, se incluyen en Tabla 4.8 los resultados de Zamani et al. (2012) para comparar con los obtenidos con el macro

elemento finito propuesto en este Capítulo. Se puede concluir que los resultados alcanzados con la presente formulación están en excelente relación con los de los citados autores, obtenidos por el método de cuadratura diferencial generalizada (GDQ). Además, puede notarse que al aumentar el número de polinomios de Gram-Schmidt, los resultados convergen claramente a un valor estable.

Laminado	Nro. de polinomios de Gram-Schmidt	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
(0/90/90/0)	Macro elemento FSDT $n = 3$	5.7779	13.3079	23.6391
	$n = 4$	5.4254	11.9664	17.6758
	$n = 5$	5.2728	11.2116	16.2064
	$n = 6$	5.2607	11.1408	15.4678
	Zamani et al. (2012)	5.4563	11.2542	16.0392
(30/60/60/30)	$n = 3$	5.5002	15.6608	25.4215
	$n = 4$	4.6272	10.2732	13.5640
	$n = 5$	4.1196	9.2204	11.1098
	$n = 6$	4.0406	8.7365	9.9018
	Zamani et al. (2012)	4.1514	8.6176	9.8155

Tabla 4.8. Estudio de convergencia para una placa laminada trapezoidal SFSF con

$$a = 2b \text{ y } h = 0.1b \left(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right)$$

Otro caso de análisis dinámico llevado a cabo se muestra en la Tabla 4.9, en la que se tabulan las frecuencias adimensionales $\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}}$ ($D_0 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$), obtenidas para placas laminadas cruzadas (0/90/0) cuadradas, considerando dos condiciones de contorno distintas: SSSS y CCCC, y varias relaciones espesor/longitud característica (h/a). Para este caso, las láminas tienen las siguientes propiedades materiales: $E_1 = 40E_2$, $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$, $G_{23} = 0.5E_2$, $\nu_{12} = 0.25$, y un factor de corrección por corte $k_s = \pi^2/12$. Los resultados se comparan con los obtenidos por

Ferreira y Fasshauer (2007), quienes utilizan una combinación de métodos pseudoespectrales con funciones de base radial. Se puede concluir que con el uso de un bajo número de polinomios de enriquecimiento ($m, n = 4$), el empleo del macro-elemento finito propuesto arroja excelentes resultados.

h/a	Método	SSSS			CCCC		
		$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
0.001	Macro elemento FSDT	6.6270	9.4665	16.3962	14.7086	17.7335	26.9921
	Ferreira y Fasshauer (2007)	6.6226	9.5306	16.4255	14.6918	18.4741	26.9611
0.050	Macro elemento FSDT	6.1289	8.8774	15.0919	10.9578	14.1253	20.3958
	Ferreira y Fasshauer (2007)	6.1365	8.8846	15.1061	10.9530	14.0235	20.3851
0.100	Macro elemento FSDT	5.1457	7.7242	12.9065	7.4127	10.4611	13.9342
	Ferreira y Fasshauer (2007)	5.1652	7.7549	12.9129	7.4107	10.3930	13.9124
0.150	Macro elemento FSDT	4.2484	6.6337	9.4672	5.5492	8.1867	9.9126
	Ferreira y Fasshauer (2007)	4.2741	6.6657	9.4875	5.5481	8.1467	9.9039
0.200	Macro elemento FSDT	3.5649	5.7417	7.3647	4.4472	6.6654	7.7043
	Ferreira y Fasshauer (2007)	3.5934	5.7683	7.3968	4.4465	6.6420	7.6995

Tabla 4.9. Frecuencias adimensionales de placas laminadas cuadradas (0/90/0) $\left(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{\pi^2} \sqrt{\frac{\rho h}{D_0}} \right)$

Finalmente, en la Tabla 4.10 se presenta la comparación de resultados de las tres primeras frecuencias naturales adimensionales de la placa trapezoidal con $\theta_1 = 0$ y $\theta_2 = 45^\circ$ (Fig. 4.7a) adoptada en el estudio de convergencia de esta sección.

Condición de borde	Secuencia de laminación	Método	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
SSSS	(0/90/90/0)	Macro elemento FSDT	10.5827	22.3750	26.2464
		Zamani et al. (2012)	10.8137	22.7508	26.2021
	(30/60/60/30)	Macro elemento FSDT	11.3023	19.1494	27.7253
		Zamani et al. (2012)	11.7158	19.1542	26.3149
CFSF	(0/90/90/0)	Macro elemento FSDT	7.0066	13.4300	16.9591
		Zamani et al. (2012)	7.2436	13.5562	17.5084
	(30/60/60/30)	Macro elemento FSDT	4.4213	10.2217	13.8375
		Zamani et al. (2012)	4.4120	10.1717	13.3471
CFFF	(0/90/90/0)	Macro elemento FSDT	1.9671	3.9469	8.7758
		Zamani et al. (2012)	1.9660	3.9440	8.7862
	(30/60/60/30)	Macro elemento FSDT	0.8209	3.1551	5.3198
		Zamani et al. (2012)	0.5721	3.3197	5.2285

Tabla 4.10. Frecuencias adimensionales de placas trapezoidales con $a = 1$, $b = 0.5$ y $h = 0.1b$

$$\left(\bar{\omega} = \frac{\omega b^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right)$$

4.3.9 APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN A PLACAS ROMBOIDALES

En esta sección se presentan resultados obtenidos del estudio estático y dinámico de placas romboidales (Fig. 4.7c). Se consideran laminados de tres capas de material E-glass/epoxy ($E_1 = 60.7 \text{ GPa}$, $E_2 = 24.8 \text{ GPa}$, $G_{12} = 12 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.23$), con secuencia de laminación $(0, \beta, 0)$. Como se muestra en la Tabla 4.11, se analizan dos condiciones de borde distintas: una placa con apoyos puntuales en sus cuatro esquinas (llamada CB1), y por otro lado, una placa simplemente apoyada en los lados (3) y (4), y con un apoyo puntual en la esquina formada por la intersección de los lados (1) y (2) (llamada CB2). Además se tienen en cuenta diversas relaciones h/a .

	h/a	Secuencia de laminación	$\bar{w} _A$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
CB1	0.05	(0/30/0)	11.9638	1.7920	4.4359	5.3728
		(0/90/0)	11.9544	1.8335	4.4652	5.3657
	0.10	(0/30/0)	13.8528	1.6995	4.0872	5.0250
		(0/90/0)	13.8433	1.7471	4.1303	5.0428
	0.20	(0/30/0)	19.8095	1.4825	3.3042	4.1946
		(0/90/0)	20.0840	1.5393	3.3638	4.2426
CB2	0.05	(0/30/0)	11.4435	1.8455	5.3839	5.6827
		(0/90/0)	11.3323	1.8802	5.4863	5.6823
	0.10	(0/30/0)	12.9058	1.7342	5.0397	5.1377
		(0/90/0)	12.7356	1.7763	5.1551	5.1787
	0.20	(0/30/0)	16.8646	1.5064	4.1850	4.2847
		(0/90/0)	16.6583	1.5606	4.2502	4.4579

Tabla 4.11. Deflexiones estáticas y frecuencias de vibración libre de placas laminadas romboidales con

$$a = b/2 \left(\bar{w}|_A = w_0|_A \frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} 100, \bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}} \right)$$

Las deflexiones tabuladas, obtenidas del análisis estático de estas placas, corresponden al punto A de la Fig. 4.7c y a carga uniformemente distribuida q_0 . Del análisis dinámico se presentan las tres primeras frecuencias naturales adimensionales.

A modo de ejemplo, en la Fig. 4.8 se muestra la deformada debido a la acción de la carga estática q_0 , y en la Fig. 4.9 las formas modales y líneas nodales asociadas de una placa romboidal con $b = 2a$ y $a/h = 0.05$, con esquema de laminación (0/30/0) y condición de borde CB2.

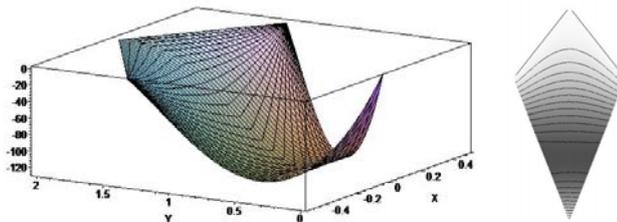


Figura 4.8. Deflexiones estáticas de placa romboidal (0/30/0) con $b = 2a$ y $h/a = 0.05$, obtenida con la formulación propuesta.

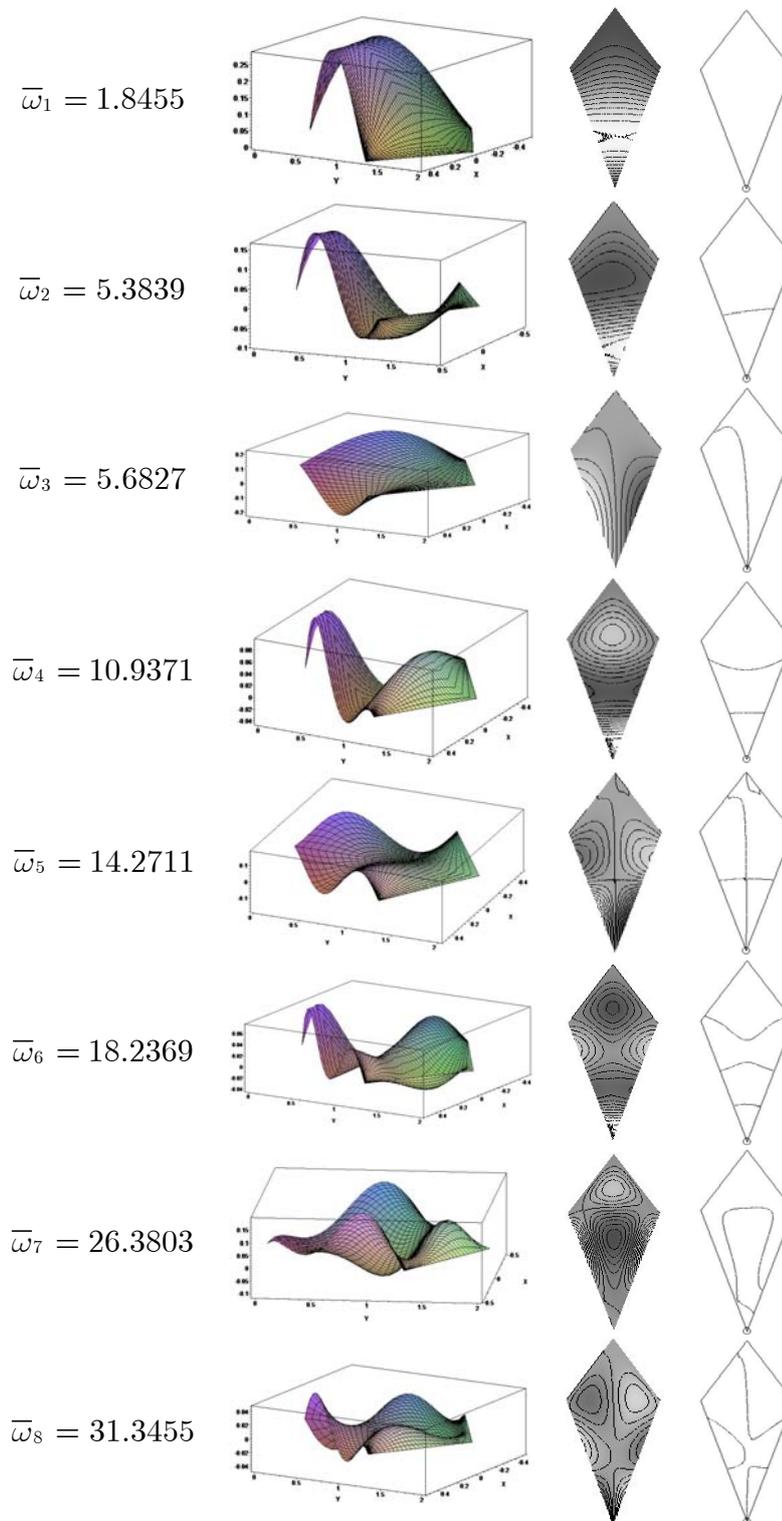


Figura 4.9. Formas modales y líneas nodales de placa romboidal (0/30/0) con $b = 2a$ y $h/a = 0.05$, obtenidas con la formulación propuesta.

4.3.10 EJEMPLO DE ENSAMBLAJE DE MACRO ELEMENTOS

En esta sección se presenta el análisis de vibraciones libres de una placa de forma geométrica L, simplemente apoyada parcialmente y con un apoyo puntual en $x = 0, y = a$ (ver Fig. 4.10a). El proceso de ensamblaje sigue los lineamientos generales descritos en la sección 4.3.6.

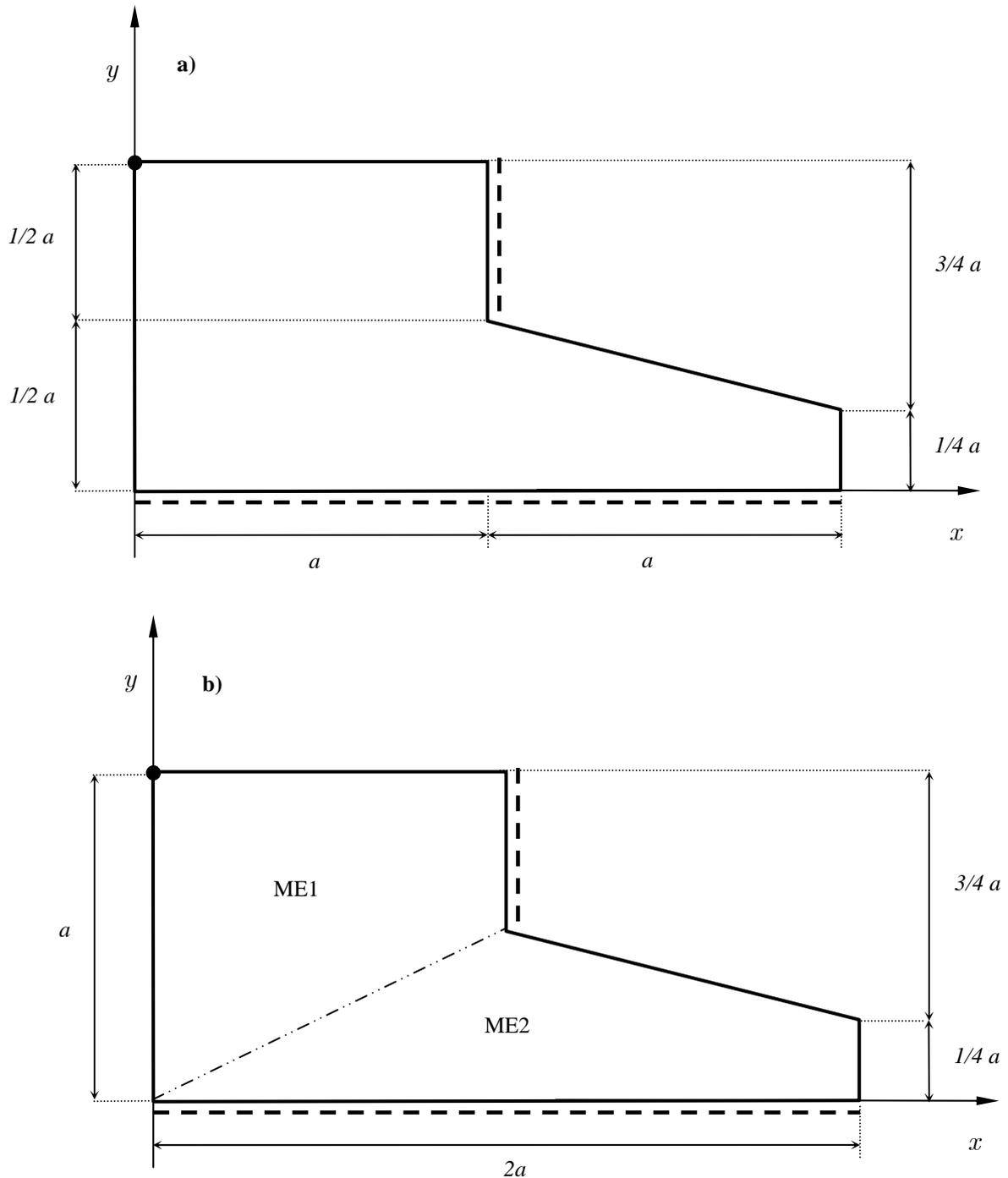
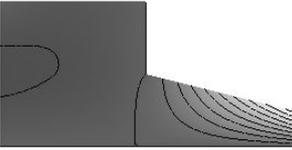
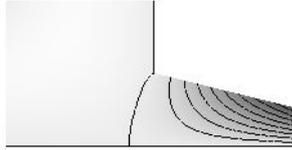
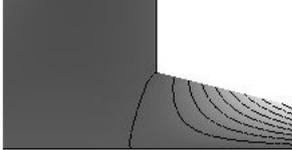
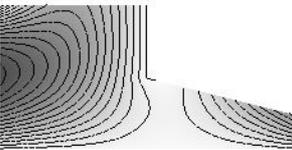
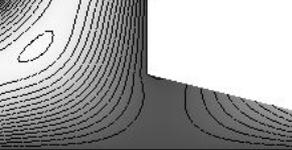
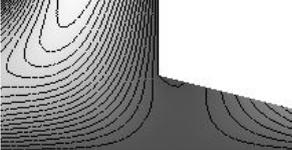
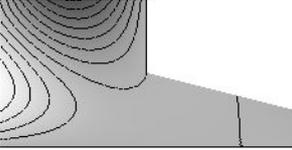
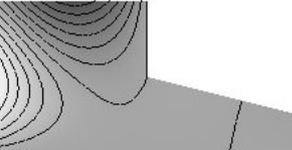
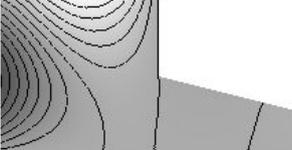
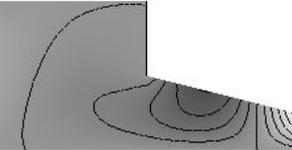
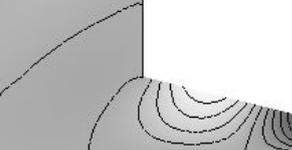
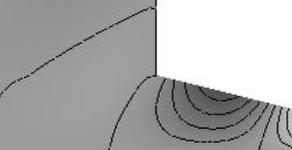
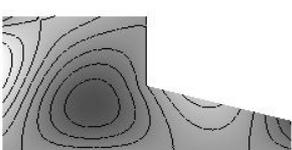
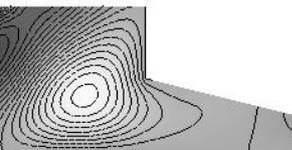
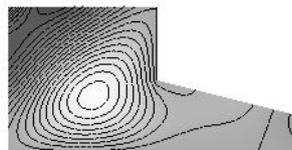


Figura 4.10. Geometría de una placa laminada de forma L.

La estructura se modeló usando dos macro elementos: $ME1$ y $ME2$ como se muestra en la Fig. 4.10b. Las ocho primeras frecuencias naturales $\bar{\omega} = \frac{\omega a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ de esta estructura y sus respectivas formas modales se muestran en la Fig. 4.12, que corresponden a laminados con relación $h/a = 0.1$, de tres capas E-glass/epoxy ($E_1 = 60.7 \text{ GPa}$, $E_2 = 24.8 \text{ GPa}$, $G_{12} = 12 \text{ GPa}$, $\nu_{12} = 0.23$).

Para demostrar la versatilidad de la formulación, se presentan tres secuencias distintas de laminación.

(0/90/0)	(45/-45/45)	(60/30/60)
		
$\bar{\omega}_1 = 2.4482$	$\bar{\omega}_1 = 2.5734$	$\bar{\omega}_1 = 2.3990$
		
$\bar{\omega}_2 = 3.2446$	$\bar{\omega}_2 = 3.1912$	$\bar{\omega}_2 = 3.1051$
		
$\bar{\omega}_3 = 6.1898$	$\bar{\omega}_3 = 6.2099$	$\bar{\omega}_3 = 6.3090$
		
$\bar{\omega}_4 = 8.9712$	$\bar{\omega}_4 = 8.6325$	$\bar{\omega}_4 = 8.0391$
		
$\bar{\omega}_5 = 9.4081$	$\bar{\omega}_5 = 9.1577$	$\bar{\omega}_5 = 9.0225$

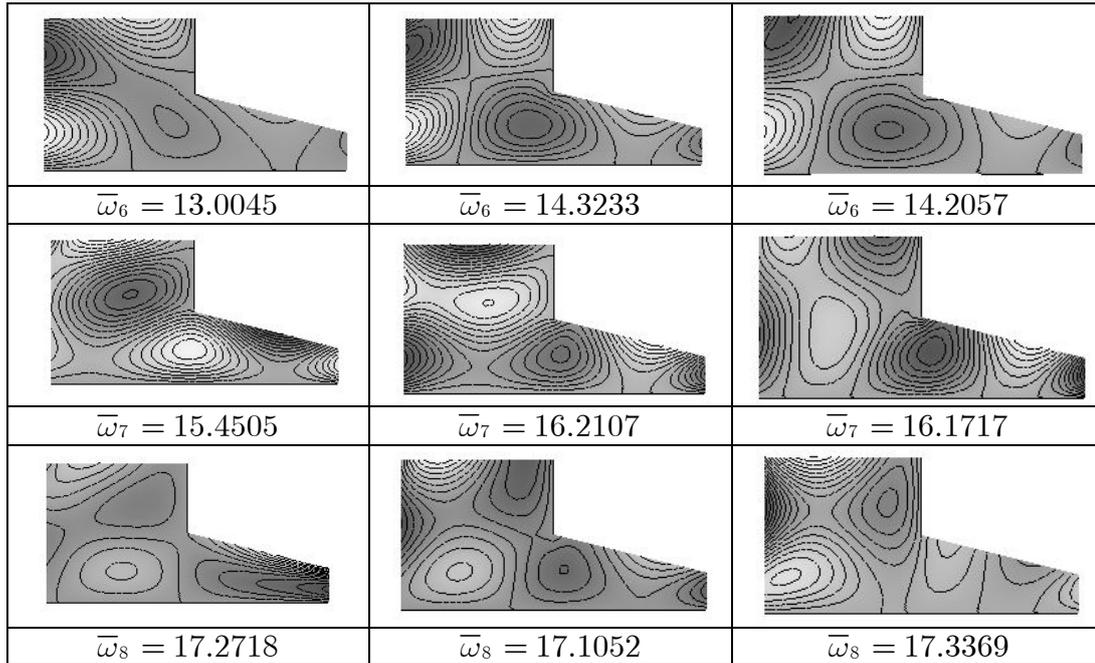


Figura 4.11. Frecuencias y formas modales de una placa L laminada.

4.4 CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se proponen dos formulaciones que incorporan la teoría de deformación por corte de primer orden. Por un lado, un algoritmo variacional que permite obtener una solución analítica aproximada y que es apropiado para el análisis de placas laminadas de forma rectangular, con secuencia de apilamiento arbitraria. El algoritmo desarrollado se basa en la aplicación del Método de Ritz y las cinco componentes del campo de desplazamientos se aproximan mediante conjuntos de polinomios ortogonales característicos generados mediante el procedimiento de Gram-Schmidt. Por otro lado, se propone un macro elemento finito enriquecido con polinomios ortogonales de Gram-Schmidt que puede ser aplicado a placas laminadas de formas geométricas generales, que tiene la ventaja de estar libre del bloqueo por cortante. De esta manera se obtiene una formulación general que permite, además, el análisis de placas laminadas gruesas de diferente material, secuencia de apilamiento, relación de espesor y condiciones de contorno. La implementación computacional es también bastante simple y la formulación es tal que se puede apreciar de manera clara cómo las distintas configuraciones geométricas y mecánicas involucradas influyen en la respuesta mecánica del laminado. En consecuencia la metodología desarrollada constituye una eficiente herramienta para problemas de diseño y optimización.

Es importante destacar que la formulación del macro elemento empleando la FSDT permite el análisis de placas laminadas gruesas de formas generales, empleando un mallado mínimo. Los ejemplos numéricos, tanto en relación al análisis estático como dinámico, muestran muy buena concordancia con los resultados publicados por otros autores. La formulación produce resultados muy satisfactorios para placas de secuencia de laminación simétrica, y es posible alcanzar una muy buena precisión con un número bajo de polinomios de enriquecimiento y sin la necesidad de densificar la malla, para estructuras ensambladas. En efecto, una estructura de placa de cualquier forma geométrica puede ser dividida en un mínimo número de macro elementos para arribar a los resultados buscados. Los ejemplos de ensamblaje presentados muestran la versatilidad de la formulación propuesta.

CAPÍTULO 5

DESARROLLO Y FORMULACIÓN DE UN MACRO ELEMENTO PARA EL ESTUDIO DE PLACAS LAMINADAS GRUESAS: TEORÍA TRIGONOMÉTRICA

5.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores se ha presentado la formulación de macro elementos finitos jerárquicos. En el Capítulo 3 se emplearon las hipótesis cinemáticas correspondientes a la teoría clásica de placas laminadas (CLPT), mientras que en el Capítulo 4 se aplicaron las hipótesis de la teoría de primer orden de deformación por corte (FSDT). Estas teorías se usan comúnmente en el análisis de placas laminadas o sándwich para diversas aplicaciones ingenieriles. Como se comentó brevemente en el Capítulo 2, la CLPT es una extensión de la teoría clásica de Kirchhoff, formulada originalmente para placas isótropas homogéneas, al caso de placas compuestas laminadas que posean una relación razonable entre el espesor y la longitud de sus lados.

Cuando se trata de placas isótropas homogéneas, la aplicación de la teoría de Kirchhoff está limitada a placas que presentan relaciones entre la máxima deflexión (w) y el espesor de la placa (h) inferiores a 0.2, y una relación espesor de la placa / mínima dimensión en el plano de la placa menor a 0.1 (Altenbach et al. 2004, Kollar

and Springer, 2003). A diferencia de los elementos estructurales isótropos homogéneos, las placas compuestas laminadas o las placas sándwich se caracterizan por tener disímiles módulos de elasticidad con una elevada razón entre ellos. Los materiales compuestos típicos están constituidos por una matriz que tiene un módulo de Young bajo en comparación con el módulo de la fibra y aún en comparación con los módulos del laminado completo. Sumado a lo anterior, se debe tener en cuenta que el material de la matriz es el agente de unión entre láminas, razón por la cual el efecto de cizallamiento sobre el laminado completo está dado por la contribución de cada zona interlaminar del material de la matriz (Jones, 1999).

Es importante destacar que los módulos de corte G_{13} y G_{23} en materiales compuestos, son mucho menores en relación al módulo E_1 , que lo que sucede en el caso de materiales isótropos. Así, el efecto de las tensiones tangenciales transversales τ_{xz} y τ_{yz} es más importante para placas de material compuesto que para placas isótropas. Aún cuando el valor de estas tensiones (τ_{xz}, τ_{yz}) sea de un orden menor de magnitud que el de las tensiones en el plano $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy})$, las tensiones límites admisibles para las tensiones tangenciales transversales son también de un orden de magnitud menor que las admisibles para las tensiones en el plano.

Se puede decir entonces que tales elementos estructurales de material compuesto tienen una baja rigidez cortante transversal y, frecuentemente, presentan deformaciones tangenciales significativas a bajas relaciones espesor / lado de la placa ($h/a < 0.05$) (Altenbach et al. 2004). Por otra parte, las deflexiones reales pueden ser considerablemente mayores que las obtenidas con la CLPT. Más aún, la CLPT conduce a una incorrecta determinación de las tensiones a lo largo del espesor de la placa y, por ende, a una incorrecta determinación de las tensiones interlaminares.

El primer paso para superar los inconvenientes de la CLPT, es recurrir al empleo de la teoría de primer orden FSDT que proporciona una mejor predicción cuando se calculan las llamadas respuestas globales de la estructura (deflexiones y frecuencia natural de vibración). Sin embargo, la precisión se deteriora cuando se requieren respuestas que involucren a derivadas de los desplazamientos o frecuencias de vibración correspondientes a modos superiores. Esto ocurre aún en placas moderadamente gruesas; a esta limitación se suma la necesidad de emplear (como se mencionó en los

Capítulos 2 y 4 de esta tesis) factores de corrección por corte, los cuales dependen de las propiedades de cada lámina, del esquema de laminación y de la tipología estructural (Chatterjee and Kulkarni, 1979; Whitney, 1973; Bert, 1973; Hull, 2006; Stephen, 1997).

Como resultado de las consideraciones expresadas, es conveniente extender el concepto de macro elemento formulado en los capítulos precedentes, de manera de incorporar dentro de su formulación la cinemática correspondiente a teorías de orden superior. De esta manera, se busca obtener una herramienta que tenga las potencialidades ya destacadas en los desarrollos previos en referencia a la implementación numérica, a las prestaciones y a la tecnología del elemento finito y, a la vez, que la formulación obtenida pueda aplicarse de manera efectiva a placas gruesas.

Interesantes teorías de orden superior de deformación por corte (HOSDT) fueron propuestas por autores como Reddy y Liu (1985), Touratier (1991), Soldatos (1992), Kant y Swaminathan (2002), Karama et al. (2009) y más recientemente Mantari et al. (2011) y Mantari y Guedes Soares (2012). Estas teorías satisfacen las condiciones de contorno correspondientes a las superficies libres de la placa y representan, aproximadamente, la distribución parabólica de tensiones tangenciales transversales en el espesor. La mayoría de las teorías HOSDT existentes contienen expresiones polinómicas para las deformaciones por cortante. Por ejemplo, en las formulaciones generalizadas presentadas por Carrera (2003), Carrera et al. (2011) y Demasi (2009a-e) las incógnitas están representadas a lo largo del espesor mediante funciones polinómicas. Sin embargo, en relación a las teorías de capa única equivalente, de acuerdo a la revisión realizada en esta tesis y a lo mencionado por Mantari et al (2012d), es muy importante explorar el comportamiento de otras funciones en la implementación de nuevas teorías de deformación por corte. En este capítulo se emplea una teoría trigonométrica de deformación por corte que fue recientemente generalizada para su aplicación a laminados (Ferreira et al., 2005). Puede decirse que hay evidencias de la demanda generada por las teorías trigonométricas de orden superior (Mantari et al., 2012b), debido fundamentalmente a que son más ricas que las funciones polinómicas, son a la vez más simples y precisas, y las condiciones de contorno en las superficies libres de la placa están garantizadas a priori.

De acuerdo a lo expresado anteriormente en este capítulo se presenta, en primer lugar, la obtención de las ecuaciones de equilibrio dinámico y condiciones de contorno

para placas laminadas. Para este fin y para darle generalidad al tratamiento se utiliza el principio de los trabajos virtuales en conjunto con la teoría trigonométrica de orden superior (Capítulo 2, sección 2.2.3). Mediante este procedimiento y la aplicación de los pasos del cálculo de variaciones, se obtienen también las condiciones de contorno, lo que permite visualizar las variables primarias y secundarias. Luego, y tomando como base los macro elementos finitos desarrollados en los Capítulos 3 y 4 de esta tesis, se obtiene la formulación de un macro elemento finito jerárquico especialmente adecuado para placas gruesas laminadas (Rango et al., 2012c). Asimismo, se desarrolla el proceso de ensamblaje y se presentan resultados que permiten verificar la precisión obtenida con la formulación propuesta. Además de las comparaciones llevadas a cabo con otros autores, se presenta una comparación con resultados obtenidos empleando el método de los elementos finitos, discretizando la placa con elementos sólidos tridimensionales.

5.2 CAMPO DE DESPLAZAMIENTOS Y DEFORMACIONES

Se considera el elemento de placa gruesa laminada de forma cuadrilátera arbitraria mostrado en la Figura 3.3. De manera análoga a los desarrollos previos, se adopta para el análisis un laminado de espesor uniforme h , formado por un cierto número de capas N_l . Cada una de las láminas es de material compuesto reforzado con fibras unidireccionales. El ángulo de las fibras de la k -ésima capa, contada desde la superficie $z = -h/2$, es β y se mide desde el eje x de la placa hasta la dirección de la fibra. Se considera un esquema de laminación simétrico con respecto al plano medio de la placa (Figura 5.1).

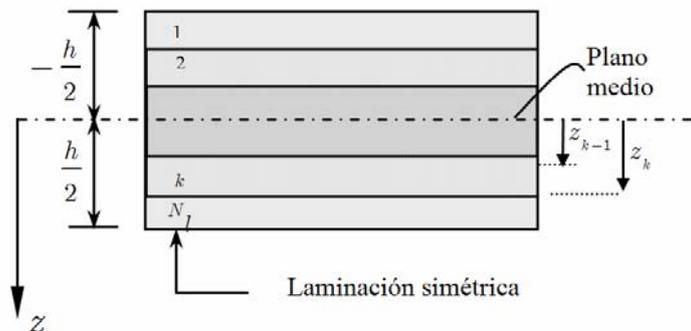


Figura 5.1. Esquema de laminación de la placa

Basado en la teoría trigonométrica de deformación por corte (TSDT) y teniendo en cuenta las hipótesis correspondientes, el campo de desplazamientos de la placa (ver Ec. (2.9)) puede escribirse como:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z \frac{\partial w_0(x, y)}{\partial y} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w_0(x, y) \end{aligned} \quad (5.1)$$

donde u, v son las componentes de desplazamiento en el plano (xy) , w es el desplazamiento en la dirección z , el cual coincide con los desplazamientos transversales de los puntos ubicados en el plano medio de la placa (w_0), y ϕ_x y ϕ_y son las rotaciones de las secciones normales alrededor de los ejes y y x respectivamente.

Reemplazando las expresiones de la Ec. (5.1) en las correspondientes al tensor de pequeñas deformaciones, se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \begin{Bmatrix} \phi_y \\ \phi_x \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.3 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones que gobiernan el problema se derivan a partir de la versión dinámica del Principio de los Trabajos Virtuales (Ec. 3.6). Las expresiones de la energía virtual de deformación δU , del trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas δV y de la energía virtual cinética δK , se desarrollan a continuación.

La energía virtual de deformación δU está dada por:

$$\delta U = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}] dz \right\} dxdy \quad (5.3)$$

Reemplazando las expresiones correspondientes de la Ec. (5.2), la Ec. (5.3) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xx} z \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + \right. \\ \left. + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left(-2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \right. \\ \left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \left\} dxdy \end{aligned} \quad (5.4)$$

O bien, en función de las fuerzas y momentos resultantes, la Ec. (5.4) resulta:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_R \left\{ M_{xx} \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + M_{yy} \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + M_{xy} \left(-2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\ \left. + P_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + P_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} + P_{xy} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + R_x \delta \phi_x + R_y \delta \phi_y \right\} dxdy \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde

$$\begin{Bmatrix} M_{\alpha\beta} \\ P_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\alpha\beta} \begin{Bmatrix} z \\ \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \end{Bmatrix} dz \quad \text{y} \quad R_\alpha = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\alpha z} \left(\frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) dz \quad (5.6)$$

donde α, β toman los símbolos x, y indistintamente.

El trabajo virtual δV realizado por las fuerzas externas aplicadas, está dado por:

$$\begin{aligned} \delta V = - \int_R q \delta w_0 dxdy - \int_\Gamma \int_{-h/2}^{h/2} \left[\hat{\sigma}_{nm} \left(-z \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \phi_n \right) + \right. \\ \left. + \hat{\tau}_{ns} \left(-z \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \phi_s \right) + \hat{\tau}_{nz} \delta w_0 \right] dz ds \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde Γ es la parte del contorno de la placa donde se especifican las fuerzas, $(\hat{\sigma}_{nm}, \hat{\tau}_{ns}, \hat{\tau}_{nz})$ son las componentes de tensión especificadas en Γ .

Análogamente, la Ec. (5.7) se puede escribir en función de los momentos y de las fuerzas resultantes como:

$$\delta V = - \int_R q(x,y) \delta w_0 dx dy - \int_\Gamma \left(-\hat{M}_{mn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \hat{P}_{mn} \delta \phi_n - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{P}_{ns} \delta \phi_s + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) d\Gamma \quad (5.8)$$

donde n,s representan las direcciones tangenciales y normales al contorno del laminado (ver Figura 3.2) y la fuerza cortante resultante transversal está dada por

$$\hat{Q}_n = \int_{-h/2}^{h/2} \hat{\tau}_{nz} dz \quad (5.9)$$

La energía virtual cinética δK está dada por

$$\delta K = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho [\dot{u} \delta \dot{u} + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}] dz dx dy \quad (5.10)$$

Reemplazando en la Ec. (5.10) las Ecs. (5.1) del campo de desplazamiento, se obtiene:

$$\delta K = \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\left(-z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + \text{sen} \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_x \right) \left(-z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \text{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_x \right) + \left(-z \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + \text{sen} \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_y \right) \left(-z \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \text{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_y \right) + \dot{w}_0 \delta \dot{w}_0 \right] dz dx dy \quad (5.11)$$

Si se realiza en la expresión anterior (Ec. 5.11) la integración a lo largo del eje z , se obtiene:

$$\delta K = \int_R \left[(I_0 \dot{w}_0) \delta \dot{w}_0 + \left(I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} - I_3 \dot{\phi}_x \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} + \left(I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} - I_3 \dot{\phi}_y \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} + \left(-I_3 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + I_4 \dot{\phi}_x \right) \delta \dot{\phi}_x + \left(-I_3 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + I_4 \dot{\phi}_y \right) \delta \dot{\phi}_y \right] dx dy \quad (5.12)$$

donde las inercias están dadas por:

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \begin{Bmatrix} 1 \\ z^2 \\ z \text{sen} \frac{\pi z}{h} \\ \text{sen}^2 \frac{\pi z}{h} \end{Bmatrix} dz \quad (5.13)$$

Sustituyendo las Ec. (5.5), (5.8) y (5.12) en la expresión del PTV de la Ec. (3.6) se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_R \left\{ M_{xx} \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x^2} \right) + M_{yy} \left(-\frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial y^2} \right) + M_{xy} \left(-2 \frac{\partial^2 \delta w_0}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + P_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} + P_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} + P_{xy} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + R_x \delta \phi_x + R_y \delta \phi_y \\
& - q \delta w_0 - (I_0 \dot{w}_0) \delta \dot{w}_0 - \left(I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} - I_3 \dot{\phi}_x \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial x} - \left(I_2 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} - I_3 \dot{\phi}_y \right) \frac{\partial \delta \dot{w}_0}{\partial y} \\
& \left. - \left(-I_3 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial x} + I_4 \dot{\phi}_x \right) \delta \dot{\phi}_x - \left(-I_3 \frac{\partial \dot{w}_0}{\partial y} + I_4 \dot{\phi}_y \right) \delta \dot{\phi}_y \right\} dx dy dt \\
& - \int_0^T \int_{\Gamma} \left(-\hat{M}_{nm} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \hat{P}_{nm} \delta \phi_n - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{P}_{ns} \delta \phi_s + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) d\Gamma dt = 0
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Integrando por partes la Ec. (5.14) y aplicando el lema fundamental del cálculo variacional, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^T \int_R \left\{ -M_{xx,xx} \delta w_0 - M_{yy,yy} \delta w_0 - 2M_{xy,xy} \delta w_0 \right. \\
& - P_{xx,x} \delta \phi_x - P_{yy,y} \delta \phi_y - P_{xy,y} \delta \phi_x - P_{xy,x} \delta \phi_y + R_x \delta \phi_x + R_y \delta \phi_y \\
& - q \delta w_0 + I_0 \ddot{w}_0 \delta w_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} \delta w_0 + I_3 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} \delta w_0 - I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} \delta w_0 + I_3 \frac{\partial \ddot{\phi}_y}{\partial y} \delta w_0 \\
& \left. - I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \delta \phi_x + I_4 \ddot{\phi}_x \delta \phi_x - I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \delta \phi_y + I_4 \ddot{\phi}_y \delta \phi_y \right\} dx dy dt + \\
& + \int_0^T \oint_{\Gamma} \left(-M_{xx} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} n_x + M_{xx,x} \delta w_0 n_x - M_{yy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} n_y + M_{yy,y} \delta w_0 n_y \right. \\
& - M_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} n_x + M_{xy,x} \delta w_0 n_y - M_{xy} \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} n_y + M_{xy,y} \delta w_0 n_x + P_{xx} \delta \phi_x n_x + P_{yy} \delta \phi_y n_y \\
& \left. + P_{xy} \delta \phi_x n_y + P_{xy} \delta \phi_y n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} \delta w_0 n_x - I_3 \ddot{\phi}_x \delta w_0 n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} \delta w_0 n_y - I_3 \ddot{\phi}_y \delta w_0 n_y \right) ds \\
& - \int_0^T \int_{\Gamma} \left(-\hat{M}_{nm} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \hat{P}_{nm} \delta \phi_n - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{P}_{ns} \delta \phi_s + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) d\Gamma dt = 0
\end{aligned} \tag{5.15}$$

donde n_x, n_y son las componentes del versor normal al contorno de la placa.

Agrupando los términos que tienen como factor común los distintos desplazamientos virtuales se puede escribir:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_0^T \int_R \left[- \left(M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} + q - I_0 \ddot{w}_0 + \right. \right. \\
 & + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial x^2} + I_2 \frac{\partial^2 \ddot{w}_0}{\partial y^2} - I_3 \frac{\partial \ddot{\phi}_x}{\partial x} - I_3 \frac{\partial \ddot{\phi}_y}{\partial y} \left. \right) \delta w_0 \\
 & - \left(P_{xx,x} + P_{xy,y} - R_x + I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} - I_4 \ddot{\phi}_x \right) \delta \phi_x \\
 & - \left(P_{yy,y} + P_{xy,x} - R_y + I_3 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} - I_4 \ddot{\phi}_y \right) \delta \phi_y \Big] dx dy dt + \\
 & + \int_0^T \oint_{\Gamma} \left[\left(M_{xx,x} n_x + M_{yy,y} n_y + M_{xy,x} n_y + M_{xy,y} n_x + \right. \right. \\
 & + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y - I_3 \ddot{\phi}_x n_x - I_3 \ddot{\phi}_y n_y \left. \right) \delta w_0 \\
 & - \left(M_{xx} n_x + M_{xy} n_y \right) \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} - \left(M_{yy} n_y + M_{xy} n_x \right) \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \\
 & + \left(P_{xx} n_x + P_{xy} n_y \right) \delta \phi_x + \left(P_{yy} n_y + P_{xy} n_x \right) \delta \phi_y \Big] ds dt \\
 & - \int_0^T \int_{\Gamma} \left(- \hat{M}_{nn} \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} + \hat{P}_{nn} \delta \phi_n - \hat{M}_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \hat{P}_{ns} \delta \phi_s + \hat{Q}_n \delta w_0 \right) d\Gamma dt \tag{5.16}
 \end{aligned}$$

Anulando separadamente los coeficientes de δw_0 , $\delta \phi_x$, $\delta \phi_y$ en la superficie R , se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q &= I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) - I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \\
 \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - R_x &= -I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w_0}{\partial x} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} - R_y &= -I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + I_4 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \tag{5.17}
 \end{aligned}$$

Las condiciones de borde se obtienen a partir de la Ec. (5.16). Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial w_0}{\partial x} &= n_x \frac{\partial w_0}{\partial n} - n_y \frac{\partial w_0}{\partial s} \\
 \frac{\partial w_0}{\partial y} &= n_y \frac{\partial w_0}{\partial n} + n_x \frac{\partial w_0}{\partial s} \tag{5.18} \\
 \phi_x &= n_x \phi_n - n_y \phi_s \\
 \phi_y &= n_y \phi_n + n_x \phi_s
 \end{aligned}$$

se pueden reescribir las expresiones de los bordes de Ec. (5.16) en términos de

$\frac{\partial \delta w_0}{\partial n}$, $\frac{\partial \delta w_0}{\partial s}$, $\delta \phi_n$, $\delta \phi_s$ como:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^T \oint_{\Gamma} \left[(M_{xx,x} n_x + M_{yy,y} n_y + M_{xy,x} n_y + M_{xy,y} n_x + \right. \\
& + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y - I_3 \ddot{\phi}_x n_x - I_3 \ddot{\phi}_y n_y - \hat{Q}_n) \delta w_0 \\
& - (M_{nn} + \hat{M}_{nn}) \frac{\partial \delta w_0}{\partial n} - (M_{ns} + \hat{M}_{ns}) \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} + \\
& \left. + (P_{nn} + \hat{P}_{nn}) \delta \phi_n + (P_{ns} + \hat{P}_{ns}) \delta \phi_s \right] ds dt
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Las condiciones de borde naturales están dadas por:

$$\begin{aligned}
Q_n - \hat{Q}_n &= 0 \\
M_{nn} - \hat{M}_{nn} &= 0 \\
M_{ns} + \hat{M}_{ns} &= 0 \\
P_{nn} + \hat{P}_{nn} &= 0 \\
P_{ns} + \hat{P}_{ns} &= 0
\end{aligned} \tag{5.20}$$

donde

$$Q_n = M_{xx,x} n_x + M_{yy,y} n_y + M_{xy,x} n_y + M_{xy,y} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial x} n_x + I_2 \frac{\partial \ddot{w}_0}{\partial y} n_y - I_3 \ddot{\phi}_x n_x - I_3 \ddot{\phi}_y n_y$$

Como $\oint_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial \delta w_0}{\partial s} ds = \oint \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \delta w_0 ds - [M_{ns} \delta w_0]_{\Gamma}$ y $[M_{ns} \delta w_0]_{\Gamma} = 0$ para una curva

cerrada, entonces $\frac{\partial M_{ns}}{\partial s} + Q_n = V_n$, con lo cual las variables primarias para esta teoría

son:

$$w_0, \frac{\partial w_0}{\partial n}, \phi_n, \phi_s \tag{5.21}$$

y las variables secundarias son:

$$V_n, M_{nn}, P_{nn}, P_{ns} \tag{5.22}$$

5.4 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS ESTÁTICO

Reemplazando las Ecs. (5.5) y (5.8) en la Ec. (3.6) del principio de los trabajos virtuales y suponiendo las variables independientes del tiempo para el análisis de cargas cuasi-estáticas, resulta:

$$\begin{aligned}
 0 = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} z \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left(-2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \right. \right. \\
 \left. \left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \right\} dx dy - \int_R q(x, y) \delta w dx dy
 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Reemplazando en la expresión del P.T.V dada por la Ec. (5.23) las relaciones constitutivas dadas por Ec. (4.21) y escribiendo las deformaciones en términos de los desplazamientos, según las relaciones dadas por Ec. (5.3), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 0 = \int_R \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} \left[\bar{Q}_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{11} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{12} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \bar{Q}_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{16} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \right. \\
 \left. + \left[\bar{Q}_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{12} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{22} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \bar{Q}_{26} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{26} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \right. \\
 \left. + \left[\bar{Q}_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{16} z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bar{Q}_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{26} z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \right. \\
 \left. \left. + \bar{Q}_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - \bar{Q}_{66} 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} - 2z \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \\
 \left. + \left(\bar{Q}_{45} \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \bar{Q}_{55} \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \right. \\
 \left. + \left(\bar{Q}_{44} \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \bar{Q}_{45} \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right) \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz \Big\} dx dy - \int_R q(x, y) \delta w dx dy
 \end{aligned} \quad (5.24)$$

Integrando a lo largo del eje z , se llega a:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_R \left[A1_{11}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + A1_{12}^S \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + A1_{16}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) \right. \\
& + A1_{12}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + A1_{22}^S \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + A1_{26}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) \\
& + A1_{16}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + A1_{26}^S \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \\
& \left. + A1_{66}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
& + \int_R \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + 2D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \right. \\
& + D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + 2D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \\
& \left. + 2D_{16} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + 2D_{26} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \\
& - \int_R \left[B_{11}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + B_{12}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) + 2B_{16}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \right) \right. \\
& + B_{12}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + B_{22}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) + 2B_{26}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \right) \\
& + B_{16}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + B_{26}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \\
& \left. + 2B_{66}^S \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) \right] dx dy \\
& - \int_R \left[B_{11}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^S \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{16}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + B_{12}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right. \\
& + B_{22}^S \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + B_{26}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + 2B_{16}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + 2B_{26}^S \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \\
& \left. + 2B_{66}^S \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] dx dy \\
& + \int_R \left[A2_{44}^S (\phi_y) (\delta \phi_y) + A2_{45}^S (\phi_y) (\delta \phi_x) + A2_{45}^S (\phi_x) (\delta \phi_y) + A2_{55}^S (\phi_x) (\delta \phi_x) \right] dx dy \\
& - \int_R q(x, y) \delta w dx dy
\end{aligned} \tag{5.25}$$

donde las distintas rigideces están dadas por:

$$\begin{aligned}
 A1_{ij}^S &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \sin^2 \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz, & A2_{ij}^S &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \cos^2 \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz \\
 B_{ij}^S &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right) dz, & D_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} z^2 dz
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

La Ec. (5.25) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_R \left[\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} A1_{11}^S & A1_{12}^S & A1_{16}^S \\ A1_{12}^S & A1_{22}^S & A1_{26}^S \\ A1_{16}^S & A1_{26}^S & A1_{66}^S \end{bmatrix} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T dx dy \\
 &+ \int_R \left[\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \quad \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]^T dx dy \\
 &- \int_R \left[\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \quad \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) \right] \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{bmatrix} \left[\frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right]^T dx dy \\
 &- \int_R \left[\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \quad \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right] \begin{bmatrix} B_{11}^S & B_{12}^S & B_{16}^S \\ B_{12}^S & B_{22}^S & B_{26}^S \\ B_{16}^S & B_{26}^S & B_{66}^S \end{bmatrix} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \right]^T dx dy \\
 &+ \int_R \left[\delta \phi_y \quad \delta \phi_x \right] \begin{bmatrix} A2_{44}^S & A2_{45}^S \\ A2_{45}^S & A2_{55}^S \end{bmatrix} \left[\phi_y \quad \phi_x \right]^T dx dy - \int_R q(x, y) \delta w dx dy \tag{5.27}
 \end{aligned}$$

Para mayor claridad en el desarrollo, se escriben aquí nuevamente las expresiones de aproximación adoptadas para las funciones incógnitas $w_0 (= w)$, ϕ_x , ϕ_y que se encuentran ya descritas en el Capítulo 4. Éstas se aproximan con funciones de forma admisibles que pueden escribirse como el producto de las funciones de forma por los desplazamientos generalizados respectivos. Así, en las coordenadas naturales ξ, η se tiene:

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) &= \{N^w(\xi, \eta)\}^T \{c^w\} \\
 \phi_x(\xi, \eta) &= \{N^\phi(\xi, \eta)\}^T \{c^{\phi_x}\} \\
 \phi_y(\xi, \eta) &= \{N^\phi(\xi, \eta)\}^T \{c^{\phi_y}\}
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Retomando la Ec. (3.34) y la Ec. (3.41) correspondientes al mapeo de espacios, se pueden definir las siguientes expresiones relacionadas con las funciones de forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A1} &= \frac{J_{22}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \eta}, & \mathbf{A2} &= -\frac{J_{21}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|J|} \frac{\partial \mathbf{N}^\phi}{\partial \eta} \\
 \mathbf{A3} &= a'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} + a'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} - a'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 a'_i \left(\alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\
 \mathbf{A4} &= b'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} + b'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} - b'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} + \sum_{i=1}^3 b'_i \left(\alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right) \\
 \mathbf{A5} &= -c'_1 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi^2} - c'_2 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \eta^2} + c'_3 \frac{\partial^2 \mathbf{N}^w}{\partial \xi \partial \eta} - \sum_{i=1}^3 c'_i \left(\alpha'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \beta'_i \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \right)
 \end{aligned} \tag{5.29}$$

Reemplazando en la Ec. (5.27) los desplazamientos por las funciones de aproximación, dadas por Ec. (5.28), y aplicando las Ecs. (5.29) resulta:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}^w & \delta \mathbf{c}^{\phi x} & \delta \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A1_{ij}^S \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}^w & \delta \mathbf{c}^{\phi x} & \delta \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{ij} \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & 0 & 0 \\ \mathbf{A4} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{A5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}^w & \delta \mathbf{c}^{\phi x} & \delta \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_{ij}^S \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}^w & \delta \mathbf{c}^{\phi x} & \delta \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -B_{ij}^S \end{bmatrix}_{3 \times 3} \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & 0 & 0 \\ \mathbf{A4} & 0 & 0 \\ 2\mathbf{A5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 &+ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}^w & \delta \mathbf{c}^{\phi x} & \delta \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^\phi \\ \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A2_{ij}^S \end{bmatrix}_{2 \times 2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mathbf{N}^\phi \\ 0 & \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}^w \\ \mathbf{c}^{\phi x} \\ \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \\
 &- q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} \delta \mathbf{c}^w & \delta \mathbf{c}^{\phi x} & \delta \mathbf{c}^{\phi y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}^w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

Si se cancelan los vectores de desplazamientos nodales virtuales, la Ec. (5.30) puede escribirse en forma compacta como:

$$[K^E]\{c^E\} = \{F^E\} \quad (5.31)$$

La Ec. (5.31) es la ecuación matricial del análisis de flexión por carga transversal, que define la relación entre las cargas actuantes y los desplazamientos originados. De aquí se obtiene $[K^E]$ que es la matriz de rigidez del macro elemento mapeado según la TSDT y está dada por:

$$[K^E] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left([B1][A1^S][B1]^T + [B3][D][B3]^T + [B3][-B^S][B1]^T + [B1][-B^S][B3]^T + [B2][A2^S][B2]^T \right) |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.32)$$

donde:

$$[B1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{A1} & 0 & \mathbf{A2} \\ 0 & \mathbf{A2} & \mathbf{A1} \end{bmatrix}, [B2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}^\phi \\ \mathbf{N}^\phi & 0 \end{bmatrix}, [B3] = \begin{bmatrix} \mathbf{A3} & \mathbf{A4} & 2\mathbf{A5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

y el vector de fuerzas está dado por

$$\{F^E\} = q \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [N^w] |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (5.34)$$

Si se aplican las condiciones de contorno correspondientes, la resolución del sistema de Ecs. (5.31) permite obtener los vectores $\{c^{wE}\}, \{c^{\phi x E}\}, \{c^{\phi y E}\}$, que reemplazados en la Ec. (5.28) y haciendo la transformación inversa de coordenadas, permite encontrar el valor de los desplazamientos y de los giros en cualquier punto (x, y) de la superficie de la placa, o reconstruir totalmente la deformada de una placa laminada, tomada como un macro elemento único.

5.5 ECUACIONES PARA EL ANÁLISIS DINÁMICO

Reemplazando en la Ec. (3.6) del PTV, las Ecs. (5.5) y (5.12) y asumiendo nulas las cargas externas, se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \int_0^T \left\{ \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_{xx} z \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) + \sigma_{xx} \frac{\partial \delta \phi_x}{\partial x} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \sigma_{yy} z \left(-\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) + \right. \right. \\
& + \sigma_{yy} \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial y} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} + \tau_{xy} z \left(-2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \left(\frac{\partial \delta \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \phi_y}{\partial x} \right) + \\
& \left. + \tau_{xz} \delta \phi_x \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} + \tau_{yz} \delta \phi_y \frac{\pi}{h} \cos \frac{\pi z}{h} \right] dz dx dy \quad (5.35) \\
& - \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \rho \left[\left(-z \frac{\partial \dot{w}}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_x \right) \left(-z \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_x \right) + \right. \\
& \left. + \left(-z \frac{\partial \dot{w}}{\partial y} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \dot{\phi}_y \right) \left(-z \frac{\partial \delta \dot{w}}{\partial y} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \dot{\phi}_y \right) + \dot{w} \delta \dot{w} \right] dz dx dy \Big\} dt
\end{aligned}$$

A partir del desarrollo realizado en la sección anterior, el primer término de la Ec. (5.35) puede escribirse como: $\{\delta c^E\} [K^E] \{c^E\}$. A continuación se asume que los desplazamientos son periódicos en el tiempo y se llama ω a la frecuencia natural de vibración de la placa. Considerando la energía cinética máxima correspondiente a un ciclo vibratorio y teniendo en cuenta las aproximaciones dadas por Ecs. (5.28), la Ec. (5.35) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
0 = & \{\delta c^E\} [K^E] \{c^E\} \\
& - \int_R \int_{-h/2}^{h/2} \omega^2 \rho \left[\left(-z \frac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \phi_x \right) \left(-z \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \phi_x \right) + \right. \quad (5.36) \\
& \left. + \left(-z \frac{\partial w}{\partial y} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \phi_y \right) \left(-z \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \operatorname{sen} \frac{\pi z}{h} \delta \phi_y \right) + w \delta w \right] dz dx dy
\end{aligned}$$

Integrando a lo largo del espesor el segundo término de la Ec. (5.36) se obtiene:

$$\begin{aligned}
0 = & \{\delta c^E\} [K^E] \{c^E\} \\
& - \int_R \omega^2 \rho \left[\frac{h^3}{12} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} - \frac{2h^2}{\pi^2} \frac{\partial w}{\partial x} \delta \phi_x - \frac{2h^2}{\pi^2} \phi_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{h}{2} \phi_x \delta \phi_x + \right. \quad (5.37) \\
& \left. + \frac{h^3}{12} \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} - \frac{2h^2}{\pi^2} \frac{\partial w}{\partial y} \delta \phi_y - \frac{2h^2}{\pi^2} \phi_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{h}{2} \phi_y \delta \phi_y + h w \delta w \right] dx dy
\end{aligned}$$

Usando las aproximaciones de los desplazamientos en coordenadas naturales, dadas por Ec. (5.28), la Ec. (5.37) se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 0 &= \{\delta c^E\} [K^E] \{c^E\} \\
 &- \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \omega^2 \rho h \left[\{\delta c^w\} \left\{ \{N^w\} \{N^w\} + \frac{h^2}{12} \mathbf{A1}' \mathbf{A1}' + \frac{h^2}{12} \mathbf{A2}' \mathbf{A2}' \right\} \{c^w\} \right. \\
 &+ \{\delta c^w\} \left\{ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{A1}' \{N^\phi\} \right\} \{c^{\phi x}\} + \{\delta c^w\} \left\{ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{A2}' \{N^\phi\} \right\} \{c^{\phi y}\} + \\
 &+ \{\delta c^{\phi x}\} \left\{ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{A1}' \{N^\phi\} \right\} \{c^w\} + \{\delta c^{\phi x}\} \left\{ \frac{1}{2} \{N^\phi\} \{N^\phi\} \right\} \{c^{\phi x}\} + 0 + \\
 &+ \{\delta c^{\phi y}\} \left\{ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{A2}' \{N^\phi\} \right\} \{c^w\} + 0 + \{\delta c^{\phi y}\} \left\{ \frac{1}{2} \{N^\phi\} \{N^\phi\} \right\} \{c^{\phi y}\} \Big] |\mathbf{J}| d\xi d\eta
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

con las siguientes expresiones relacionadas con las funciones de forma, análogas a los de Ecs. (5.29):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A1}' &= \frac{J_{22}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} - \frac{J_{12}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta} \\
 \mathbf{A2}' &= -\frac{J_{21}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \xi} + \frac{J_{11}}{|\mathbf{J}|} \frac{\partial \mathbf{N}^w}{\partial \eta}
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

El segundo término de la Ec. (5.38) se puede escribir en forma matricial como:

$$\begin{aligned}
 0 &= \{\delta c^E\} [K^E] \{c^E\} \\
 &- \omega^2 \rho h \{\delta c\} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}^w)^2 + \frac{h^2}{12} [(\mathbf{A1}')^2 + (\mathbf{A2}')^2] & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 & 0 \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' & 0 & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \{c\}
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Cancelando los desplazamientos nodales virtuales, la Ec. (5.40) resulta:

$$\{[K^E] - \omega^2 [M^E]\} \{c^E\} = 0 \tag{5.41}$$

donde $[M^E]$ es la matriz de masa en coordenadas naturales dada por:

$$[M^E] = \rho h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (\mathbf{N}^w)^2 + \frac{h^2}{12} [(\mathbf{A1}')^2 + (\mathbf{A2}')^2] & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A1}' & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 & 0 \\ -\frac{2h}{\pi^2} \mathbf{N}^\phi \mathbf{A2}' & 0 & \frac{1}{2} (\mathbf{N}^\phi)^2 \end{bmatrix} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \tag{5.42}$$

5.6 FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

El campo de desplazamientos se aproxima, como se escribe en las Ecs. (5.28), con conjuntos de polinomios expresados en coordenadas naturales. Estos conjuntos, como se explicó en los Capítulos 3 y 4, tienen como primeros términos a los polinomios de Hermite y como términos de enriquecimiento a los polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. Para la aproximación del campo de desplazamientos de la TSDT, resulta útil recordar los primeros polinomios adoptados para las teorías CLPT y FSDT de los capítulos precedentes. Por una parte, los polinomios de Hermite considerados en la formulación del macro elemento a partir de la CLPT son los dados en el Capítulo 3, y se transcriben a continuación para mayor claridad:

$$\begin{aligned}
 p_1(\xi) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\xi + \frac{1}{4}\xi^3 & q_1(\eta) &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\eta + \frac{1}{4}\eta^3 \\
 p_2(\xi) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi - \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 & q_2(\eta) &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta - \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3 \\
 p_3(\xi) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\xi - \frac{1}{4}\xi^3 & q_3(\eta) &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\eta^3 \\
 p_4(\xi) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\xi + \frac{1}{8}\xi^2 + \frac{1}{8}\xi^3 & q_4(\eta) &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\eta + \frac{1}{8}\eta^2 + \frac{1}{8}\eta^3
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Mientras que, en la formulación obtenida considerando la teoría FSDT, los polinomios de Hermite (Capítulo 4) están dados por:

$$\begin{aligned}
 p_1(\xi) &= -\frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} & q_1(\eta) &= -\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2} \\
 p_2(\xi) &= \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2} & q_2(\eta) &= \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Por otra parte, los primeros polinomios de Gram-Schmidt para la generación de los polinomios ortogonales de enriquecimiento están dados respectivamente por:

$$p_5(\xi) = 1 - 2\xi^2 + \xi^4 \quad (\text{CLPT}) \tag{5.45}$$

y:

$$p_3(\xi) = -1 + \xi^2 \quad (\text{FSDT}) \tag{5.46}$$

El campo de desplazamientos de la TSDT se aproxima usando los polinomios empleados en el Capítulo 3 (CLPT) para las deflexiones w , y los del Capítulo 4 (FSDT) en la aproximación de los giros ϕ_x, ϕ_y . Esta selección se debe a las variables primarias

del problema: $w, \partial w / \partial n, \phi_n, \phi_s$, que requieren, por parte de las funciones de forma de soporte local valores no nulos para la función w y para su primera derivada en los extremos del elemento; mientras que para garantizar el aporte de desplazamientos sólo en los puntos internos de la superficie del elemento, los polinomios de enriquecimiento y sus derivadas primeras deben ser nulos cuando son evaluados en los extremos.

Para la aproximación de los giros ϕ_x, ϕ_y se usan en cambio, los polinomios lineales clásicos de Hermite, y el polinomio más simple y de menor grado para la generación del conjunto de funciones de enriquecimiento de Gram-Schmidt, es decir, aquel que verifique nulidad en los bordes del elemento.

5.7 ENSAMBLAJE Y ECUACIONES GLOBALES

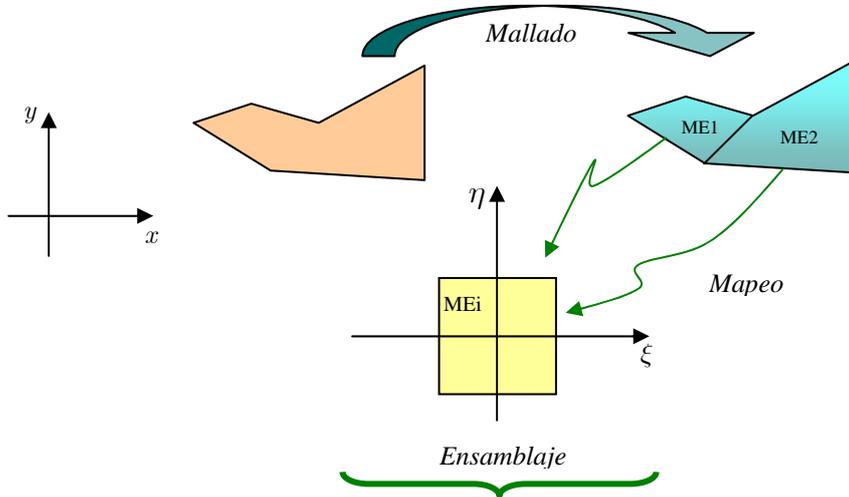
En cuanto al ensamblaje de los macro elementos propuestos, el procedimiento es análogo a lo detallado en los Capítulos anteriores. Los macro elementos generados con el uso de esta teoría de orden superior se ensamblan siguiendo las pautas ya vistas. Teniendo en cuenta lo expuesto en la sección precedente, el ensamblaje se lleva a cabo igualando las variables primarias de dos macro elementos adyacentes, como se ilustra esquemáticamente en la Figura 5.2. De esta manera se arriba a las ecuaciones globales que resuelven los problemas estático y de vibraciones libres, dados respectivamente por:

$$[K^G]\{c^G\} = [F^G] \quad (5.47)$$

$$\{[K^G] - \omega^2 [M^G]\}\{c^G\} = \{0\} \quad (5.48)$$

donde $[K^G]$ es la matriz de rigidez global de la estructura ensamblada, $[M^G]$ es su matriz de masa, $[F^G]$ es el vector de fuerzas aplicado sobre toda la estructura y $\{c^G\}$ es el vector global de desplazamientos nodales generalizados, que, a partir de correctos vectores de indexación permite obtener los $\{c^E\}$ de cada macro elemento de la malla adoptada. A su vez, cada $\{c^E\}$ está formado por sub-vectores $\{c^w\}, \{c^{\phi_x}\}, \{c^{\phi_y}\}$ que reemplazados en las expresiones de la Ec. (5.28), permiten obtener las funciones de desplazamientos, de todo el dominio del macro elemento. Mediante el reemplazo de las coordenadas de cualquier punto de la placa en las funciones de desplazamiento, es posible obtener la deflexión o los giros de dicho punto, así como también los esfuerzos

característicos. Usando las relaciones entre deformaciones y tensiones de la teoría empleada, es posible calcular las tensiones en cualquier punto del plano de la placa y la variación de éstas a lo largo del espesor.



Grados de libertad				
Nodales (N)	w		$c_{11}^w, c_{13}^w, c_{31}^w, c_{33}^w$	
	$\partial w / \partial \xi$		$c_{21}^w, c_{23}^w, c_{41}^w, c_{43}^w$	
	$\partial w / \partial \eta$		$c_{12}^w, c_{14}^w, c_{32}^w, c_{34}^w$	
	$\phi_{\bullet} (\bullet = x, y)$		$c_{11}^{\phi_{\bullet}}, c_{12}^{\phi_{\bullet}}, c_{21}^{\phi_{\bullet}}, c_{22}^{\phi_{\bullet}}$	
Borde (B)	$\parallel \xi$	w	c_{ij}^w	$i = 1 \dots m$
		$\partial w / \partial \eta$	$c_{i(j+1)}^w$	$j = 1, 3$
		$\phi_{\bullet} (\bullet = x, y)$	$c_{ij}^{\phi_{\bullet}}$	$i = 1 \dots m$
	$\parallel \eta$	w	c_{ij}^w	$i = 1, 3$
		$\partial w / \partial \xi$	$c_{(i+1)j}^w$	$j = 1 \dots n$
		$\phi_{\bullet} (\bullet = x, y)$	$c_{ij}^{\phi_{\bullet}}$	$i = 1, 2$
Internos (I)	$w, \partial w / \partial \xi, \partial w / \partial \eta$		c_{ij}^w	$i, j = 5 \dots, m, n$
	$\phi_{\bullet} (\bullet = x, y)$		$c_{ij}^{\phi_{\bullet}}$	$i, j = 3 \dots, m, n$

Figura 5.2. Esquema genérico para el armado de las matrices globales del sistema mecánico en coordenadas naturales (TSDT)

5.8 ESTUDIOS DE CONVERGENCIA Y VALIDACIÓN

La formulación presentada en esta sección ha sido implementada en un programa de computadora que permite trabajar con placas isótropas y anisótropas

(constituidas por una lámina única o laminados), con distintas combinaciones de condiciones de borde, así como también realizar el ensamblaje de dos o más macro elementos a fin de abarcar el análisis de placas con geometrías complejas.

En las sub-secciones siguientes se presentan estudios de convergencia y validación del modelo propuesto, comenzando con placas gruesas isótropas hasta llegar a placas laminadas. Se muestran también resultados obtenidos con la formulación propuesta considerando las teorías clásica, de primer orden y trigonométrica. Se incluyen comparaciones con resultados obtenidos mediante el empleo de elementos finitos sólidos tridimensionales.

5.8.1. PLACA ISÓTROPA

En primer lugar se adopta un caso simple, constituido por una placa isótropa cuadrada simplemente apoyada en todos sus lados. Se realiza un análisis estático y los resultados se comparan con la solución exacta provista por Reddy (1984), y con la solución obtenida por Ferreira et al. (2005), quienes emplearon un método basado en funciones multicuadráticas radiales. Se considera actuando sobre la placa una carga uniformemente distribuida de magnitud q . El módulo de elasticidad longitudinal del material E y el coeficiente de Poisson ν es 0.3. Los adimensionales de desplazamientos transversales \bar{w} y de tensión $\bar{\sigma}_{xx}$ empleados son:

$$\bar{w} = \frac{Eh^3 100w_{(a/2,a/2,0)}}{qa^4}, \quad \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_{xx(a/2,a/2,h/2)}h^2}{qa^2} \quad (5.49)$$

donde a es la magnitud del lado de la placa cuadrada.

En la Tabla 5.1 se comparan los resultados adimensionales (Ec. (5.49)) de desplazamiento y de tensión en el punto central de la placa isótropa, obtenidos con el macro elemento propuesto, usando teorías FSDT y TSDT. La cantidad de polinomios de Gram-Schmidt adoptada en la aproximación de las componentes del campo de desplazamientos es $m = n = 4$, observándose para todas las relaciones a/h que la formulación presentada muestra una muy buena precisión.

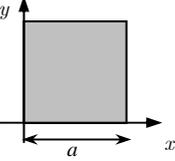
	a/h							
	10		20		50		100	
	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$	\bar{w}	$\bar{\sigma}_{xx}$
Macroelemento FSDT (m=4)	4.7877	0.2799	4.6093	0.2797	4.5691	0.2795	4.5684	0.2795
Macroelemento TSDT (m=4)	4.791	0.2762	4.625	0.2762	4.579	0.2762	4.572	0.2762
Exacta (Reddy, 1984)	4.791	0.2762	4.625	0.2762	4.579	0.2762	4.572	0.2762
Ferreira et al. (2005)	4.7883	0.2779	4.6158	0.2765	4.5781	0.2763	4.5715	0.2762

Tabla 5.1. Placa isótropa cuadrada SSSS sujeta a carga uniforme.

5.8.2. PLACAS ANISÓTROPAS

Para validar la metodología propuesta en el análisis de placas anisótropas, se presenta el estudio de convergencia de parámetros adimensionales de deflexiones centrales y frecuencias naturales de vibración, de una placa cuadrada ortótropa, empotrada en todo su contorno (CCCC), con relación de espesor $a/h = 10$. La placa consiste en una única lámina con fibras orientadas a 0° , de material $M1$, cuyas propiedades son:

$$M1: E_1 = 53.78GPa, E_2 = 17.93GPa, G_{12} = G_{13} = 8.96GPa, \\ G_{23} = 3.45GPa, \nu_{12} = 0.25$$

El estudio de convergencia se lleva a cabo incrementando el número de términos correspondiente a los polinomios de Gram-Schmidt (GS) utilizados para enriquecer las funciones de aproximación. En este caso, las deflexiones centrales y frecuencias de vibración adimensionales están dadas respectivamente por:

$$\bar{w} = 100 \left(\frac{E_2 h^3}{q a^4} \right) w_0, \quad \bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$$

En la Tabla 5.2 se muestran los valores adimensionales de la deflexión en el centro de la placa debida a una carga distribuida uniforme y los parámetros adimensionales de frecuencias correspondientes a los cuatro primeros modos de vibración libre, en función de la cantidad de polinomios GS empleados ($m = 2, 3, 4, 5$). Se incluye como valores de referencia los obtenidos con el programa comercial SAP 2000. Para la obtención de los valores de comparación de los ejemplos incluidos en este

Capítulo, con el programa SAP 2000, las placas en estudio se discretizan con una malla de 7200 elementos finitos sólidos 3D, como la que se muestra en la Figura 5.3.

Nº Polinomios GS	\bar{w}	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$
$m = 2$	1,074	0,166	0,298	0,435	0,532
$m = 3$	1,062	0,163	0,256	0,351	0,433
$m = 4$	1,024	0,161	0,251	0,345	0,390
$m = 5$	1,023	0,161	0,249	0,342	0,379
Valor referencia SAP	0,950	0,168	0,269	0,330	0,405

Tabla 5.2. Valores de deflexiones centrales y frecuencias en función de la cantidad de polinomios GS

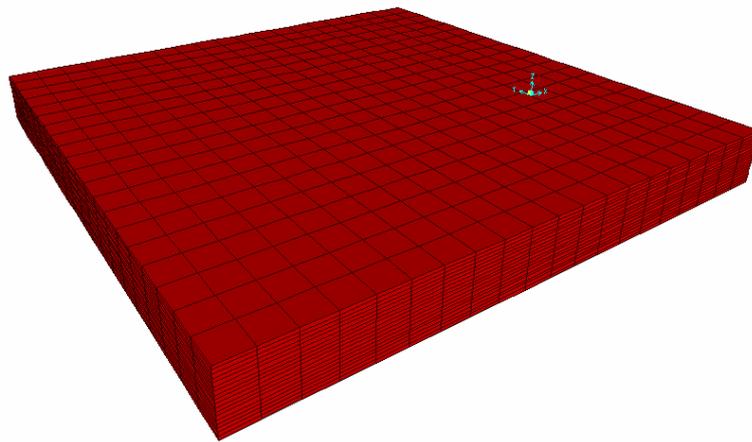


Figura 5.3. Mallado tipo de una placa con elementos finitos sólidos 3D en SAP 2000

En la Figura 5.4 se observan los gráficos de convergencia de los valores de la Tabla 5.2.

Adicionalmente, se presentan en la Tabla 5.3 los valores de frecuencias adimensionales y deflexión estática adimensional del centro de una placa cuadrada sometida a carga uniformemente distribuida. El material de la placa es considerado como isótropo y anisótropo, y en ambos casos la condición de contorno es SSSS y la relación de espesor $a/h = 10$. La placa isótropa tiene un coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, mientras que para las placas anisótropas se adoptan las propiedades elásticas correspondientes al material $M1$ previamente definido. En este último la placa está constituida por una única lámina con los ejes principales de ortotropía a 0° y a 45° respecto de los lados de la placa. En la Tabla 5.3 se incluyen además los valores de referencia obtenidos con el programa SAP 2000 con elementos finitos sólidos 3D.

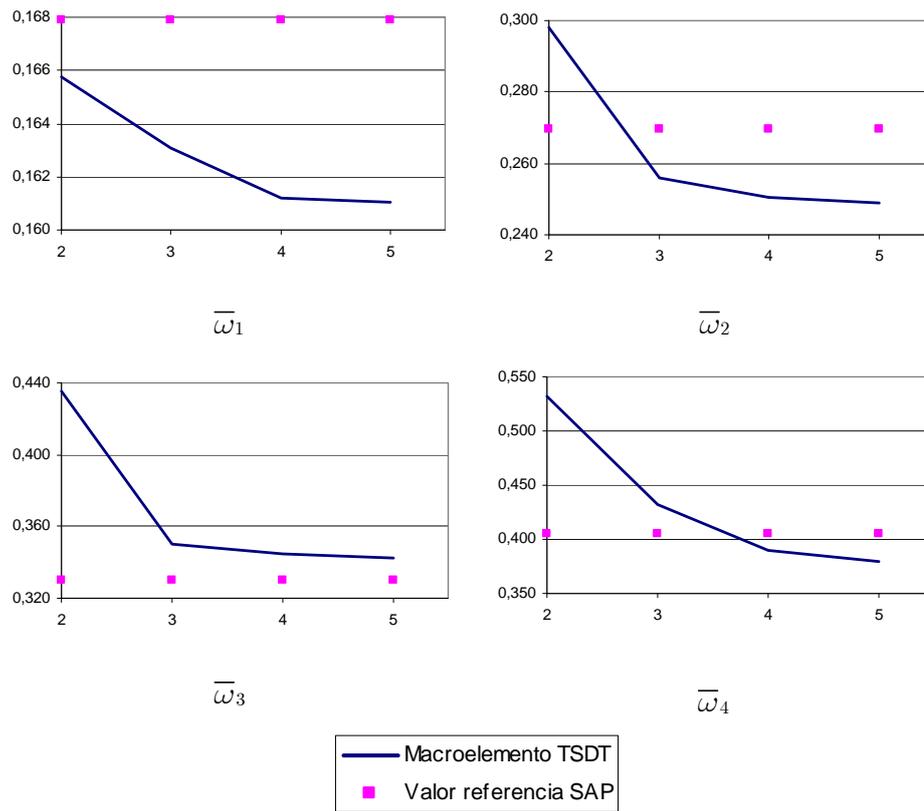


Figura 5.4. Valores de frecuencias $\bar{\omega}_i$ en función de la cantidad de polinomios GS

		\bar{w}	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_6$	$\bar{\omega}_7$	$\bar{\omega}_8$
Isótropa	Macroelemento	88,265	1,324	3,207	3,207	4,881	6,180	6,189	7,624	7,624
	Valor SAP	89,817	1,311	3,179	3,179	4,802	6,024	6,031	6,883	6,883
1 lámina 0°	Macroelemento	3,424	6,706	13,360	19,170	23,903	24,240	32,759	38,061	41,524
	Valor SAP	3,124	7,102	14,142	19,597	25,314	26,547	31,539	34,654	35,389
1 lámina 45°	Macroelemento	3,262	6,864	14,758	17,306	22,719	30,112	31,811	33,135	41,044
	Valor SAP	2,970	7,243	15,174	18,853	24,431	29,183	31,421	33,108	33,993

Tabla 5.3. Valores de deflexiones centrales y frecuencias para placas cuadradas SSSS

Para los tres casos presentados en la Tabla 5.3, en la Figura 5.5 se grafica la variación, a lo largo del espesor de la placa, de los dimensionales de las tensiones σ_{xx} , τ_{xz} y del desplazamiento u , dados por:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \frac{h^2}{qa^2}, \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \frac{h}{qa}, \quad \bar{u} = \frac{u}{hq}$$

La tensión σ_{xx} se evalúa en una sección ubicada en el punto central de la placa cuadrada $(a/2, a/2, z)$, la tensión τ_{xz} en la sección ubicada en el punto medio de uno de los lados de la placa $(0, a/2, z)$ y el desplazamiento u en el vértice $(0, 0, z)$. Se observa claramente que la TSDT captura correctamente la variación de los desplazamientos y de las tensiones tangenciales transversales, las magnitudes de las tensiones están influenciadas por el ángulo de orientación de la fibra de refuerzo, siendo mayor la magnitud de la tensión tangencial en el caso de la lámina a 0° .

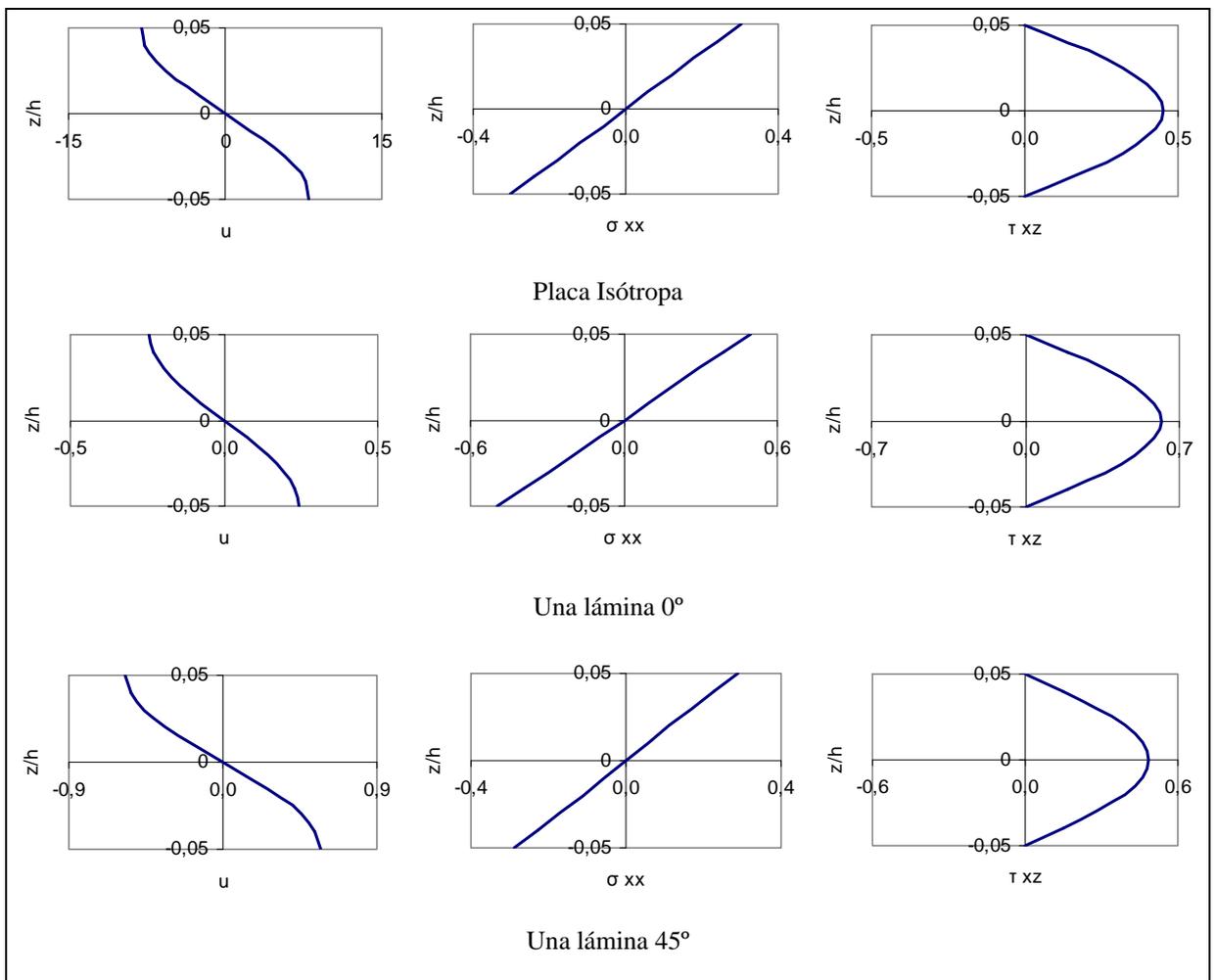


Figura 5.5. Variación de desplazamiento y tensiones en el espesor de la placa

En la Figura 5.6 se muestran las formas modales asociadas a las primeras ocho frecuencias de vibración tabuladas en la Tabla 5.3.

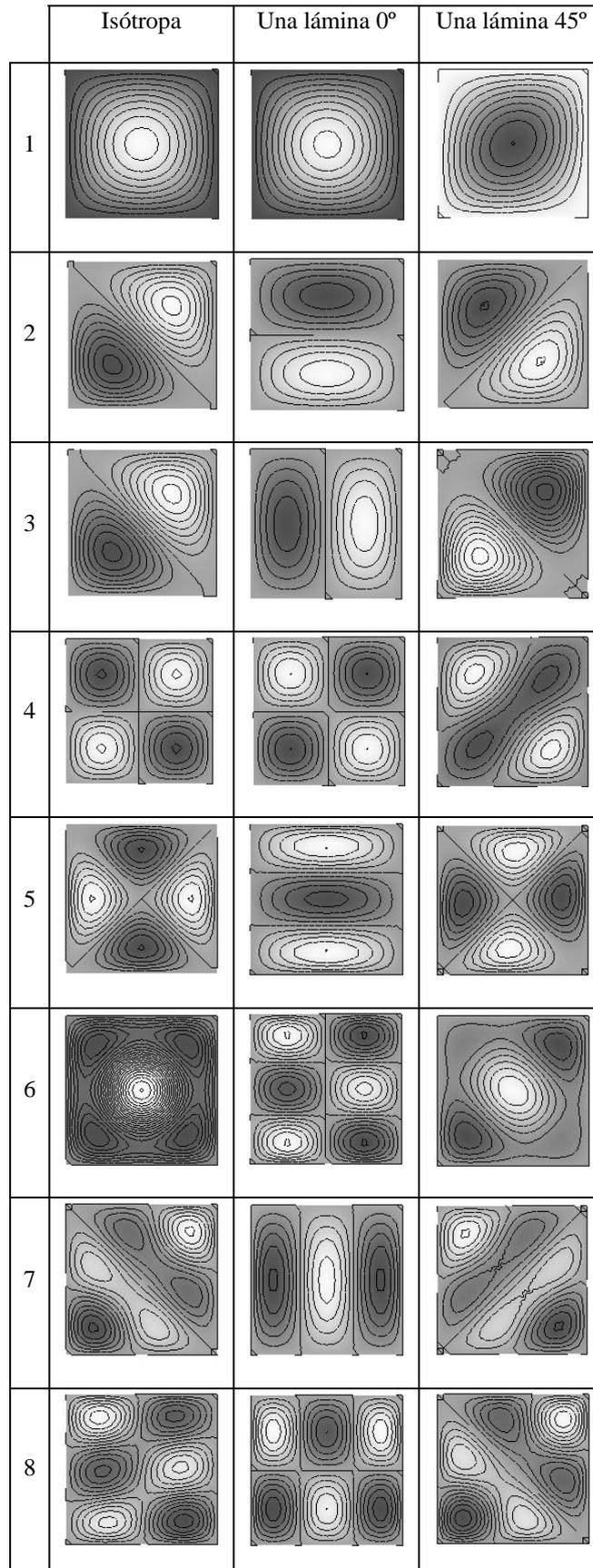


Figura 5.6. Formas modales para placas cuadradas SSSS

5.8.3. PLACAS LAMINADAS

En esta sección se presentan tres ejemplos en los que se aplica el modelo desarrollado en esta tesis a placas laminadas. El primero de ellos muestra un estudio de convergencia de frecuencias de vibración libre; el segundo, la comparación de adimensionales de deflexiones, momentos y cortes, obtenidos del análisis estático, y el tercero la comparación de deflexiones y frecuencias de vibración con los obtenidos usando elementos finitos sólidos 3D.

Ejemplo N°1: A continuación se lleva a cabo el estudio de convergencia y verificación realizado para la frecuencia fundamental de vibración correspondiente a una placa laminada cuadrada SSSS de cuatro capas, con esquema de laminación (0/90/90/0). Se plantean dos relaciones de espesor a/h y se listan los adimensionales de frecuencia para diversas relaciones de ortotropía E_1/E_2 . Se define el material $M2$, usado en este ejemplo, cuyas propiedades son:

$$M2: \quad E_1 = 40E_2, G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, G_{23} = 0.5E_2, \nu_{12} = 0.25$$

En la Tabla 5.4 se resumen los valores obtenidos para la primera frecuencia de vibración de la placa, usando desde dos polinomios de GS hasta cinco, y se muestran los valores de referencia de Liu et al. (2007) y los de Xiang y Wang (2009), quienes emplearon una teoría de orden superior y funciones de base radiales multicuadráticas.

a/h	E_1/E_2	Macro elemento $m = 2$	Macro elemento $m = 3$	Macro elemento $m = 4$	Macro elemento $m = 5$	Xiang y Wang (2009)	Liu et al. (2007)
5	3	7.396	6.267	6.250	6.248	-	6.557
	10	9.645	8.146	8.116	8.113	8.421	8.270
	20	11.452	9.486	9.440	9.433	9.671	9.528
	30	12.699	10.273	10.216	10.211	10.416	10.279
	40	13.694	10.816	10.749	10.742	10.938	10.773
10	3	7.830	7.089	7.084	7.080	-	7.240
	10	10.903	9.761	9.749	9.741	9.912	9.847
	20	13.698	12.183	12.161	12.159	12.316	12.225
	30	15.670	13.857	13.825	13.822	13.943	13.987
	40	17.204	15.121	15.079	15.073	15.213	15.112

Tabla 5.4. Valores de la primera frecuencia $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ de placa cuadrada SSSS (0/90/90/0)

Se observa que a partir del uso de tres polinomios, las frecuencias correspondientes tienden a estabilizarse, mostrando además convergencia estable y sin oscilaciones, y con una muy buena concordancia con los resultados de Liu et al (2007) y Xiang y Wang (2009).

Ejemplo N°2: El segundo ejemplo corresponde al análisis estático de una placa cuadrada SFSF, de material compuesto laminado (0/90/0/90/0), con una carga q uniformemente distribuida. Las propiedades del material ($M3$) de las capas son:

$$M3: E_1 = 25E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25$$

Los adimensionales presentados se obtienen de:

$$\bar{w} = 100 \left(\frac{E_2 h^3}{q a^4} \right) w_0, \bar{M}_{yy} = \left(\frac{10}{q a^2} \right) M_{yy}, \bar{Q}_y = \left(\frac{10}{q_0 a} \right) Q_y$$

En la Tabla 5.5 se muestran los resultados obtenidos usando el macro elemento propuesto, con FSDT y TSDT con $m = 4$ en ambos casos, y se comparan con los de Moleiro et al. (2008).

a/h	Método	\bar{w}	\bar{M}_{yy}	\bar{Q}_y
10	Macroelemento FSDT	3.0492	1.2433	4.9015
	Macroelemento TSDT	3.0581	1.2444	4.9782
	Moleiro et al. (2008)	3.0600	1.2458	4.9785
20	Macroelemento FSDT	2.6969	1.2400	4.8682
	Macroelemento TSDT	2.7015	1.2450	4.9699
	Moleiro et al. (2008)	2.7082	1.2449	4.9748
100	Macroelemento FSDT	2.5841	1.2402	4.9632
	Macroelemento TSDT	2.5901	1.2419	4.9780
	Moleiro et al. (2008)	2.5955	1.2446	4.9783

Tabla 5.5. Placa laminada *cross-ply* (0/90/0/90/0) SFSF sujeta a carga uniforme.

En la Figura 5.7 se muestra la deformada del macro elemento debida a carga estática uniforme.

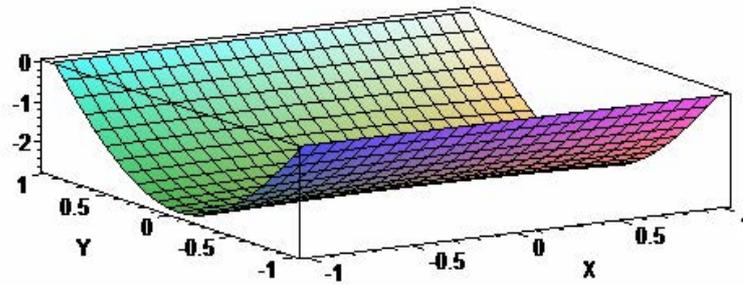


Figura 5.7. Deformada de la placa laminada cross-ply cuadrada SFSF sujeta a carga uniforme.

Ejemplo N°3: A continuación se presentan en la Tabla 5.6 los valores de frecuencias adimensionales y de la deflexión estática adimensional en el centro de una placa sometida a carga distribuida uniforme. La condición de contorno de la placa es SSSS, la relación de espesor $a/h = 10$ y la secuencia de laminación (30/-30/30). Se consideran dos formas geométricas distintas: una placa cuadrada de lado a y una placa trapezoidal simétrica de base mayor a , altura a y base menor $a/2$. Las propiedades materiales corresponden a las del material $M1$.

En la Tabla 5.6 se muestran los valores de referencia obtenidos con el programa SAP 2000 con elementos finitos sólidos 3D.

		\bar{w}	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$	$\bar{\omega}_4$	$\bar{\omega}_5$	$\bar{\omega}_6$	$\bar{\omega}_7$	$\bar{\omega}_8$
Cuadrada	Macroelemento	3,267	6,857	14,550	17,675	23,607	27,366	33,791	34,247	39,763
	Valor SAP	2,978	7,120	15,870	19,088	25,149	28,342	31,660	34,456	40,113
Trapezoidal	Macroelemento	1,561	9,750	17,645	25,283	29,408	35,098	44,950	47,058	56,830
	Valor SAP	1,431	10,356	18,540	26,849	30,361	35,695	47,312	49,866	57,698

Tabla 5.6. Valores de deflexiones centrales y frecuencias para placas laminadas (30/-30/30) SSSS

Para los ejemplos presentados en la Tabla 5.6, en la Figura 5.8 se grafica la variación, a lo largo del espesor de la placa, de los adimensionales de las tensiones σ_{xx} , τ_{xz} y del desplazamiento u . La adimensionalización está dada por las expresiones definidas en la sección anterior.

La tensión σ_{xx} se evalúa en la sección ubicada en el punto central de la placa $(a/2, a/2, z)$ y el desplazamiento u en el vértice $(0, 0, z)$. La tensión τ_{xz} se evalúa en $(a/2, 0, z)$ que representa el punto medio de un lado de la placa cuadrada, y el punto medio de la base mayor de la placa trapezoidal.

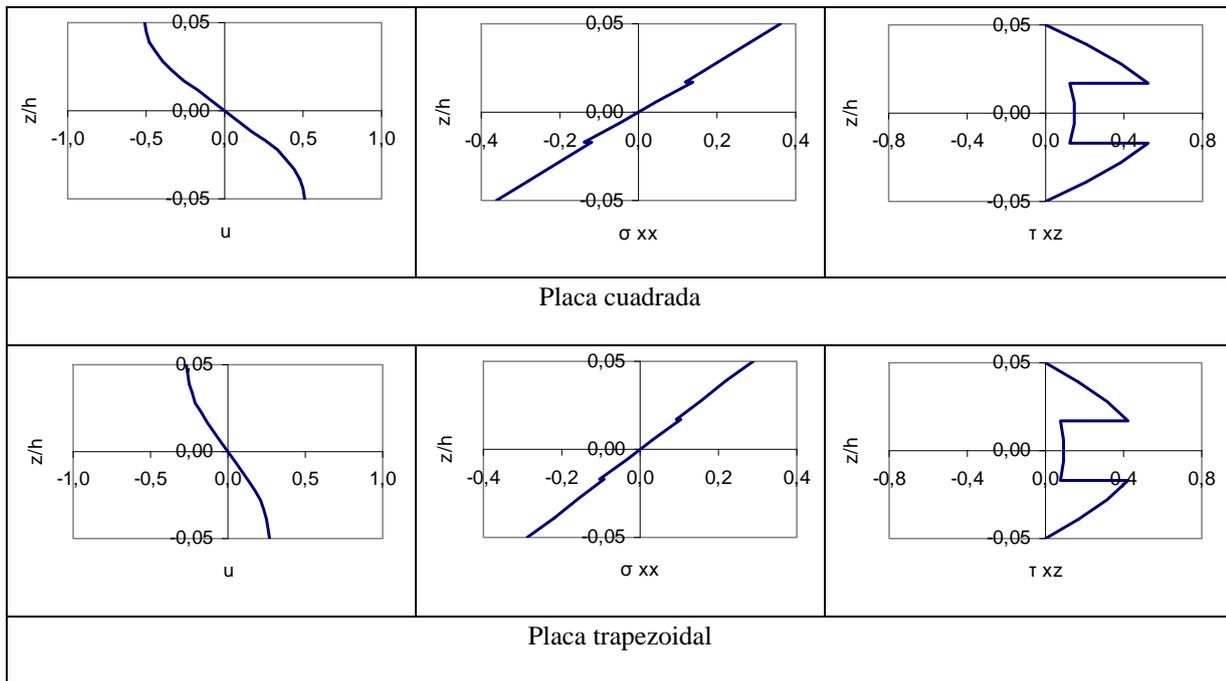


Figura 5.8. Variación de desplazamiento y tensiones en el espesor de placas (30/-30/30)

A modo de ejemplo ilustrativo, en la Figura 5.9 se muestran las formas modales asociadas a las primeras ocho frecuencias de vibración tabuladas en Tabla 5.6. para la placa cuadrada, obtenidas con la formulación propuesta y a partir del programa SAP 2000.

Modos	1	2	3	4
Macro elemento				
SAP 2000				

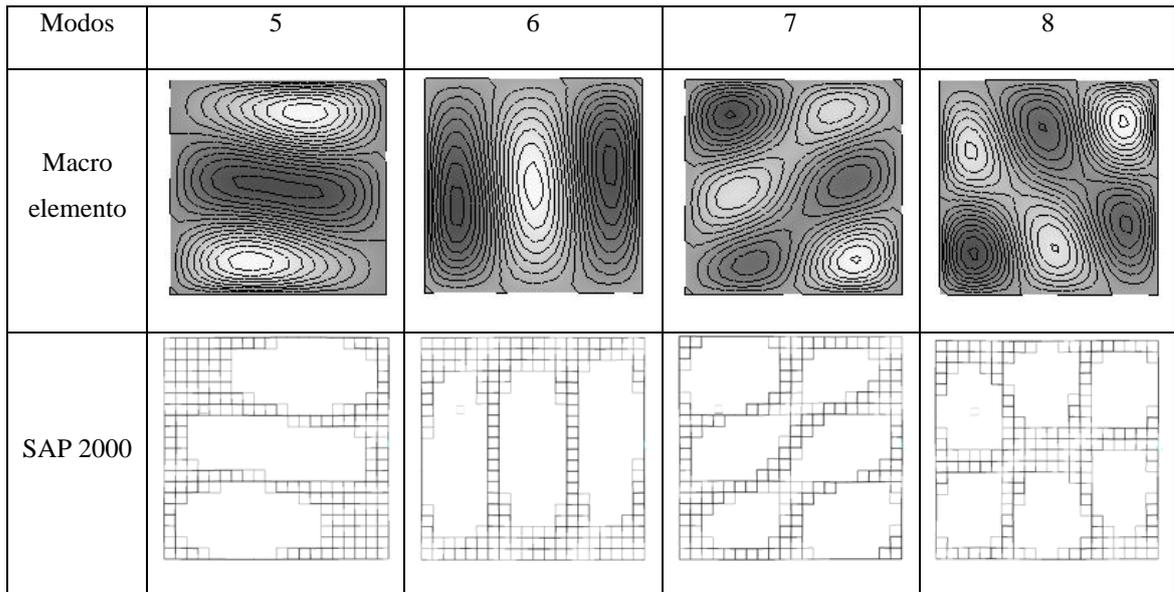


Figura 5.9. Formas modales de placa cuadrada laminada (30/-30/30) SSSS

5.8.4. ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE TENSIONES EN EL ESPESOR

En esta sección se lleva a cabo una comparación de la variación de las tensiones en el espesor de una placa obtenida con la formulación propuesta en esta tesis, con los valores obtenidos por Ramesh et al. (2009), quienes emplearon un elemento finito triangular de orden superior basado en una teoría de tercer orden de deformación por corte.

El propósito de este ejemplo es verificar la correcta predicción de las tensiones interlaminares obtenidas usando el macro elemento formulado, en placas laminadas que presentan singularidades como apoyos puntuales.

Se considera una placa cuadrada laminada (0/90/0), con relación $a/h = 10$ y apoyos puntuales en sus cuatro esquinas, sobre la cual actúa una carga uniforme distribuida de magnitud q . Las propiedades del material del laminado corresponden al denominado $M3$.

Las Figuras 5.10, 5.11, 5.12 y 5.13 muestran, respectivamente, los siguientes valores adimensionales en las coordenadas (x, y, z) indicadas, asumiendo como origen de coordenadas el punto central de la placa:

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{xx}(0, a/2, z), \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{h^2}{qa^2} \sigma_{yy}(0, 0, z)$$

$$\bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{qa} \tau_{xz}(a/4, a/4, z), \quad \bar{\tau}_{yz} = \frac{h}{qa} \tau_{yz}(0, a/4, z)$$

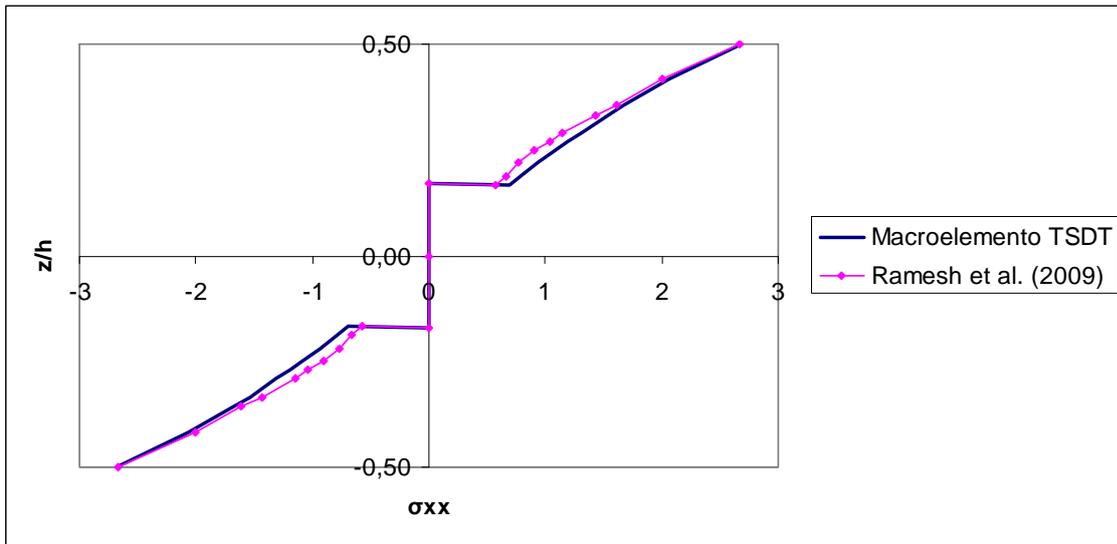


Figura 5.10. Variación de la tensión $\bar{\sigma}_{xx}$ en el espesor de un laminado

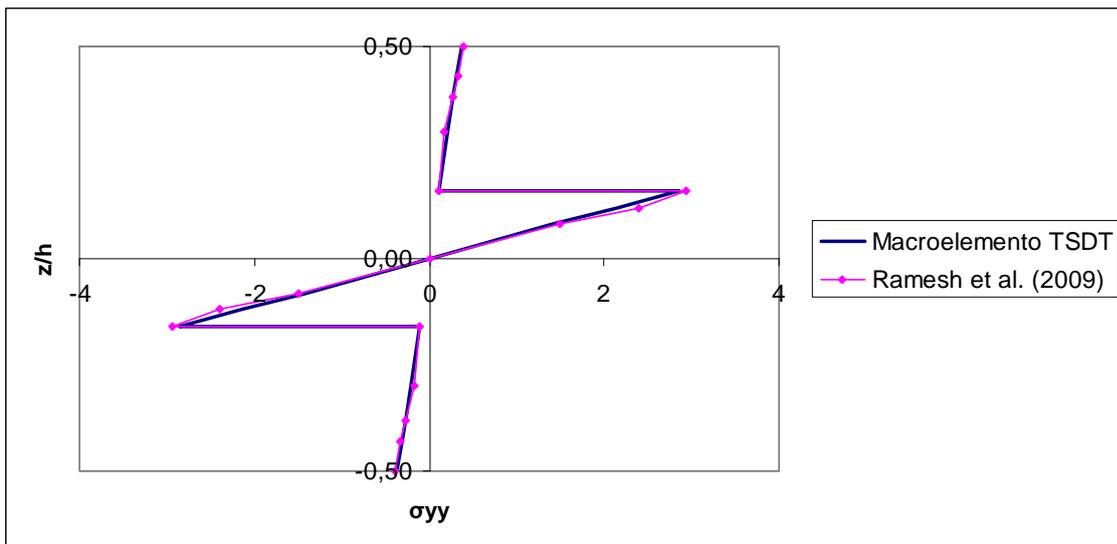


Figura 5.11. Variación de la tensión $\bar{\sigma}_{yy}$ en el espesor de un laminado

En las Figuras 5.12 y 5.13 se observa la variación de tensiones calculada a partir de las ecuaciones constitutivas (C) y la que surge de plantear el equilibrio (E):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

Se puede concluir que el macro elemento formulado permite arribar a excelentes resultados en la determinación de las tensiones de un laminado, ya que reproduce de manera fiel la distribución de las mismas en el espesor de la placa.

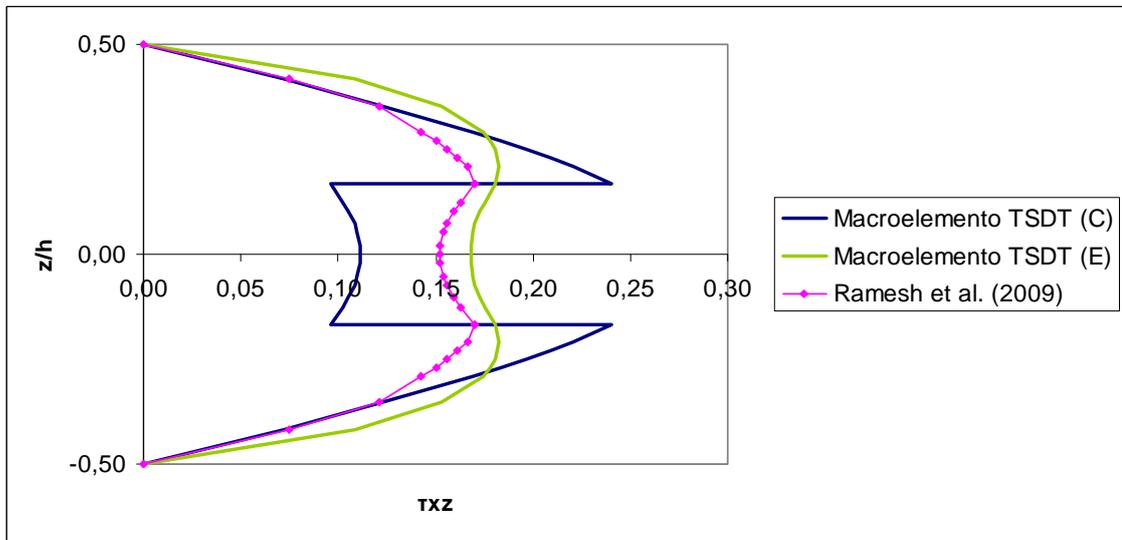


Figura 5.12. Variación de la tensión \bar{T}_{xz} en el espesor de un laminado

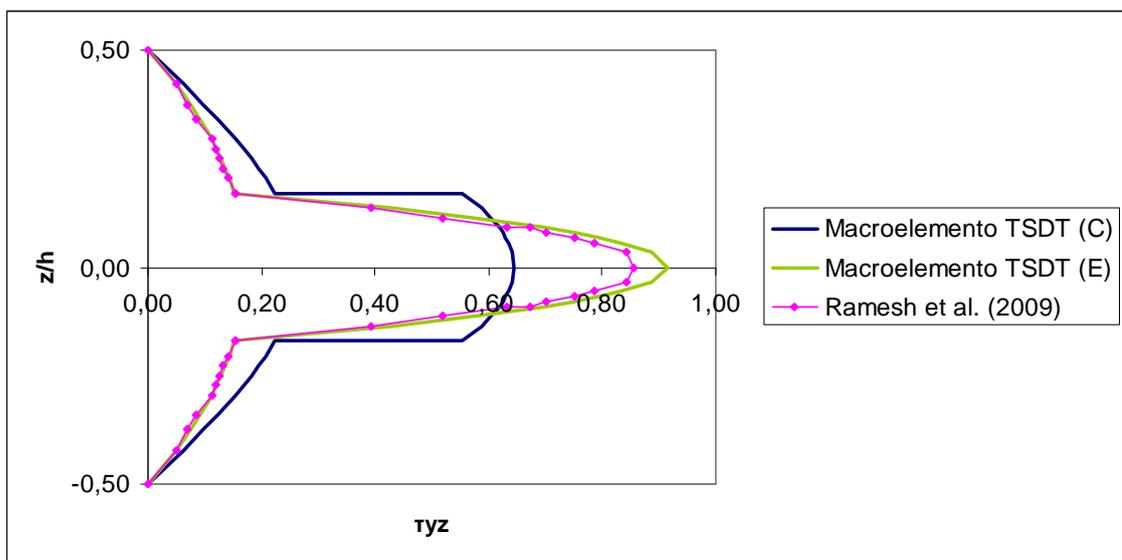


Figura 5.13. Variación de la tensión \bar{T}_{yz} en el espesor de un laminado

5.8.5. EJEMPLO DE COMPARACIÓN DE CLPT, FSDT Y TSDT

En esta sección se muestra un estudio comparativo de resultados de desplazamiento \bar{u} y tensiones $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ (adimensionalizados) aplicando los macro elementos formulados empleando CLPT, FSDT y TSDT a un ejemplo particular. Se estudia además la influencia de la relación lado/espesor en los desplazamientos y en la distribución de tensiones en el espesor de una placa.

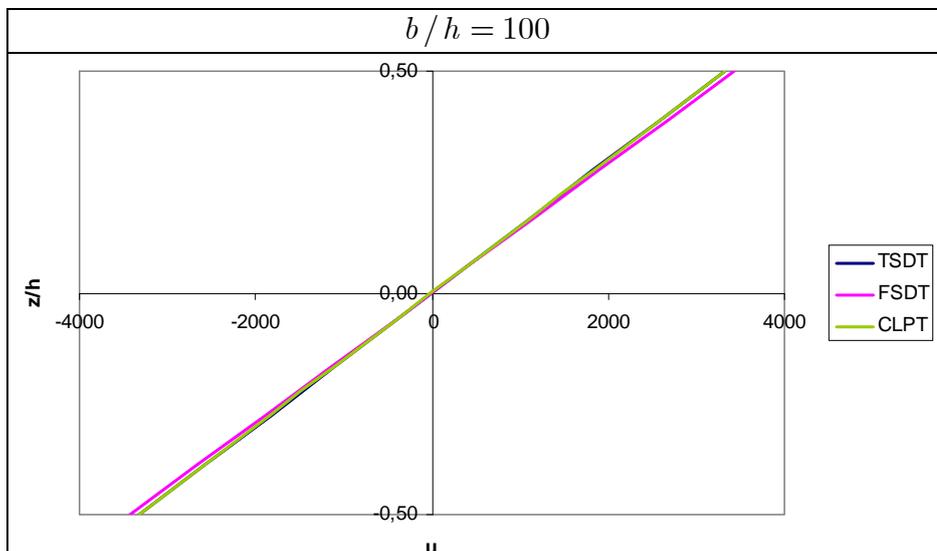
Se considera una placa laminada CCCC con esquema de laminación (0/90/0), de forma rectangular con lado a paralelo al eje x y b paralelo al eje y , y relación de aspecto $a = 2b$. Se considera un material $M4$ de propiedades:

$$M4: E_1 = 40E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.25.$$

La relación b/h toma los valores 100, 50, 20, 10, a efectos de considerar en el análisis placas delgadas, moderadamente gruesas y gruesas. Los adimensionales están dados por:

$$\bar{u} = \frac{E_2}{qh} u\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, z\right), \bar{\sigma}_{xx} = \frac{h^2}{qb^2} \sigma_{xx}\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, z\right), \bar{\tau}_{xz} = \frac{h}{qb} \tau_{xz}\left(\frac{3}{4}a, \frac{3}{4}b, z\right)$$

En la Figura 5.14 se observa la distribución de los desplazamientos \bar{u} en el espesor de la placa, con las diferentes relaciones b/h .



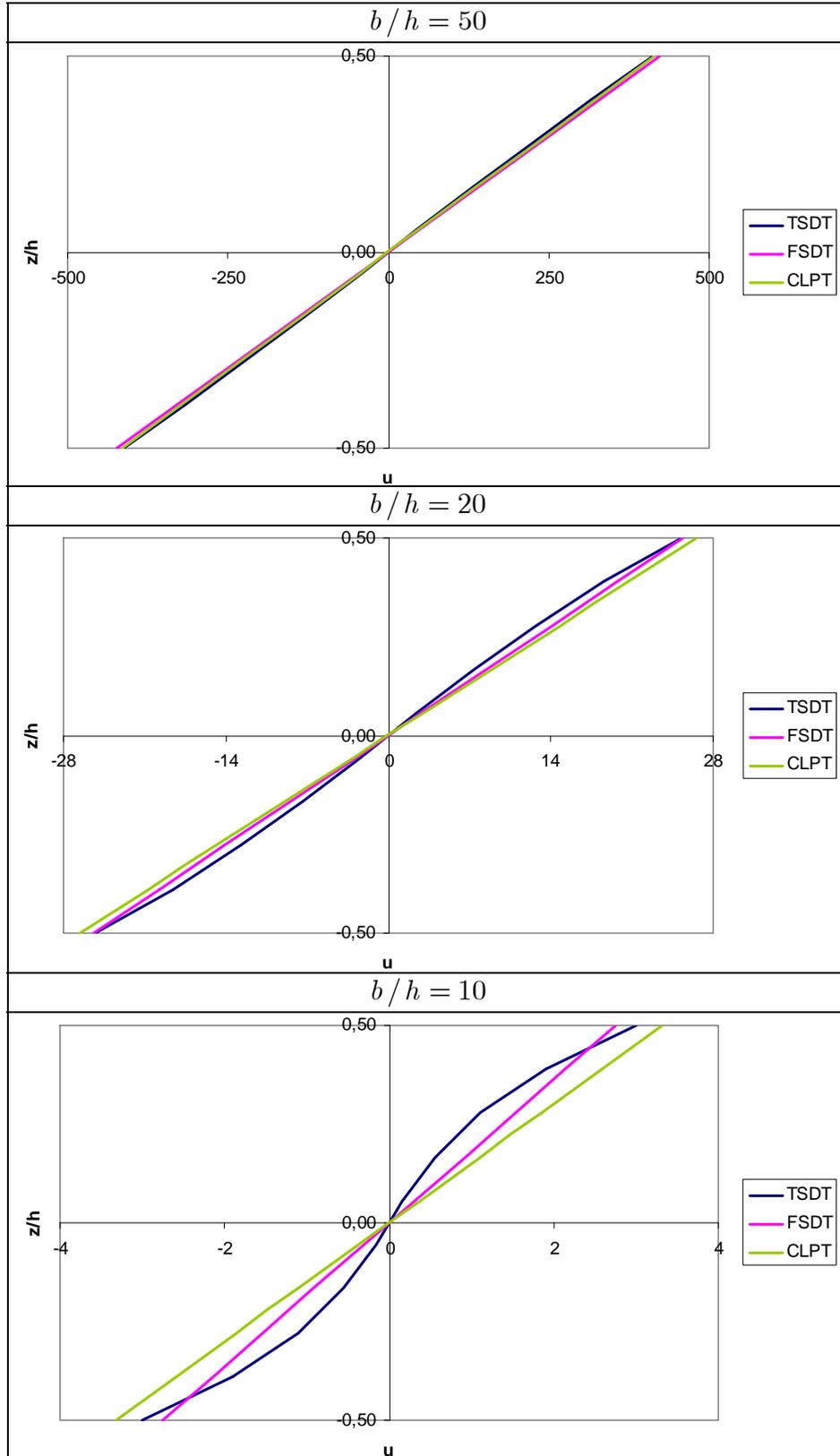
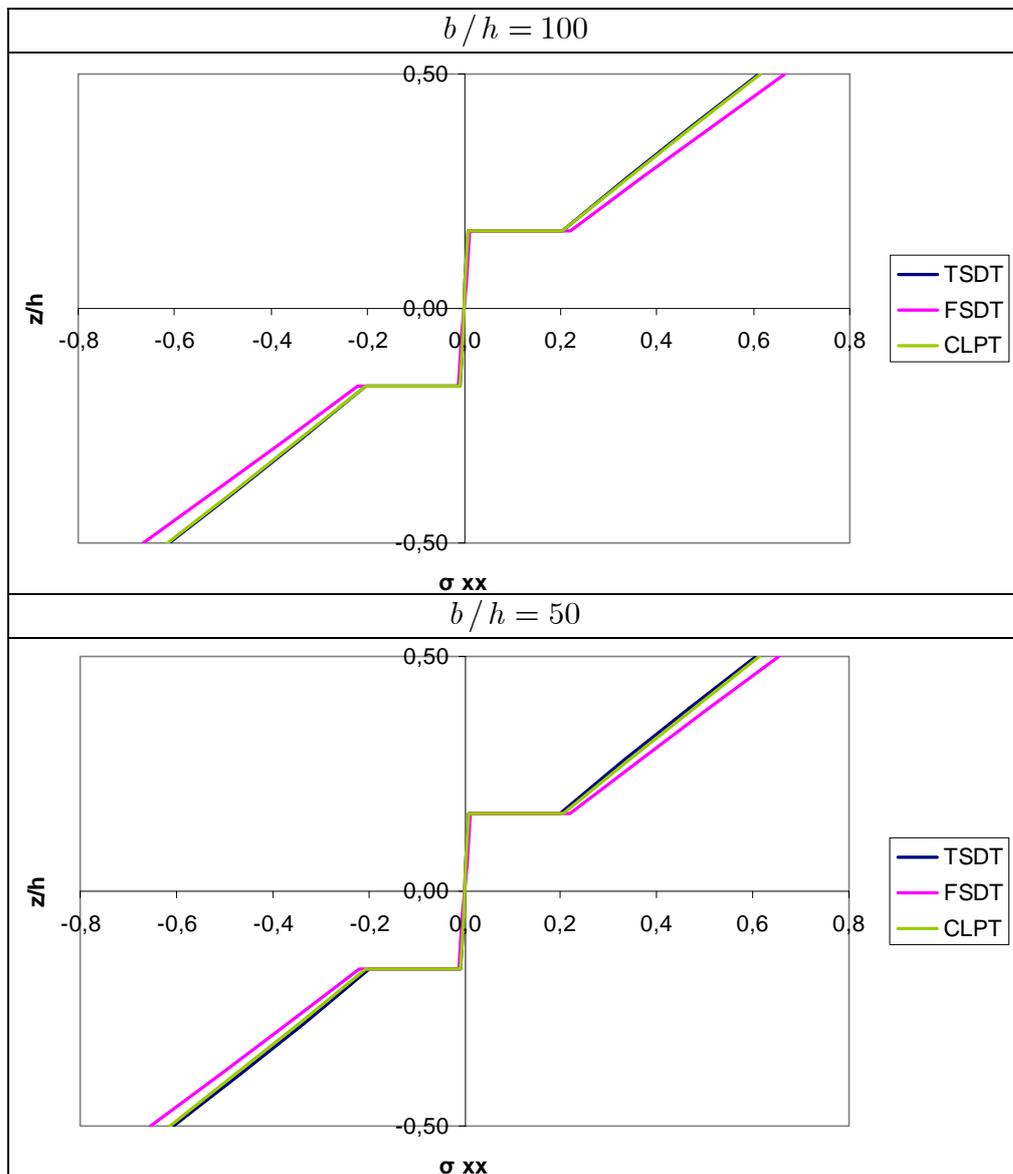


Figura 5.14. Variación de \bar{u} en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT

Las Figuras 5.15 y 5.16 muestran, respectivamente, la distribución de las tensiones $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\tau}_{xz}$ en el espesor de la placa, con las diferentes relaciones b/h .

Resulta claro a partir de la observación de estas figuras, que para laminados delgados las tres teorías predicen una distribución adecuada de desplazamientos y tensiones. Sin embargo, cuando se trata de laminados gruesos, se hace necesario y conveniente el uso de una teoría de orden superior para la correcta determinación de parámetros de diseño.



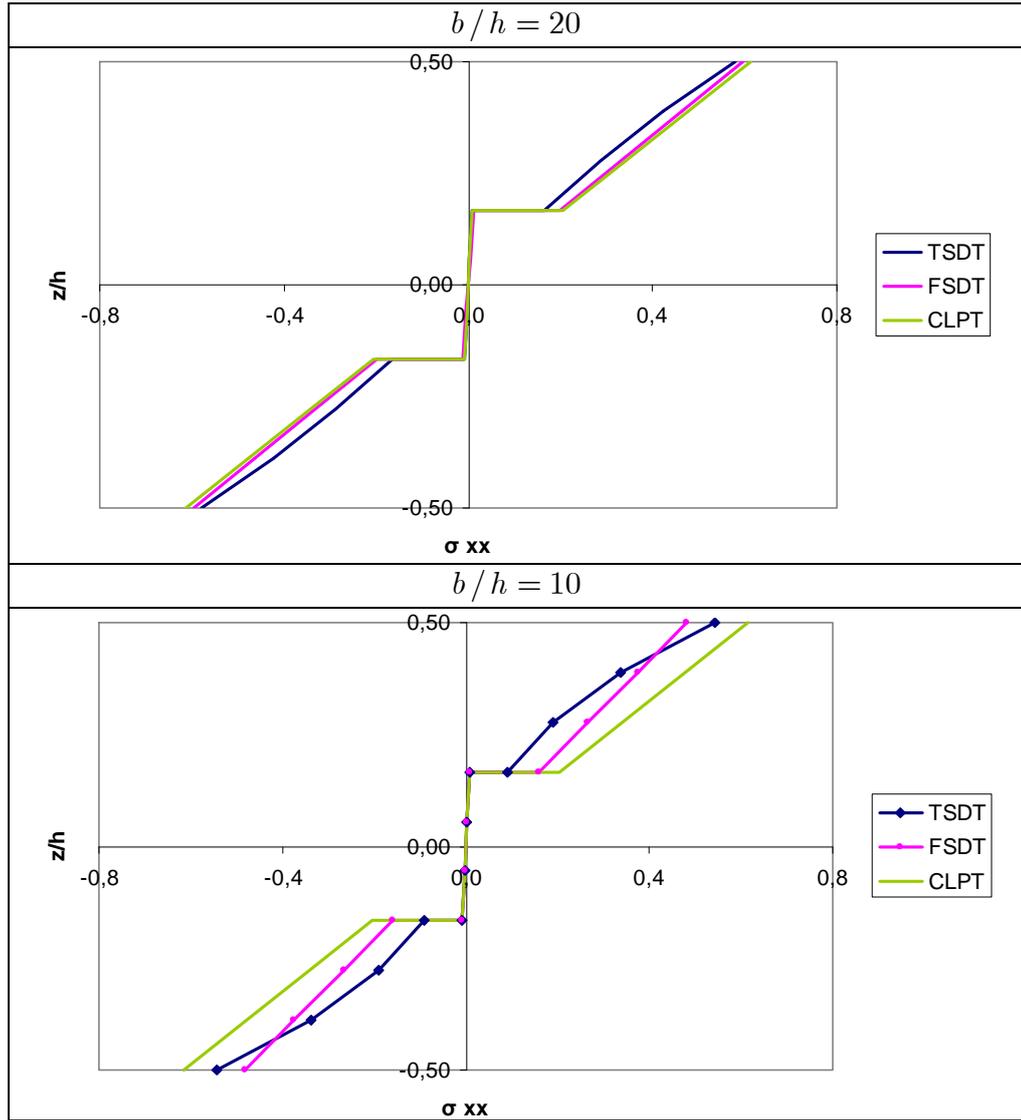
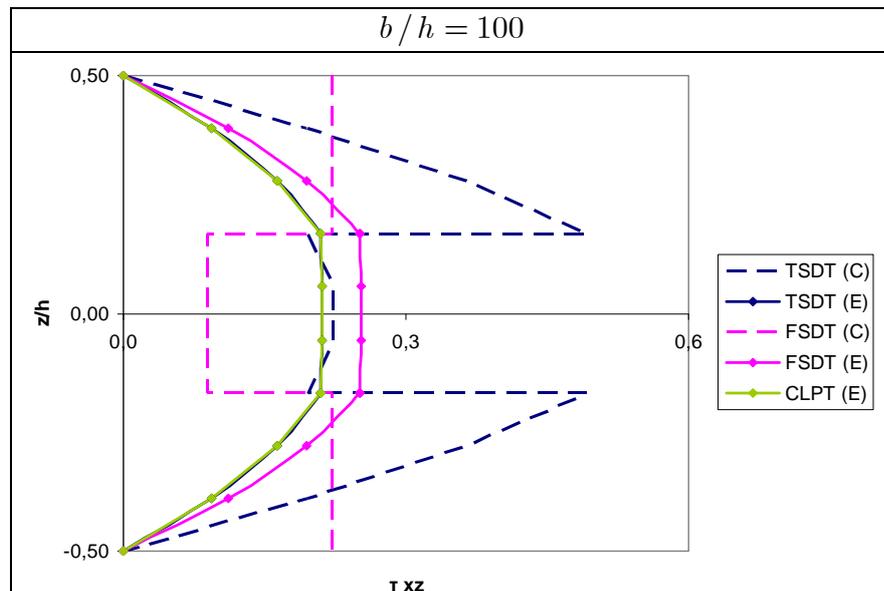


Figura 5.15. Variación de $\bar{\sigma}_{xx}$ en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT



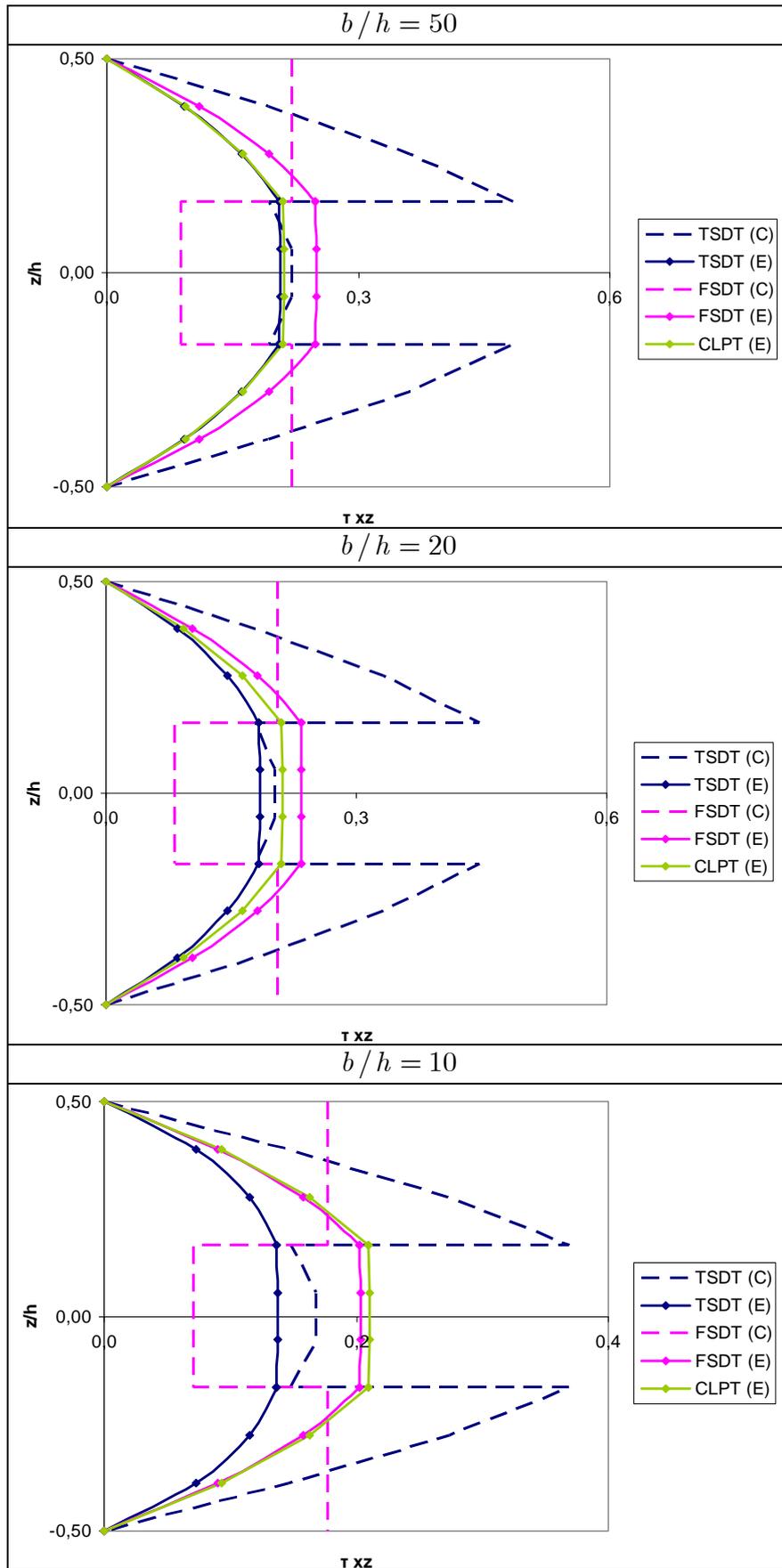


Figura 5.16. Variación de $\bar{\tau}_{xz}$ en el espesor obtenidas con CLPT, FSDT y TSDT

5.9 EJEMPLO NUMÉRICO PLACA ROMBOIDAL

A continuación se lleva a cabo el análisis estático y dinámico de la placa laminada romboidal mostrada en la Figura 5.17, a partir del uso del macro elemento finito formulado en base a la teoría TSĐT.

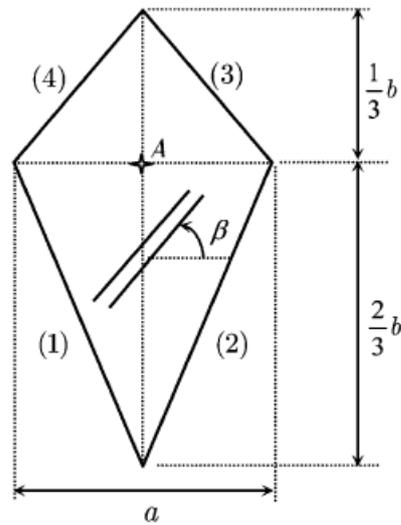


Figura 5.17. Geometría de la placa cuadrilátera laminada SSSS, con diagonales a y $b = 2a$, sujeta a carga uniformemente distribuida

Se considera un laminado $(\beta, -\beta, -\beta, \beta)$, de material E-glass/epoxi (M4) de propiedades:

$$M4 : E_1 = 60.7GPa, E_2 = 24.8GPa, G_{12} = 12GPa, \\ G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2, \nu_{12} = 0.23$$

Para placa delgada los resultados obtenidos se comparan con los publicados por Nallim et al. (2005). Los valores adimensionales de deflexión y momento que se muestran en la Tabla 5.7, corresponden al punto A de la placa (ver Figura 5.17) considerada SSSS, y están dados por:

$$\bar{w}^A = \frac{E_L h^3 100w^A}{qa^4}, \bar{M}_{xx}^A = \frac{100M_{xx}^A}{qa^2}$$

	β	$a/h = 10$		$a/h = 100$	
		\bar{w}^A	\bar{M}_{xx}^A	\bar{w}^A	\bar{M}_{xx}^A
Macro elemento ($m = 4$)	0°	4.9450	4.7552	4.3106	4.7522
Nallim et al (2005)				4.3042	4.7543
Macro elemento ($m = 4$)	15°	5.0577	4.9640	4.3999	4.9533
Nallim et al (2005)				4.3980	4.9629
Macro elemento ($m = 4$)	30°	5.5890	4.5785	4.8614	4.8809
Nallim et al (2005)				4.8641	4.8825
Macro elemento ($m = 4$)	45°	6.2770	4.5793	5.4577	4.5689
Nallim et al (2005)				5.4583	4.5766
Macro elemento ($m = 4$)	60°	6.6701	4.0502	5.8794	4.0400
Nallim et al (2005)				5.8797	4.0422
Macro elemento ($m = 4$)	75°	6.8655	3.5687	5.9768	3.5588
Nallim et al (2005)				5.9731	3.5619
Macro elemento ($m = 4$)	90°	6.3365	3.5855	5.5144	3.5816
Nallim et al (2005)				5.5124	3.5819

Tabla 5.7. Placa romboidal laminada SSSS sujeta a carga uniforme.

En la Tabla 5.7, $\beta = 0^\circ$ y $\beta = 90^\circ$ corresponden a laminados cruzados (*cross-ply*), con secuencias de apilamiento (0/90/90/0) y (90/0/0/90) respectivamente.

Los valores de los tres primeros coeficientes de frecuencia para esta placa SSSS se resumen en la Tabla 5.8. Los adimensionales de frecuencias están dados por:

$$\bar{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_\beta}}, \text{ con } D_\beta = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}$$

Los valores de los tres primeros coeficientes de frecuencia para la placa romboidal CCCC son los que se resumen en la Tabla 5.9.

a/h	β	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3	
		Propuesto		Propuesto		Propuesto	
10	0	18.5809		34.5022		56.2822	
	15	18.2249		34.1421		54.7248	
	30	17.3695		33.3455		51.0873	
	45	16.4231		32.5637		46.9713	
	60	15.7411		32.0135		43.4381	
	75	15.4382		31.6786		41.1124	
	90	15.3719		31.5529		40.3000	
a/h	β	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3	
		Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)
100	0	20.6000	20.0737	36.8326	36.6949	60.1989	56.2655
	15	20.2158	19.9335	36.7318	36.3469	59.9456	55.3904
	30	19.3819	19.0271	37.9273	36.1031	61.7435	55.4023
	45	18.1723	17.9583	36.9841	35.7434	56.6129	53.4624
	60	17.3480	17.2236	36.3386	35.5353	51.9358	50.1564
	75	17.0739	16.9929	36.0438	35.4883	49.0573	47.8736
	90	17.0546	17.6523	35.9436	36.0199	48.1886	49.6827

Tabla 5.8. Valores de frecuencias $\bar{\omega}$ de placa laminada romboidal SSSS

a/h	β	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3	
		Propuesto		Propuesto		Propuesto	
10	0	32.1552		48.0616		67.5206	
	15	31.6226		47.5493		66.5967	
	30	30.3561		46.5042		64.4355	
	45	28.8508		45.4811		60.0875	
	60	27.4350		44.5784		56.1383	
	75	26.3933		43.8700		53.3604	
	90	26.0017		43.5920		52.3198	
a/h	β	Frecuencia 1		Frecuencia 2		Frecuencia 3	
		Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)	Propuesto	Nallim et al. (2005)
100	0	37.4472	36.8314	59.6702	58.8535	88.5645	83.1270
	15	37.1065	37.0481	59.2706	58.5976	87.5861	82.0608
	30	36.0531	36.0536	58.2387	57.8697	84.8958	81.2752
	45	34.3733	34.4103	56.9190	56.7976	80.3591	78.8899
	60	32.5095	32.5536	55.6439	55.6541	74.7105	74.3086
	75	31.0981	31.1404	54.6539	54.7190	70.2107	70.1211
	90	30.5825	31.8310	54.2437	55.4846	68.5582	72.0156

Tabla 5.9. Valores de frecuencias $\bar{\omega}$ de placa laminada romboidal CCCC

El análisis de las Tablas 5.8 y 5.9 muestra muy buena concordancia con los valores de referencia (Nallim et al., 2005) cuando se trabaja con bajas relaciones de espesor. Es importante destacar que aún para el caso de placas delgadas, en el análisis dinámico, las frecuencias correspondientes al modo 3 presentan mayor discrepancia, lo cual es de esperarse debido a la debilidad en la dirección transversal que presentan los materiales compuestos.

5.10 EJEMPLOS NUMÉRICOS: ENSAMBLAJE

Finalmente, para demostrar la versatilidad del macro elemento propuesto en su aplicación al estudio de placas laminadas gruesas, de formas geométricas arbitrarias y condiciones de borde generales, se presentan en esta sección dos ejemplos de ensamblaje de macro elementos y se muestran, con carácter ilustrativo, las formas modales de vibración obtenidas con el modelo desarrollado en este capítulo.

5.10.1 PLACA TRAPEZOIDAL CON SINGULARIDADES EN SU PLANO

La placa considerada en este ejemplo es un laminado (60/30/60) de material *M4* y relación de espesor $a/h = 10$. La placa es de forma trapezoidal como se muestra en la Figura 5.18a y está empotrada a lo largo del eje x . Este laminado podría estudiarse empleando un solo macro elemento finito. Sin embargo, con el fin de mostrar la potencialidad de la formulación presentada se considera el ensamblaje de dos macro elementos (Figura 5.18b) aplicados a tres casos diferentes, a saber:

Caso 1: Placa trapezoidal en voladizo, con interfaz entre elementos que requiere continuidad de desplazamientos y giros.

Caso 2: Placa en voladizo con discontinuidad interna (a lo largo del lado compartido de los macro elementos de la malla) y punto de unión en $x = 0.5a$, $y = 0.6a$.

Caso 3: Placa empotrada a lo largo del eje x y simplemente apoyada en la línea coincidente con el lado común de los elementos de la malla.

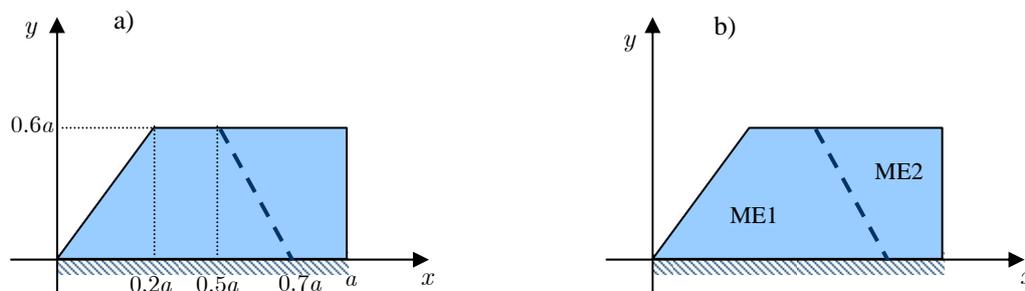


Figura 5.18. Geometría de la placa laminada en voladizo (a) y malla de macro elementos (b)

Los seis primeros adimensionales de las frecuencias naturales de vibración libre de estos tres casos se presentan en las Figuras 5.19, 5.20 y 5.21, donde se incluyen las formas modales asociadas.

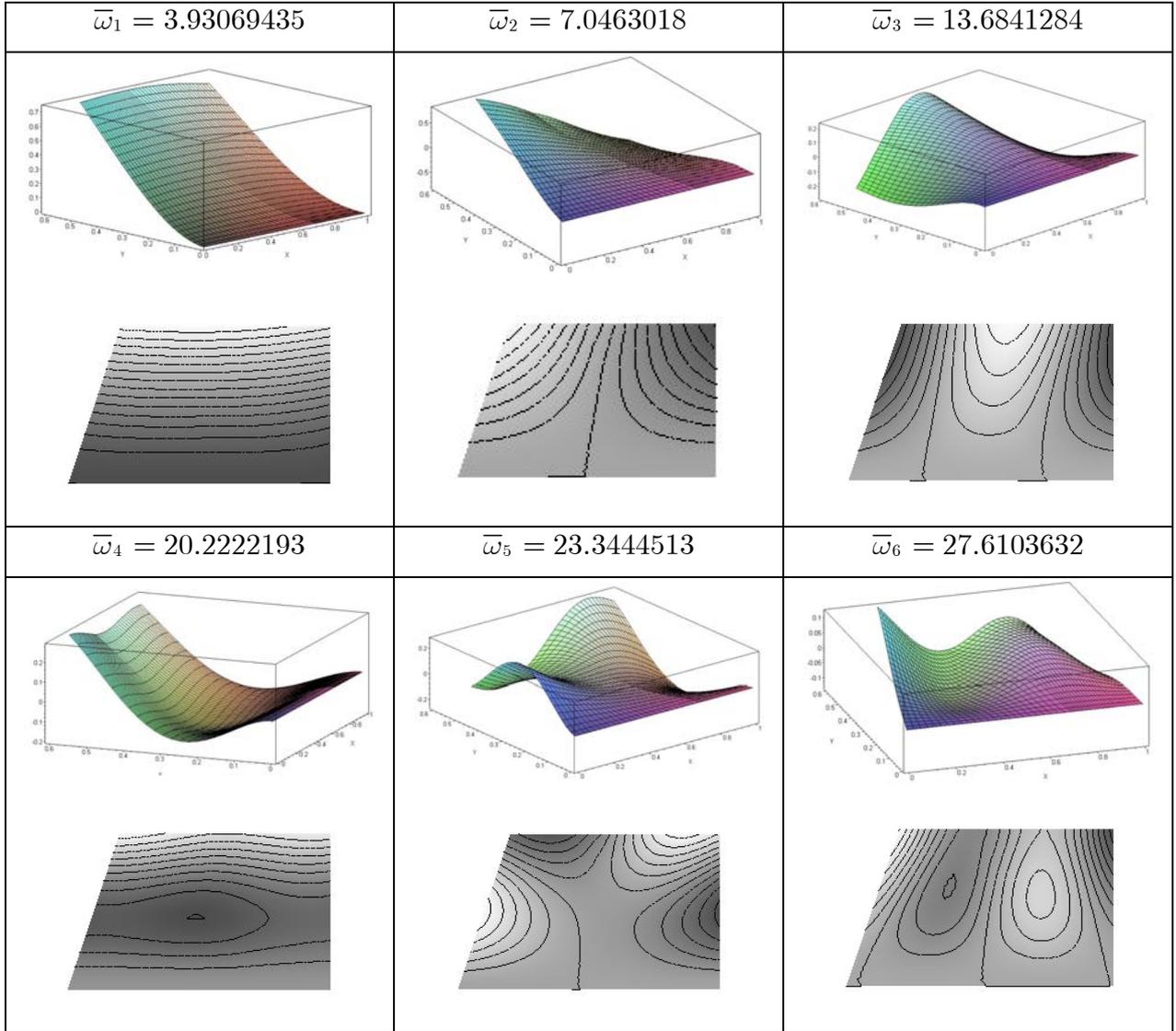


Figura 5.19. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ interfaz caso 1.

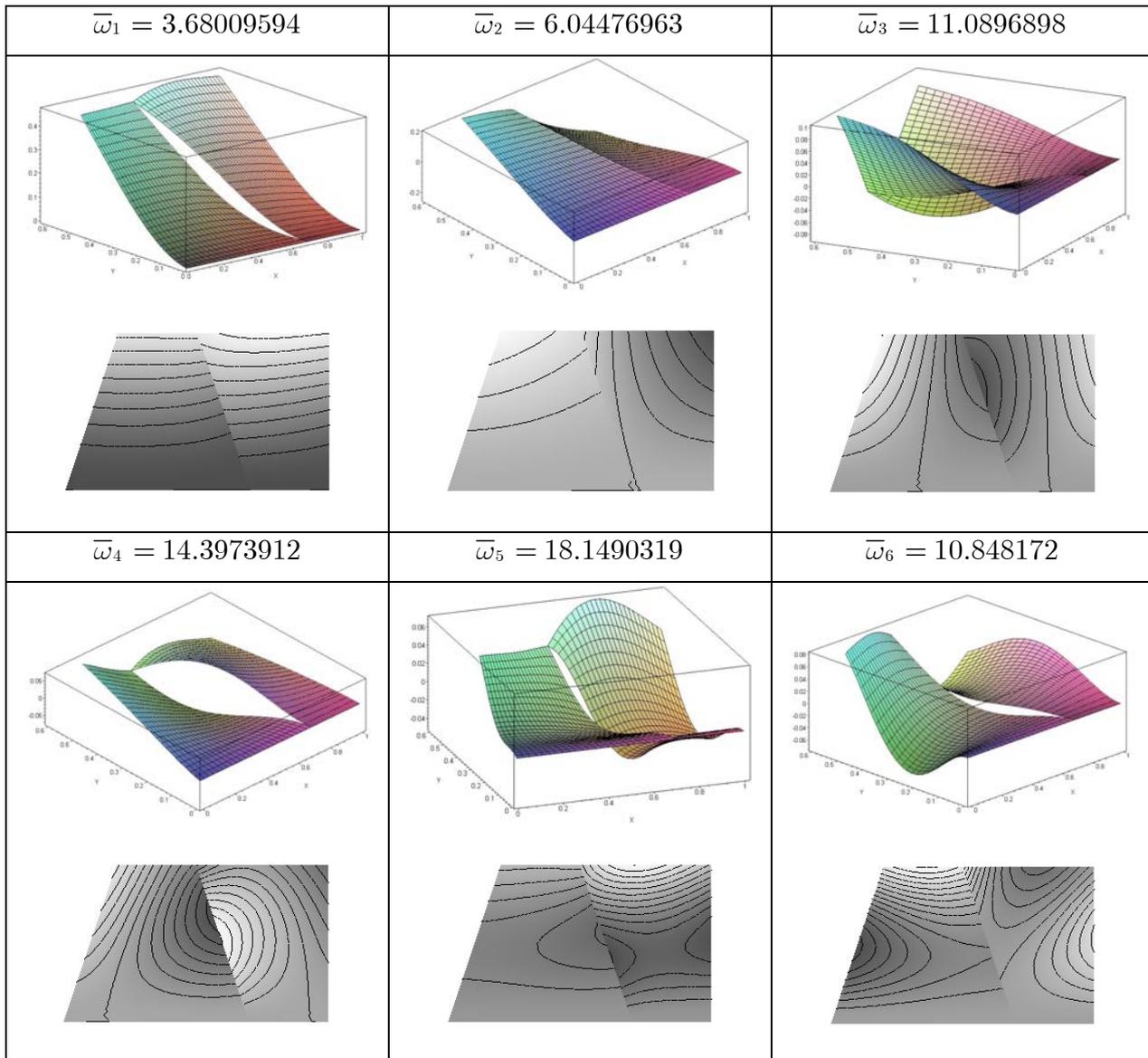


Figura 5.20. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ interfaz caso 2.

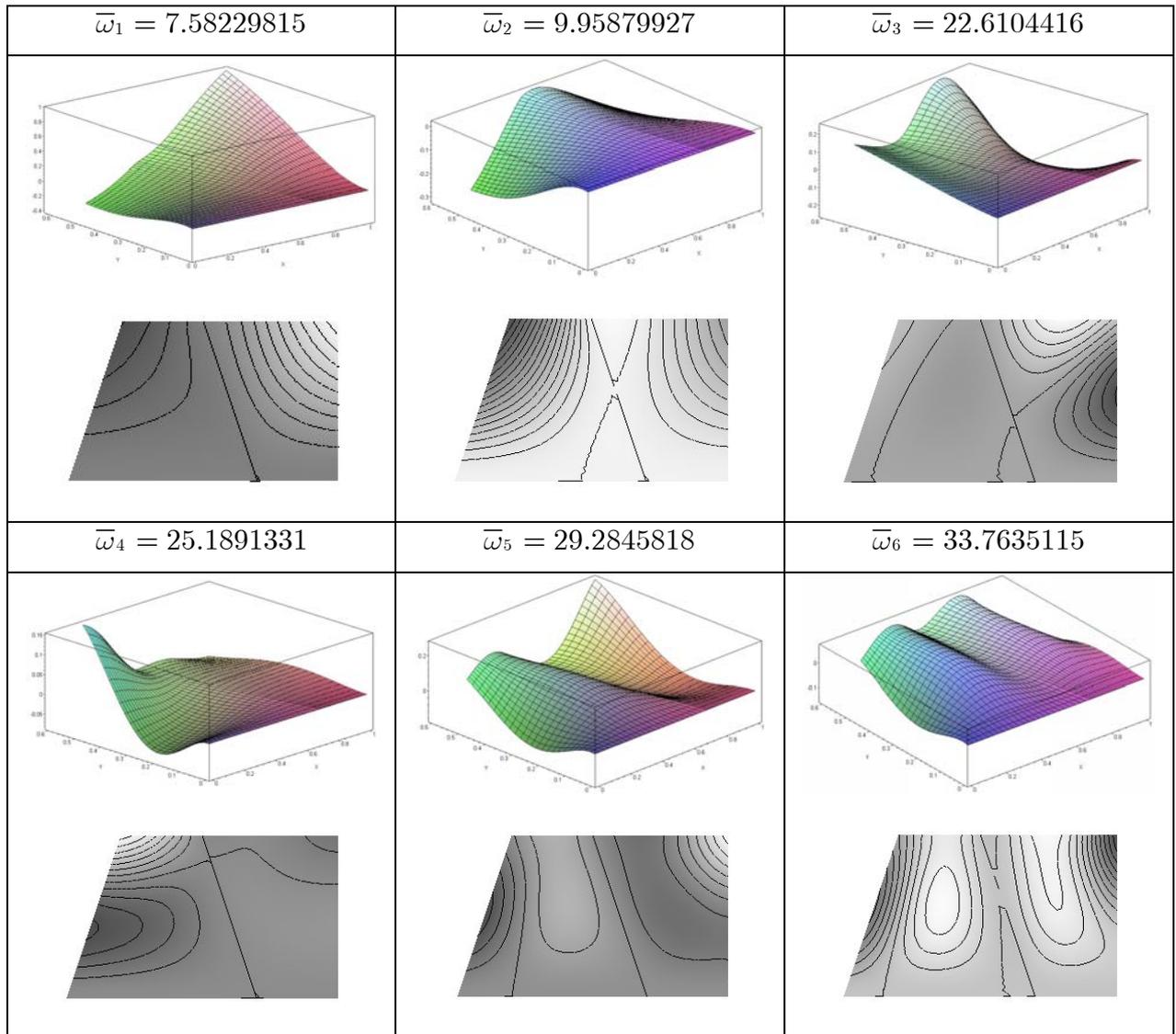


Figura 5.21. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ interfaz caso 3.

5.10.2 PLACA TRIANGULAR PERFORADA

El presente ejemplo tiene por finalidad presentar la aplicación de una malla sencilla de mínimo número de macro elementos, al estudio dinámico de una estructura triangular con presencia de perforación interna. La estructura y el mallado adoptado se presentan en Figura 5.22. El esquema de laminación de las placas incluidas en esta sección es (45/-45/45), se trabajó con el material *M4* y una relación de espesor $a/h = 10$. Los adimensionales de frecuencias naturales de vibración y las correspondientes formas modales se presentan en la Figura 5.23.

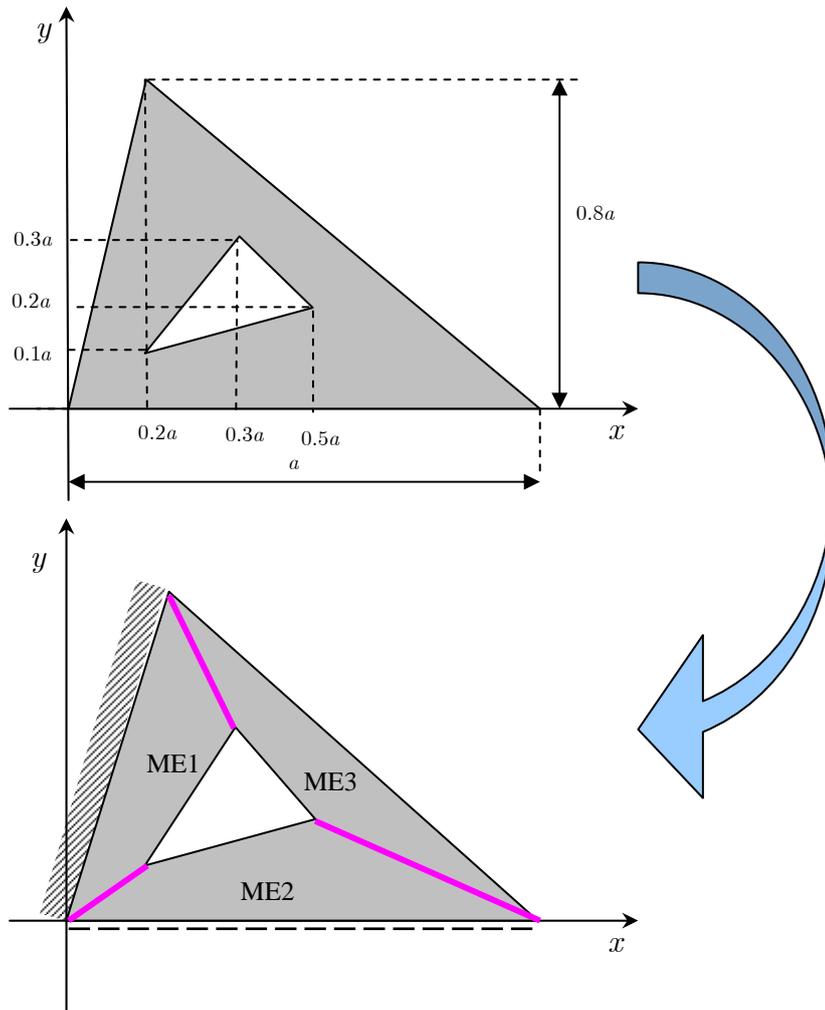


Figura 5.22. Geometría de la placa triangular con perforación y mallado considerado.

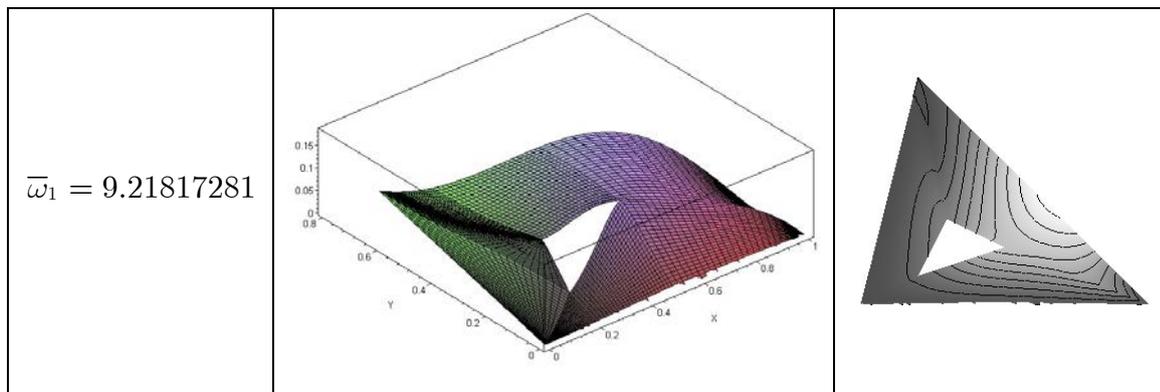


Figura 5.23. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ placa triangular perforada.

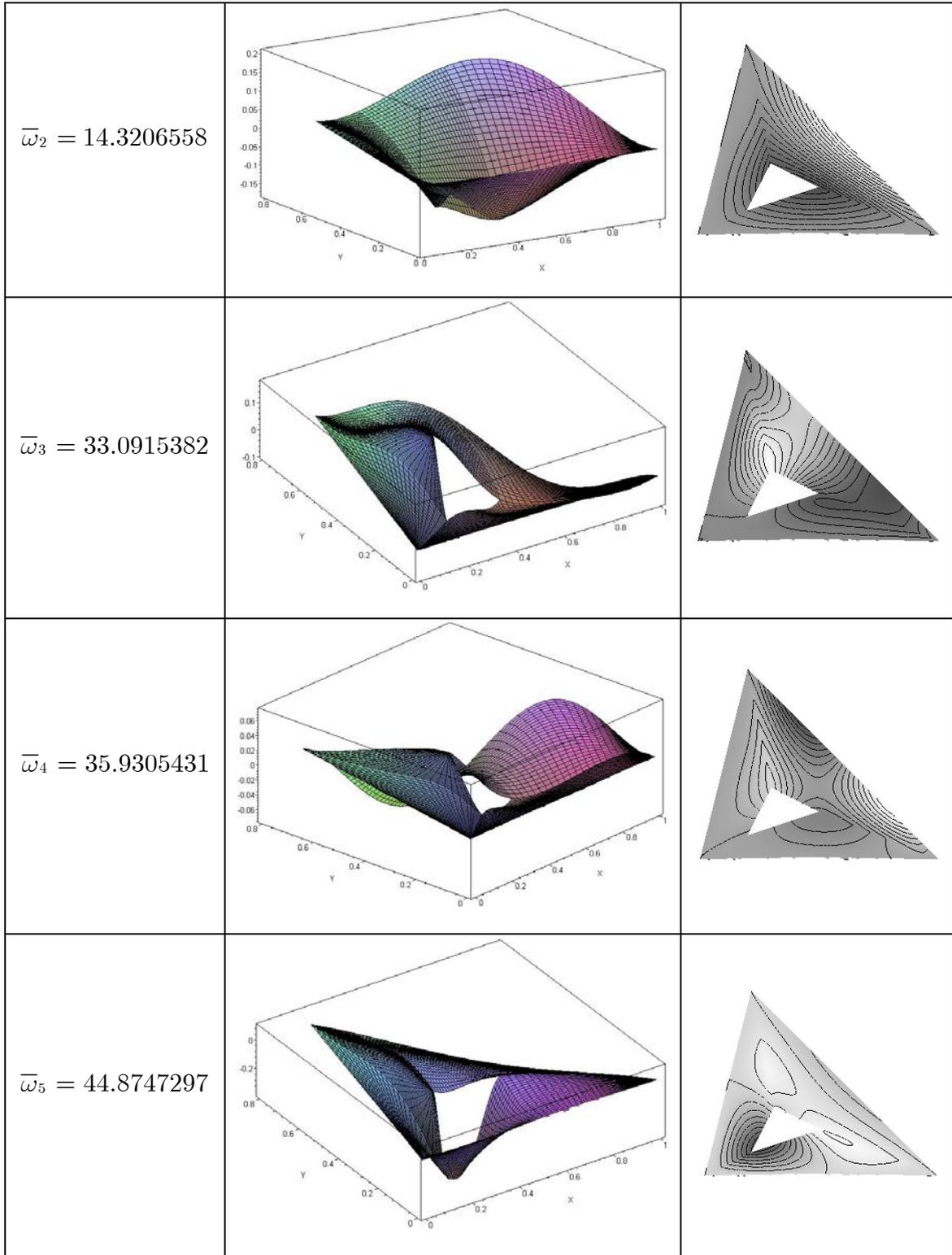


Figura 5.23. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ placa triangular perforada (continuación)

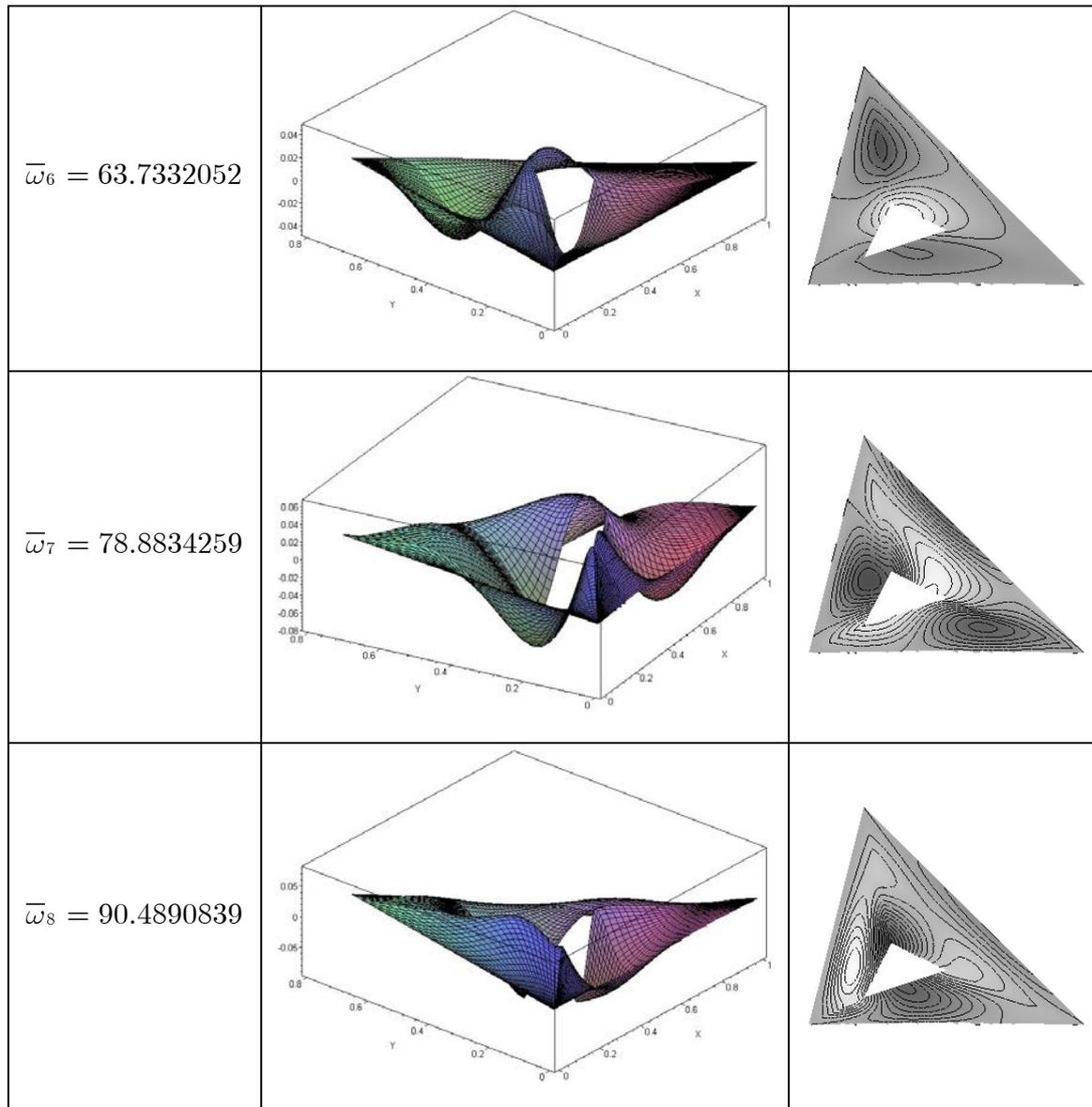


Figura 5.23. Adimensionales de frecuencias $\bar{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{\rho}{E_2}}$ placa triangular perforada (continuación)

5.11 CONSIDERACIONES FINALES

En este capítulo se desarrolla un macro elemento finito jerárquico a partir de la teoría trigonométrica de deformación por corte. Esta teoría, que fue recientemente generalizada para su aplicación a laminados es más rica que las funciones polinómicas y además más simples y precisas. Su aplicación garantiza a priori la satisfacción de las condiciones de contorno correspondientes a las superficies libres de la placa. El macro elemento formulado se basa en el concepto del método de los elementos finitos en su versión h-p, ya que combina un mínimo proceso de discretización con el enriquecimiento de las funciones de soporte local empleando polinomios ortogonales

generados con la fórmula de recurrencia de Gram-Schmidt. Las ventajas del modelo desarrollado se manifiestan además en la precisa determinación de las tensiones, especialmente las tangenciales transversales, lo cual es fundamental en procesos de diseño de materiales compuestos laminados que, como se explicó en la Introducción, tienen debilidad en la dirección transversal. Por otra parte, el modelo permite considerar relaciones de espesor bajas (placas delgadas), evitando el fenómeno de bloqueo por cortante y constituyendo funciones de aproximación conformes.

A través de varios ejemplos numéricos se comparan los modelos desarrollados empleando las teorías FSDT y TSDT para placas laminadas gruesas, y se demuestra que la metodología propuesta con la teoría de orden superior, TSDT, mejora los resultados obtenidos con la FSDT, haciéndolos más precisos, y mostrando, como ya se dijo, una distribución más realista de las tensiones en el espesor de la placa. Esto es posible además, con un bajo número de polinomios de Gram-Schmidt.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES GENERALES, CONTRIBUCIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

6.1 CONCLUSIONES

En esta tesis se propone un modelo para el análisis de placas gruesas laminadas. La formulación presentada se basa en la generación de un macro elemento finito enriquecido, de acuerdo a la versión h-p del MEF y en la aplicación del principio de los trabajos virtuales. El modelo se desarrolla en forma secuencial, como primer paso se formula un macro elemento enriquecido basado en la teoría clásica de placas. Luego, se generaliza y extiende la formulación al estudio de placas gruesas laminadas

Para la formulación de placas gruesas laminadas se adopta, en primer lugar, la teoría de deformación por corte de primer orden y se desarrolla un algoritmo general basado en la aplicación del Método de Ritz, empleando como funciones coordenadas polinomios ortogonales de Gram-Schmidt. Posteriormente, tomando esta idea y la concepción del macro elemento para placas delgadas, se genera un macro elemento finito jerárquico basado en la teoría FSDT.

Finalmente, se generaliza y extiende esta base conceptual para proponer un macro elemento finito jerárquico empleando una teoría trigonométrica de deformación por corte, que permite analizar placas gruesas laminadas, con diversas características

mecánicas y formas geométricas complejas. Además se presenta el proceso de ensamblaje, lo que permite estudiar estructuras de placas de variadas formas geométricas, mediante el mallado de dicha estructura en macro elementos enriquecidos.

El macro elemento cuadrilátero arbitrario es mapeado mediante una técnica de transformación de espacios, que lleva a su redefinición en coordenadas naturales, formando en este dominio las matrices elementales. En este espacio ficticio se definen las funciones de forma adoptadas: polinomios de Hermite (que trabajan como funciones de soporte local), enriquecidos con polinomios ortogonales generados con el procedimiento de Gram-Schmidt.

La inclusión de la teoría trigonométrica en la formulación final del macro elemento, asegura una adecuada predicción de las deformaciones y tensiones tangenciales en laminados gruesos, y posibilita el estudio de las tensiones interlaminares.

El resultado final de esta tesis es un macro elemento finito enriquecido, formulado a partir del Principio de los Trabajos Virtuales mediante un planteo integral. El elemento propuesto permite la discretización de placas de formas complejas, obteniéndose mallas con mínima cantidad de elementos, que dan lugar a matrices y vectores globales en donde pueden considerarse fácilmente las diversas condiciones de contorno, e incluso apoyos o discontinuidades internas en la superficie de la placa en estudio.

Además de lo expresado, a partir de los resultados de esta tesis, se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- Se demostró que el uso de los polinomios ortogonales como funciones de enriquecimiento en la aproximación de las componentes del campo de desplazamientos, genera soluciones convergentes y estables.
- El desarrollo del proceso de ensamblaje y la aplicación de las condiciones de contorno se lleva a cabo de manera simple.
- El procedimiento desarrollado permite un tratamiento unificado que posibilita resolver placas de variadas geometrías sin necesidad de la generación de mallas densas, discretizando el dominio en un número mínimo de macro elementos, con una optimización en las tareas de pre y post-proceso en los códigos computacionales

implementados. Esto resulta sumamente apropiado en problemas de diseño y optimización donde se deben llevar adelante un número considerable de cálculos.

- El bajo número de grados de libertad involucrados en el análisis de placas mediante el macro elemento propuesto, frente al elevado número de incógnitas (y elevado costo computacional) presentes en una formulación basada en teorías multicapas, representa una gran ventaja del método propuesto, reduciendo los costos computacionales y permitiendo análisis repetitivos en etapas de diseño en las que se buscan valores óptimos de las variables, como ser: secuencias de laminación, espesor de capas, orientación de las fibras, etc.
- Una determinación precisa de las deformaciones y tensiones (normales y tangenciales) en el espesor de la placa es de suma importancia en el diseño de laminados, ya que permite el correcto y riguroso estudio de la delaminación. Aún en placas laminadas que puedan considerarse geoméricamente como delgadas, las tensiones interlaminares deben ser calculadas con teorías que incluyan la deformación cortante transversal, debido a que los laminados presentan escasa rigidez transversal. La teoría trigonométrica de deformación por corte permite la inclusión de la deformación tangencial transversal de manera eficiente, ya que en su cinemática resultan satisfechas a priori las condiciones de contorno correspondientes a las superficies libres de laminado. Por otra parte, no es necesario el empleo de factores de corrección por cortante y la formulación obtenida está libre de bloqueo (*Shear locking*).
- La metodología propuesta puede ser implementada fácilmente en un programa de computadora. La construcción de los términos que forman los elementos de las matrices del sistema de ecuaciones se lleva a cabo de manera simple. Esto se debe a la transformación de espacios empleada, a la generación de las funciones de enriquecimiento y al desarrollo del proceso de ensamblaje.
- La formulación es fácilmente parametrizable, ya que cada macro elemento puede escribirse en función de invariantes que relacionan las propiedades geométricas y/o mecánicas, lo que constituye un plus adicional que puede ser utilizado para la generación de ábacos para emplear en procesos de diseño.

- En relación a los resultados numéricos obtenidos se puede afirmar que las formas modales de vibración obtenidas con la metodología propuesta tienen una notable coincidencia con las obtenidas por otros autores. Se obtienen muy buenos resultados adoptando pocos términos en la función de enriquecimiento, tanto en el caso estático como en el dinámico.

6.2 CONTRIBUCIONES Y PUBLICACIONES DE ESTA TESIS

La formulación e implementación computacional de un elemento placa enriquecido mediante la incorporación de polinomios ortogonales de Gram-Schmidt, basadas en la versión h-p del Método de los Elementos Finitos, combinadas con la técnica de mapeo de espacios y el ensamblaje de elementos, representa el aporte global de esta tesis.

Los primeros estudios, referidos a placas isótropas delgadas son un aporte en sí mismos, y han sido publicados en:

- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2009). “Desarrollo de un elemento finito jerárquico para placas utilizando polinomios de Gram-Schmidt”. *Mecánica Computacional*, 28: 747-766.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2010). “Ensamblaje de elementos finitos jerárquicos para el análisis estático y dinámico de placas cuadriláteras”. *Anales de las XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*.

La incorporación de la anisotropía del material permitió extender la formulación para su aplicación en placas laminadas. Este modelo ha sido publicado en:

- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2012). “Formulación y ensamblaje de elementos finitos jerárquicos para el análisis estático y dinámico de placas cuadriláteras laminadas”. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, 9: 4-21.

La utilización de la Teoría de Primer Orden (FSDT), tanto en la formulación basada en el método de Ritz, como en la formulación del macro elemento finito, hizo factible el estudio de placas laminadas gruesas, obteniendo resultados muy satisfactorios y en concordancia con los publicados por otros autores. Algunos resultados han sido publicados en:

- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2011). “Static analysis of thick laminated plates using enriched macro elements”. Proceedings of the *16th International Conference on Composite Structures*. Formato digital.
- Rango R.F., Bellomo F.J., Nallim L.G. (2012). “A general Ritz algorithm for the static analysis of arbitrarily laminated composite plates using First Order Shear Deformation Theory”. *The Journal of Engineering Research*. En prensa.
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2013). “Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements”. *Composite Structures*. Manuscript available on line, doi: 10.1016/j.compstruct.2013.01.028, in Press.

El empleo de la Teoría Trigonométrica (TSDT) elimina la necesidad de usar un factor de corrección por corte, representa una distribución más realista de deformaciones y tensiones tangenciales en el espesor de placas laminadas gruesas, y permite la obtención de valores precisos de tensiones interlaminares. Esto representa un aporte muy significativo, ya que la herramienta computacional desarrollada permite un correcto y más afinado procedimiento para el diseño de estructuras tipo placa, constituyendo una herramienta sumamente útil y versátil. Este modelo se publicó en:

- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2012). “Análisis de placas laminadas mediante macro elementos usando teoría trigonométrica de deformación por corte”. *Mecánica Computacional*, 31: 1379-1398.

Una comparación de las teorías de placas clásica, de primer orden y trigonométrica, ha sido presentada en:

- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2012). “Analisi statica e dinamica di piastre laminate sottili e spesse usando macroelementi arricchiti”. Seminario del Dipartimento di Ingegneria Civile, Edile ed Ambientale, Università degli Studi di Padova, Italia.

6.3 BECAS Y PARTICIPACIÓN EN PROYECTOS DE INVESTIGACIÓN

Becas obtenidas durante la realización de esta tesis:

- Beca de Postgrado CONICET Tipo I (abril 2008 – abril 2011)

- Beca de Postgrado CONICET Tipo II (abril 2011 – abril 2013)
- Beca Erasmus Mundus. Università degli Studi di Padova, Italia. (noviembre 2011 – mayo 2012)

Participación en los siguientes proyectos de investigación:

- Proyecto SPU 15-14-192 “Desarrollo y aplicación de modelos para el análisis de vulnerabilidad sísmica”. Financiado por SPU (Secretaría de Políticas Universitarias Ministerio de Educación de la Nación Argentina). Directora: Dra. Liz Nallim. Período: 28/12/2010 hasta 31/06/2013.
- Proyecto PIP CONICET 0105/2010 “Modelos no lineales para materiales compuestos”. Financiado por CONICET. Directora: Dra. Bibiana Luccioni. Período: 01/04/2011 hasta 30/04/2014.
- Proyecto CIUNSa N°1903/09 “Modelos para el análisis de estructuras de material compuesto laminado”. Financiado por CIUNSa (Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta). Directora: Dra. Liz Nallim. Período: 01/01/2010 hasta 31/12/2013.
- PICTO (Proyecto de Investigación Científica y Tecnológica Orientado) N°36690 “Mecánica de elementos estructurales: teoría y aplicaciones”. Financiado por FONCYT. Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica. Directora: Dra. Liz Nallim. Período: 15/02/2008 hasta 15/02/2010.
- Proyecto A/024063/09 “Análisis y evaluación de la vulnerabilidad sísmica en la ciudad de Salta”, de cooperación ínter universitaria entre España y Argentina, financiado por la Agencia Española de Cooperación Internacional (AECI) y la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC). Director: Dr. Alejandro Barbat Horia. Período: 01/01/2010 hasta 31/12/2010.
- Proyecto A/012257/07 y A/017127/08 “Reparación y refuerzo de estructuras de hormigón armado con materiales compuestos”, de cooperación ínter universitaria entre España y Argentina, financiado por la Agencia Española de Cooperación Internacional (AECI) y la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC). Director: Dr. Alejandro Barbat Horia. Período: 01/01/2008 hasta 31/12/2009.

6.4 SUGERENCIAS PARA LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

Siguiendo los lineamientos generales de este trabajo, se sugieren algunas líneas de investigación, las cuales permitirán profundizar, generalizar y extender las formulaciones desarrolladas.

- Extender la formulación del macro elemento obtenido a problemas no lineales en general, incluyendo un modelo de daño.
- Estudiar los efectos de la no linealidad material en el comportamiento estructural de laminados compuestos.
- Analizar la evolución del daño en estos laminados.
- Generalizar el mapeo de espacios para contemplar contornos curvos.
- Ampliar la formulación del macro elemento para abarcar el estudio de secuencias de laminación no simétricas, incorporando al campo de desplazamientos las aproximaciones para u y v , lo que permitirá también estudiar estructuras ensambladas no coplanares.
- Extender el empleo de la teoría trigonométrica de deformación por corte, incorporando la deformación y la tensión normal perpendicular al plano medio de laminados gruesos. Para esto se propone incorporar una cinemática que considere el desplazamiento transversal w con funciones coseno en términos del espesor z .
- Incluir en la formulación placas de espesor variables. Este paso sería muy simple, ya que dentro de cada macro elemento se puede considerar una variación de la función que define el espesor de la placa: $h(x, y)$. Análogamente puede generalizarse este procedimiento a *graded plates*.
- Aplicar el modelo a placas sándwich, también sería un paso simple, ya que éstas se caracterizan por tener una “lámina” media mucho más débil que las capas externas (*Soft core*). En este caso se debería recalcularse las rigideces de cada capa, considerando que presentan espesores y propiedades muy disímiles entre ellas.
- Combinar la aproximación de campos de desplazamientos basada en una teoría trigonométrica de deformación por corte, con una teoría zig-zag para considerar la

continuidad de las tensiones de corte transversal en la interfaz entre láminas contiguas, sería una extensión interesante. Esto podría resultar muy útil en el estudio del comportamiento límite.

- Incorporar el macro elemento en un programa multipropósito no lineal termomecánico acoplado, PLCd, software desarrollado, por un grupo de investigadores del Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE), entre los que participan los directores de esta tesis y que se encuentra disponible en el aula CIMNE UNSa.
- Estudiar la incorporación de un grado de libertad de rotación alrededor de un eje normal al plano de la placa (*drilling DOF*).

ANEXO A

CUERPO ANISÓTROPO - ECUACIONES DE LA ELASTICIDAD

A.1 INTRODUCCIÓN

Se realiza aquí una breve revisión de las ecuaciones de la elasticidad de un cuerpo anisótropo, ya que las mismas se utilizan en los diferentes capítulos de esta tesis. Las ecuaciones gobernantes del movimiento de un cuerpo sólido pueden clasificarse en las siguientes categorías básicas.

- 1) Cinemática
- 2) Cinética
- 3) Ecuaciones constitutivas.

En lo que sigue se presenta una revisión de estas ecuaciones.

A.2 CINEMÁTICA

A.2.1 DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO [Reddy (2003), Malvern (1969)]

La cinemática es el estudio de los cambios geométricos o deformaciones de un cuerpo, sin consideración de las fuerzas causantes de la deformación.

Sea un cuerpo deformable (o sistema estructural) \mathbf{B} de geometría, constitución y carga conocidas. Bajo ciertas restricciones geométricas y bajo la acción de cargas, el cuerpo experimentará movimiento y deformación (es decir cambios geométricos dentro del cuerpo). Si las cargas aplicadas son dependientes del tiempo, la deformación del cuerpo será una función del tiempo. Si las cargas se aplican lentamente, de manera que la deformación dependa únicamente de las cargas, el cuerpo tomará una forma definitiva al final de cada aplicación de carga. Sea que la deformación dependa o no del tiempo, el cuerpo estará en equilibrio para todo instante.

El cuerpo \mathbf{B} para $t = 0$ tiene una configuración \mathbf{C}^0 y una partícula X del cuerpo ocupa la posición \mathbf{X} . En un tiempo $t > 0$, el cuerpo asume una nueva configuración \mathbf{C} y la partícula X ocupa la posición \mathbf{x} .

En la mecánica del continuo hay dos formas comúnmente usadas para describir el movimiento:

a) *Descripción referencial*: Las variables independientes son la posición \mathbf{X} de la partícula en una configuración arbitraria de referencia \mathbf{C}^R y el tiempo t . Cuando se toma como configuración de referencia la correspondiente al tiempo $t = 0$, la descripción referencial se denomina *descripción Lagrangeana* $\mathbf{C}^R \equiv \mathbf{C}^0$. El movimiento se describe entonces mediante $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ que da simbólicamente la posición \mathbf{x} ocupada en el tiempo t por la partícula que ocupaba la posición \mathbf{X} en la configuración de referencia.

En coordenadas cartesianas:

(X_1, X_2, X_3) se denominan *coordenadas materiales* de la partícula o coordenadas de su posición en la configuración de referencia.

(x_1, x_2, x_3) son las *coordenadas espaciales* que dan la posición en el tiempo t .

- b) *Descripción espacial o Euleriana*: el movimiento se refiere a la configuración actual \mathbf{C} que ocupa el cuerpo \mathbf{B} . La descripción espacial centra la atención en una dada región del espacio. Durante un movimiento del cuerpo \mathbf{B} una partícula representativa X ocupa una sucesión de puntos que forman una curva en el espacio Euclídeo. Esta curva está dada paramétricamente por $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$.

A.2.2 DEFORMACIONES Y RELACIONES DEFORMACIÓN – DESPLAZAMIENTO [Reddy (2003), Malvern (1969)]

Cuando el cuerpo sufre deformación por la acción de fuerzas externas, la partícula $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ se desplaza a una nueva posición $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. El desplazamiento de la partícula está dado por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad \text{o} \quad u_i = x_i - X_i \quad (\text{A.1})$$

Si el desplazamiento de cada partícula del cuerpo es conocido, se puede construir la configuración deformada \mathbf{C} desde la configuración no deformada de referencia \mathbf{C}^0 . En la descripción Lagrangeana, los desplazamientos se expresan en términos de las coordenadas materiales X_i , y se tiene:

$$u_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) - X_i \quad (\text{A.2})$$

Consideremos dos partículas P y Q las cuales ocupan la posición $P : (X_1, X_2, X_3)$ y $Q : (X_1 + dX_1, X_2 + dX_2, X_3 + dX_3)$, respectivamente, en la configuración de referencia del cuerpo \mathbf{B} . Las partículas están separadas por la distancia infinitesimal $dS = \sqrt{dX_i dX_i}^*$ en la configuración no deformada \mathbf{C}^0 , y $d\mathbf{X}$ es el vector que une P y Q (ver Figura A.1.). Estas partículas se mueven a nuevas posiciones \bar{P} y \bar{Q} respectivamente en el cuerpo deformado. Las posiciones de \bar{P} y \bar{Q} son (x_1, x_2, x_3) y $(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ respectivamente. Las dos partículas están separadas ahora una distancia $ds = \sqrt{dx_i dx_i}$ en la configuración deformada \mathbf{C} , y $d\mathbf{x}$ es el vector que conecta \bar{P} con \bar{Q} .

* suma en el índice repetido

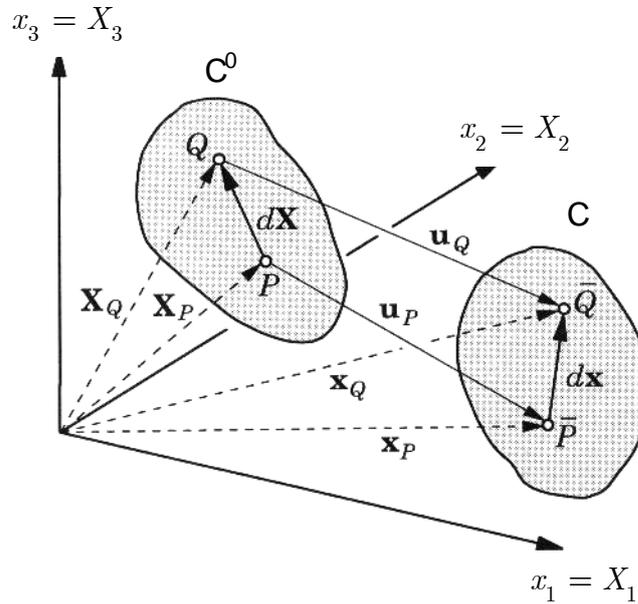


Figura A.1

Cinemática de la deformación de un medio continuo. [Reddy (2003)]

La deformación de un cuerpo puede medirse en términos del tensor de deformaciones \mathbf{E} , el cual se define como:

$$2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} \equiv (ds)^2 - (dS)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{A.3.a})$$

y en componentes de las coordenadas cartesianas rectangulares se tiene

$$2dX_i E_{ij} dX_j \equiv (ds)^2 - (dS)^2 = dx_i dx_i - dX_i dX_i \quad (\text{A.3.b})$$

El tensor \mathbf{E} es el *tensor de deformaciones de Green – Lagrange*.

Para expresar las deformaciones en términos de los desplazamientos se usa (A.2)

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (\text{A.4})$$

El diferencial total de \mathbf{x} está dado por

$$d\mathbf{x} \equiv d\mathbf{X} \cdot \nabla \mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}), \quad (\text{A.5})$$

donde ∇ denota el operador gradiente con respecto a las coordenadas naturales, \mathbf{X} . Entonces:

$$2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \left[(\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u})^T - \mathbf{I} \right] \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{A.6})$$

y resulta en coordenadas cartesianas rectangulares

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_i} \right) \left(\frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right] \quad (\text{A.7})$$

Si los gradientes de los desplazamientos son muy pequeños, $|u_{i,j}| \ll 1$, sus cuadrados y sus productos son despreciables comparados a $|u_{i,j}|$, y el tensor de deformaciones de Green se reduce a:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (\text{A.8})$$

donde ε_{ij} es el *tensor de deformaciones infinitesimales de Cauchy* y la diferencia entre $\partial u_i / \partial x_j$ y $\partial u_i / \partial X_j$ desaparece. La forma explícita del tensor de pequeñas deformaciones es:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

A.3 CINÉTICA [Reddy (1999), Malvern (1969)]

A.3.1 TENSIONES

La tensión en un punto es una medida de la fuerza por unidad de área. Esta fuerza por unidad de área que actúa sobre un área elemental ds del cuerpo deformado se llama *vector tensión*. El vector tensión en una superficie Δs en un punto P se define por:

$$T \equiv \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta s} \quad (\text{A.10})$$

donde $\Delta \mathbf{f}$ es el vector fuerza actuante.

El estado de tensión en un punto de un cuerpo puede ser representado por los vectores tensión actuantes en tres planos ortogonales que pasen por el punto, perpendiculares a los ejes coordenados rectangulares. Si $\mathbf{T}^{(i)}$ denota el vector tensión en un punto P sobre un plano perpendicular al eje x_i (Figura A.2). Cada vector $\mathbf{T}^{(i)}$, ($i = 1, 2, 3$) puede ser descompuesto en componentes según los ejes coordenados:

$$\mathbf{T}^{(i)} = \sigma_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \quad (i = 1, 2, 3), \quad (\text{A.11})$$

donde σ_{ij} denota las componentes del vector tensión $\mathbf{T}^{(i)}$ en el punto P en la dirección x_j , y $\hat{\mathbf{e}}_j$ es el vector base unitario en la dirección x_j . Resultan así un total de nueve componentes de tensión que dan lugar al *tensor de tensiones* σ . Las componentes del tensor de tensiones σ_{ij} se muestran en la Figura A.2.

Se puede mostrar usando la segunda ley de movimiento de Newton que el vector tensión $\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})}$ sobre un plano con normal unitaria $\hat{\mathbf{n}}$ está relacionado con el tensor de tensiones σ por:

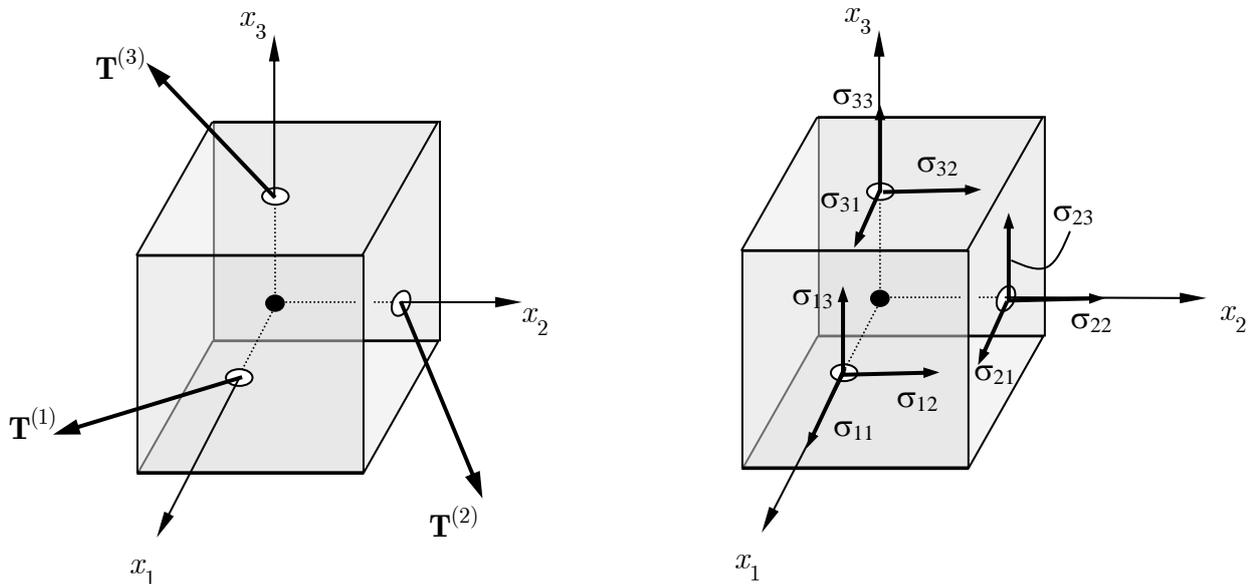


Figura A.2

Componentes del tensor de tensión sobre los planos coordenados. (a) vector tensión. (b) componentes de tensión

$$\mathbf{T}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \sigma = \sigma^T \cdot \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{A.12})$$

La ecuación (A.12) se denomina *fórmula de tensión de Cauchy* y σ es conocido como *tensor de tensiones de Cauchy*.

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

En la Ec. (A.12) el vector tensión $\mathbf{T}^{(\hat{n})}$ en un punto en el cuerpo deformado se determina como la fuerza por unidad de área en el cuerpo deformado. El elemento de área Δs en el cuerpo deformado corresponde a un elemento ΔS en la configuración de referencia, en tanto \mathbf{x} es la posición de la partícula material X en el cuerpo deformado cuya posición en la configuración de referencia era \mathbf{X} . El vector tensión puede estar referido al sistema de coordenadas de referencia (X_1, X_2, X_3) o al sistema espacial (x_1, x_2, x_3) . Las tensiones que se miden en la configuración deformada \mathbf{C} y están referidas al sistema de coordenadas en el cuerpo deformado se llaman *tensiones de Cauchy* o *tensiones verdaderas*, σ .

La medición de tensiones que se usa en análisis no lineal de cuerpos sólidos es el tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff, el cual se mide en el cuerpo deformado pero referido a las coordenadas materiales, X_i . Las componentes del tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff se denotan con P_{ij} . Para problemas de pequeñas deformaciones, la diferencia entre los dos tensores de tensión desaparecen.

A.3.2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Sea una dada masa de un cuerpo material \mathbf{B} que en cualquier instante ocupa un volumen Γ limitado por un área Ω . El cuerpo está sometido a la acción de fuerzas \mathbf{T} (por unidad de área) y \mathbf{f} (por unidad de volumen). El principio de conservación del momentum lineal establece que la razón de cambio del momentum lineal total de un dado medio continuo es igual a la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo \mathbf{B} , el cual inicialmente ocupaba una configuración \mathbf{C}^0 . El principio lleva al siguiente resultado:

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho \frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2}, \quad (\text{A.13})$$

donde ∇ es el operador gradiente con respecto a las coordenadas \mathbf{x} y ρ es la densidad del material en el cuerpo deformado. En (A.13), se suponen todas las variables función

de las coordenadas \mathbf{x} y del tiempo t . Además, la derivada temporal total $d\mathbf{x}/dt$ es igual al vector velocidad \mathbf{v} , y $d^2\mathbf{x}/dt^2$ es la derivada temporal total de \mathbf{v} , la que es igual a

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} \quad \text{o} \quad \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (\text{A.14})$$

Así, la derivada temporal total de una función en un sistema de coordenadas espacial consiste en dos partes: derivada temporal *instantánea* (parcial) y derivada temporal *convectiva*. La derivada parcial es una medida del cambio en la cantidad con el tiempo, mientras que la derivada temporal convectiva denota el cambio en la ubicación espacial de una partícula que instantáneamente ocupa la posición. En una descripción material la derivada temporal total es la misma que la derivada parcial del tiempo debido a que la partícula en consideración no cambia:

$$d\mathbf{x}/dt = \partial\mathbf{X}/\partial t + \partial u/\partial t = 0 + \partial u/\partial t$$

Las ecuaciones de movimiento (A.13) pueden expresarse en términos del tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff \mathbf{P} refiriendo todas las variables a las coordenadas de referencia \mathbf{X}

$$\nabla \cdot (\mathbf{P} \cdot \nabla\mathbf{x}) + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \nabla \cdot [\mathbf{P} \cdot (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})] + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (\text{A.15})$$

donde ρ_0 es la densidad en la configuración de referencia. Expresado en componentes se puede escribir:

$$\frac{\partial}{\partial X_j} \left(P_{jm} \frac{\partial x_i}{\partial X_m} \right) + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial X_j} \left[P_{jm} \left(\delta_{im} + \frac{\partial u_i}{\partial X_m} \right) \right] + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{A.16})$$

Se debe notar que las ecuaciones de movimiento son no lineales en ambas descripciones. Son no lineales en la descripción espacial debido a que la derivada temporal de la velocidad contiene una parte convectiva (el segundo término en la ecuación A.14) que depende del vector velocidad \mathbf{v} . Para movimientos muy lentos, el término convectivo es despreciable y las ecuaciones de movimiento se vuelven lineales, a menos que el comportamiento constitutivo sea no lineal. Las ecuaciones de movimiento en la descripción material son no lineales debido a las grandes deformaciones (es decir debido a $\partial x_i/\partial X_m$). Cuando las deformaciones son pequeñas,

$\partial x_i / \partial X_m = \delta_{im}$, las ecuaciones de movimiento en término de las tensiones se vuelven lineales, la no linealidad puede venir de relaciones desplazamiento – deformación no lineal y/o de ecuaciones tensión – deformación no lineales.

Cuando los desplazamientos y los gradientes de desplazamientos son pequeños, entonces el tensor de tensiones de Piola – Kirchhoff \mathbf{P} es aproximadamente igual al tensor de tensiones de Cauchy σ :

$$\frac{\rho_0}{\rho} \approx 1 \qquad \mathbf{P} \approx \sigma$$

Luego la ecuación de movimiento para el caso de pequeños desplazamientos es:

$$\nabla \cdot \sigma + \mathbf{f} = \rho_0 \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} \qquad \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial X_j} + f_i = \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad (\text{A.17})$$

Como se estableció anteriormente las ecuaciones (A.17) serán no lineales en término de desplazamiento, si las relaciones desplazamiento – deformación o las relaciones tensión – deformación son no lineales.

A.4 ECUACIONES CONSTITUTIVAS [Reddy (2003), Malvern (1969)]

A.4.1. LEY DE HOOKE GENERALIZADA

Las relaciones cinemáticas y los principios de la mecánica son aplicables a cualquier continuo independiente de su constitución física. Aquí se consideran las ecuaciones que caracterizan al material individual y a su reacción a las cargas aplicadas. Estas ecuaciones se llaman *ecuaciones constitutivas*. La formulación de las ecuaciones constitutivas para un dado material está regida por ciertas reglas (axiomas constitutivos). No se discutirá esto aquí, sólo se analizarán las relaciones constitutivas lineales para sólidos sujetos a pequeñas deformaciones.

El material de un cuerpo se dice *homogéneo* si las propiedades del material son las mismas a través del cuerpo. En un cuerpo *heterogéneo*, las propiedades del material son función de la posición. Un cuerpo *anisótropo* es aquel que tiene diferentes propiedades materiales en diferentes direcciones en un punto dado, es decir las propiedades materiales son direccionalmente dependientes. Un cuerpo *isótropo* es aquel

para el cual, en un punto, cada propiedad material es la misma en todas las direcciones. Además, un material isótropo o anisótropo puede ser homogéneo o heterogéneo.

Un cuerpo material se denomina *idealmente elástico* cuando, bajo condiciones isotérmicas, recobra completamente su forma original luego que se quitan las fuerzas causantes de la deformación, y hay una relación uno a uno entre el estado de tensión y el estado de deformación. Las ecuaciones constitutivas que se describen aquí no incluyen fluencia a tensión constante y relajación de tensiones a deformación constante. Así, los coeficientes que se especifican en la relación constitutiva entre tensiones y deformaciones se suponen constantes durante la deformación.

La ley de Hooke generalizada que relaciona las nueve componentes de tensión con las nueve componentes de deformación puede escribirse como:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \quad i, j = 1, \dots, 6$$

donde σ_i son las componentes de tensión en un cubo elemental, C_{ij} es la matriz de rigidez y ε_j son las componentes de deformación. La notación que se utiliza se muestra en la Tabla 1 comparada con la notación tensorial, para situaciones en las que los tensores de tensión y de deformación son simétricos (en el caso en que las fuerzas de cuerpo están ausentes).

TABLA A.1. Notación compacta y notación tensorial para tensiones y deformaciones

Tensiones		Deformaciones	
Notación tensorial	Notación compacta	Notación tensorial	Notación compacta
σ_{11} (σ_1)	σ_1	ε_{11} (ε_1)	ε_1
σ_{22} (σ_2)	σ_2	ε_{22} (ε_2)	ε_2
σ_{33} (σ_3)	σ_3	ε_{33} (ε_3)	ε_3
$\tau_{23} = \sigma_{23}$	σ_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$	ε_4
$\tau_{31} = \sigma_{31}$	σ_5	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	ε_5
$\tau_{12} = \sigma_{12}$	σ_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	ε_6

La matriz de rigidez C_{ij} , tiene 36 constantes. A través de la teoría de la elasticidad se puede demostrar que $C_{ij} = C_{ji}$, por lo que son 21 las constantes

independientes para un caso general de material anisótropo. Por lo tanto la relación tensión - deformación para el caso más general dentro del campo elástico lineal está dada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

NOTA: En lo que sigue los sistemas de coordenadas usados son solamente para la descripción de las simetrías materiales, y estos en general difieren de aquellos utilizados para la descripción del problema. En adelante se utilizan coordenadas cartesianas (x, y, z) para formular las ecuaciones gobernantes y se usan las ternas $(1, 2, 3)$ o (x_1, x_2, x_3) para las coordenadas materiales.

A.4.2 REGLAS DE TRANSFORMACIÓN

Dado un sistema de referencia caracterizado por los vectores base unitarios $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ y otro sistema de referencia con los vectores base $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ y ambos sistemas relacionados por una rotación de los ejes coordenados (Figura A.3), las reglas de transformación son

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_i &= R_{ij} \mathbf{e}'_j, & \mathbf{e}_i &= R_{ji} \mathbf{e}'_j, & i, j &= 1, 2, 3 \\ R_{ij} &\equiv \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_j), & R_{ji} &\equiv \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_j) \end{aligned} \tag{A.18}$$

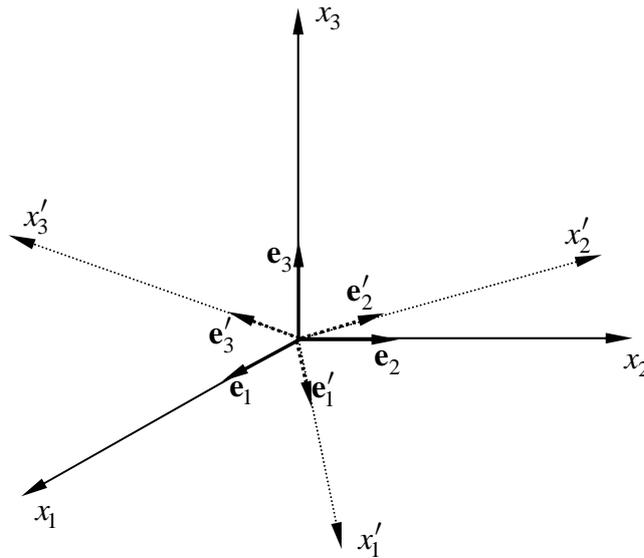


Figura A.3

Rotación de un sistema de referencia con vectores base \mathbf{e}_i a otro con vectores base \mathbf{e}'_i

Estas relaciones describen una transformación lineal de coordenadas ortogonales y pueden expresarse matricialmente de la siguiente manera

$$\mathbf{e}' = \mathbf{R}\mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{R}^T\mathbf{e}' \quad (\text{A.19})$$

donde \mathbf{R} es la matriz de transformación o rotación. En el caso de ejes ortogonales como los mostrados en la Fig. A.4, la matriz \mathbf{R} es simétrica y unitaria. Esto significa que el determinante de esta matriz es unitario ($\text{Det } \mathbf{R} = |R_{ij}| = 1$) y la matriz inversa \mathbf{R}^{-1} coincide con la matriz transpuesta ($\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$).

La regla de transformación (A.18) puede interpretarse como una regla para vectores o para tensores de rango uno. La generalización para tensores de rango dos, en particular para el tensor de tensiones es

$$\sigma'_{ij} = R_{ik}R_{jl}\sigma_{kl}, \quad \sigma_{ij} = R_{ki}R_{lj}\sigma'_{kl} \quad (\text{A.20})$$

Si se expresa el tensor de tensiones en forma vectorial (ver Tabla A.1) resultan las siguientes transformaciones

$$\sigma'_p = T_{pq}^\sigma \sigma_q, \quad \sigma_p = (T_{pq}^\sigma)^{-1} \sigma'_q, \quad p, q = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.21})$$

De igual forma se pueden encontrar las expresiones para la transformación de deformaciones

$$\varepsilon'_p = T_{pq}^\varepsilon \varepsilon_q, \quad \varepsilon_p = \left(T_{pq}^\varepsilon\right)^{-1} \varepsilon'_q, \quad p, q = 1, \dots, 6 \quad (\text{A.22})$$

donde las matrices de transformación T_{pq}^σ y T_{pq}^ε están dadas respectivamente por

$$\begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 & 2R_{12}R_{13} & 2R_{11}R_{13} & 2R_{11}R_{12} \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & 2R_{22}R_{23} & 2R_{21}R_{23} & 2R_{21}R_{22} \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & 2R_{32}R_{33} & 2R_{31}R_{33} & 2R_{31}R_{32} \\ R_{21}R_{31} & R_{22}R_{32} & R_{23}R_{33} & R_{22}R_{33} + R_{23}R_{32} & R_{21}R_{33} + R_{23}R_{31} & R_{21}R_{32} + R_{22}R_{31} \\ R_{11}R_{31} & R_{12}R_{32} & R_{13}R_{33} & R_{12}R_{33} + R_{13}R_{32} & R_{11}R_{33} + R_{13}R_{31} & R_{11}R_{32} + R_{12}R_{31} \\ R_{11}R_{21} & R_{12}R_{22} & R_{13}R_{23} & R_{12}R_{23} + R_{13}R_{22} & R_{11}R_{23} + R_{13}R_{21} & R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 & R_{12}R_{13} & R_{11}R_{13} & R_{11}R_{12} \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & R_{22}R_{23} & R_{21}R_{23} & R_{21}R_{22} \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & R_{32}R_{33} & R_{31}R_{33} & R_{31}R_{32} \\ 2R_{21}R_{31} & 2R_{22}R_{32} & 2R_{23}R_{33} & R_{22}R_{33} + R_{23}R_{32} & R_{21}R_{33} + R_{23}R_{31} & R_{21}R_{32} + R_{22}R_{31} \\ 2R_{11}R_{31} & 2R_{12}R_{32} & 2R_{13}R_{33} & R_{12}R_{33} + R_{13}R_{32} & R_{11}R_{33} + R_{13}R_{31} & R_{11}R_{32} + R_{12}R_{31} \\ 2R_{11}R_{21} & 2R_{12}R_{22} & 2R_{13}R_{23} & R_{12}R_{23} + R_{13}R_{22} & R_{11}R_{23} + R_{13}R_{21} & R_{11}R_{22} + R_{12}R_{21} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

En síntesis, en notación matricial, la regla de transformación para tensiones y deformaciones puede escribirse como

$$\sigma' = T^\sigma \sigma, \quad \varepsilon' = T^\varepsilon \varepsilon, \quad \sigma = \left(T^\sigma\right)^{-1} \sigma', \quad \varepsilon = \left(T^\varepsilon\right)^{-1} \varepsilon' \quad (\text{A.25})$$

La comparación de $\sigma_{ij} = R_{ki}R_{lj}\sigma'_{kl}$ con $\sigma_p = \left(T_{pq}^\sigma\right)^{-1} \sigma'_q$ y de $\varepsilon_{ij} = R_{ki}R_{lj}\varepsilon'_{kl}$ con $\varepsilon_p = \left(T_{pq}^\varepsilon\right)^{-1} \varepsilon'_q$ lleva a un importante resultado sobre la relación entre la inversa y la transpuesta de las matrices de transformación de tensiones y deformaciones

$$\left(T^\sigma\right)^{-1} = \left(T^\varepsilon\right)^T, \quad \left(T^\varepsilon\right)^{-1} = \left(T^\sigma\right)^T \quad (\text{A.26})$$

Las relaciones de transformación para las matrices de rigidez y de flexibilidad C y S pueden obtenerse considerando que $\sigma = C\varepsilon$ y $\sigma' = C'\varepsilon'$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{T}^\sigma)^{-1} \boldsymbol{\sigma}' &= \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} (\mathbf{T}^\varepsilon)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}', \\
\boldsymbol{\sigma}' &= \mathbf{T}^\sigma \mathbf{C} (\mathbf{T}^\varepsilon)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}', \\
\mathbf{T}^\sigma \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}' = \mathbf{C}' \boldsymbol{\varepsilon}' = \mathbf{C}' \mathbf{T}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon}, \\
\boldsymbol{\sigma} &= (\mathbf{T}^\sigma)^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{T}^\varepsilon \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{A.27}$$

respectivamente.

Considerando (A.26) las relaciones de transformación para la matriz de rigidez resulta

$$\mathbf{C}' = \mathbf{T}^\sigma \mathbf{C} (\mathbf{T}^\sigma)^T, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{T}^\varepsilon)^T \mathbf{C}' \mathbf{T}^\varepsilon \tag{A.28}$$

y en notación indicial

$$C'_{ij} = T_{ik}^\sigma T_{jl}^\sigma C_{kl}, \quad C_{ij} = T_{ik}^\varepsilon T_{jl}^\varepsilon C'_{kl} \tag{A.29}$$

El mismo procedimiento lleva a las relaciones para la matriz de flexibilidad

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}^\varepsilon \mathbf{S} (\mathbf{T}^\sigma)^{-1}, \quad \mathbf{S} = (\mathbf{T}^\varepsilon)^{-1} \mathbf{S}' \mathbf{T}^\sigma \tag{A.30}$$

O bien, teniendo en cuenta (A.26) se tiene

$$\mathbf{S}' = \mathbf{T}^\varepsilon \mathbf{S} (\mathbf{T}^\varepsilon)^T, \quad \mathbf{S} = (\mathbf{T}^\sigma)^T \mathbf{S}' \mathbf{T}^\sigma \tag{A.31}$$

y en notación indicial

$$S'_{ij} = T_{ik}^\varepsilon T_{jl}^\varepsilon S_{kl}, \quad S_{ij} = T_{ik}^\sigma T_{jl}^\sigma S'_{kl} \tag{A.32}$$

A.4.3 DISTINTOS TIPOS DE SIMETRÍA ELÁSTICA

Los casos más importantes en los que se presenta algún tipo de simetría elástica son los siguientes:

1) Un plano de simetría elástica

Suponiendo que el plano de simetría elástica es $x_3 = z = 0$ (o sea el plano 1-2), la ley generalizada de Hooke quedará expresada de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Un material con estas características se llama monoclinico y tiene 13 constantes elásticas independientes.

Es evidente que durante un proceso de tracción o compresión simple en la dirección perpendicular al plano de simetría elástica, los ángulos entre líneas normales y paralelas al plano de simetría elástica y aquellos ubicados sobre este, no sufrirán deformación y permanecerán rectos. Por esto, un cuerpo que sufre esta deformación mantiene la forma de paralelepípedo rectangular, cuatro lados del mismo son rectángulos y los dos restantes paralelogramos. Cuando no hay planos de simetría elástica, un paralelepípedo rectangular, el cual está sujeto ya sea, a tracción o a compresión, se transformará en un paralelepípedo general (ver Figura A.4). *Las direcciones normales a los planos de simetría elástica se denominan direcciones principales de elasticidad ó direcciones materiales principales.* Para este caso de simetría, sólo una dirección principal pasa a través de cada punto. Esta clase de simetría la tienen por ejemplo los feldespatos.

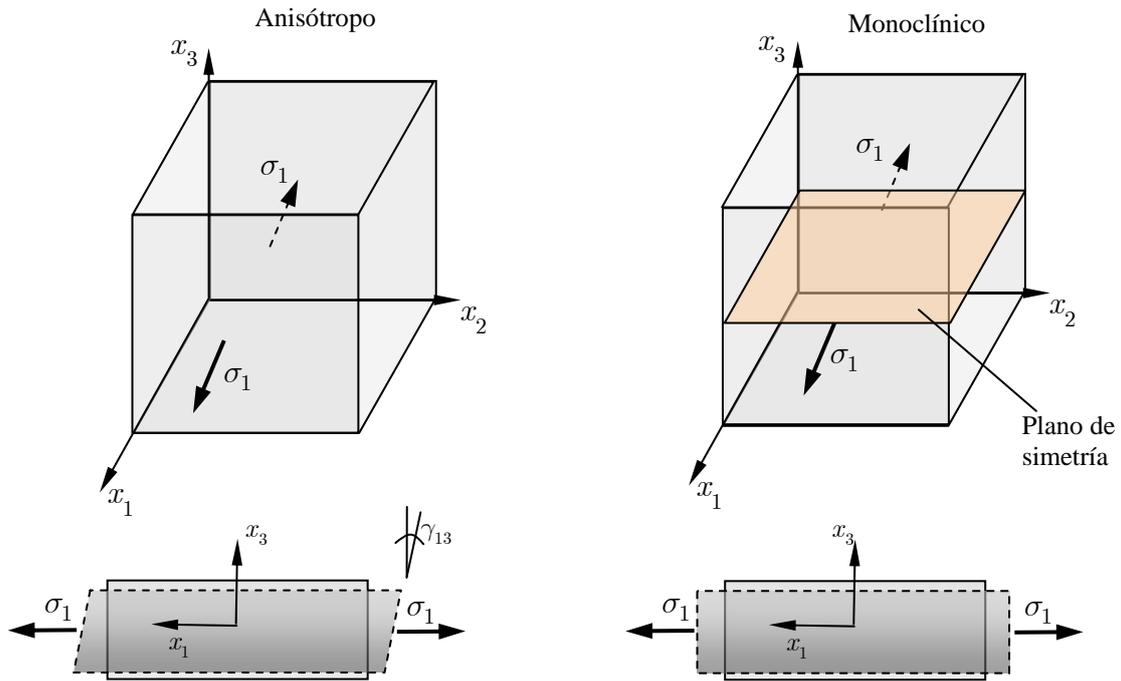


Figura A.4

Las tensiones normales σ_1 producen deformaciones tangenciales γ_{13} en un material con anisotropía generalizada (derecha) y no producen deformaciones tangenciales en un material monoclinico (izquierda).

2) Dos planos de simetría elástica

Si hay dos planos ortogonales de simetría elástica para un material, existirá simetría relativa a un tercer plano mutuamente ortogonal. La relación tensión deformación en coordenadas alineadas con las direcciones principales están dadas por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

En este caso el número de constantes elásticas independientes en la matriz de rigidez es 9. Este tipo de material se denomina *ortótropo*. Es importante notar que no hay interacción entre las tensiones normales σ_1 , σ_2 , σ_3 y las deformaciones por corte γ_{23} , γ_{31} , γ_{12} tal como ocurre en materiales anisótropos (en virtud, por ejemplo, de la

existencia de C_{14}). De igual manera no hay interacción entre las tensiones tangenciales y las deformaciones normales, ni entre las tensiones tangenciales y las deformaciones por corte en diferentes planos. Esto significa que si tomamos de un cuerpo ortótropo un elemento en forma de un paralelepípedo rectangular, con sus lados paralelos a los planos de simetría elástica, el mismo mantendrá su forma cuando sea sometido a tracción o compresión en una dirección. Con la aplicación de la carga cambiará la longitud de los lados, pero los ángulos entre los lados mantienen su valor.

3) Un plano de isotropía

En este caso, en cada punto del material hay un plano en el cual las propiedades elásticas son iguales en todas las direcciones. Por eso un material con estas características se denomina transversalmente isótropo. Si, por ejemplo, el plano 1-2 es el plano de isotropía, luego los subíndices 1 y 2 se pueden intercambiar. La relación tensión deformación presenta sólo 5 constantes independientes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.35})$$

Una dirección normal al plano de isotropía y todas las direcciones en este plano se consideran direcciones principales. Estos materiales se denominan *transversalmente isótropos*.

4) Simetría completa, cuerpo isótropo

En este caso, cada plano de un cuerpo isótropo es un plano de simetría elástica y cada dirección es una dirección principal. La relación tensión deformación presenta sólo 2 constantes elásticas independientes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.36})$$

En este caso especial la ecuación anterior puede escribirse de la siguiente manera

$$\sigma_{ij} = \left[\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] \varepsilon_{kl}$$

donde λ y μ son las constantes elásticas de Lamé y δ_{ij} es la delta de Kronecker. Las constantes de Lamé están relacionadas con el módulo de elasticidad transversal G , el módulo de elasticidad longitudinal E y el coeficiente de Poisson ν como sigue:

$$\mu \equiv G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Los coeficientes C_{ij} para material isótropo están dados por:

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$$

A.4.4 RELACIÓN DEFORMACIÓN- TENSION PARA MATERIALES ANISÓTROPOS [Jones (1999), Leknitskhy (1966), Vinson (1990)]

La relación deformación – tensión puede escribirse de la siguiente manera:

$$\varepsilon_j = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1, \dots, 6$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.37})$$

donde S_{ij} es la inversa de la matriz de rigidez y se denomina matriz de flexibilidad.

Los casos particulares más importantes descriptos arriba pueden escribirse igualmente en términos de la relación deformación – tensión para diferentes materiales.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{1. \text{ Monoclínico}} \\
 & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & S_{36} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} & 0 \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{2. \text{ Ortótropo}} \\
 & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.39})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{3. \text{ Transversalmente isótropo}} \\
 & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{4. \text{ Isótropo}} \\
 & \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A.41})
 \end{aligned}$$

La Tabla A.2 resume los elementos de la matriz de flexibilidad para los tipos de modelos materiales descritos.

TABLA A.2. Característica de la matriz de flexibilidad para diferentes simetrías materiales (caso tridimensional)

Modelo material	Matriz de flexibilidad S_{ij}
Anisotropía (21 parámetros materiales independientes)	$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \text{Sim} & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix}$
Monoclínico (13 parámetros materiales independientes)	<p>Plano de simetría $x_3 = 0$</p> $S_{14} = S_{15} = S_{24} = S_{25} = S_{34} = S_{35} = S_{46} = S_{56} = 0$ <p>Plano de simetría $x_2 = 0$</p> $S_{14} = S_{16} = S_{24} = S_{26} = S_{34} = S_{36} = S_{45} = S_{56} = 0$ <p>Plano de simetría $x_1 = 0$</p> $S_{15} = S_{16} = S_{25} = S_{26} = S_{35} = S_{36} = S_{45} = S_{46} = 0$
Ortótropo (9 parámetros materiales independientes)	<p>Tres planos de simetría $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$</p> $S_{14} = S_{15} = S_{16} = S_{24} = S_{25} = S_{26} = S_{34} =$ $S_{35} = S_{36} = S_{45} = S_{46} = S_{56} = 0$
Transversalmente isótropo (5 parámetros materiales independientes)	<p>Plano de isotropía $x_3 = 0$</p> $S_{11} = S_{22}, S_{23} = S_{13}, S_{44} = S_{55}, S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$ <p>Plano de isotropía $x_2 = 0$</p> $S_{11} = S_{33}, S_{12} = S_{23}, S_{44} = S_{66}, S_{55} = 2(S_{33} - S_{13})$ <p>Plano de isotropía $x_1 = 0$</p> $S_{22} = S_{33}, S_{13} = S_{12}, S_{55} = S_{66}, S_{44} = 2(S_{22} - S_{23})$ <p>Los demás S_{ij} son como los de materiales ortótropos</p>
Isótropo (2 parámetros materiales independientes)	$S_{11} = S_{22} = S_{33}, S_{12} = S_{13} = S_{23},$ $S_{44} = S_{55} = S_{66} = 2(S_{11} - S_{12})$ <p>Los demás $S_{ij} = 0$</p>

Si se desarrolla la expresión (A.37) para materiales anisótropos, se tiene:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\tau_{23} + S_{15}\tau_{31} + S_{16}\tau_{12} \\ \dots\gamma_{12} &= S_{16}\sigma_1 + S_{26}\sigma_2 + S_{36}\sigma_3 + S_{46}\tau_{23} + S_{56}\tau_{31} + S_{66}\tau_{12} \end{aligned} \quad (\text{A.42})$$

Si por ejemplo se aplica a un cuerpo anisótropo una tensión uniaxial $\sigma_1 = \sigma$, la deformación queda descrita por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= S_{11}\sigma, & \varepsilon_2 &= S_{12}\sigma, & \varepsilon_3 &= S_{13}\sigma \\ \gamma_{23} &= S_{14}\sigma, & \gamma_{31} &= S_{15}\sigma, & \gamma_{12} &= S_{16}\sigma \end{aligned} \tag{A.43}$$

La interpretación física de estas deformaciones es que cada lado de un cubo tendrá luego de la deformación diferentes longitudes (debido a que $S_{11} \neq S_{12} \neq S_{13}$), además cada lado del cubo sufre una deformación angular diferente (debido a que $S_{14} \neq S_{15} \neq S_{16}$). O sea, para un material anisótropo existe un significativo acoplamiento entre las tensiones aplicadas y las variadas respuestas de deformación.

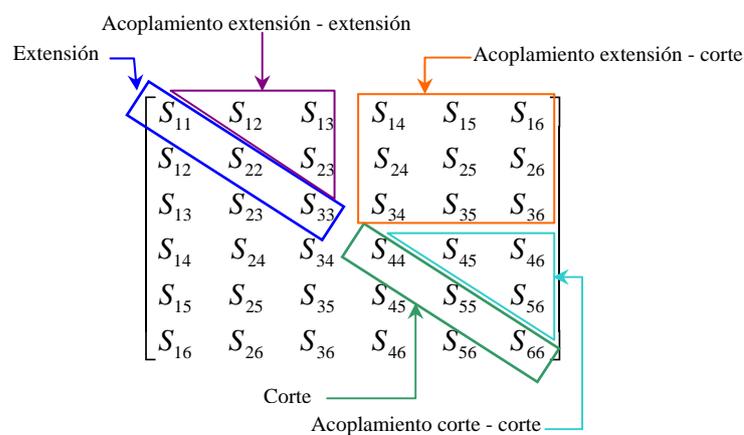


Figura A.5
Significado físico de los términos de la relación tensión deformación para materiales anisótropos

En general decimos que cada uno de los términos S_{11} , S_{22} y S_{33} representa la respuesta extensional a una tensión individual aplicada, σ_1 , σ_2 y σ_3 , respectivamente, en la misma dirección. Los términos S_{44} , S_{55} y S_{66} representan la deformación angular como respuesta a una tensión tangencial aplicada en el mismo plano. Los términos S_{12} , S_{13} y S_{23} representan el acoplamiento entre distintas deformaciones y tensiones normales (se los llama acoplamiento extensión – extensión, es el conocido como efecto Poisson). Los términos S_{14} , S_{15} , S_{16} , S_{24} , S_{25} , S_{26} , S_{34} , S_{35} y S_{36} representan la deformación normal como respuesta a una tensión tangencial aplicada (acoplamiento corte - extensión). Por último, los términos S_{45} , S_{46} y S_{56} representan la deformación tangencial como respuesta a una tensión tangencial aplicada en otro plano (acoplamiento corte - corte). En contraste, el único acoplamiento que existe en un material isótropo es el de extensión – extensión (ver Figura A.5).

A.4.5 CONSTANTES DE INGENIERÍA PARA MATERIALES ANISÓTROPOS

Las constantes de ingeniería, a menudo llamadas constantes técnicas, son los módulos de Young, los coeficientes de Poisson y los módulos de corte, además de otras constantes que se definen en el Anexo B.

Estas constantes se miden a través de ensayos simples tales como tensión uniaxial y corte puro. Así, estas constantes tienen una interpretación física más directa que las relativamente abstractas componentes de las matrices de rigidez, o su inversa.

Las componentes de la matriz de flexibilidad se determinan más fácilmente que los de la matriz de rigidez. Para un material ortótropo las componentes de la matriz S en términos de las constantes de ingeniería son:

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.44})$$

donde

E_1, E_2, E_3 = Módulos de Young (de elasticidad longitudinal) en las direcciones 1, 2 y 3.

ν_{ij} = coeficientes de Poisson (acoplamiento extensión – extensión, ó deformación

longitudinal – deformación longitudinal). O sea, es el cociente entre la deformación en la dirección j y la deformación en la dirección i , cuando la tensión es aplicada en la dirección i . $\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i}$, para $\sigma_i = \sigma$ y todas las demás tensiones nulas.

G_{23}, G_{31}, G_{12} = Módulos de corte (de elasticidad transversal) en los planos 2-3,3-1 y 1-2.

Un material ortótropo que es tensionado según los ejes materiales principales (coordenadas 1, 2 y 3) no tendrá acoplamientos de corte – extensión, ni de corte – corte.

Las constantes elásticas para un cuerpo ortótropo (A.44), están dadas para las direcciones principales de elasticidad 1, 2, 3 y se denominan constantes elásticas principales (en oposición a las constantes en las ecuaciones para un sistema de coordenadas arbitrario).

La simetría elástica considerada es la más importante, ya que este tipo de simetría es la que se encuentra más a menudo en la práctica.

Debido a que la matriz de rigidez es simétrica, se tiene también que:

$$S_{ij} = S_{ji}, \quad (\text{A.45})$$

de donde se obtiene fácilmente:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j. \quad (\text{A.46})$$

Así, para un material ortótropo estas tres relaciones recíprocas deben satisfacerse.

Debido a que las matrices de rigidez y la de flexibilidad son mutuamente inversas, en el caso de materiales ortótropos sus componentes están relacionadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{S_{22}S_{33} - S_{23}^2}{S}, \quad C_{12} = \frac{S_{13}S_{23} - S_{12}S_{33}}{S}, \quad C_{13} = \frac{S_{12}S_{23} - S_{13}S_{22}}{S}, \quad C_{22} = \frac{S_{33}S_{11} - S_{13}^2}{S} \\ C_{23} &= \frac{S_{12}S_{13} - S_{23}S_{11}}{S}, \quad C_{33} = \frac{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}{S}, \quad C_{44} = \frac{1}{S_{44}}, \quad C_{55} = \frac{1}{S_{55}}, \quad C_{66} = \frac{1}{S_{66}} \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

donde

$$S = S_{11}S_{22}S_{33} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2 - S_{33}S_{12}^2 + 2S_{12}S_{23}S_{13}$$

La matriz de rigidez, C_{ij} , para un material ortótropo en términos de las constantes de ingeniería, se obtiene invirtiendo la matriz S_{ij} . Las rigideces distintas de cero son:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}, C_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}, \\
C_{13} &= \frac{\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}, \\
C_{23} &= \frac{\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}, C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}
\end{aligned} \tag{A.48}$$

$$C_{44} = G_{23} \quad C_{55} = G_{31} \quad C_{66} = G_{12},$$

$$\text{donde } \Delta = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_2 E_3}$$

ANEXO B

MATERIALES COMPUESTOS – LÁMINAS ANISÓTROPAS

B.1 INTRODUCCIÓN

En este anexo se desarrollan algunos conceptos fundamentales referidos a materiales compuestos. Además, se particularizan las relaciones tensión – deformación para una lámina, analizada como una macro unidad estructural de material anisótropo.

B.2 MATERIAL COMPUESTO - DEFINICIÓN [Jones (1999), Vinson (1987)]

El término material compuesto significa que dos o más materiales se combinan a escala macroscópica para formar un tercer material con características mecánicas más apropiadas a la función que está destinado cumplir. La ventaja de un material compuesto es que, si está bien diseñado, en general exhibe mejores cualidades que sus componentes. Algunas de las propiedades que pueden mejorarse al formar un material compuesto son: resistencia, rigidez, resistencia a la corrosión, reducción de peso,

resistencia a fatiga, propiedades térmicas y acústica, comportamiento dependiente de la temperatura, etc.

Naturalmente, no todas estas propiedades pueden mejorarse simultáneamente. El objetivo es básicamente crear un material que tenga solamente las características necesarias para el diseño.

Materiales reforzados con fibra, matrices reforzadas con resinas que presentan altas relaciones resistencia/peso y rigidez/peso tienen mucha importancia en aplicaciones a aviación y vehículos aeroespaciales. El hormigón armado es otro ejemplo de material reforzado con fibra.

B.2.1 CLASIFICACIÓN Y CARACTERÍSTICAS [Jones (1999), Reddy (1997)]

Los tipos más comúnmente aceptados de materiales compuestos son:

1. Materiales compuestos con fibras, que consisten en fibras de un material en una matriz de otro material
2. Materiales compuestos con partículas, que consisten en macro partículas de un material dentro de una matriz de otro material.
3. Materiales compuestos laminados, que consiste en capas de varios materiales incluyendo compuestos de los dos primeros tipos.

B.2.2 COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES COMPUESTOS

Los materiales compuestos presentan diversas propiedades mecánicas que son diferentes de aquellas más comunes en los materiales convencionales en ingeniería. Algunas características son meramente modificaciones del comportamiento convencional; otras son totalmente nuevas y requieren nuevos procedimientos analíticos y experimentales.

Muchos desarrollos teóricos se han formulado para materiales homogéneos e isótropos, en contraste con esto, los materiales compuestos son a menudo heterogéneos y anisótropos. Debido a la naturaleza heterogénea inherente a los materiales compuestos

estos son analizados, en general, desde distintos puntos de vista. De acuerdo a lo expresado, Altenbach *et. al* (2004) establece que, independientemente de las diferentes posibilidades de formular teorías para vigas, placas o láminas, se pueden resumir las diferentes escalas del modelado de elementos estructurales de material compuesto en tres (ver Figura B.1):

- *Nivel micromecánico*, donde las características mecánicas promedio de una lámina se estiman a partir de las características conocidas de los materiales de las fibras y de la matriz, teniendo en cuenta la fracción de volumen de fibra y la disposición topológica. El modelado micromecánico lleva a una correlación entre las propiedades constitutivas y las propiedades promedio del compuesto. En general, la teoría de mezclas clásica o refinada (Oller *et al.*, 2003) o teorías de homogeneización (Eshelby, 1957; Mori and Tanaka, 1973), En un nivel micromecánico una lámina se considera como un material ortótropo quasi homogéneo.
- *Nivel macromecánico*, donde las propiedades materiales efectivas (promedio) de un laminado se estiman a partir de las características promedio de un conjunto de láminas teniendo en cuenta la secuencia de apilamiento. La modelación macromecánica lleva a una correlación entre las propiedades conocidas de las láminas y las propiedades efectivas de un laminado. En un nivel macromecánico, un laminado es considerado como estáticamente equivalente a una única lámina con un comportamiento anisótropo quasi homogéneo.
- *Nivel estructural*, donde la respuesta mecánica de un elemento estructural, como vigas, placas, membranas, etc, deben ser analizadas teniendo en cuenta la posibilidad de formular teorías estructurales de diferentes órdenes.

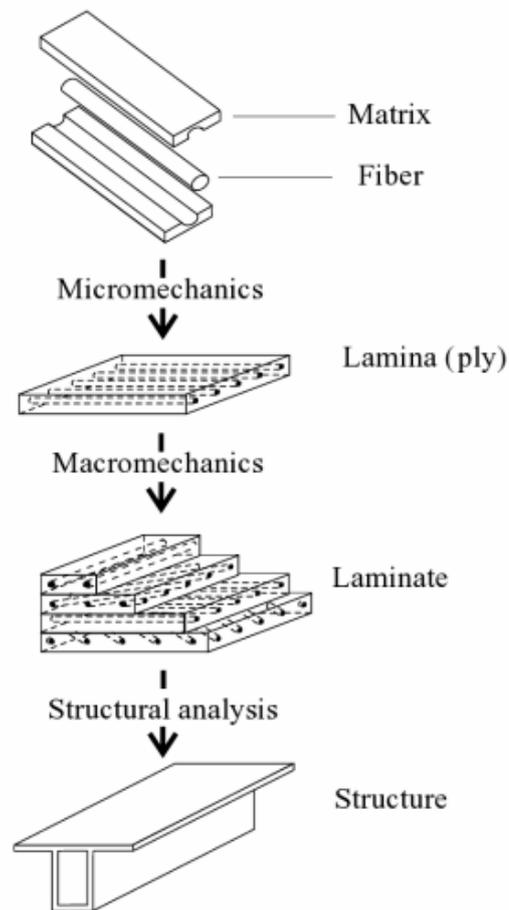


Figura B.1 Niveles de análisis de una estructura de material compuesto laminado (Kollár and Springer, 2003)

B.3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS DE UNA LÁMINA [Reddy (1997), Jones (1999)]

Una *lámina* es una típica macro unidad de material compuesto. Representa un bloque fundamental de construcción y son la base de la formación de laminados. Una lámina reforzada con fibras consiste en fibras embebidas en una matriz, que puede ser un metal tal como aluminio o no metálica como un polímero. Las fibras pueden ser unidireccionales, bidireccionales, entrelazadas o fibras discontinuas.

En la formulación de las ecuaciones constitutivas de una lámina se supone, para las aplicaciones desarrolladas en esta tesis, que la misma es un continuo.

Los materiales compuestos son heterogéneos desde un punto de vista microscópico. Desde un punto de vista macroscópico, donde las propiedades de un

material compuesto se derivan de un promedio de los pesos de los materiales que lo constituyen, fibra y matriz, los materiales compuestos son supuestos homogéneos.

La ley generalizada de Hooke para un material anisótropo bajo condiciones isotérmicas (ver anexo A) está dada por

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j$$

Cuando el material posee uno o más ejes de simetría material, el número de constantes elásticas independientes se reduce como se vio en detalle en el anexo A. Frecuentemente, las láminas reforzadas con fibras se clasifican como ortótropas, es decir el material tiene tres planos de simetría material. Si los planos coordenados se eligen paralelos a los tres planos ortogonales de simetría material, las relaciones tensión - deformación y las relaciones deformación - tensión pueden escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix}$$

B.3.1 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO DE UNA LÁMINA

El modelado y análisis a nivel macro-mecánico de una lámina se basa en las propiedades materiales promedio y en considerar a esta como homogénea. Los métodos para determinar las propiedades promedio se basan en diferentes procedimientos, como por ejemplo: teoría de mezclas (Oller,...), homogenización (...) y técnicas experimentales.

Para el análisis del comportamiento elástico de una lámina reforzada con fibras alineadas en una dirección se asumirán las siguientes consideraciones:

- Las propiedades de las fibras y de la matriz pueden compendiarse en un material homogéneo con comportamiento ortótropo. Esta suposición permite desarrollar relaciones tensión – deformación y formular la respuesta de una lámina reforzada con fibra, a nivel estructural, de una manera relativamente simple.
- Tres de las seis componentes del tensor tensión son generalmente mucho menores que las otras tres, es decir, que la hipótesis de un estado plano de tensión, basado en la manera en la cual los materiales reforzados con fibra se emplean en elementos estructurales como vigas, placas o membranas, será suficientemente preciso. Con la hipótesis que el plano $x_1 - x_2$ del sistema de coordenadas principal es el estado de tensión en el plano, las tensiones en el plano $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ son consideradas mucho mayores en magnitud que las componentes fuera del plano $\sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}$.

De manera conjunta a la suposición de estado plano de tensión los siguientes errores conceptuales muy comunes deben evitarse:

- Debe estimarse la magnitud y efectos de las componentes de tensión $\sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}$. Los materiales compuestos reforzados con fibra son a menudo muy débiles para resistir tensiones transversales al plano $x_1 - x_2$ y, por lo tanto, las tensiones fuera del plano pueden ser pequeñas en magnitud, pero lo suficientemente grandes como para causar falla en el material compuesto.
- La suposición que $\sigma_3 = 0$ no implica que la deformación lineal asociada ε_3 sea también nula o despreciable, ya que las tensiones en el plano $x_1 - x_2$ pueden causar una deformación significativa en la dirección x_3 .

La Figura B.2 muestra una lámina delgada con refuerzo unidireccional en el plano $x_1 - x_2$ en estado plano de tensión. Para materiales ortótropos, sujetos a un estado plano de tensiones, resulta implicada una deformación fuera del plano

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad \gamma_{23} = 0 \quad \gamma_{31} = 0 \quad (\text{B.1})$$

donde
$$S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \quad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}$$

Luego, la relación deformación – tensión se reduce a:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

acompañada por la ecuación (B.1), donde

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \quad (\text{B.3})$$

Se debe notar que para determinar ε_3 de la ecuación (B.1), ν_{13} y ν_{23} deben conocerse, además de las constantes en las relaciones (B.3).

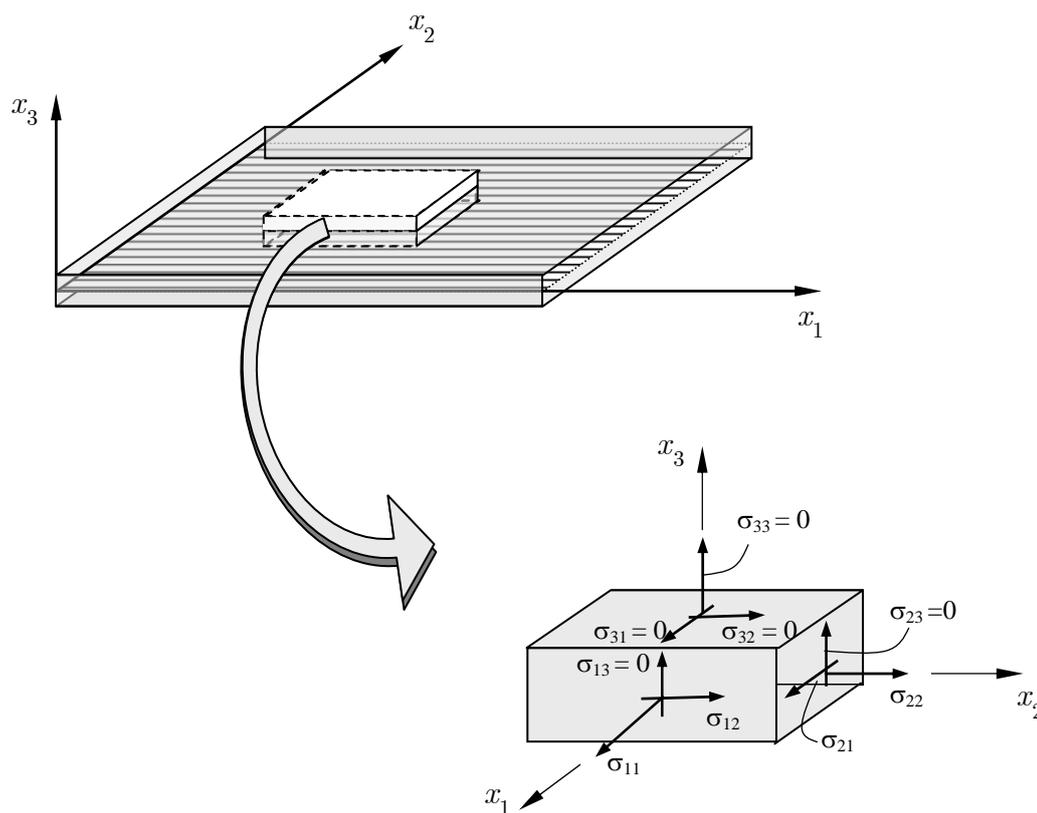


Figura B.2. Estado plano de tensión en una lámina

La relación deformación - tensión en la ecuación (B.2) puede invertirse, de esta manera se obtiene la relación tensión – deformación

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

donde Q_{ij} se denominan rigideces reducidas para un estado de tensiones planas (en el plano 1-2 o $x_1 - x_2$) los cuales pueden determinarse de dos maneras:

- (1) como las componentes de la matriz inversa de S_{ij} en la relación (B.2), o bien
- (2) directamente a partir de C_{ij} aplicando la condición $\sigma_3=0$. Esto lleva a la siguiente

$$\text{expresión } Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}} \quad i, j = 1, 2, 6.$$

El término C_{63} es cero porque no existe acoplamiento entre corte – extensión para una lámina ortótropa en las coordenadas materiales principales.

Para una lámina ortótropa, los componentes Q_{ij} están dados por

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}, & Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

O bien, puestas en términos de las constantes de ingeniería, resultan

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \\ Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, & Q_{66} &= G_{12}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Se destaca que para un material ortótropo sometido a un estado plano de tensiones las propiedades del material independientes son cuatro, $E_1, E_2, \nu_{12}, G_{12}$.

Además se utiliza la relación:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}. \quad (\text{B.7})$$

B.3.2 DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS EN OTRO SISTEMA DE REFERENCIA

Se definieron las tensiones y deformaciones en las coordenadas materiales principales para un material ortótropo. Sin embargo, las direcciones principales de ortotropía pueden no coincidir con las direcciones coordenadas que son geoméricamente naturales para resolver el problema. Por ejemplo, cuando se analiza una cáscara cilíndrica de generatriz circular, reforzada con fibras helicoidales (Figura B.3). En este caso las coordenadas naturales para resolver el problema de la cáscara son x, y, z , mientras que las direcciones principales materiales son x', y', z' . Otro ejemplo lo constituyen las placas con laminados en distintas orientaciones y las reforzadas con fibras.

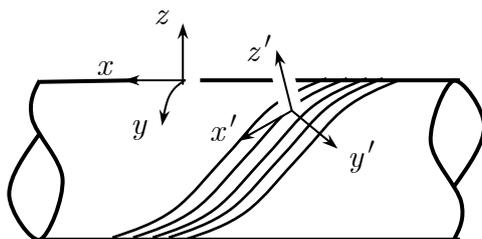


Figura B.3

Cáscara cilíndrica con refuerzos de fibras helicoidales

Las ecuaciones de transformación que permiten expresar las tensiones en un sistema de coordenadas xy en términos de las tensiones en un sistema de coordenadas 1–2 se obtienen a través de un análisis análogo al círculo de Mohr utilizando principios elementales de la mecánica (ver Figura B.4). La transformación está dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

De manera análoga, la transformación para las deformaciones está dada por:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

donde

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2nm \\ n^2 & m^2 & -2nm \\ -nm & nm & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\text{y } m = \cos \phi \quad n = \sin \phi$$

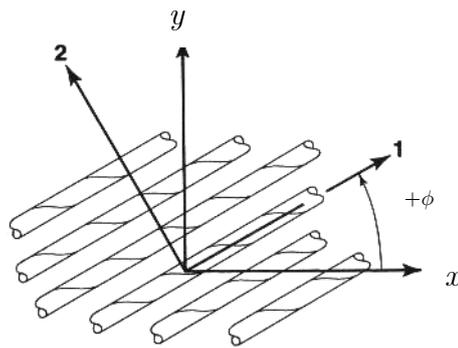


Figura B.4. Rotación positiva de los ejes materiales principales desde los ejes xy

Se utiliza también la transformación de Reuter [Jones (1999)]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [\mathbf{R}] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

Donde $[\mathbf{R}]$ está dada por:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (B.12)$$

Una *lámina especialmente ortótropa* es aquella cuyos ejes principales de elasticidad están alineados con los ejes naturales del cuerpo (Figura B.5). En este caso la ley constitutiva queda expresada por

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}. \quad (B.13)$$

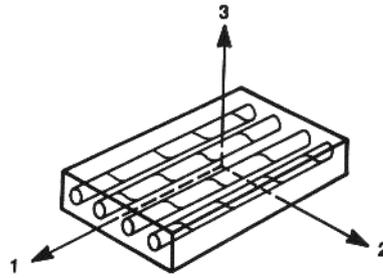


Figura B.5. Lámina con refuerzo de fibra unidireccional, especialmente ortótropa. [Jones (1999)]

En los casos en los que los ejes principales del material no coincidan con los ejes naturales del cuerpo que se analiza, conocida la relación tensión – deformación en las coordenadas materiales principales, se encuentra la relación tensión – deformación en las coordenadas xy .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [T]^{-1} [Q][R][T][R]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (B.14)$$

Se puede demostrar que $[T]^{-T} = [R][T][R]^{-1}$. Por lo que se llega a

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1} [Q][T]^{-T} \quad (B.15)$$

La relación tensión – deformación en el sistema xy está dada por:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Es importante notar que la matriz de rigideces reducida transformada \bar{Q}_{ij} tiene términos en las nueve posiciones a diferencia de la matriz Q_{ij} que presenta cuatro ceros. Sin embargo siguen siendo cuatro las constantes independientes del material, porque la lámina es ortótropa.

Para un caso general con coordenadas de cuerpo xy , existe acoplamiento entre las deformaciones por corte y las tensiones normales, y entre las tensiones tangenciales y las deformaciones normales, es decir existe acoplamiento corte – extensión. Así en coordenadas de cuerpo, aún una lámina ortótropa se comporta como anisótropa. Sin embargo, como estas láminas tienen características ortótropas en las direcciones materiales principales, se las denomina lámina con *ortotropía generalizada*. O sea, una lámina con *ortotropía generalizada* es una lámina ortótropa cuyos ejes materiales principales no están alineados con los ejes naturales del cuerpo.

La única ventaja que tiene una lámina con ortotropía generalizada respecto de una lámina anisótropa, es que la primera es más fácil de caracterizar experimentalmente. Para expresar la relación deformación - tensión en las coordenadas del cuerpo, es posible seguir dos procedimientos:

- (1) invertir la relación tensión – deformación (B.16), ó
- (2) aplicar la rotación (cambio de coordenadas) a la relación deformación - tensión expresada en las direcciones materiales principales y llevarla a las coordenadas del cuerpo. Para ello se escribe nuevamente la igualdad (B.2)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.17})$$

El procedimiento mencionado conduce a

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{T}]^T [\mathbf{S}] [\mathbf{T}] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.18})$$

donde $[\mathbf{T}]^T = [\mathbf{R}][\mathbf{T}]^{-1} [\mathbf{R}]^{-1}$ y

$$\bar{S}_{11} = S_{11}m^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}n^4,$$

$$\bar{S}_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66})m^2n^2 + S_{12}(n^4 + m^4),$$

$$\bar{S}_{22} = S_{11}n^4 + (2S_{12} + S_{66})n^2m^2 + S_{22}m^4,$$

$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})nm^3 - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})n^3m,$$

$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})n^3m - (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66})nm^3,$$

$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})m^2n^2 + S_{66}(n^4 + m^4).$$

Debido a la presencia de \bar{Q}_{16} y \bar{Q}_{26} en la expresión (B.16) y de \bar{S}_{16} y \bar{S}_{26} en la (B.18) la solución de problemas que involucren láminas con ortotropía generalizada es más complicada que la solución de problemas que involucren láminas especialmente ortótropas. El acoplamiento corte – extensión complica la solución práctica del problema. De hecho no hay diferencia entre soluciones para láminas con ortotropía generalizada y láminas anisótropas cuyas relaciones tensión – deformación, en estado de tensión plana, puede escribirse como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

o bien en forma inversa

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

donde las flexibilidades anisótropas en términos de las constantes de ingeniería son

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2}, \\
 S_{66} &= \frac{1}{G_{12}}, & S_{16} &= \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}}, & S_{26} &= \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}}.
 \end{aligned} \tag{B.21}$$

Las nuevas constantes de ingeniería que aparecen fueron definidas por Lekhnitskii (1963) de la siguiente manera:

$\eta_{i,j}$ = coeficiente de influencia mutua de primera clase, caracteriza la deformación longitudinal en la dirección i causado por la tensión tangencial en el plano ij .

$$\eta_{i,j} = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}} \tag{B.22}$$

para $\tau_{ij} = \tau$ y las demás tensiones nulas

$\eta_{ij,i}$ = coeficiente de influencia mutua de segunda clase, caracteriza la deformación angular en el plano ij causada por la tensión normal en la dirección i .

$$\eta_{ij,i} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i} \tag{B.23}$$

para $\sigma_i = \sigma$ y las demás tensiones nulas

Las otras constantes necesarias para definir las propiedades elásticas de un material anisótropo se denominan *coeficientes de Chentsov* y relacionan las deformaciones tangenciales de manera análoga a los coeficientes de Poisson que relacionan las deformaciones longitudinales. Pero los coeficientes de Chentsov no afectan el comportamiento de láminas sujetas a un estado plano de tensiones, ya que estos están relacionados en el caso general con S_{45} , S_{46} , S_{56} . Los coeficientes de Chentsov se definen como

$\mu_{ij,kl}$ = coeficiente de Chentsov, caracteriza la deformación angular en el plano kl causada por la tensión tangencial en el plano ij .

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}}, \tag{B.24}$$

para $\tau_{ij} = \tau$ y las demás tensiones nulas.

Los coeficientes de Chentsov verifican las siguientes relaciones recíprocas:

$$\frac{\mu_{kl,ij}}{G_{kl}} = \frac{\mu_{ij,kl}}{G_{ij}}. \quad (\text{B.25})$$

Los coeficientes de Chentsov son los llamados coeficientes de acoplamiento corte – corte.

Las deformaciones cortantes que se producen en un plano debidas a tensiones normales y tangenciales actuando en otro plano están dadas por

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= \frac{\eta_{1,13}\sigma_1 + \eta_{2,13}\sigma_2 + \mu_{12,13}\tau_{12}}{G_{13}}, \\ \gamma_{23} &= \frac{\eta_{1,23}\sigma_1 + \eta_{2,23}\sigma_2 + \mu_{12,23}\tau_{12}}{G_{23}}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Se debe notar que son necesarios tanto los coeficientes de acoplamiento corte – corte, como los de corte – extensión. Estas deformaciones tangenciales no se producen en un material ortótropo, a menos que actúen tensiones en coordenadas distintas a las coordenadas materiales principales. En tales casos, los coeficientes de acoplamiento corte – corte y corte – extensión se obtienen de las componentes de la matriz de flexibilidad transformadas tal como se muestra más adelante.

Si se comparan los términos de la matriz de flexibilidad ortótropa transformados, dados en la expresión (B.18) con los términos de la matriz de flexibilidad anisótropas, en términos de las constantes de ingeniería establecidos en (B.21), existe obviamente un coeficiente de acoplamiento corte – extensión aparente cuando una lámina ortótropa se somete a tensiones en ejes que no coinciden con los ejes materiales principales. Se designa a las coordenadas 1 y 2 en la Ec. (B.20) como x e y , ya que por *definición un material anisótropo no tiene direcciones materiales principales*. Luego se substituye los S_{ij} (con x e y) de la Ec. (B.21) en la Ec.(B.18). Finalmente las constantes de ingeniería aparentes para una lámina ortótropa con tensiones actuantes en las direcciones $x - y$ no principales son

$$\begin{aligned}
\frac{1}{E_x} &= \frac{1}{E_1} m^4 + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) n^2 m^2 + \frac{1}{E_2} n^4, \\
\nu_{xy} &= E_x \left[\frac{\nu_{12}}{E_1} (n^4 + m^4) - \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^2 m^2 \right], \\
\frac{1}{E_y} &= \frac{1}{E_1} n^4 + \left(\frac{1}{G_{12}} - \frac{2\nu_{12}}{E_1} \right) n^2 m^2 + \frac{1}{E_2} m^4, \\
\frac{1}{G_{xy}} &= 2 \left(\frac{2}{E_1} + \frac{2}{E_2} + \frac{4\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^2 m^2 + \frac{1}{G_{12}} (n^4 + m^4), \\
\eta_{xy,x} &= E_x \left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) nm^3 - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^3 m \right], \\
\eta_{xy,y} &= E_y \left[\left(\frac{2}{E_1} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) n^3 m - \left(\frac{2}{E_2} + \frac{2\nu_{12}}{E_1} - \frac{1}{G_{12}} \right) nm^3 \right].
\end{aligned} \tag{B.27}$$

Una implicación importante de la presencia del coeficiente de acoplamiento corte – extensión es que cuando se aplican cargas de tracción en direcciones distintas a las coordenadas materiales principales, se producen deformaciones tangenciales además de las usuales deformaciones longitudinales.

Según las expresiones (B.27) los módulos de anisotropía aparente, para una lámina ortótropa tensionada en un ángulo ϕ con las direcciones principales de elasticidad, varían con este ángulo.

En resumen las constantes de ingeniería para materiales anisótropos o con ortotropía generalizada son:

E_i = Módulo extensional, o módulo de elasticidad longitudinal (módulo de Young)

G_{ij} = Módulo de corte, o módulo de elasticidad transversal

ν_{ij} = Coeficientes de acoplamiento extensión – extensión (coeficientes de Poisson)

$\eta_{i,ij}$ $\eta_{ij,i}$ = Coeficientes de acoplamiento corte – extensión (coeficientes de influencia mutua)

$\mu_{ij,kl}$ = Coeficientes de acoplamiento corte – corte (coeficientes de Chentsov)

Las direcciones materiales principales dentro de cada capa de un laminado se denotarán para un sistema $x_1 - x_2$. Las constantes de ingeniería referidas a estos sistemas son: E_1, E_2, G_{12} y ν_{12} . Cuando las capas tienen refuerzo unidireccional estas cantidades tienen un significado físico específico. En particular, $x_1 = x_L$ es el eje paralelo a las fibras y $x_2 = x_T$ es el eje perpendicular a la dirección de las fibras. En este caso la notación será:

E_L = Módulo de Young paralelo a las fibras

E_T = Módulo de Young transversal a las fibras

ν_{LT} = Coeficientes de Poisson mayor.

G_{LT} = Módulo de corte relativo al plano $x_L - x_T$.

B.3.3 COMPORTAMIENTO ELÁSTICO EN LA DIRECCIÓN DEL ESPESOR DE LA LÁMINA

En la dirección $x_3 \equiv T'$ ortogonal al plano $L - T$ una lámina unidireccional (UD) es desde el punto de vista macro-mecánico quasi-isótropa. El comportamiento elástico en la dirección del espesor queda determinado por la matriz material y en un modelo tridimensional de una única capa UD conduce a una respuesta transversalmente isótropa con cinco parámetros materiales independientes

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv E_L, & E_2 &\equiv E_T = E_3 \equiv E_{T'}, & G_{12} &\equiv G_{LT} = G_{13} \equiv G_{LT'}, \\ \nu_{12} &\equiv \nu_{LT} = \nu_{13} \equiv \nu_{LT'}, \\ G_{23} &\equiv G_{TT'} = E_2 / [2(1 + \nu_{23})] \equiv E_T / [2(1 + \nu_{TT'})] \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

El comportamiento material en las direcciones $2 \equiv T$ y $3 \equiv T'$ es equivalente, por lo que (B.28) puede escribirse

$$\begin{aligned} E_2 &= E_3 \equiv E_T, & G_{12} &= G_{13} \equiv G_{LT}, \\ \nu_{12} &= \nu_{13} \equiv \nu_{LT}, \\ G_{23} &= E_2 / [2(1 + \nu_{23})] \equiv G_{TT} \equiv E_T / [2(1 + \nu_{TT})] \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

Como se expresó arriba las propiedades mecánicas en la dirección transversal a la orientación de las fibras están dominadas por la matriz, por lo que el efecto de la

deformación tangencial puede ser muy significativo. Para una rotación alrededor del eje $3 = x_3$ (ver Figura B.4), las transformaciones son válidas, resultando

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{13} & 0 & 0 & \bar{S}_{16} \\ & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{23} & 0 & 0 & \bar{S}_{26} \\ & & \bar{S}_{33} & 0 & 0 & \bar{S}_{36} \\ & & & \bar{S}_{44} & \bar{S}_{45} & 0 \\ & \text{Sim} & & & \bar{S}_{55} & 0 \\ & & & & & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

donde

$$\bar{S}_{13} = S_{13}m^2 + S_{23}n^2$$

$$\bar{S}_{23} = S_{13}n^2 + S_{23}m^2$$

$$\bar{S}_{33} = S_{33}$$

$$\bar{S}_{36} = 2S_{13}mn - 2S_{23}mn$$

$$\bar{S}_{44} = S_{44}m^2 + S_{55}n^2$$

$$\bar{S}_{45} = -S_{44}mn + S_{55}mn$$

$$\bar{S}_{55} = S_{44}n^2 + S_{55}m^2$$

En función de las constantes de ingeniería, resultan:

$$S_{13} = -\frac{\nu_{TL}}{E_T}, \quad S_{23} = -\frac{\nu_{TT}}{E_T}, \quad S_{33} = \frac{1}{E_T}, \quad S_{44} = \frac{1}{G_{TT}}, \quad S_{55} = \frac{1}{G_{LT}}$$

ANEXO C

PLACAS LAMINADAS: ESFUERZOS RESULTANTES

C.1 INTRODUCCIÓN

En este anexo se presentan la determinación de los esfuerzos en un elemento placa.

C.2 ESFUERZOS RESULTANTES EN UN ELEMENTO PLACA

La matriz constitutiva de una lámina simple referida al sistema de referencia global x, y, z ha sido formulada en el Anexo B, Ec. (B.30). Extendiendo la suposición de estado plano de tensión al laminado, la Ec. (B.30) puede reescribirse separando las deformaciones y tensiones tangenciales. Así, las tensiones de la k –ésima lámina, expresadas en función de los coeficientes de rigidez reducidos transformados, resultan

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{54} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}^{(k)} \quad (\text{C.1})$$

con

$$\sigma_z^{(k)} = 0, \quad \varepsilon_z^{(k)} = -\frac{1}{C_{33}}(C_{13}\varepsilon_x + C_{23}\varepsilon_y + C_{36}\gamma_{xy}) \quad (\text{C.2})$$

$\bar{Q}_{ij}^{(k)}$, $i, j = 1, 2, 6$ son las rigideces reducidas de la k -ésima lámina, funciones de $Q_{ij}^{(k)}$ y del ángulo de orientación de las fibras; $Q_{44}^{(k)}, Q_{45}^{(k)} = Q_{54}^{(k)}, Q_{55}^{(k)}$ tienen los mismo valores que los correspondientes coeficientes materiales $C_{44}^{(k)}, C_{45}^{(k)} = C_{54}^{(k)}, C_{55}^{(k)}$ (los cuales no se reducen por la suposición de estado plano). La discontinuidad de $Q_{ij}^{(k)}$ de una capa (o lámina) a otra implica la discontinuidad de las tensiones cuando se pasa de una lámina a otra.

El vector de fuerzas resultantes en el plano del laminado se obtiene integrando las componentes correspondientes en el espesor del laminado:

$$\mathbf{N} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{C.3})$$

Los momentos resultantes están dados por

$$\mathbf{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (\text{C.4})$$

Los cortantes transversales resultantes están dados por:

$$\mathbf{Q}^s = \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} dz \quad (\text{C.5})$$

donde Q^s es (de igual manera que las resultantes en el plano) un vector de fuerzas por unidad de longitud en la sección transversal del laminado para $x = const$ o $y = const$, respectivamente.

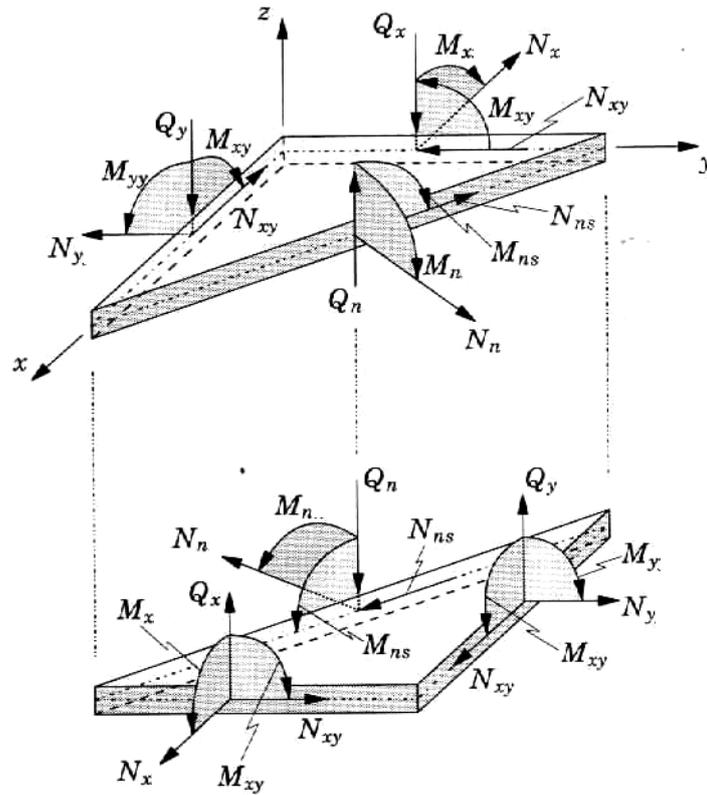


Figura C.1. Esfuerzos y momentos resultantes en un elemento placa [Reddy (2003)]

Finalmente, los momentos de inercia resultantes están dados por

$$\begin{Bmatrix} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} \rho_0 dz, \tag{C.6}$$

Aplicando las expresiones (C.3), (C.4) y (C.5) a un laminado de n capas como se ilustra en la Figura C.2, se obtiene:

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^n \mathbf{N}^{(k)}, \quad \mathbf{N}^{(k)T} = \begin{bmatrix} N_x^{(k)} & N_y^{(k)} & N_{xy}^{(k)} \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}^{(k)}, \quad \mathbf{M}^{(k)T} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_x^{(k)} & \mathbf{M}_y^{(k)} & \mathbf{M}_{xy}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.8})$$

$$\mathbf{Q}^s = \sum_{k=1}^n \mathbf{Q}^{s(k)}, \quad \mathbf{Q}^{s(k)T} = \begin{bmatrix} Q_x^{s(k)} & Q_y^{s(k)} \end{bmatrix} \quad (\text{C.9})$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (C.3), (C.4) y las Ecs. (C.7), (C.8) resulta:

$$\mathbf{N}^{(k)} = \int_{(h^{(k)})} \sigma^{(k)} dz = \sigma^{(k)} h^{(k)}, \quad h^{(k)} = x_3^{(k)} - x_3^{(k-1)} \quad (\text{C.10})$$

$$\mathbf{N} = \sum_{k=1}^n \sigma^{(k)} h^{(k)}$$

y

$$\mathbf{M}^{(k)} = \int_{(h^{(k)})} \sigma^{(k)} z dz = \sigma^{(k)} \frac{1}{2} \left(z^{(k)2} - z^{(k-1)2} \right) = \sigma^{(k)} h^{(k)} \bar{z}^{(k)} \quad (\text{C.11})$$

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^n \sigma^{(k)} h^{(k)} \bar{z}^{(k)} \quad \text{con} \quad \bar{z}^{(k)} = \frac{1}{2} \left(z^{(k)} + z^{(k-1)} \right)$$

Por otra parte, considerando modelos macro-mecánicos para el laminado se puede escribir

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y) + z \boldsymbol{\kappa}(x, y) \quad (\text{C.12})$$

donde las deformaciones $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ varían linealmente en el espesor del laminado. El vector de deformaciones en el plano o membranales está dado por $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y)$ y $z \boldsymbol{\kappa}(x, y)$ son las deformaciones longitudinales originadas por la flexión y la torsión, siendo $\boldsymbol{\kappa}(x, y)$ el vector que contiene las curvaturas flexionales y torsionales. Como se vio en el cuerpo de la tesis las expresiones de las componentes de curvatura son diferentes de acuerdo a la teoría empleada (CLPT, FSDT, THSDT, etc.).

Reemplazando la Ec. (C.12) en la Ec. (C.1) se obtiene:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(k)} = \mathbf{Q}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q}^{(k)} (\boldsymbol{\varepsilon} + z \boldsymbol{\kappa}) \quad (\text{C.13})$$

Las deformaciones membranales de cada lámina del laminado $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$, así como las curvaturas $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ y las rigideces reducidas $\bar{Q}_{11}^{(k)}, \bar{Q}_{12}^{(k)}, \bar{Q}_{16}^{(k)}$,

$\bar{Q}_{22}^{(k)}, \bar{Q}_{26}^{(k)}, \bar{Q}_{66}^{(k)}$ son constantes en el espesor $h^{(k)}$ de cada lámina, y por tanto, las Ecs.

(C.10) y (C.11) se reducen a

$$\mathbf{N} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \bar{Q}^{(k)} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} dz \right)}_{\mathbf{A}} \boldsymbol{\epsilon} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \bar{Q}^{(k)} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z dz \right)}_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\kappa} \quad (\text{C.14})$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{B}\boldsymbol{\kappa}$$

y

$$\mathbf{M} = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \bar{Q}^{(k)} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z dz \right)}_{\mathbf{B}} \boldsymbol{\epsilon} + \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \bar{Q}^{(k)} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} z^2 dz \right)}_{\mathbf{D}} \boldsymbol{\kappa} \quad (\text{C.15})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{B}\boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}$$

Las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}$ corresponden a las rigideces membranales, de acoplamiento y flexionales, respectivamente. Siguiendo un procedimiento análogo, reemplazando la Ec. (C.1) en la Ec. (C.9) se llega a

$$\mathbf{Q}^s = \sum_{k=1}^n \mathbf{C}^{s(k)} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} \boldsymbol{\sigma}^{s(k)} dz = \underbrace{\left(\sum_{k=1}^n \mathbf{C}^{s(k)} \int_{z^{(k-1)}}^{z^{(k)}} dz \right)}_{\mathbf{A}^s} \boldsymbol{\gamma}^s \quad (\text{C.16})$$

$$\mathbf{Q}^s = \mathbf{A}^s \boldsymbol{\gamma}^s$$

donde $\mathbf{C}^s = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\sigma}^s = \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}^s = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}^s = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}$

La Ec. (C.16) es una primera aproximación y consiste en considerar la deformación por corte transversal independiente de la coordenada z . \mathbf{A}^s contiene las componentes de rigidez cortante transversal. Se puede obtener una mejor aproximación si se reemplazan los coeficientes de rigidez cortante transversal A_{ij}^s por $(kA)_{ij}^s$, k_{ij}^s se denominan factores de corrección por corte. Los elementos de las matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{A}^s$ están dados por:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} h^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (\text{C.17})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} \bar{z}^{(k)} h^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n Q_{ij}^{(k)} \left(\bar{z}^{(k)^2} + \frac{h^{(k)^2}}{12} \right) h^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$A_{ij}^s = \sum_{k=1}^n C_{ij}^{(k)} h^{(k)}, \quad i, j = 4, 5$$

Las expresiones de las fuerzas resultantes en el plano del laminado, de los momentos y de los cortantes transversales pueden escribirse de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} N \\ M \\ Q^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & A^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \kappa \\ \gamma^s \end{bmatrix} \quad (\text{C.18})$$

Si se escribe la Ec. (C.18) expandiendo las submatrices de rigidez se pueden apreciar con claridad los distintos coeficientes de acoplamiento, tal como se muestra en la Figura C.2.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44}^s & A_{45}^s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45}^s & A_{55}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$$

Axil - Corte Axil - Flexión Axil - Torsión
Corte - Torsión Flexión - Torsión Corte transversal

Figura C.2. Axiles, Momentos y Cortes resultantes en una placa laminada, acoplamientos.

Las tensiones (σ_n, τ_{ns}) están relacionadas con las tensiones $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ a través de las siguientes ecuaciones de transformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.19})$$

Teniendo en cuenta la igualdad (C.19) es posible obtener

$$\begin{Bmatrix} N_n \\ N_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{Bmatrix} M_n \\ M_{ns} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} n_x^2 & n_y^2 & 2n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & n_x^2 - n_y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{C.21})$$

ANEXO D

MÉTODO DE RITZ – FUNCIONES COORDENADAS

D.1 INTRODUCCIÓN

En este anexo se presenta una síntesis de las técnicas variacionales utilizadas en el desarrollo de esta tesis. En particular se expone el método de Ritz a través de una solución a variables separables como la utilizada para resolver el problema planteado. También se exponen las propiedades que deben satisfacer las funciones coordenadas para obtener soluciones convergentes cuando se las utiliza en el método de Ritz. Por otra parte, se presenta por un lado, la técnica de generación de los polinomios ortogonales a través del proceso de Gram – Schmidt y por otro se presentan las funciones viga ordinarias que se utilizaron en el Capítulo 4 para comparar resultados.

D.2 EL MÉTODO DE RITZ [Kantorovich y Krylov (1964), Reddy (2003)]

Se expone a continuación la idea fundamental del Método de Ritz. Consideremos el problema de minimizar la siguiente integral doble:

$$I(u) = \iint_R F(x, y, u, u_x, u_y) dx dy, \quad (\text{D.1})$$

$$\text{con la condición } u = \varphi(s) \text{ sobre } \partial R, \quad (\text{D.2})$$

siendo ∂R el contorno que limita al dominio R . Sea u_0 la solución exacta del problema, y $I(u_0) = m$ el valor mínimo. Si se dispone de una función \bar{u} que satisface la condición (D.2) y para el cual el valor de $I(\bar{u})$ es próximo a $I(u_0)$, es claro que es posible expresar que \bar{u} sea una buena aproximación a la solución del problema u_0 . Mas aún, si se conoce una sucesión $\{\bar{u}_n\}$ de funciones que satisfacen (D.2) y para la cual $I(\bar{u}_n) \rightarrow m$ cuando n crece, cabe expresar que las \bar{u}_n se aproximen a u_0 .

Para la determinación de una función \bar{u} que de un valor de la integral próximo al mínimo, Ritz propuso el siguiente procedimiento. Consideremos una familia de funciones dependientes de varios parámetros a_k , dadas por:

$$\bar{u}_n(x, y) = a_1\varphi_1(x, y) + a_2\varphi_2(x, y) + \dots + a_n\varphi_n(x, y) \quad (\text{D.3})$$

y tal que para todos los valores de los parámetros la condición (D.2) se satisface[#]. Ahora limitaremos la clase de las funciones admisibles a las funciones de la familia (D.3) y entre ellas encontraremos la que da a la (D.1) el valor más bajo. Las funciones $\varphi_k(x, y)$ se denominan *funciones de aproximación* ó *funciones coordinadas*.

Si se substituyen en (D.1), u dada por la (D.3), y se realizan las derivaciones e integraciones necesarias, I se convierte en una función de las n variables a_1, a_2, \dots, a_n ; $I = I(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Puesto que deseamos obtener el mínimo de esta función, los a_k deben satisfacer el sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad (\text{D.4})$$

Resolviendo este sistema, se obtienen los valores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$; eligiendo la función de (D.3) correspondiente a estos valores de los parámetros, se habrá obtenido la solución aproximada:

$$\bar{u}_n(x, y) = \bar{a}_1\varphi_1(x, y) + \bar{a}_2\varphi_2(x, y) + \dots + \bar{a}_n\varphi_n(x, y)$$

[#] Para ello cada función $\varphi_i(x, y)$ debe satisfacer las condiciones de contorno

Debe notarse que cada familia de (D.3) está vinculada con la precedente al aumentar n en una unidad, por el hecho de contener a dicha precedente. Sea \bar{u}_n la n -ésima aproximación, puesto que cada familia contiene a todas las funciones de la precedente, es claro que los sucesivos mínimos obtenidos forman una sucesión no creciente

$$I(\bar{u}_1) \geq I(\bar{u}_2) \geq \dots$$

Es importante aclarar que si se supone que $I(\bar{u}_{n-1})$ se obtiene con los parámetros de los valores $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_{n-1}$; si fuera $I(\bar{u}_n) > I(\bar{u}_{n-1})$ cambiando los valores $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ de los parámetros por el juego de valores $\bar{a}'_1, \bar{a}'_2, \dots, \bar{a}'_{n-1}, 0$; se obtendría con la familia \bar{u}_n el valor menor $I(\bar{u}_{n-1})$ y por lo tanto $I(\bar{u}_n)$ no podría ser el mínimo que se obtiene con \bar{u}_n .

Es necesario establecer en qué casos se puede afirmar que la sucesión $I(\bar{u}_1), I(\bar{u}_2), \dots$ tiende al valor exacto m del mínimo. Es decir, en que casos se verifica:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\bar{u}_n) = I(u_0) = m. \tag{D.5}$$

Una condición suficiente para que se verifique (D.5) es lo que se conoce como *completitud* de la familia (D.3) en el siguiente sentido:

- Cualquiera sea la función u que satisfaga las condiciones de contorno, tal que u_x y u_y sean continuas en R , para todo $\varepsilon > 0$ existe un valor de n , y una función de la correspondiente familia u_n ; $u_{0n} = a_{01}\varphi_1 + a_{02}\varphi_2 + \dots + a_{0n}\varphi_n$, tal que se verifiquen las siguientes desigualdades en todo punto de R :

$$|u_{0n} - u| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial u_{0n}}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial u_{0n}}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right| < \varepsilon$$

Es decir, que cada función admisible junto con sus derivadas parciales puede ser aproximada tanto como se quiera mediante funciones de la familia u_n .

En efecto, si la condición de completitud se cumple y se la aplica a la solución exacta u_0 del problema; entonces es:

$$|u_{0n} - u_0| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial u_{0n}}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial x} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial u_{0n}}{\partial y} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right| < \varepsilon$$

De la continuidad de F ; resulta que la diferencia:

$$F\left(x, y, u_{0n}, \frac{\partial u_{0n}}{\partial x}, \frac{\partial u_{0n}}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right),$$

será arbitrariamente pequeña en la región R , con lo cual la diferencia de integrales también lo será:

$$I(\bar{u}_{0n}) - I(u_0) = \iint_R \left[F\left(x, y, u_{0n}, \frac{\partial u_{0n}}{\partial x}, \frac{\partial u_{0n}}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}\right) \right] dx dy < \varepsilon'$$

Ahora bien, u_{0n} es una de las funciones de (D.3); \bar{u}_n da a la integral el menor de los valores obtenidos con las funciones de dicha familia; entonces es $I(\bar{u}_n) \leq I(u_{0n})$.

Con lo cual resulta $I(u_0) \leq I(\bar{u}_n) \leq I(u_{0n}) < I(u_0) + \varepsilon'$. Es decir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I(\bar{u}_n) = I(u_0) = m.$$

Nota: Esto último no implica que sea $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{u}_n = u_0$. En general, la violación del requerimiento de completitud puede conducir a grandes errores.

En la siguiente sección se presenta un resumen de las características que deben reunir las funciones coordenadas.

D.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES COORDENADAS

Las funciones de aproximación o funciones coordenadas que se utilizan para aproximar el campo de desplazamientos cuando se aplica el método de Ritz deben elegirse de manera apropiada. La ecuación (D.3) puede verse como una representación de w en forma de componentes; los parámetros c_i son los componentes (o coordenadas) y ψ_i son las funciones coordenadas. Otra interpretación de la ecuación (D.3) está dada por las series finitas de Fourier, donde c_i se conocen como coeficientes de Fourier.

Para asegurar que las ecuaciones algebraicas resultantes del Método de Ritz tengan solución, y que la solución converja a la solución verdadera del problema a medida que el número de parámetros N aumenta, debemos elegir ψ_j ($j = 1, 2, \dots, N$) de manera tal que estas cumplan lo siguientes requisitos:

- ser continua como se requiere en el planteo variacional (es decir ψ_j debe ser tal que tenga una contribución no nula a la energía potencial total);
- satisfacer la condición de contorno esencial especificada;
- el conjunto $\{\psi_j\}$ debe ser linealmente independiente y completo.

D.4 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ PARA EL ANÁLISIS DE PLACAS [Whitney (1987)]

La energía potencial total el caso general de placas anisótropas que se trata en esta tesis puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Pi = U + V - T, \quad (\text{D.6})$$

donde U es la energía de deformación, V es la energía potencial de las cargas exteriores y T es la energía cinética del sistema.

Si se asume una solución a variables separables, el campo de desplazamientos tendrá en general la siguiente forma:

$$w_{MN} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} \psi_i(x) \phi_j(y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M c_{ij} W_{ij}(x, y) \quad (\text{D.7})$$

La aplicación del método de Ritz exige para el caso estático

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}} = \frac{\partial (U + V)}{\partial c_{ij}} = 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{D.8a})$$

Si se reemplaza el campo de desplazamientos propuesto a través de (D.7) en la condición (D.8a) se obtiene un sistema de $M \times N$ ecuaciones lineales simultáneas, cuya solución permite encontrar el valor de los $M \times N$ coeficientes desconocidos c_{ij} .

$$[K] \{c\} = \{F\} \quad (\text{D.8b})$$

donde $[K]$ y $\{F\}$ contienen coeficientes que dependen de los parámetros del problema (geometría, propiedades del material, cargas) y de las funciones de aproximación. Estos coeficientes dependen del problema particular que se analiza.

Para el caso dinámico, se tiene

$$\frac{\partial \Pi}{\partial c_{ij}} = \frac{\partial (U + V - T)}{\partial c_{ij}} = 0, \quad i = 1, \dots, M; \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{D.9})$$

Al reemplazar la aproximación dada por (D.7) en (D.9) se obtiene un conjunto de $M \times N$ ecuaciones homogéneas simultáneas. La solución no trivial de este sistema sólo puede obtenerse si el determinante de la matriz de coeficientes es cero. Esta condición es suficiente para determinar los autovalores que constituyen las frecuencias naturales de vibración libre del sistema.

D.5 ALGUNAS CARACTERÍSTICAS DISTINTIVAS DEL MÉTODO DE RITZ [Reddy(2003)]

A continuación se listan algunas características generales del método de Ritz basadas en el campo de desplazamientos supuesto.

1. Cuando se aumenta el número de términos en las funciones coordenadas, los coeficientes previamente calculados de las ecuaciones algebraicas (resultantes de (E.8b)) no se alteran, siempre que no se modifiquen las funciones coordenadas seleccionadas previamente. Se debe adicionar al sistema de ecuaciones solamente los nuevos coeficientes calculados.
2. Si los sistemas de ecuaciones algebraicas resultantes son simétricos, se necesita tener en cuenta sólo los elementos superiores o inferiores respecto a la diagonal en la matriz de coeficientes $[K]$. La simetría de los coeficientes de la matriz dependen del planteo variacional realizado en el problema.
3. Si el planteo variacional es no lineal en w , luego las ecuaciones algebraicas resultantes serán también no lineales en los parámetros c_{ij} . Para resolver tales ecuaciones no lineales, se dispone de una gran variedad de métodos, tales como: método de Newton, método de Newton Raphson, método de Picard, entre otros.

4. Como las deformaciones específicas son calculadas a partir de una aproximación al campo de desplazamientos, las deformaciones y las tensiones son generalmente menos exactas que los desplazamientos.
5. La ecuaciones de equilibrio del problema se satisfacen sólo en el sentido energético, no en el sentido de la ecuación diferencial. Por lo tanto los desplazamientos obtenidos de la aproximación de Ritz, en general no satisfacen las ecuaciones de equilibrio de manera puntual, a menos que la solución converja a la solución exacta.
6. Teniendo en cuenta que un sistema continuo es aproximado por un número finito de coordenadas (o grados de libertad), el sistema aproximante es menos flexible que el sistema real. En consecuencia, los desplazamientos obtenidos desde la energía potencial total por el método de Ritz converge a la deflexión exacta por abajo:

$$W_1 < W_2 < \dots < W_N < W_M \dots < w \text{ (exact)}, \text{ para } M > N$$

donde W_N denota la aproximación de Ritz de N parámetros para w obtenida, ya sea por el principio de los desplazamientos virtuales o por el principio de la mínima energía potencial total.

En los problemas que involucran la solución estática y dinámica de placas anisótropas la convergencia a la solución exacta está asegurada [Kantorovich y Krylov, (1964)] si para cada $\varepsilon > 0$, existe un conjunto de constantes c_{ij} tales que

$$\left. \begin{aligned} \left| w - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} W_{ij} \right| < \varepsilon, & \quad \left| \frac{\partial w}{\partial x} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial x} \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{\partial w}{\partial y} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} \frac{\partial W_{ij}}{\partial y} \right| < \varepsilon & \quad \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x \partial y} \right| < \varepsilon \\ \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial x^2} \right| < \varepsilon & \quad \left| \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N c_{ij} \frac{\partial^2 W_{ij}}{\partial y^2} \right| < \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.10})$$

Las seis condiciones (D.10) deben satisfacerse para que W_{ij} sea un conjunto completo de funciones.

Una sucesión de polinomios algebraicos, por ejemplo, es completo si contiene términos de todos los grados hasta el grado mayor (N, M) .

La independencia lineal de un conjunto de funciones se refiere a la propiedad que existe relación no trivial entre ellos. De manera que ninguna función puede ser derivada a partir de una combinación lineal de otras del conjunto.

Para funciones coordinadas polinómicas, las propiedades de independencia lineal y completitud requieren que las mismas sean polinomios de orden creciente. Por ejemplo, si φ_1 es un polinomio lineal, φ_2 deberá ser cuadrático, φ_3 deberá ser un polinomio cúbico, y así sucesivamente (pero cada φ_j no necesita ser completo en si mismo)

La propiedad de completitud es esencial para la convergencia de la aproximación de Ritz.

REFERENCIAS

- Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. (2004). *Mechanics of Composite Structural Elements*. Springer – Verlag, Germany.
- Ambartsumyan S.A. (1970). *Theory of Anisotropic Plates*, J.E.Ashton (Editor), Technomic, Stamford, Connecticut.
- Arya H., Shimpi R.P., Naik N.K. (2002). A zigzag model for laminated composite beams. *Composite Structures*, 56:21-4.
- Auricchio F., Sacco E., Vairo G. (2006). A mixed FSDT finite element for monoclinic laminated plates. *Computers & Structures*, 84: 624-639.
- Aydogdu M. (2009). A new shear deformation theory for laminated composite plates. *Composite Structures*, 89: 94-101.
- Bambill D.V., Laura P.A.A. and Rossit C.A. (2002). Transverse vibrations of circular solid and annular plates of generalised anisotropy. *Journal of Sound and Vibration*, 254(3): 613-619.
- Bank L.C. (2006a). *Composites for Construction: Structural Design with FRP Materials*. John Wiley & Sons, INC.

-
- Bank L.C. (2006b). *Application of FRP Composites to Bridges in the USA*. In *The International Colloquium on Application of FRP to Bridges*, pp: 9-16.
 - Bank L.C., Gentry T.R., Nuss K.H., Hurd S.H., Lamanna A.J., Duich S.J. and Oh B. (2000). Construction of a pultruded composite structure: case study. *Journal of Composites for Construction*, 4(3): 112-119.
 - Bardell N.S., Dunsdon J.M. and Langley, R.S. (1996). Free vibration analysis of thin coplanar rectangular plate assemblies – Part I: theory, and initial results for specially orthotropic plates. *Composite Structures*, 34: 129–143.
 - Bardell, N.S., Dunsdon, J.M. and Langley, R.S. (1995). Free vibration analysis of thin rectangular laminated plate assemblies using the h-p version of the finite element method. *Composite Structures*, 32: 237–246.
 - Bares R. (1981). *Tablas para el Cálculo de Placas y Vigas Pared*. Editorial Gustavo Gil S. A. Barcelona.
 - Belinha J., Dinis L.M.J. (2006). Analysis of plates and laminates using the element-free galerkin method. *Computers & Structures*, 84: 1547-1559.
 - Bert C.W. (1973). Simplified analysis of static shear factors for beams of nonhomogeneous cross section. *Journal of Composite Materials*, 7: 525-529.
 - Bert C.W. (1984). A critical evaluation of new plate theories applied to laminated composites. *Composite Structures*, 2:194-805.
 - Bhat R.B. (1985a). Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh - Ritz method. *Journal of Sound and Vibration*, 102: 493-499.
 - Bhat R.B. (1985b). Plate deflection using orthogonal polynomials. *Journal of Engineering Mechanics*, 111:1301-1309.
 - Blevins R.D. (1993). *Formulas for natural frequency and mode shape*, Krieger Publishing Company. Malabar, Florida.

-
- Bodaghi M., Saidi A.R. (2010). Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. *Applied Mathematical Modelling*, 34: 3659-3673.
 - Boscolo M., Banerjee J.R. (2011). Dynamic stiffness elements and their applications for plates using first order shear deformation theory. *Computers and Structures*, 89: 395–410.
 - Carrera E. (2000). An assessment of mixed and classical theories on global and local response of multilayered orthotropic plates. *Composite Structures*, 50: 183-98.
 - Carrera E. (2002). Theories and finite elements for multilayered, anisotropic, composite plates and shells. *Arch Comput Methods Eng*, 9(2):87-140.
 - Carrera E. (2003). Theories and finite elements for multilayered plates and shells: a unified compact formulation with numerical assessment and benchmarks. *Arch Comput Methods Eng*, 10: 215-96.
 - Carrera E., Brischetto S., Cinefra M., Soave M. (2011). Effects of thickness stretching in functionally graded plates and shells. *Composites: Part B*, 42: 123–133.
 - Chakrabarti A., Sheikh A.H., (2004). A new triangular element to model inter-laminar shear stress continuous plate theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 60: 1237-1257.
 - Char B.W., Geddes K.O, Gonnet G.H., Leong B.L., Monagan M.B. and Watt S.M. (1991). *MAPLE V – Library Reference Manual*, Berlin: Springer.
 - Chatterjee S.N and Kulkarni S.V. (1979). Shear correction factors for laminates plates. *AIAA Journal*, 17(5): 498-499.
 - CSI Analysis Reference Manual. (2007). Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.

-
- Daghia F., de Miranda S., Ubertini F., Viola E. (2008). A hybrid stress approach for laminated composite plates within the First-order Shear Deformation Theory. *International Journal of Solids and Structures*, 45: 1766-1787.
 - Demasi L. (2009a). Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part I: Governing equations. *Composite Structure*, 87: 1–11.
 - Demasi L. (2009b). Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part II: Layerwise theories. *Composite Structure*, 87: 12–22.
 - Demasi L. (2009c). Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part III: Advanced mixed high order shear deformation theories. *Composite Structure*, 87: 183–94.
 - Demasi L. (2009d). Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part IV: Zig – zag theories. *Composite Structure*, 87: 195–205.
 - Demasi L. (2009e). Mixed plate theories based on the generalized unified formulation. Part V: Results. *Composite Structure*, 88: 1–16.
 - Demasi L. (2012). Partially Zig-Zag Advanced Higher Order Shear Deformation Theories Based on the Generalized Unified Formulation. *Composite Structure*, 94: 363–375.
 - Fares M.E., Elmarghany M. Kh. (2008). A refined zigzag nonlinear first-order shear deformation theory of composite laminated plates. *Composite Structures*, 82: 71-83.
 - Ferreira A.J.M., Castro L.M.S., Bertoluzza S. (2009). A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory. *Composite Structures*, 89: 424-432.
 - Ferreira A.J.M., Fasshauer G.E. (2007). Analysis of natural frequencies of composite plates by an rbf-pseudospectral method. *Composite Structures*, 79: 202-210.

-
- Ferreira A.J.M., Roque C.M.C., Jorge R.M.N. (2005). Analysis of composite plates by trigonometric shear deformation theory and multiquadrics. *Computers & Structures*, 83: 2225-2237.
 - Ghugal Y.M. and Sayyad A.S. (2010). A static flexure of thick isotropic plates using trigonometric shear deformation theory. *Journal of Solid Mechanics*, 2(1): 79-90.
 - Ghugal Y.M., Shimpi R.P. (2002). A review of refined shear deformation theories for isotropic and anisotropic laminated plates, *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 21: 775-813.
 - Girkmann K., Beer R. (1958). Application of Eric Reissner's Refined Plate Theory to orthotropic plates, *Osterr. Ingenieur-Archiv.*, 12: 101-110.
 - Hossain S.J., Barman B. and Latifa S.K. (2009). On a variationally formulated higher order shear deformable C^0 element for the analysis of laminated composite plates. *Computers & Structures*, 87: 1331-1348.
 - Hull A.J. (2006). Mindlin shear coefficient determination using model comparison. *Journal of Sound and Vibration*, 294: 125-130.
 - Jones R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. Taylor and Francis, U.S.A.
 - Kant T., Swaminathan K. (2002). Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Composite Structures*, 56: 329-44.
 - Kantorovich L., Krylov V. (1964). *Approximate Methods of Higher Analysis*. Interscience Publishers.
 - Karama M., Afaq K.S., Mistou S. (2009). A new theory for laminated composite plates. In: *Proc IMechE, Vol 223. Part L: J. Mater: Des Appl.*
 - Karbhari V.M. and Zhao L. (2000). Use of composites for 21st century civil infrastructure. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 185: 433-454.

-
- Keller T. (1999). Towards structural forms for composite fibre materials. *Structural Engineering International*, 9(4): 297-300.
 - Keller T. (2002). Fiber reinforced polymers in building construction. In Symposium Towards a Better Built Environment - International Association for Bridge and Structural Engineering IABSE, Melbourne Australia.
 - Keller T., Bai Y., and Vallée T. (2007). Long-term performance of a glass fiber-reinforced polymer truss bridge. *Journal of Composites for Construction*, 11(1): 99-108.
 - Khdeir A.A., Reddy J.N. (1989). Exact solutions for the transient response of symmetric cross-ply laminates using a higher-order plate theory. *Composites Science and Technology*, 34: 205-224.
 - Kim M.J., Gupta A. (1990). Finite element analysis of free vibrations of laminated composite plates. *Int. J. Analyt. Exp. Modal Anal*, 5(3): 195-203.
 - Kirchhoff G.R. (1850). Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen Scheibe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle's Journal), 40: 51-88.
 - Kollár L.P. and Springer G.S., (2003). *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press.
 - Krishna Murty A.V. (1977). Higher order theory for vibrations of thick plates. *AIAA Journal*, 15: 1823-1824.
 - Krishna Murty A.V. (1986). Toward a consistent plate theory. *AIAA Journal*, 24: 1047-1048.
 - Leissa A.W. (1969) *Vibration of plates*, Nasa, SP 160.
 - Leissa A.W. (1978) Recent research in plate vibrations, 1973-1976: complicating effects. *Shock and Vibration Digest*, 10(12): 21-35.

-
- Lekhnitskii S.G. (1963). *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*. Translated from the Russian by P. Fern. J. Brandstatter, ed. Holden – Day.
 - Lekhnitskii S.G. (1968). *Anisotropic Plates*, New York, Gordon and Breach Science Publishers.
 - Levinson M. (1980). An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, 7: 343-350.
 - Levy M. (1877). Memoire sur la theorie des plaques elastique planes. *Journal des Mathematiques Pures et Appliquees*, 30: 219-306.
 - Liew K.M., Han J.B., Xiao Z.M. (1996). Differential quadrature method for thick symmetric cross-ply laminates with first-order shear flexibility. *International Journal of Solids and Structures*, 33: 2647-2658.
 - Lim C.W., Liew K.M., Kitipornchai S. (1996). Vibration of arbitrarily laminated plates of general trapezoidal planform. *Journal of Acoustical Society of America*, 100: 3674-3685.
 - Liu G.R., Zhao X., Dai K.Y., Zhong Z.H., Li G.Y., Han X. (2008). Static and vibration analysis of laminated composite plates using the conforming radial point interpolation method. *Composites Science and Technology*, 68: 354-366.
 - Liu, L., Chua, L.P., Ghista, D.N. (2007). Mesh-free radial basis function method for static, free vibration and buckling analysis of shear deformable composite laminates. *Composite Structures*, 78: 58-69.
 - Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M. (1978). Stress solution determination for higher order plate theory. *International Journal of Solids and Structures*, 14: 655-662.
 - Lo K.H., Christensen R.M., Wu E.M., (1977). A high-order theory of plate deformation, Part-1: Homogeneous plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 44: 663-668.

- Maiti D.K., Sinha P.K. (1996). Bending, free vibration and impact response of thick laminated composite plates. *Computers & Structures*, 59: 115-129.
- Mallikarjuna, Kant T. (1993). A critical review and some results of recently developed refined theories of fiber-reinforced laminated composites and sandwiches. *Composite Structures*, 23:293-312.
- Malvern L.E. (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- Mantari J.L., Guedes Soares C. (2012). Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94: 1991-2000.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. (2011). Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 94: 37-49.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. (2012a). A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates. *Composites: Part B*, 43: 1489-1499.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. (2012b). A new trigonometric shear deformation theory for isotropic, laminated composite and sandwich plates. *International Journal of Solids and Structures*, 49: 43-53.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. (2012c). A new trigonometric layerwise shear deformation theory for the finite element analysis of laminated composite and sandwich plates. *Computers and Structures*, 94-95: 45-53.
- Mantari J.L., Oktem A.S., Guedes Soares C. (2012d). Bending and free vibration analysis of isotropic and multilayered plates and shells by using a new accurate higher-order shear deformation theory. *Composites: Part B*, 43(8): 3348-3360.

-
- Messina A., Soldatos, K.P. (2002). A general vibration model of angle-ply laminated plates that accounts for the continuity of interlaminar stresses. *International journal of solids and structures*, 39: 617-635.
 - Mindlin R.D. (1951). Influence rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 18: 31-38.
 - Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A. and Reddy J.N. (2009). Mixed least-squares finite element models for static and free vibration analysis of laminated composite plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198: 1848-1856.
 - Moleiro F., Mota Soares C.M., Mota Soares C.A., Reddy J.N. (2008). Mixed least-squares finite element model for the static analysis of laminated composite plates. *Computers & Structures*, 86: 826-838.
 - Nallim L.G. (2003). *Mechanics of Anisotropic Plates: A Variational Approach. Doctoral Thesis*, National University of Salta, Argentina.
 - Nallim L.G., Grossi R.O. (2003). On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 264: 1201-1207.
 - Nallim L.G., Luccioni B.M., Grossi, R.O. (2005b). *Vibration of general triangular composite plates with elastically restrained edges*. *Thin Walled Structures* 43: 1711-1745.
 - Liz G. Nallim and R.O. Grossi (2008). “Natural frequencies of symmetrically laminated elliptical and circular plates”. *International Journal of Mechanical Science*, 50: 1153– 1167
 - Nallim L.G., Oller S. (2008). An analytical - numerical approach to simulate the dynamic behaviour of arbitrarily laminated composite plate. *Composite Structures Journal*, 85: 311–325.
 - Nallim L.G., Oller S. (2010). Formulation of a Macro-Element to Analyze the Mechanical Behavior of General Composite Laminated Plates. Chapter 10. pp.

- 365-402. Composite Laminates: Properties, Performance and Applications. ISBN: 978-1-60741-620-3. Series: Materials Science and Technologies. Nova Science Publishers, New York. Authors / Editors: Anders Doughett and Peder Asnarez
- Nallim L.G., Oller S., Grossi R.O. (2005a). Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194: 1797-1822.
 - Nguyen V.T., Caron J.F., Sab K. (2005). A model for thick laminates and sandwich plates. *Composites Science and Technology*, 65: 475-489.
 - Nguyen-Van H., Mai-Duy N., Tran-Cong T. (2008). Free vibration analysis of laminated plate/shell structures based on FSDT with a stabilized nodal-integrated quadrilateral element. *Journal of Sound and Vibration*, 313: 205-223.
 - Noor A.K., Burton W.S. (1989). Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Applied Mechanics Reviews*, 42: 1-13.
 - Oktem A.S., Chaudhuri R.A. (2008a). Boundary discontinuous Fourier analysis of thick cross-ply clamped plates. *Composite Structures*, 82: 539-548.
 - Oktem A.S., Chauhuri, R.A. (2008b). Effect of inplane boundary constraint on the response of thick general (unsymmetric) cross-ply plates. *Composite Structures*, 83: 1-12.
 - Oktem A.S., Chauhuri, R.A. (2009). Higher-order theory based boundary-discontinuous Fourier analysis of simply supported thick cross-ply doubly curved panels. *Composite Structures*, 89:448-58.
 - Oller S. (2003). *Simulación numérica del comportamiento mecánico de los materiales compuestos*. Monografía CIMNE N° 74. CIMNE, Barcelona, España.
 - Oller S. Ed. (2002). *Análisis y Cálculo de Estructuras de Materiales Compuestos*. 1^{ra} ed. Edicions UPC. CIMNE. Barcelona, España.

-
- Oñate E. (1995). *Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos. Análisis Estático Lineal*. 2^{da} ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos. Barcelona, España.
 - Provan J.W., Koeller R.C. (1970). On the theory of elastic plates. *International Journal of Solids and Structures*, 6: 933-950.
 - Qatu, M.S. (2004). *Vibration of Laminated Shells and Plates*. Elsevier Academic Press.
 - Qi Y., Knight N.F. (1996). A refined first-order shear–deformation theory and its justification by plane–strain bending problem of laminated plates. *Int. J. Solids Structures*, 33 (1): 49-64.
 - Ramesh S.S., Wang C.M., Reddy J.N., Ang K.K. (2009). A higher-order plate element for accurate prediction of interlaminar stresses in laminated composite plates. *Composite Structures*, 91: 337-357.
 - Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2009). Desarrollo de un elemento finito jerárquico para placas utilizando polinomios de Gram-Schmidt. *Mecánica Computacional*, 28: 747–766.
 - Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2010). Assembly of hierarchical finite elements to the static and dynamic analysis of quadrilateral plates. *Proceedings of the XXXIV Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural*. Argentina.
 - Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2011). Static analysis of thick laminated plates using enriched macro elements. *Proceedings of the 16th International Conference on Composite Structures - ICCS*. Portugal.
 - Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2012c). Análisis de placas laminadas mediante macro elementos usando teoría trigonométrica de deformación por corte. *Mecánica Computacional*, 31: 1379-1398.

-
- Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2012a). Formulación y ensamblaje de elementos finitos jerárquicos para el análisis estático y dinámico de placas cuadriláteras laminadas. *Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural*, 9: 4-21.
 - Rango R.F., Nallim L.G., Oller S. (2013). Static and dynamic analysis of thick laminated plates using enriched macroelements. *Composite Structures*, doi: 10.1016/j.compstruct.2013.01.028, in Press.
 - Rango, R.F., Bellomo, F.J., Nallim, L.G. (2012b). A general Ritz algorithm for the static analysis of arbitrarily laminated composite plates using First Order Shear Deformation Theory. *The Journal of Engineering Research (TJER)*. En prensa manuscript N° Mech110416.
 - Reddy J. N. (1993), *Finite Element Method*. 2th ed. New York, McGraw-Hill.
 - Reddy J.N. (1984a). A Refined Nonlinear Theory of Plates with transverse shear deformation. *International Journal of Solids Structures*, 20(9/10): 881-906.
 - Reddy J.N. (1984b). A Simple Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. *Journal of Applied Mechanics*, 51: 745-752.
 - Reddy J.N. (1984c). *Energy and variational methods in applied mechanics*. New York. John Wiley.
 - Reddy J.N. (1990). A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness, *International Journal of Nonlinear Mechanics* 25: 677-686.
 - Reddy J.N. (2003). *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Análisis*. Second Edition. CRC Press, United States of America.
 - Reddy J.N., Liu C.F. (1985). A higher – order shear deformation theory of laminated elastic shells. *Int. Journal. Engineering Science*, 23: 319-30.
 - Reissner E. (1944). On the theory of bending of elastic plates. *Journal of Mathematics and Physics*, 23: 184-191.

-
- Reissner E. (1945). The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plate. *American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics*, 12: 69-76.
 - Reissner E. (1963). On the derivation of boundary conditions for plate theory, in: *Proceedings of Royal Society of London, Series A*, 276: 178-186.
 - Rektorys K. (1980). *Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*. D. Reidel Co.
 - Roque C.M.C., Ferreira A.J.M., Jorge R.M.N. (2005). Modelling of composite and sandwich plates by a trigonometric layerwise deformation theory and radial basis functions. *Composites: Part B*, 36: 559-572.
 - Saadatpour M.M. and Azhari M. (1998). The Galerkin method for static analysis of simply supported plates of general shape. *Computers & Structures*, 69: 1-9.
 - Saadatpour M.M., Azhari M. and Bradford M.A. (2000). Vibration analysis of simply supported plates of general shape with internal point and line supports using the Galerkin method. *Engineering Structures*, 22: 1180-1188.
 - Savithri S., Varadan T.K. (1992). A simple higher order theory for homogeneous plates. *Mechanics Research Communications*, 19: 65- 71.
 - Setoodeh A.R., Karami G. (2003). A solution for the vibration and buckling of composite laminates with elastically restrained edges. *Composite Structures*, 60: 245-253.
 - Sheikh A.H., Haldar S., Sengupta D. (2002). A high precision shear deformable element for the analysis of laminated composite plates of different shapes. *Composite Structures*, 55: 329-336.
 - Shimpi R.P. and Ainapure A.V. (2001). A beam finite element based on layerwise trigonometric shear deformation theory. *Composite Structures*, 53: 153-162.

-
- Sobrino J.A. and Pulido M.D.G. (2002). Towards advanced composite material footbridges. *Structural Engineering International*, 12(2): 84-86.
 - Soldatos K.P. (1992). A transverse shear deformation theory for homogeneous monoclinic plates. *Acta Mechanica*, 94: 195-220.
 - Soldatos K.P., (1988). On certain refined theories for plate bending. *ASME Journal of Applied Mechanics*, 55: 994-995.
 - Stein M. (1986). Nonlinear theory for plates and shells including effect of shearing, *AIAA Journal*, 24: 1537-1544.
 - Stephen N.G. (1997). Mindlin plate theory: best shear coefficient and higher spectra validity. *Journal of Sound and Vibration*, 202(4): 539-553.
 - Szilard R. (1974). *Theory and Analysis of Plates*, New Jersey: Prentice – Hall, Inc., Englewood Cliffs.
 - Tessler A. (1993). An improved plate theory of {1,2}-order for thick composite laminates. *International Journal of Solids and Structures*, 30: 981-1000.
 - Timoshenko S. and Woinowsky-Krieger S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. New York McGraw-Hill.
 - Touratier M. (1991). An efficient standard plate theory. *International Journal of Engineering Science*, 29(8): 901-16.
 - J.R. and Sierakowski R.L. (1990). *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
 - Wang J., Liew K.M., Tan M.J., Rajendran S. (2002). Analysis of rectangular laminated composite plates via FSDT meshless method. *Int. J. of Mechanical Sciences*, 44: 1275-1293.
 - Whitney J.M. (1969). The effect of transverse shear deformation on the bending of laminated plates. *Journal of Composite Materials*, pp. 534-547.

-
- Whitney J.M. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static load. *Journal of Applied Mechanics*, 40(1): 302-304.
 - Whitney J.M. (1987). *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Co. Inc. Pennsylvania, USA.
 - Wunderlich W., Pilkey W.D. (2003). *Mechanics of Structures. Variational and Computational Methods. 2nd Ed.* CRC Press, Boca Raton, Florida.
 - Xiang S., Wang K., Ai Y., Sha Y., Shi H. (2009). Analysis of isotropic, sandwich and laminated plates by a meshless method and various shear deformation theories. *Composite Structures*, 91: 31-37.
 - Xiang S., Wang K.M. (2009). Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by trigonometric shear deformation theory and inverse multiquadric RBF. *Thin-Walled Structures*, 47: 304-310.
 - Xiao J.R., Gilhooley D.F., Batra R.C., Gillespie Jr. J.W., McCarthy, M.A. (2008). Analysis of thick composite laminates using a higher-order shear and normal deformable plate theory (HOSNDPT) and a meshless method. *Composites Part B: Engineering*, 39: 414-427.
 - Zamani M., Fallah A., Aghdam M.M. (2012). Free vibration analysis of moderately thick trapezoidal symmetrically laminated plates with various combinations of boundary conditions. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 36: 204-212.
 - Zhang Y.X and Yang C.H. (2009). Recent developments infinite element analysis for laminated composite plates. *Composite Structures*, 88: 147-157.
 - Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. (1991) *The finite element method*. 4th.ed. New York: McGraw –Hill.

