

# MODELO MULTI-ESCALA CON FRACTURAS COHESIVAS EN AMBAS ESCALAS

**Nicolas A. Labanda<sup>a</sup>, Sebastián M. Giusti<sup>b</sup> y Bibiana M. Luccioni<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>CONICET-Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1800, 4000  
- San Miguel de Tucumán, Argentina, [nlabanda@facet.unt.edu.ar](mailto:nlabanda@facet.unt.edu.ar), [bluccioni@herrera.unt.edu.ar](mailto:bluccioni@herrera.unt.edu.ar).

<sup>b</sup>CONICET-Universidad Tecnológica Nacional (FRC), Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina,  
Córdoba, Argentina, [sgiusti@frc.utn.edu.ar](mailto:sgiusti@frc.utn.edu.ar)

**Palabras Clave:** Multi-escala, RVE , Fractura cohesiva, Formulación mixta.

**Resumen.** En este trabajo se presentan resultados preliminares sobre un modelo multi-escala semi-concurrente para materiales con ablandamiento. Se propone una formulación mixta para la simulación de discontinuidades en los desplazamientos a ser usada en ambas escalas. La tensión sobre la fisura es considerada como incógnita del sistema de ecuaciones junto al campo de desplazamientos, y el salto se obtiene mediante la relación constitutiva (Ley tensión-separación).

Se re-formulan los principios axiomáticos propuestos por P.J. Blanco y S.M. Giusti (P.J. Blanco y S.M. Giusti, *Journal of Elasticity*, (2013)) y el concepto de inyección propuesto por P.J. Sánchez et al (P.J. Sánchez et al, *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg*, 200:1220-1236 (2011)) para lograr una respuesta objetiva. La tensión proyectada sobre la normal de la fisura de la macro escala se inyecta en la fisura localizada del RVE, logrando como variable dual el salto en el campo de desplazamiento para la escala superior. De esta forma, en la fase estable del material la inyección en la transición de escalas mantiene la estructura clásica (partiendo de una compatibilización de deformaciones), mientras que en la fase no estable el proceso de transición sigue un camino inverso (partiendo de una compatibilización de tensiones sobre la localización en la micro escala). De esta manera se logra una inyección híbrida mediante deformaciones en el primer caso y tensiones en el segundo caso.

Finalmente, se presentan ejemplos de homogeneización de la respuesta en problemas de fractura transversal de compuestos reforzados con fibras longitudinales.

## 1. INTRODUCCIÓN

Dentro de los modelos multi-escala existen dos grandes grupos: Los modelos multi-escala basados en *métodos analíticos* y los basados en *métodos computacionales*. A su vez, los primeros se dividen en métodos de *continualización* y los métodos de *homogeinización*. La diferencia entre ellos radica en la forma en que consideran la micro/meso escala. Los métodos de *continualización* lo hacen mediante elementos discretos como masas, resortes, elementos de tribología, pasando la información a una macro escala continua utilizando series de Taylor (de aquí proviene el nombre del método) (Metrikine y Askes, 2002; Askes y Metrikine, 2002). Los métodos de *homogeinización*, consideran la sub-escala como un medio continuo y heterogéneo, mientras que en la macro escala el medio se torna homogéneo, siendo usados principalmente para materiales elásticos (Guedes y Kikuchi, 1990; Peerlings y Fleck, 2004). Los métodos multi-escala analíticos fueron cayendo en desuso dada la poca versatilidad de las formulaciones, siendo utilizados estos modelos para casos mas académicos (Guinovart-Sanjuán et al., 2016), mientras que los métodos multi-escala computacionales fueron cobrando mayor protagonismo.

Park y Liu (2004) y Oden et al. (2006) ordenan los métodos multi-escala computacionales como *jerárquicos* y *concurrentes*, considerándose el primer caso como una herramienta para determinar parámetros de la ecuación constitutiva. Oden et al. (2006) introducen en su artículo otro tipo de clasificación: *modelos de acoplamiento explícito*. En estos se acopla el modelo adoptado en un grupo de zonas localizadas de la sub-escala, llamadas zonas críticas, con un modelo homogéneo utilizado en las zonas distantes a la zona crítica.

Bohm (2016) propone la siguiente clasificación para el acople entre modelos continuos: *Aproximaciones de Campo Medio* (Eshelby, 1957; Mori y Tanaka, 1973; Brassart et al., 2009), *Los métodos de cota variacional* (Z.Hashin y S.Shtrikman, 1963; Z.Hashin, 1983; Willis, 1981) y *Los métodos basados en el concepto del Elemento de Volumen Representativo (RVE)*. Estos últimos, se dividen a su vez en:

- Jerárquicos: En los casos anteriores se consideran solo dos escalas de transición. Hay algunos materiales, por ejemplo los laminados o los bio-materiales, que necesitan de una secuencia de escalas, dando lugar a los modelos jerárquicos donde el material en alguna escala de longitud se describe constitutivamente mediante una homogeinización de una escala inferior. Si bien este concepto no considera en su definición una celda unitaria, la amplia mayoría de los modelos desarrollados lo utilizan (Belsky et al., 1995; Ghosh et al., 1996; Lee y Ghosh, 1996; Moes et al., 2003; Zohdi et al., 1996; Nguyen et al., 2011b). Otro posible enfoque, que contiene este tipo de modelos multi-escala jerárquicos, son los modelos *cuasi-fenomenológicos* en los que, mediante la noción de **RVE**, se ajusta una variable interna de un modelo fenomenológico (Gurson, 1977).
- Semi-concurrentes: Esta clase de modelos inserta un campo primario (deformación, gradiente de temperatura, etc) como condición de borde al **RVE**, relacionando ambas escalas mediante una ecuación de compatibilidad (generalmente una ecuación de tipo energética). Una vez resuelto el problema de condiciones de borde en la sub-escala, se utiliza un operador de homogeinización para obtener el campo dual (tensión, flujo térmico ,etc) y un tensor constitutivo para la macro escala. Estos modelos se conocen coloquialmente como modelos  $FE^2$  (Feyel y Chaboche, 2000; Matous et al., 2008; Belytschko et al., 2008; Blanco y Giusti, 2013; Blanco et al., 2016; Toro et al., 2016a).
- Concurrentes: En estos modelos el **RVE** está embebido en una zona de interés de la macro-escala. Han sido utilizados para el acoplamiento entre escalas continua y atómica

donde el proceso de fractura se modela mediante rotura de fuerzas inter-atómicas (Moseley et al., 2012; Fan et al., 2011). Cuando ambas escalas son modeladas mediante formulaciones continuas se pueden utilizar mallas no necesariamente compatibles, logrando la compatibilidad mediante multiplicadores de Lagrange. Este tipo de enfoque tiene la desventaja de ser computacionalmente costoso, salvo que la escala de longitud del **RVE** se aproxime a la de la macro-estructura (O.Lloberas-Valls, 2013). Por ejemplo, puede ser útil para el modelado de piezas de hormigón (Caggiano y Etse, 2015).

- Híbridos: En estos casos se utiliza una combinación entre los enfoques concurrentes y semi-concurrentes. Cuando se necesita modelar procesos de fractura y localización, los modelos semi-concurrentes clásicos son no-objetivos. En este sentido, los modelos híbridos utilizan un modelo semi-concurrente para las zonas de la estructura donde la fractura no se ha propagado (zona no crítica), mientras que la estructura macroscópica va modificándose considerando la micro-estructura en la zona de propagación (zona crítica) de forma concurrente. En este sentido, Rahimabadi (2014) propone un modelo multi-escala híbrido para el análisis de fractura en materiales policristalinos.

Del mismo modo, en los últimos años se han propuesto sofisticados modelos con el propósito de lograr una transición objetiva entre la micro y la macro escala, para poder simular localizaciones intensas en el marco de los modelos multi-escala semi-concurrentes. Verhoosel et al. (2010) plantean una formulación capaz de modelar la evolución de fracturas en modo I en la macro escala, calibrando la evolución del daño con un **RVE** con elementos de interfaz clásicos, habiendo sido expandido posteriormente para modos de fractura mixtos con elementos cohesivos y adhesivos (Nguyen et al., 2011a, 2012). Massart et al. (2007) presentaron una formulación de homogeneización continua-discontinua con capacidad de localizar deformaciones en la macro-estructura usando homogeneización computacional de primer orden (FOCH) para el estudio de falla de mampostería.

Toro (2014) propuso un modelo de falla en dos escalas como una expansión del marco variacional presentado por Neto y Feijoo (2008), introduciendo el concepto de operador de inyección planteado por Sánchez et al. (2013), donde el salto de la discontinuidad de la macro escala (modelada mediante elementos finitos embebidos), es introducido como una condición de borde en el **RVE** generando, análogamente a lo propuesto por Nguyen et al. (2011a), una banda de daño relacionado con la ley tracción-separación macroscópica.

Un enfoque similar fue presentado por Oliver et al. (2015) que desarrollan un marco multi-escala para el análisis de fractura cuasi-frágil usando bandas cohesivas en la micro-escala. La banda de localización de deformaciones en la escala superior se calibra mediante la longitud **RVE**, logrando una regularización objetiva mediante este parámetro.

En el presente trabajo se plantea un modelo multi-escala semi-concurrente para el análisis de falla en materiales compuestos. Para la modelación de discontinuidades en ambas escala se utiliza una formulación mixta basada en desplazamientos y tensiones en la interfaz. Para la fase estable del material se utiliza una formulación multi escala clásica descrita en la bibliografía (Neto y Feijoo, 2008), mientras que para la fase de ablandamiento del material, se propone un modelo que vincula las fracturas en ambas escalas haciendo uso de la filosofía axiomática planteada por Blanco y Giusti (2013) y Sánchez et al. (2013), y adaptándola a nuestro caso particular. Finalmente se proponen ejemplos numéricos ilustrativos donde se muestra la objetividad del modelo planteado.

## 2. FORMULACIÓN VARIACIONAL MIXTA PARA LA SIMULACIÓN DE DISCONTINUIDADES

En este apartado se describe, en forma resumida, el método propuesto para la simulación de discontinuidades en el campo de desplazamientos, tanto en la macro escala, como en el RVE(Lorentz, 2008; Labanda et al., 2016).

### 2.1. Formulación basada en un solo campo

Numerosos autores (Tarazi y Mandel, 1988; Park y Paulino, 2012) formulan elementos de interfaces de tipo intrínsecos mediante la minimización de un funcional (potencial del sistema), expresado como en la ecuación (1), donde  $\mathcal{L}^u : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$  es el potencial del sistema dependiente del campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  del cuerpo:

$$\mathcal{L}^u(\mathbf{u}) = \mathcal{L}^B(\mathbf{u}) + \mathcal{L}^F(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket), \quad (1)$$

donde  $\mathcal{L}^B$  es el potencial de un volumen infinitesimalmente deformable  $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+$  y  $\mathcal{L}^F$  es el potencial de la fractura en  $\Gamma$ . Ambos potenciales se definen como sigue:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^B(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \nabla^s \mathbf{u}(x, t) \, d\Omega - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{b}(x, t) \cdot \mathbf{u}(x, t) \, d\Omega \\ &\quad - \int_{\partial^t \Omega} \mathbf{p}(x, t) \cdot \mathbf{u}(x, t) \, d\partial^t \Omega \\ \mathcal{L}^F(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) &= \int_{\Gamma} \Psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \kappa) \, d\Gamma, \end{aligned} \quad (2)$$

$\partial^t \Omega$  es el contorno de Neumann con  $\mathbf{p} \in \mathbf{L}^2(\partial^t \Omega)$  la carga actuante y  $\partial^u \Omega$  es el contorno de Dirichlet, ver Figura 1. Además,  $\llbracket \bullet \rrbracket = (\bullet)|_{\Gamma^+} - (\bullet)|_{\Gamma^-}$  es el salto del campo  $(\bullet)$  en el dominio  $\Gamma$ ,  $\Psi$  es la densidad de energía cohesiva sobre la fractura  $\Gamma$  que se define como Lorentz (2008),

$$\Psi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \kappa) = \mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}(\delta_n) + \psi(\delta_{eq}, \kappa) \quad \text{con } \psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(t) = \sup_{t' < t^*} \delta_{eq}(t'), \quad (3)$$

con  $\kappa$  variable interna en la interfaz  $\Gamma$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbf{L}^2(\Omega \setminus \Gamma)$  representa las fuerzas por unidad de volumen,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones de Cauchy y  $\nabla^s \mathbf{u}$  es la parte simétrica del gradiente del campo de desplazamientos. En la ecuación (3),  $\psi$  representa el potencial cohesivo de la fisura y  $\delta_{eq}$  la norma de  $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$ . Además  $\mathbf{I}_{\mathbb{R}^+}$  es una función indicador que será introducida mas adelante para evitar penetración entre los bordes de la discontinuidad. El conjunto de desplazamientos cinemáticamente admisibles  $\mathcal{U}(\Omega \setminus \Gamma)$  se define como sigue:

$$\mathcal{U}(\Omega \setminus \Gamma) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega \setminus \Gamma) \wedge \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{n} \geq 0 \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega) : \mathbf{u}|_{\partial^u \Omega} = \bar{\mathbf{u}}\}. \quad (4)$$

### 2.2. Formulación mixta basada en el método lagrangiano aumentado

En este modelo, el funcional  $\mathcal{L}^u$  es reformulado mediante un método lagrangiano aumentado, logrando un funcional dependiente de tres campos. Posteriormente, se utiliza el método de descomposición-coordinación propuesto por Fortin y Glowinski (1983) el cual descompone las ecuaciones en dos problemas, uno global que corresponde a una forma lineal y una familia de

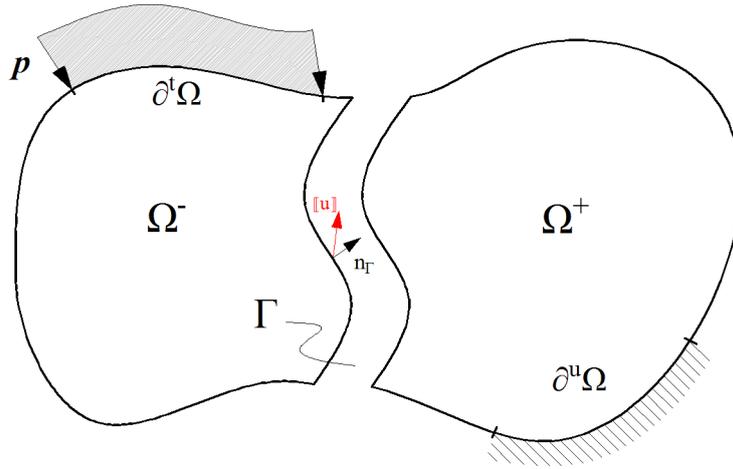


Figura 1: Descomposición del dominio  $\Omega$  considerando una fractura cohesiva  $\Gamma$ .

problemas locales que versan sobre puntos llamados *puntos de colocación*, los cuales se coordinan por multiplicadores de Lagrange. Se introduce una variable suplementaria  $\delta$  restringida mediante la condición  $[[\mathbf{u}]] - \delta = 0$ . El problema mecánico se puede expresar como:

$$\begin{cases} \min_{(\mathbf{u}, \delta) \in \mathcal{V} \times \mathcal{X}} \mathcal{L}^{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) + \mathcal{L}^{\mathcal{F}}(\delta) \\ \text{suje}to \ a \ [[\mathbf{u}]] - \delta = 0 \end{cases} \quad (5)$$

El lagrangiano aumentado  $\mathcal{L} : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbf{R}$  asociado al problema (5) es:

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}; \delta) = \mathcal{L}_{\gamma}^{\mathcal{B}}(\mathbf{u}; \delta) + \mathcal{L}^{\mathcal{F}}(\delta) + \mathcal{L}^{\mathcal{C}}(\mathbf{u}; \delta; \boldsymbol{\lambda}), \quad (6)$$

donde:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\gamma}^{\mathcal{B}}(\mathbf{u}, \delta) &= \mathcal{L}^{\mathcal{B}}(\mathbf{u}) + \int_{\Gamma} \frac{\gamma}{2} ([[ \mathbf{u} ]] - \delta)^2 d\Gamma, \\ \mathcal{L}^{\mathcal{C}}(\mathbf{u}; \delta, \boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} \cdot ([[ \mathbf{u} ]] - \delta) d\Gamma. \end{aligned} \quad (7)$$

Se puede ver que el segundo término de la ecuación (6), donde interviene la densidad de energía cohesiva  $\Psi$ , pasa a depender de la variable suplementaria, la cual es controlada por el tercer término a través de los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  que fijan de forma débil la igualdad  $[[\mathbf{u}]] - \delta = 0$ . Por la dualidad de espacios, se puede interpretar los multiplicadores de Lagrange como las tensiones sobre la interfaz. El primer término contiene un parámetro penalizador  $\gamma$  real y positivo. Usando el método de coordinación-descomposición, la variable suplementaria se pueden obtener de este funcional como una función de los desplazamientos y de los multiplicadores de Lagrange  $\delta_h = \delta(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda})$ . El problema de minimización del funcional (1) se convierte en un problema de punto de ensilladura del funcional (6), y se reduce a: *Para*

algún  $\gamma \in \mathbb{R}^+$ , encontrar  $(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}$  tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(\mathbf{u}; \boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\Omega \setminus \Gamma} \boldsymbol{\sigma}(x, t) : \nabla^s \delta \mathbf{u}(x, t) d\Omega + \int_{\Gamma} [\boldsymbol{\lambda} + \gamma([\mathbf{u}]] - \boldsymbol{\delta}) \cdot [[\delta \mathbf{u}]] d\Gamma \\ &\quad - \int_{\partial^t \Omega} \mathbf{p}(x, t) \cdot \delta \mathbf{u} d\partial^t \Omega - \int_{\Omega \setminus \Gamma} \mathbf{b}(x) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \\ \mathcal{G}_2(\mathbf{u}; \boldsymbol{\delta}; \boldsymbol{\lambda}) &= \int_{\Gamma} ([\mathbf{u}]] - \boldsymbol{\delta}) \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{\lambda} \in \mathcal{W}, \end{aligned} \quad (8)$$

con  $\boldsymbol{\delta}_h(\mathbf{u}; \boldsymbol{\lambda}) \in \ker \{\partial_\delta \Psi - \boldsymbol{\lambda} - \gamma([\mathbf{u}]] - \boldsymbol{\delta}\}$  donde  $\mathbf{u}$  y  $\boldsymbol{\lambda}$  son fijos en los puntos de colocación,  $\mathcal{V}$  el espacio de variaciones de desplazamientos cinemáticamente admisibles  $\delta \mathbf{u}$  y  $\mathcal{W}$  es el espacio de variaciones de multiplicadores de Lagrange cinemáticamente admisibles  $\delta \boldsymbol{\lambda}$ , dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\Omega \setminus \Gamma) &= \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1 \wedge [[\mathbf{v}]] \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}} : \mathbf{v}|_{\partial^u \Omega} = 0 \right\}, \\ \mathcal{W}(\Omega \setminus \Gamma) &= \left\{ \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

Habiendo formulado las ecuaciones a resolver para la simulación de discontinuidades tanto en la macro estructura como en el **RVE**, se procede a plantear las ecuaciones que vinculan las dos escalas.

### 3. MODELO DE HOMOGEGINIZACIÓN PARA UNA DISCONTINUIDAD BASADO EN UNA INYECCIÓN HÍBRIDA

Durante la fase estable del material las ecuaciones que vinculan ambas escalas mantienen la estructura clásica, donde una deformación macroscópica  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  es inyectada sobre el dominio  $\Omega_\mu$  del **RVE** bajo el siguiente axioma en la transición de escalas

$$\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) + \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \quad \text{con } \mathbf{y}_0 = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{y} d\Omega_\mu, \quad (10)$$

con  $\mathbf{u}$  desplazamiento en el punto material de la macro estructura y  $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$  campo de perturbación de desplazamientos en el **RVE**. Luego de resolver un problema de valores de contorno, se obtiene el tensor constitutivo macro homogenizado  $\mathbb{C}$  y la variable dual  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  (Neto y Feijoo, 2008; Toro, 2014). A continuación se detalla la formulación propuesta para la fase inestable del material, siendo éste el aporte principal del presente trabajo. La Figura 2 muestra un punto  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$  con  $\mathcal{S}$  superficie de discontinuidad en la macro-escala, cuyo comportamiento va a ser caracterizado mediante un modelo multi-escala. El procedimiento general para la fase inestable consiste en inyectar la tensión de la fractura macro  $\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$  con  $\mathbf{n}$  normal de la superficie de discontinuidad obtenida mediante el tensor acústico y  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones en la macro escala en el momento de alcanzar la inestabilidad, y resolver un problema de valores de borde en la celda asociada al punto de la macro estructura para recuperar la variable dual  $[[\mathbf{u}]]$ . En cierta forma, este procedimiento es inverso al utilizado en las formulaciones disponibles hasta el momento (Toro et al., 2016a), y puede interpretarse como una inyección híbrida mediante deformaciones para el dominio volumétrico y tensiones en el dominio de la fractura.

### 3.1. Problema mecánico en la Macro-escala con discontinuidades

Para plantear las ecuaciones de transición de escalas, en la formulación presentada se mantiene la estructura axiomática propuesta por Blanco y Giusti (2013), aunque partiendo de potenciales para poder plantear el principio de potencias virtuales multi-escala.

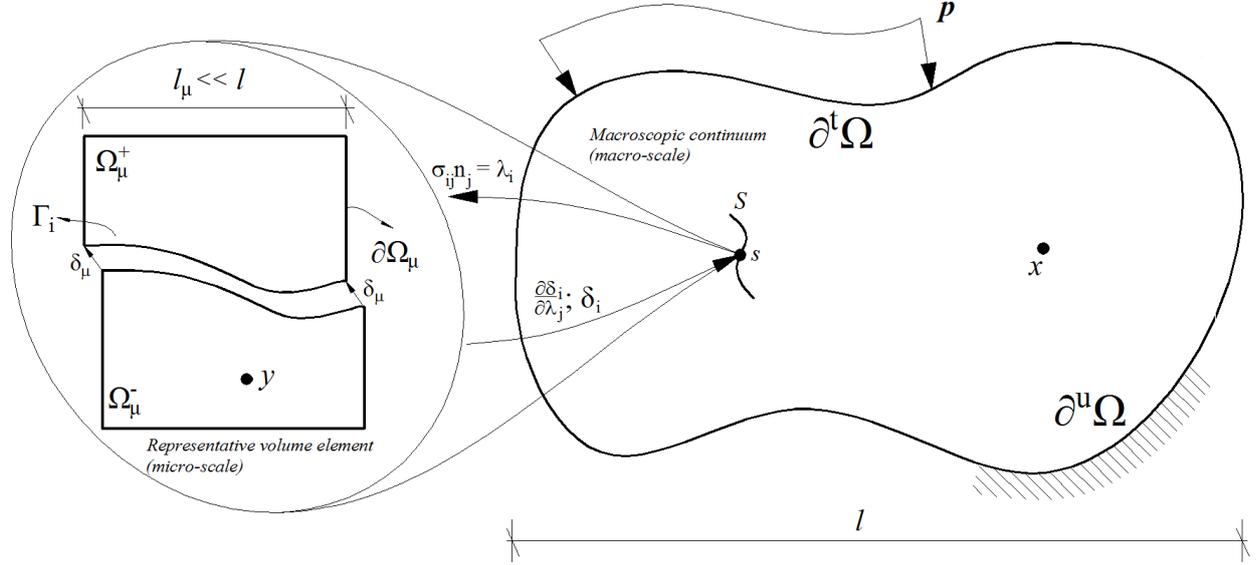


Figura 2: Continuo macroscópico con una discontinuidad y su sistema micro continuo asociado.

Se considera una respuesta constitutiva de tipo fenomenológica en la fractura  $\Gamma_\mu$  del **RVE** tiene la siguiente forma

$$\delta_\mu = \mathcal{S}_\mu (\boldsymbol{\lambda}_\mu^t) = \mathcal{S}_\mu (\boldsymbol{\lambda}_\mu^{t-dt}, d\boldsymbol{\lambda}_\mu). \quad (11)$$

donde  $(\bullet)^t$  es la historia de una variable en el tiempo  $t$ . Los campos con sub-índice  $(\bullet)_\mu$ , representan campos en el **RVE**.

### 3.2. Problema mecánico Microscópico

#### 3.2.1. Axioma 1. Cinemática de la transición de escala.

La cinemática para la transición de escalas se realiza mediante el campo de los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  (siendo esta la tensión superficial de la discontinuidad de normal  $\mathbf{n}$ ), y se propone como sigue

$$\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{|\mathbf{n}_m|} \int_{\Gamma_\mu^L} \boldsymbol{\lambda}_\mu^L d\Gamma_\mu^L = \frac{1}{|\mathbf{n}_m|} \int_{\Gamma_\mu^L} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{n}_\mu^L d\Gamma_\mu^L, \quad (12)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_\mu^L = \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|} \boldsymbol{\lambda} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu = -\frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu^L. \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{n}_m = \int_{\Gamma_\mu^L} \mathbf{n}_\mu^L d\Gamma_\mu^L, \quad (14)$$

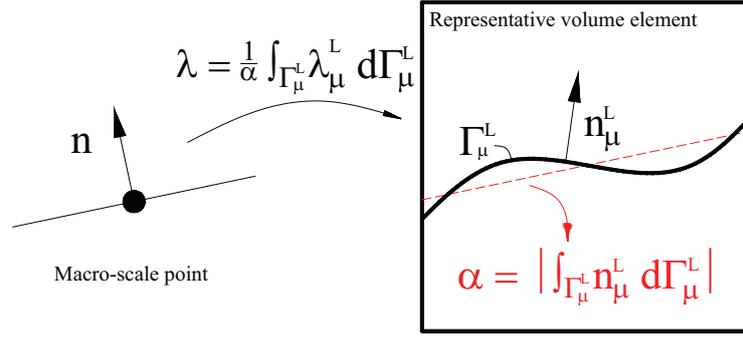


Figura 3: Esquema de la cinemática de la transición de escala.

es la normal media,  $\Gamma_\mu^L$  es un subconjunto de fracturas  $\Gamma_\mu$  donde se produce la localización en el **RVE**,  $\sigma_\mu$  es el campo de tensiones en la micro escala. Reemplazando la ecuación (13) en la ecuación (12)

$$-\sigma \cdot n = \frac{1}{|n_m|} \int_{\Gamma_\mu^L} \left( -\frac{|n_m|}{|\Gamma_\mu^L|} \sigma \cdot n + \tilde{\lambda}_\mu^L \right) d\Gamma_\mu^L, \quad (15)$$

$$= -\frac{1}{|\Gamma_\mu^L|} \int_{\Gamma_\mu^L} \sigma \cdot n d\Gamma_\mu^L + \frac{1}{|n_m|} \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\lambda}_\mu^L d\Gamma_\mu, \quad (16)$$

$$= -\sigma \cdot n \frac{1}{|\Gamma_\mu^L|} \int_{\Gamma_\mu^L} d\Gamma_\mu^L + \frac{1}{|n_m|} \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\lambda}_\mu^L d\Gamma_\mu, \quad (17)$$

donde el campo de las tensiones en la localización  $\lambda_\mu^L$  es relacionado con la tensión en la fisura de la macro-escala  $-\sigma \cdot n$ , dando como condición final

$$\int_{\Gamma_\mu^L} \tilde{\lambda}_\mu^L d\Gamma_\mu^L = 0, \quad \forall \int_{\Gamma_\mu^L} \tilde{\sigma}_\mu \cdot n_\mu^L d\Gamma_\mu^L = 0. \quad (18)$$

Finalmente, el espacio de tensiones cinemáticamente admisible en la localización es:

$$\tilde{\mathcal{W}}_\mu^{\Gamma_\mu^L}(\Omega_\mu \setminus \Gamma_\mu) := \left\{ x \mid x \in \mathbf{H}^{-\frac{1}{2}} \wedge \int_{\Gamma_\mu^L} x d\Gamma_\mu^L = 0 \right\}. \quad (19)$$

Se observa en el esquema de la Figura 3 que se utiliza como parámetro de longitud en la cinemática de transición de escalas la superficie media  $\alpha = |n_m|$  de la localización  $\Gamma_\mu^L$  en el **RVE**, el cual mantiene una forma análoga al dominio ficticio de falla planteado por [Toro et al. \(2016a\)](#).

### 3.2.2. Axioma 2. Principio de potencia virtual multi-escala.

Es necesario plantear una consistencia física entre ambas escalas del modelo mediante el balance de las potencias virtuales. En la bibliografía disponible, se plantea una compatibilidad de potencias virtuales asumiendo a-priori el uso de una sola variable independiente para la caracterización del sistema en cuestión ([Toro, 2014](#); [Toro et al., 2016a](#); [Sánchez et al., 2013](#)). En el caso presentado, al involucrarse dos variables incógnitas, es necesario iniciar el planteo

del axioma partiendo de los potenciales en la escala macro  $\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})$  y micro  $\Pi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu)$ , y posteriormente igualando la variación total de ellos.

Considerando un punto  $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$  perteneciente a una discontinuidad que acontece en la macro escala, se puede plantear su potencial como sigue

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} \Rightarrow \delta\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \delta_{\mathbf{u}}\Pi + \delta_{\boldsymbol{\lambda}}\Pi, \quad (20)$$

la variación respecto al campo de desplazamiento  $\mathbf{u}$  es

$$\delta_{\mathbf{u}}\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \llbracket \delta\mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda}, \quad (21)$$

y del mismo modo la variación respecto al campo de los multiplicadores de Lagrange  $\boldsymbol{\lambda}$  resulta

$$\delta_{\boldsymbol{\lambda}}\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}, \quad (22)$$

lo que da como resultado la variación total

$$\delta\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \llbracket \delta\mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} + \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \delta\boldsymbol{\lambda}. \quad (23)$$

Al formular el potencial en la micro-escala  $\Pi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu)$ , se introduce análogamente al axioma 1 un parámetro  $|\Gamma_\mu^L|$  que representa la superficie de la localización en el **RVE**. Además, para mantener la estructura matemática presentada en la sección 2, se introduce un término de penalización, quedando la expresión

$$\begin{aligned} \Pi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu) = & \frac{1}{|\Gamma_\mu^L|} \left[ \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \nabla^s \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu + \int_{\Gamma_\mu} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu - \boldsymbol{\delta}_\mu) \, d\Gamma_\mu + \right. \\ & + \int_{\Gamma_\mu} \frac{\gamma}{2} (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu - \boldsymbol{\delta}_\mu) \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu - \boldsymbol{\delta}_\mu) \, d\Gamma_\mu + \\ & \left. + \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|} \int_{\Gamma_\mu^L} \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u}_\mu \rrbracket_\mu \, d\Gamma_\mu^L \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

Se observa que el potencial micro incluye el último término donde se relaciona la tensión de la fisura macro con el salto total del campo de desplazamientos del **RVE**, mientras que en el resto de las fisuras el salto es debido solo a los desplazamientos fluctuación. La variación total queda

$$\delta\Pi_\mu(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_\mu, \boldsymbol{\lambda}_\mu) = \delta_\varepsilon\Pi_\mu + \delta_{\boldsymbol{\lambda}}\Pi_\mu + \delta_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}\Pi_\mu + \delta_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu}\Pi_\mu, \quad (25)$$

con  $\llbracket \bullet \rrbracket_\mu = (\bullet)|_{\Gamma_\mu^+} - (\bullet)|_{\Gamma_\mu^-}$  el salto definido en las coordenadas del **RVE**. Se observa en la ecuación (24) que el potencial perteneciente al dominio de la fractura se divide en un término sobre  $\Gamma_\mu^L$  correspondiente a la localización, y otro en donde intervienen las tensiones fluctuantes

de todo el dominio fracturado. Las variaciones con respecto a cada variable de la ecuación (25) resultan

$$\delta_{\varepsilon} \Pi_{\mu}(\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{\mu}, \boldsymbol{\lambda}_{\mu}) = \frac{1}{|\Gamma_{\mu}^L|} \left[ \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\sigma}_{\mu} \cdot \delta \varepsilon \, d\Omega_{\mu} \right], \quad (26)$$

$$\delta_{\boldsymbol{\lambda}} \Pi_{\mu}(\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{\mu}, \boldsymbol{\lambda}_{\mu}) = \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_{\mu}^L|^2} \left[ \int_{\Gamma_{\mu}^L} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u}_{\mu} \rrbracket_{\mu} \, d\Gamma_{\mu}^L \right], \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{\mathbf{u}}_{\mu}} \Pi_{\mu}(\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{\mu}, \boldsymbol{\lambda}_{\mu}) &= \frac{1}{|\Gamma_{\mu}^L|} \left[ \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\sigma}_{\mu} \cdot \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \, d\Omega_{\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_{\mu}} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mu} + \gamma (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} - \boldsymbol{\delta}_{\mu}) \right] \cdot \llbracket \delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} \, d\Gamma_{\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_{\mu}^L|} \int_{\Gamma_{\mu}^L} \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} \, d\Gamma_{\mu}^L \right], \quad (28) \end{aligned}$$

$$\delta_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mu}} \Pi_{\mu}(\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{\mu}, \boldsymbol{\lambda}_{\mu}) = \frac{1}{|\Gamma_{\mu}^L|} \left[ \int_{\Gamma_{\mu}} \delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mu} \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} - \boldsymbol{\delta}_{\mu}) \, d\Gamma_{\mu} \right]. \quad (29)$$

La compatibilización entre escalas se logra igualando las variaciones totales de los potenciales como sigue

$$\delta \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \delta \Pi_{\mu}(\varepsilon, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{\mu}, \boldsymbol{\lambda}_{\mu}),$$

que expandido es

$$\begin{aligned} \llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} + \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} &= \frac{1}{|\Gamma_{\mu}^L|} \left[ \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\sigma}_{\mu} \cdot \delta \varepsilon \, d\Omega_{\mu} + \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_{\mu}^L|} \int_{\Gamma_{\mu}^L} \delta \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \mathbf{u}_{\mu} \rrbracket_{\mu} \, d\Gamma_{\mu}^L + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_{\mu}} \boldsymbol{\sigma}_{\mu} \cdot \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \, d\Omega_{\mu} + \int_{\Gamma_{\mu}} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mu} + \gamma (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} - \boldsymbol{\delta}_{\mu}) \right] \cdot \llbracket \delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} \, d\Gamma_{\mu} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_{\mu}^L|} \int_{\Gamma_{\mu}^L} \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \delta \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} \, d\Gamma_{\mu}^L + \int_{\Gamma_{\mu}} \delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_{\mu} \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_{\mu} \rrbracket_{\mu} - \boldsymbol{\delta}_{\mu}) \, d\Gamma_{\mu} \right], \quad (30) \end{aligned}$$

relacionando ambas escalas.

### 3.2.3. Consecuencia 1. Problema de equilibrio micromecánico.

Considerando  $\delta\varepsilon = 0$ ,  $\delta\mathbf{u} = 0$  y  $\delta\boldsymbol{\lambda} = 0$  en la ecuación (30), se obtiene las ecuaciones de equilibrio a resolver en el RVE:

$$\int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \nabla^s \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu + \int_{\Gamma_\mu} \left[ \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu + \gamma (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu - \boldsymbol{\delta}_\mu) \right] \cdot \llbracket \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu \, d\Gamma_\mu + \int_{\Gamma_\mu^L} \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|} \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu \, d\Gamma_\mu^L = 0, \quad \forall \delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \tilde{\mathcal{V}}_\mu, \quad (31)$$

$$\int_{\Gamma_\mu} \delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu \cdot (\llbracket \tilde{\mathbf{u}}_\mu \rrbracket_\mu - \boldsymbol{\delta}_\mu) \, d\Gamma_\mu = 0, \quad \forall \delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu \in \tilde{\mathcal{W}}_\mu^{\Gamma_\mu^L}, \quad (32)$$

con

$$\tilde{\mathcal{V}}_\mu := \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu) \mid \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{v} \otimes^s \boldsymbol{\nu} \, d\partial\Omega_\mu = 0 \right\}. \quad (33)$$

espacio cinemáticamente admisible de fluctuación de desplazamientos, siendo  $\boldsymbol{\nu}$  el vector normal externo al contorno  $\partial\Omega_\mu$  de la celda.

### 3.2.4. Consecuencia 2. Restricción cinemática y homogeneización del salto macroscópico.

Considerando  $\delta \tilde{\mathbf{u}}_\mu = 0$  y  $\delta \tilde{\boldsymbol{\lambda}}_\mu = 0$  en la ecuación (30), obtiene una consecuencia cinemática y el operador homogeneización de la variable dual en la macro escala.

#### **Restricción cinemática**

Considerando  $\delta\boldsymbol{\lambda} = 0$

$$\llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket \cdot \boldsymbol{\lambda} = \frac{1}{|\Gamma_\mu^L|} \left[ \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega_\mu + |\mathbf{n}_m| \boldsymbol{\lambda} \cdot \llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket_\mu \right]. \quad (34)$$

La variación de la deformación de la parte volumétrica es debida al efecto del salto macro sobre el RVE. Por ello, se denota a esta componente a partir de ahora como  $\delta\varepsilon \rightarrow \delta\varepsilon_{[u]}$ . Introduciendo el Axioma 1 en la ecuación anterior, se tiene

$$\left( 1 - \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|} \right) \llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket \cdot \left[ \frac{1}{|\mathbf{n}_m|} \int_{\Gamma_\mu^L} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \mathbf{n}_\mu^L \, d\Gamma_\mu^L \right] = \frac{1}{|\Gamma_\mu^L|} \left[ \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{[u]} \, d\Omega_\mu \right], \quad (35)$$

$$\int_{\Gamma_\mu^L} \left( \frac{|\Gamma_\mu^L|}{|\mathbf{n}_m|} - 1 \right) \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot (\llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n}_\mu^L) \, d\Gamma_\mu^L = \left[ \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{[u]} \, d\Omega_\mu \right].$$

Teniendo en cuenta la propiedad

$$\int_{\Gamma_\mu^L} (\bullet) \, d\Gamma_\mu^L = \int_{\Omega_\mu} \delta_\mu^{\Gamma_\mu^L} (\bullet) \, d\Omega_\mu, \quad \text{con } \delta_\mu^{\Gamma_\mu^L} = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu \setminus \Gamma_\mu^L \\ +\infty & \forall \mathbf{y} \in \Gamma_\mu^L \end{cases}, \quad (36)$$

delta de dirac superficial, se puede expresar la ultima ecuación en (35) como

$$\left[ \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \delta_{\mu^\mu}^{\Gamma^L} \left( \frac{|\Gamma_\mu^L|}{|\mathbf{n}_m|} - 1 \right) (\llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n}_\mu^L) d\Omega_\mu \right] = \left[ \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} d\Omega_\mu \right]. \quad (37)$$

Finalmente se obtiene la consecuencia cinemática:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \delta_{\mu^\mu}^{\Gamma^L} \left( \frac{|\Gamma_\mu^L|}{|\mathbf{n}_m|} - 1 \right) (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \otimes^s \mathbf{n}_\mu^L). \quad (38)$$

Se ve que la consecuencia cinemática presentada en la ecuación 38 conserva una estructura similar al axioma planteado por [Toro et al. \(2016a\)](#).

#### **Operador homogeneización de la variable dual**

Considerando  $\llbracket \delta \mathbf{u} \rrbracket = 0$

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} = \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|^2} \int_{\Gamma_\mu^L} \llbracket \mathbf{u}_\mu \rrbracket_\mu \cdot \delta \boldsymbol{\lambda} d\Gamma_\mu^L, \quad (39)$$

quedando el operador de homogeneización de la variable dual

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \frac{|\mathbf{n}_m|}{|\Gamma_\mu^L|^2} \int_{\Gamma_\mu^L} \llbracket \mathbf{u}_\mu \rrbracket_\mu d\Gamma_\mu^L. \quad (40)$$

## **4. EJEMPLOS NUMÉRICOS**

A continuación se muestran algunos ejemplos numéricos de la formulación propuesta. En primera instancia, se establece una pequeña discusión sobre la condición de borde a considerar y posteriormente, se plantean una serie de ejemplos donde se observa la potencialidad del método. A continuación **LC**, **PC** y **TC** se refiere a las condiciones de borde *lineales*, *periódicas* y *mínimamente restrictas*, respectivamente.

### **4.1. Sobre la elección de la condición de borde del RVE.**

Es necesario plantear una discusión respecto a la condición de borde a tomar para un caso donde un salto en el salto de desplazamientos  $\llbracket \mathbf{u}_\mu \rrbracket_\mu \neq 0$  en algún punto del contorno  $\partial\Omega_\mu$  en el **RVE**. Para ello, se considera una celda sencilla conformada por dos materiales unidos por una interfaz como muestra la Figura 4 (a), donde las propiedades adoptadas para cada material se detallan en la Tabla 1. El **RVE** propuesto es sometido a una deformación uni-axial mediante un tensor de la forma

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

En las Figuras 4 (b) y (c) se muestran las relaciones tensión-deformación obtenidas para cada condición de borde, mientras que la Figura 5 muestra la configuración de los desplazamientos en el **RVE** obtenida para cada caso.

Se ve que la respuesta tensión deformación para la condición **LC** de la Figura 4 (b) no tiene la capacidad de ablandar y, como se ve en la configuración del **RVE** de la Figura 4 (a), los

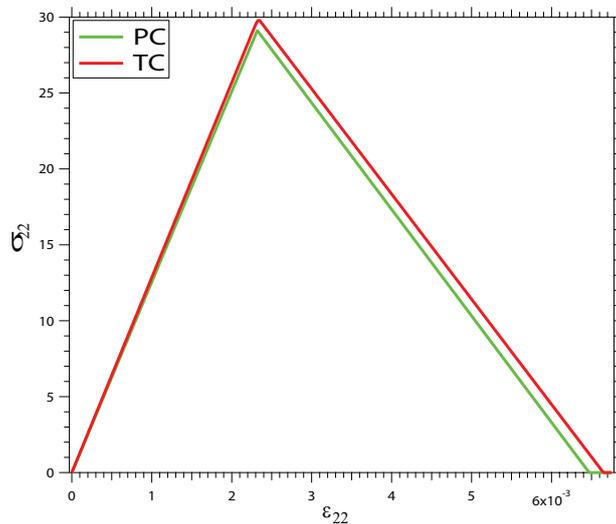
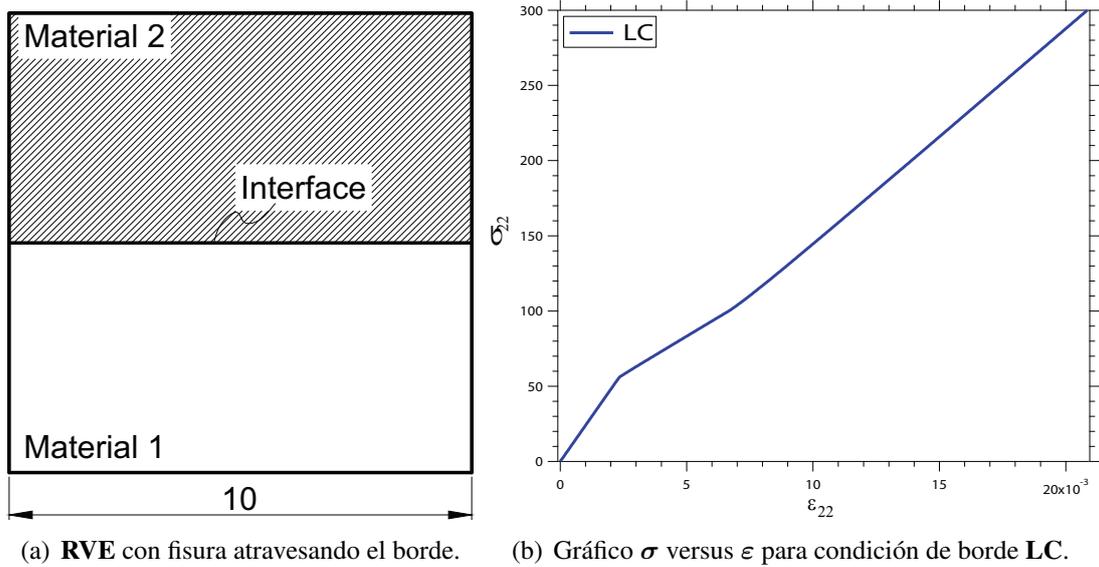
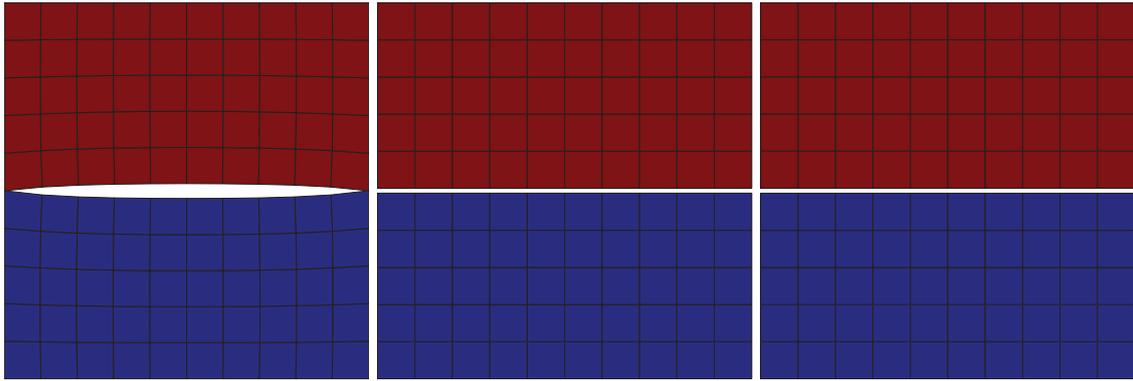


Figura 4: Resultados para un RVE con fisura en el borde  $\partial\Omega_\mu$ .

	Material 1	Material 2	Interfaz Fibra-Matriz
Mod. Young E[MPa]	3900	86900	-
Mod. Poisson	0.37	0.23	-
Tensión crítica $\sigma_c$ [MPa]	-	-	30
Energía de frac. $G_c$ [N/mm]	-	-	1

Tabla 1: Propiedades de materiales del RVE con fisura en el borde  $\partial\Omega_\mu$ .

extremos de la fisura se mantienen cerrados. Esto se debe a la propia definición del espacio cinemático lineal donde  $\tilde{u}_\mu = 0$ , la cual fuerza los puntos pertenecientes al borde a tener un desplazamiento proporcional a su coordenada como se desprende de la ecuación 10.

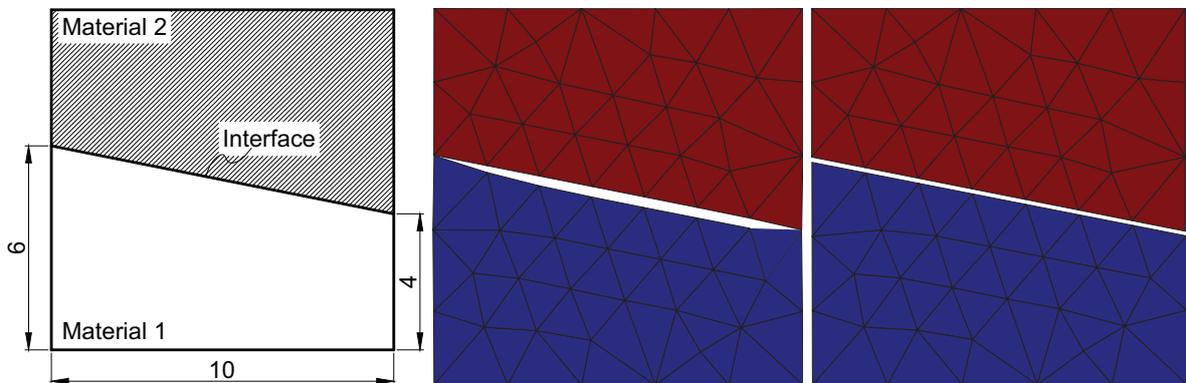


(a) Configuración final del **RVE** para condición de borde **LC**. (b) Configuración final del **RVE** para condición de borde **PC**. (c) Configuración final del **RVE** para condición de borde **TC**.

Figura 5: Configuración final de un **RVE** con fisura en el borde  $\partial\Omega_\mu$ . Desplazamiento amplificados x2.

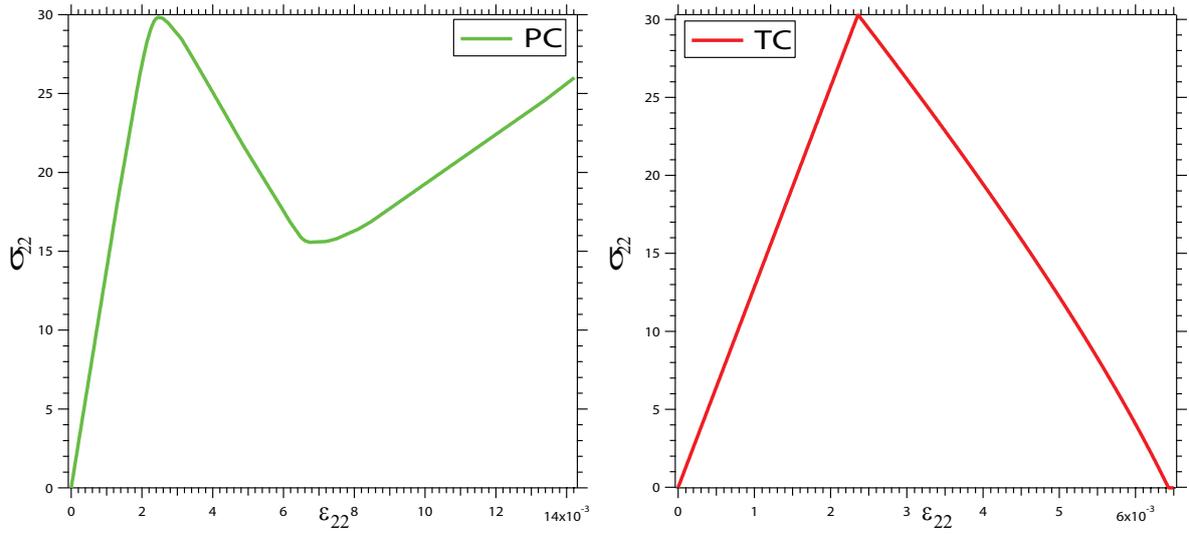
En la Figura 4 (c) se muestra la relación tensión deformación para las condiciones de borde **PC** y **TC**. Se observa que, a diferencia del caso anterior, ambas son capaces de ablandar porque pueden propagar una fisura a través del contorno  $\partial\Omega_\mu$  del **RVE** como se ve en la Figura 5 (b) y (c). Se observa que la condición **TC** copia de forma mas precisa en la macro escala tanto la tensión crítica de la fractura  $\sigma_c = 30[MPa]$ , como la deformación última  $\varepsilon_c = \delta_c/10 = \frac{2 \cdot G_c}{10 \cdot \sigma_c} = \frac{2}{300} = 6,66e^{-3}$ .

Cuando se considera un **RVE** con una fractura inclinada como muestra la Figura 6 (a) y se le aplica la misma historia de deformaciones macroscópicas que en el caso anterior, se puede observar la imposibilidad de la condición de borde **PC** en propagar la fisura a través del contorno  $\partial\Omega_\mu$ . En el caso anterior había una coincidencia en el salto cinemático entre los puntos  $\mathbf{y}^+$  e  $\mathbf{y}^-$  razón por la cual se pudo obtener la solución con condiciones de borde **PC**. En cambio, en este caso, si se considera el espacio de perturbaciones periódicas definidas por [Neto y Feijoo \(2008\)](#), se ve que para este caso, al compatibilizar la periodicidad  $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^+) = \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^-)$ , se ve que el salto  $[[\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^+)]]_\mu = 0$ , por lo que hace imposible que habiendo una fisura en el punto  $\mathbf{y}^-$  esta se pueda propagar.



(a) **RVE** con fisura inclinada atravesan- (b) Configuración final del **RVE** (c) Configuración final del **RVE**  
do el borde. para condición de borde **PC**. para condición de borde **TC**.

Figura 6: **RVE** con fisura inclinada en el borde  $\partial\Omega_\mu$ . Desplazamiento amplificados x2.



(a) Gráfico  $\sigma$  versus  $\varepsilon$  para condición de borde **PC**. (b) Gráfico  $\sigma$  versus  $\varepsilon$  para condición de borde **TC**.

Figura 7: Resultados Tensión Deformación para un **RVE** con fisura inclinada en el borde  $\partial\Omega_\mu$ .

Consecuentemente, la curva tensión-deformación de la Figura 7 (a) tiene una fase de ablandamiento pero luego al no poder propagarse fractura en el contorno  $\partial\Omega_\mu$ , el **RVE** endurece indefinidamente. Por otro lado, se puede ver en las Figuras 6 (c) y 7 (b) que con la condición de borde **TC** si se puede reproducir la propagación de la fisura con el consiguiente ablandamiento, independientemente de la orientación de la falla.

Si bien estos ejemplos configuran casos particulares, en lo sucesivo se usa solo la condición de borde **TC** ya que representa el caso que mas libertades le confiere a la cinemática de la micro-escala para analizar la falla. El trabajo reciente de [Toro et al. \(2016b\)](#) muestra que para **RVEs** heterogéneos, se pueden conseguir buenos resultados considerando fluctuaciones periódicas, siendo en nuestro caso material para estudios futuros.

#### 4.2. Análisis de objetividad en la respuesta.

Habiendo seleccionado la condición de borde a utilizar en lo que resta del trabajo, se propone un **RVE** como el que muestra la Figura 8 (a), el cual repite su dominio como muestran las Figuras 8 (b) y (c). Estas tres celdas se utilizan para hacer un primer estudio de la objetividad del modelo planteado, siendo conformadas por los materiales detallados en la Tabla 1. Del mismo modo se consideran tres **RVEs** con fracturas tortuosas como muestra la Figura 9

En las Figuras 10 (a) y (b) se observa la respuesta tensión-deformación obtenida para los **RVEs** presentados en las Figuras 8 y 9 respectivamente, cuando se utiliza la formulación clásica donde la deformación se inyecta en la sub escala de la forma  $\varepsilon \mapsto \mathbf{RVE} \mapsto \sigma$  obteniendo la tensión macroscópica. Se observa que la respuesta no es objetivas para los distintos **RVEs** planteados.

Cuando se activa el modelo propuesto, luego de la localización se inyecta la tensión macroscópica de la fisura en la celda de la forma  $\lambda = -\sigma \cdot n \mapsto \mathbf{RVE} \mapsto \delta$  recuperando el salto para la macro escala. La Figura 12 (a) muestra los resultados obtenidos para los **RVE** planteados en la Figura 8, mientras que la Figura 12 (b) muestra los resultados para los **RVE** planteados en la Figura 9. Se observa que las tres curvas graficadas son coincidentes, de donde se puede concluir que, independientemente de donde se produce la localización en la

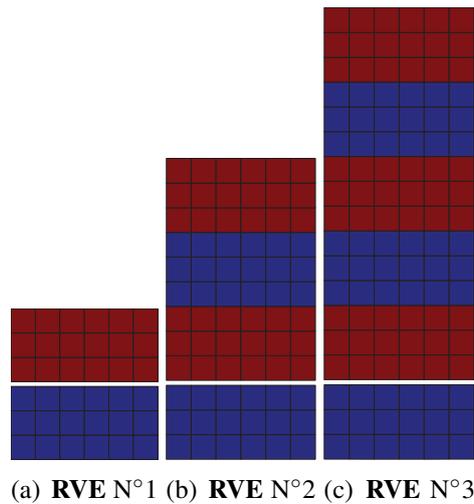


Figura 8: **RVEs** con fractura plana seleccionados para el estudio de la objetividad del modelo multi-escala.

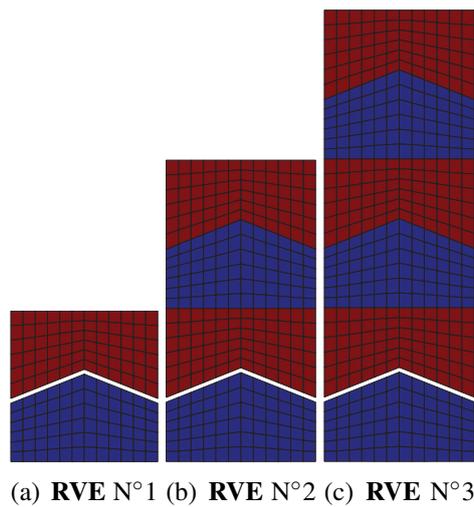
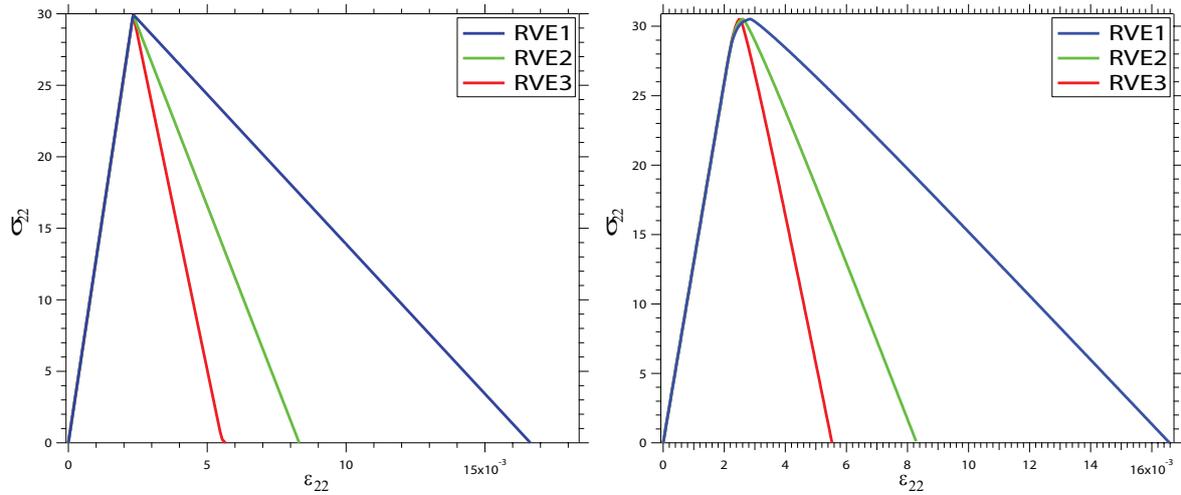


Figura 9: **RVEs** con fractura inclinada seleccionados para el estudio de la objetividad del modelo multi-escala.

micro-escala, el modelo constitutivo tracción-separación de la macro-escala es objetivo. En la Figura 11 se grafica el determinante del tensor acústico para cada dirección y se muestra que, para todos los casos, el vector normal de pérdida de elipticidad es  $\mathbf{n} = [0 \ 1]$ .

#### 4.3. Fractura transversal. Modelación multi-escala.

A continuación se propone un ejemplo de fractura transversal de un compuesto reforzado con fibras longitudinales. Se proponen dos **RVEs** con un porcentaje volumétrico de fibras de  $V_f = 30\%$  como muestra la Figura 13. El **RVE N°1** de la Figura 13 (a) contiene 14 fibras y  $60 \mu\text{m}$  de lado, mientras que el **RVE N°2** de la Figura 13 (b) contiene 20 fibras y  $72 \mu\text{m}$  de lado. La distribución de las inclusiones rígidas se hizo utilizando el método de Monte-Carlo y las propiedades de los materiales se muestran en la Tabla 2.



(a) Respuesta Tensión deformación para los **RVEs** planteados en la Figura 8. (b) Respuesta Tensión deformación para los **RVEs** planteados en la Figura 9.

Figura 10: Respuesta tensión-deformación calculados con la formulación clásica.

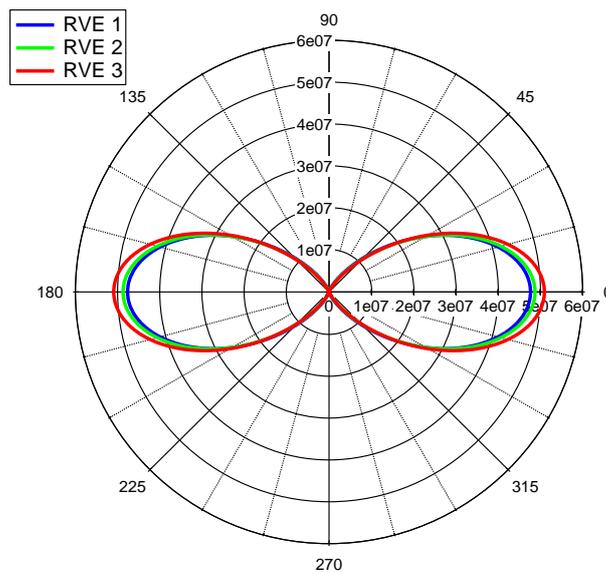
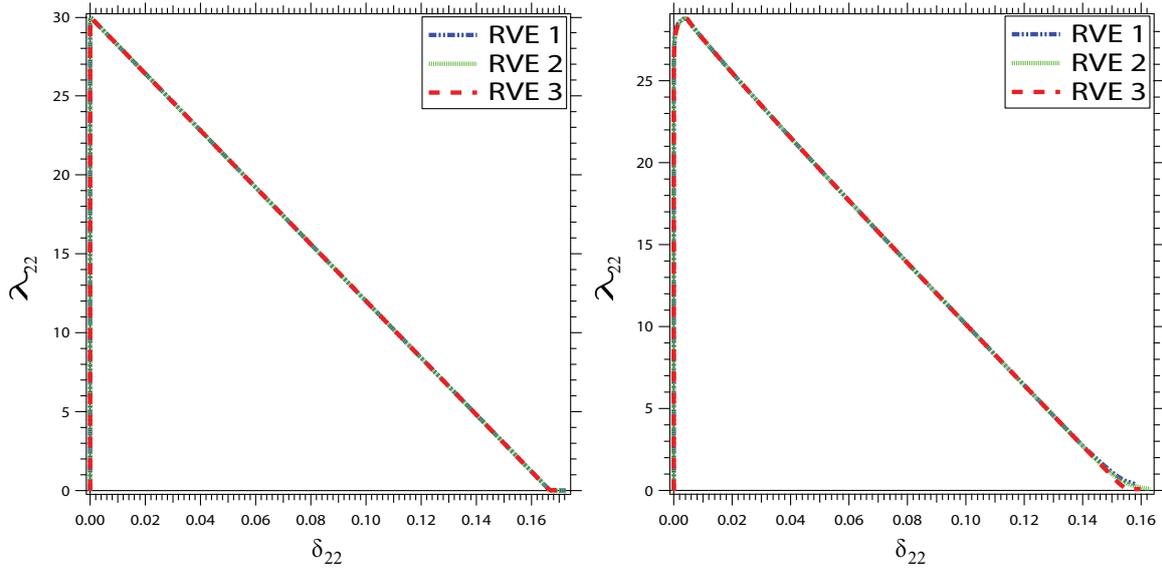


Figura 11: Pérdida de elipticidad para los **RVEs** presentados en la Figura 9.

	Matriz	Fibra	Matriz-fibra
Módulo de Young E [MPa]	3900	86900	-
Módulo de Poisson	0.37	0.23	-
Tensión de iniciación de fractura $\sigma_c$ [MPa]	50	-	25
Energía de fractura $G_c$ [N/mm]	0.5	-	0.5

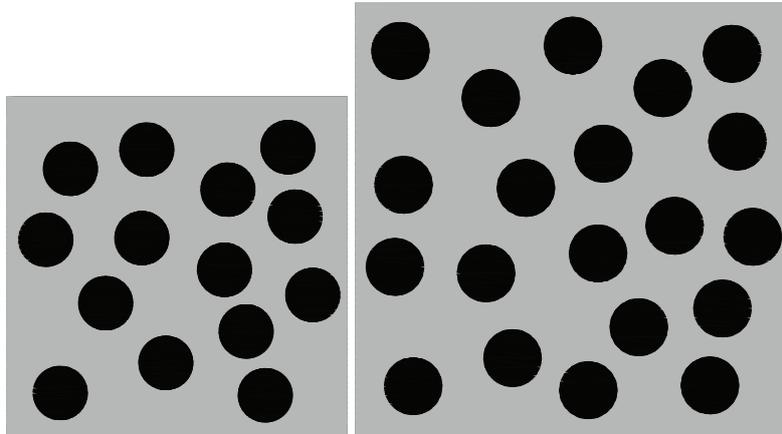
Tabla 2: Propiedades de material para matriz reforzado con fibras longitudinales.



(a) Respuesta Tensión deformación para los **RVEs** planteados en la Figura 8.

(b) Respuesta Tensión deformación para los **RVEs** planteados en la Figura 9.

Figura 12: Respuesta tensión-deformación calculados con la formulación propuesta.



(a) **RVE** N°1 de 60  $\mu\text{m}$  de lado.

(b) **RVE** N°2 de 72  $\mu\text{m}$  de lado.

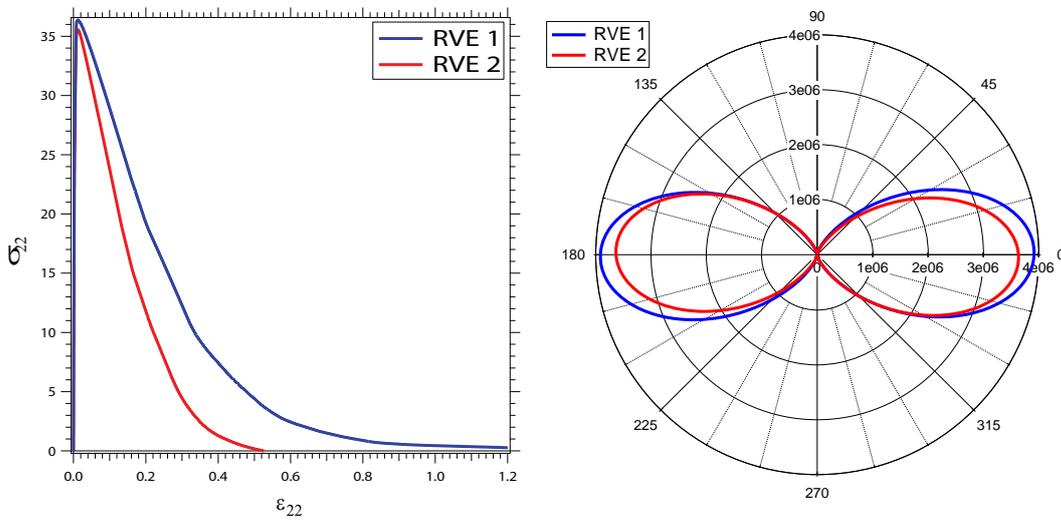
Figura 13: **RVE** adoptados para el modelo multi-escala de fractura transversal. Fracción volumétrica de Fibras  $V_f = 30\%$ .

Las matrices presentadas en las ecuaciones 42 y 43 muestran los tensores constitutivos elásticos de los **RVEs** N°1 y N°2 respectivamente. Se observa que dichos tensores pierden la ortotropía debido a la distribución aleatoria de las inclusiones, acoplado la constante de corte  $C_{3333}$  con las direcciones normales, dando como resultado constantes  $C_{1133}$  y  $C_{2233}$  distintas de cero.

$$\mathbb{C}_{\mathbf{RVE}N^{\circ}1}^e = \begin{bmatrix} 10364,7379 & 5695,26162 & 13,2327341 \\ 5695,26162 & 10514,4562 & -23,4792675 \\ 13,2327341 & -23,4792675 & 2334,22857 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

$$\mathbb{C}_{\mathbf{RVE}N^{\circ}2}^e = \begin{bmatrix} 10364,8855 & 5645,93341 & 18,4747702 \\ 5645,93341 & 10350,337 & 8,98046573 \\ 18,4747702 & 8,98046573 & 2328,92198 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Aplicando una deformación en el punto de gauss macroscópico de la forma expresada en la ecuación 41, se observa en la Figura 14 (a) que una vez más, al utilizar el modelo clásico, se obtiene curvas tensión deformación no objetivas. La Figura 14 (b) muestra un gráfico polar para la pérdida de elipticidad en la deformación  $\varepsilon_{22} = 11e^{-3}$ . Las Figuras 15 (a) y (b) muestran claramente la forma de la localización, para los **RVE** N° 1 y N° 2, respectivamente.



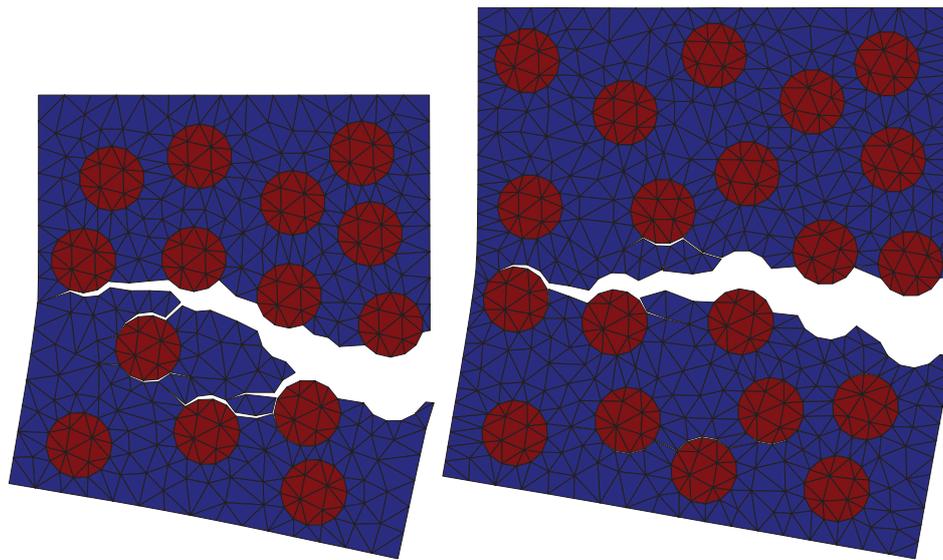
(a) Curva tensión-deformación obtenida con el modelo multi-escala clásico. (b) Pérdida de elipticidad para los **RVEs** presentados en la Figura 13.

Figura 14: Resultados obtenidos para los **RVE** propuestos con el modelo clásico.

Para la etapa estable la formulación propuesta coincide con el modelo clásico. En la Figura 16 (a) se muestran los resultados obtenidos para esa etapa. Se ve que ambas curvas son similares, siendo la diferencia producto de la distribución aleatoria adoptada para la representación de la micro escala. La Figura 16 (b) se muestra las curvas tensión en la fisura de la macro escala versus el salto en la macro escala, obtenidos mediante la formulación propuesta, observando un buen ajuste entre ambas curvas pudiendo concluir en la existencia de un **RVE** en el sentido de Gitman et al. (2007).

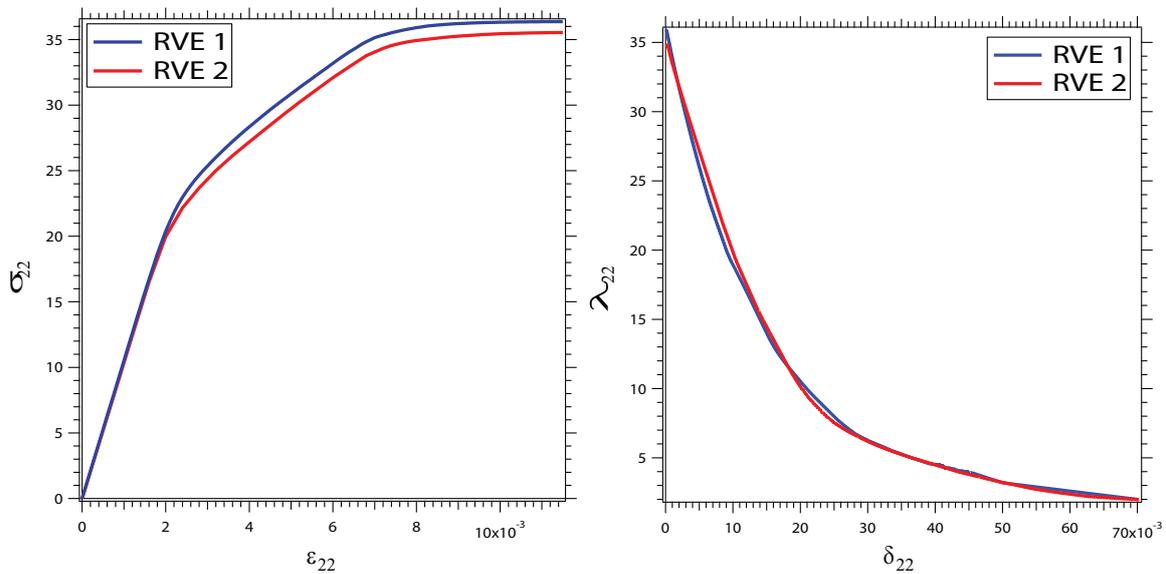
## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentó una formulación variacionalmente consistente, basada en los principios axiomáticos propuestos por Blanco y Giusti (2013) y utilizada por otros autores (Toro, 2014; Toro et al., 2016a) proponiendo una modificación en la compatibilidad energética entre escalas de manera de considerar las dos variables con las que se describe el problema mediante la formulación mixta. De esta forma, se logra una inyección híbrida en deformación para el modelo clásico y en una tensión para el modelo propuesto obteniendo como variable dual la tensión en el primer caso y el salto en el segundo, difiriendo con todos los modelos presentes



(a) Localización presentada en el **RVE** N°1 de 60  $\mu\text{m}$  de lado. (b) Localización presentada en el **RVE** N°2 de 72  $\mu\text{m}$  de lado.

Figura 15: Localización presentadas en los **RVE** propuestos. Estudio de la fractura transversal en compuestos reforzados con fibras longitudinales.



(a) Curva Tensión-deformación previo a la pérdida de (b) Curva Tensión-Salto posterior a la pérdida de elip-  
 ticidad. Modelo Clásico. ticidad. Modelo Propuesto.

Figura 16: Resultados obtenidos para los **RVE** presentados en la Figura 13. Modelo Propuesto.

en la bibliografía hasta ahora. También se presentó una discusión sobre las condiciones de borde que admite el modelo, concluyendo que para los ejemplos analizados, las de mínima restricción son las mas adecuadas para problemas donde existe un fenómeno de localización en el **RVE**. Se presentaron también ejemplos numéricos donde se observa que la formulación propuesta da resultados objetivos respecto del **RVE** analizado, con buen resultado incluso en casos donde la

micro escala tiene un carácter estocástico en su topología.

## 6. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el aporte financiero de CONICET y el concejo de investigación de la Universidad Nacional de Tucumán (CIUNT). El trabajo de S.M. Giusti fue parcialmente financiado por el concejo europeo de investigación (FP/2007-2013) / ERC Grant Agreement n. 320815 (ERC Advanced Grant Project “Advanced tools for computational design of engineering materials” COMP-DES-MAT).

## REFERENCIAS

- Askes H. y Metrikine A.V. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 2: Static and dynamic response. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(4):573–588, 2002.
- Belsky V., Beall M., Fish J., Shephard M., y Goma S. Computer-aided multiscale modeling tools for composite materials and structures. *Int.J.Comput.Syst.Engng.*, 6:213–223, 1995.
- Belytschko T., Loehnert S., y Song J. Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 73:869–894, 2008.
- Blanco P. y Giusti S. Thermomechanical multiscale constitutive modeling: Accounting for microstructural thermal effects. *Journal of Elasticity: The Physical and Mathematical Science of Solids*, 111:XX–XX, 2013.
- Blanco P., Sanchez P., de Souza Neto E., y Feijó R. Variational foundations and generalized unified theory of rve-based multiscale models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 23:191–253, 2016.
- Bohm H. *A Short introduction to basic aspects of continuum micromechanics*. ILSB Report, 2016.
- Brassart L., Inglis H., Delannay L., Doghri I., y Geubelle P. An extended mori–tanaka homogenization scheme for finite strain modeling of debonding in particle-reinforced elastomers. *Computational Materials Science.*, 45:611–616, 2009.
- Caggiano A. y Etse G. Coupled thermo–mechanical interface model for concrete failure analysis under high temperature. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 289:498–516, 2015.
- Eshelby J. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems. *Proceedings of the Royal Society of London*, 241:376–396, 1957.
- Fan J., Stewart R.J., y Zeng X. A multiscale method for dislocation nucleation and seamlessly passing scale boundaries. *International Journal of Plasticity*, 27(12):2103 – 2124, 2011.
- Feyel F. y Chaboche J. Fe<sup>2</sup> multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Comput. Meth. App. Mech. Eng.*, 183:309–330, 2000.
- Fortin M. y Glowinski R. *Augmented lagrangian methods: application to the numerical solution of boundary-value problems*. North-Holland - Studies in mathematics and its applications, 1983.
- Ghosh S., Lee K., , y Moorthy S. Two scale analysis of heterogeneous elastic-plastic materials with asymptotic homogenization and voronoi cell finite element model. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engng.*, 132:63–116, 1996.
- Gitman I., Askes H., y Sluys L. Representative volume: Existence and size determination. *Engineering Fracture Mechanics*, 74:2518–2534, 2007.
- Guedes J.M. y Kikuchi N. Preprocessing and postprocessing for materials based on the homogenization method with adaptive finite element methods. *Computer Methods in Applied*

- Mechanics and Engineering*, 83(2):143 – 198, 1990.
- Guinovart-Sanjuán D., Rodríguez-Ramosa R., Guinovart-Díaza R., Bravo-Castilleroa J., Sabinab F., Merodioc J., Lebond F., Dumontd S., y Concif A. Effective properties of regular elastic laminated shell composite. *Composites Part B: Engineering*, 87:12 – 20, 2016.
- Gurson A. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth - part i: Yield criteria and flow rules for porous ductile media. *J. Engng. Materials Technol. ASME*, 99:2–15, 1977.
- Labanda N., Giusti S., y Luccioni B. Meso-scale fracture simulation using an augmented lagrangian approach. *International Journal of Damage Mechanics*, 2016.
- Lee K. y Ghosh S. Small deformation multi-scale analysis of heterogeneous materials with the voronoi cell finite element model and homogenization theory. *Comput.Mater.Sci.*, 7:131–146, 1996.
- Lorentz E. A mixed interface finite element for cohesive zone models. 198:302–317, 2008.
- Massart T., Peerlings R.H.J., y Geers M. An enhanced multi-scale approach for masonry wall computations with localization of damage. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 5:1022–1059, 2007.
- Matous K., Kulkarni M., y Geubelle P. Multiscale cohesive failure modeling of heterogeneous adhesives. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56:1511–1533, 2008.
- Metrikine A.V. y Askes H. One-dimensional dynamically consistent gradient elasticity models derived from a discrete microstructure: Part 1: Generic formulation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(4):555 – 572, 2002.
- Moes N., Cloirec M., Cartraud P., y Remacle J. A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engng.*, 192:3163–3177, 2003.
- Mori T. y Tanaka K. Average stress in the matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta metall.*, 21:571–574, 1973.
- Moseley P., Oswald J., y Belytschko T. Adaptive atomistic-to-continuum modeling of propagating defects. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92:835–856, 2012.
- Neto E.S. y Feijoo R. Variational foundations of multiscale constitutive models of solids. 2008.
- Nguyen V., Lloberas-Valls O., Stroeven M., y Sluys L. Homogenization-based multiscale crack modelling: from micro-diffusive damage to macrocracks. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 200:1220–1236, 2011a.
- Nguyen V., Lloberas-Valls O., Stroeven M., y Sluys L. Computational homogenization for multiscale crack modeling. implementation and computational aspects. *International journal of Numerical Methods in Engineering*, 89:192–226, 2012.
- Nguyen V., Stroeven M., y Sluys L. Multiscale continuous and discontinuous modeling of heterogeneous materials: A review on recent developments. *J.Multiscal.Model.*, 3:229–270, 2011b.
- Oden J.T., Prudhomme S., Romkes A., y Bauman P.T. Multiscale modeling of physical phenomena: Adaptive control of models. *SIAM J. SCI. COMPUT*, 28:2359–2389, 2006.
- Oliver J., Caicedo M., Roubin E., y Huespe A. Continuum approach to computational multi-scale modelling of fracture. *Key Engineering Materials*, 627:349–352, 2015.
- O.Lloberas-Valls. *Multiscale domain decomposition analysis of quasi-brittle materials*. Ph.D. Thesis, Faculty of Civil Engineering and Geosciences at Delft University of Technology, 2013.
- Park H.S. y Liu W.K. An introduction and tutorial on multiple-scale analysis in solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 193:1733–1772, 2004.

- Park K. y Paulino G. Computational implementation of the ppr potential-based cohesive model in abaqus: Educational perspective. *Engineering Fracture Mechanics*, 93:239–262, 2012.
- Peerlings R.H.J. y Fleck N.A. Computational evaluation of strain gradient elasticity constants. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 2(4), 2004. ISSN 1543-1649.
- Rahimabadi A. *Error Controlled Adaptive Multiscale Method for Fracture in Polycrystalline Materials*. Tesis de Doctorado, Cardiff University, 2014.
- Sánchez P., Blanco P., Huespe A., y Feijóo R. Failure-oriented multi-scale variational formulation: Micro- structures with nucleation and evolution of softening bands. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 257:221 – 247, 2013. ISSN 0045-7825.
- Tarazi S. y Mandel J. Zero thickness quarter point crack tip finite element for modelling and interface between two materials. *Computers and Structures*, 30:37–48, 1988.
- Toro S. *Modelado de falla de materiales mediante formulaciones multiescala*. Tesis de Doctorado, Universidad Nacional del Litoral, 2014.
- Toro S., Sánchez P., Blanco P., de Souza Neto E., Huespe A., y Feijóo R. Multiscale formulation for material failure accounting for cohesive cracks at the macro and micro scales. *International Journal of Plasticity*, 76:75–110, 2016a.
- Toro S., Sánchez P.J., Podestá J.M., Blanco P.J., Huespe A.E., y Feijóo R.A. Cohesive surface model for fracture based on a two-scale formulation: computational implementation aspects. *Computational Mechanics*, 58(4):549–585, 2016b.
- Verhoosel C.V., Remmers J.C., Gutierrez M.A., y de Borst R. Computational homogenization for adhesive and cohesive failure in quasi-static solids. *International journal of Numerical Methods in Engineering*, 83:1155–1179, 2010.
- Willis J. Variational and related methods for the overall properties of composites. *Adv. Appl. Mech.*, 21:1–78, 1981.
- Z.Hashin. Analysis of composite materials.a survey. *J. Appl. Mech.*, 50:481–505, 1983.
- Z.Hashin y S.Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 11:127–140, 1963.
- Zohdi T., Oden J., y Rodin G. Hierarchical modeling of heterogeneous bodies. *Comput.Meth.Appl.Mech.Engng.*, 138:273–289, 1996.