

Cálculo del Comportamiento de la Mampostería Mediante Elementos Finitos

**J. López
S. Oller
E. Oñate**

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España

Primera edición Diciembre 1998

CÁLCULO DEL COMPORTAMIENTO DE LA MAMPOSTERÍA MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS
Monografía CIMNE M46
© Los autores

ISBN: 84-89925-29-1
Depósito legal: B-4676-99

INDICE

CAPÍTULO 1. Introducción.....	1.1
CAPÍTULO 2. Descripción de la mampostería.....	2.1
2.1. Descripción general de la mampostería.....	2.1
2.2. Propiedades del mortero y del ladrillo a nivel experimental.....	2.3
2.3. Propiedades de la interfase ladrillo-mortero.....	2.3
2.3.1. Modo de fisuración por tracción.....	2.3
2.3.2. Modo de fisuración debido a cortante.....	2.5
2.4. Propiedades del material compuesto. Mampostería.....	2.7
2.4.1. Comportamiento de la mampostería en compresión uniaxial.....	2.7
2.4.2. Comportamiento a tracción uniaxial de la mampostería.....	2.9
2.4.3. Comportamiento biaxial.....	2.10
2.5. Aspectos del comportamiento post-pico. Ablandamiento o “Softening”.....	2.11
CAPÍTULO 3. Estado del arte de los métodos de cálculo.....	3.1
3.1. Micromodelos.....	3.3
3.2. Modelo de homogeneización de Page.....	3.5
3.2.1. Características mecánicas de los materiales utilizados.....	3.6
3.2.2. Modelo de elementos finitos.....	3.11
3.3. Modelo de Pietruszczak.....	3.16
3.4. Modelo de combinación de modelos constitutivos de daño y plasticidad anisótropa. Teoría de mezclas.....	3.18
3.4.1. Teoría de mezclas.....	3.18
3.4.2. Aplicación de la teoría de mezclas a materiales compuestos.....	3.19
3.4.2.1. Estado tensional.....	3.19
3.4.2.2. Disipación mecánica.....	3.19
3.4.2.3. Rigidez tangente.....	3.19
3.4.2.4. Deformación.....	3.19
3.4.2.5. Relación constitutiva secante.....	3.20
3.4.2.6. Deformación plástica del compuesto.....	3.20
3.4.3. Estado plano de tensiones en materiales compuestos.....	3.21

3.4.4. Limitaciones de la teoría de mezclas en mampostería.....	3.21
3.5. Modelo de homogeneización de Anthoine.....	3.22
3.5.1. Ley constitutiva de daño.....	3.25
3.5.2. Resultados numéricos.....	3.26
3.6. Modelo de Lourenço.....	3.29
CAPÍTULO 4. Propuesta de modelo constitutivo homogeneizado en mampostería.....	4.1
4.1. Modelo constitutivo.....	4.1
4.1.1. Ecuaciones del modo 1.....	4.3
4.1.2. Ecuaciones del modo 2.....	4.6
4.1.3. Ecuaciones del modo 3.....	4.9
4.1.4. Ecuaciones del modo 4.....	4.13
4.2. Obtención de los parámetros homogeneizados...	4.14
4.3. Flujo plástico homogeneizado.....	4.19
CAPITULO 5. Calibración del modelo y resultados numéricos.....	5.1
5.1. Verificación del modelo de homogeneización....	5.1
5.2. Verificación de la anisotropía.....	5.5
5.3. Calibración del modelo.....	5.8
5.4. Ejemplos de aplicación ingenieril.....	5.18
5.4.1 Resultados de la hipótesis de carga 1.....	5.20
5.4.2 Resultados de la hipótesis de carga 2.....	5.24
5.4.3 Resultados de la hipótesis de carga 3.....	5.27
Bibliografía	B.1
Anejo A.1. Criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado.....	A.1.1
Anejo A.2. Integración de la ecuación constitutiva. Integración implícita.....	A.2.1
Anejo A.3. Teoría de transformación de espacios.....	A.3.1
Anejo A.4. Energías disipadas por unidad de área.....	A.4.1
A.4.1. Objetividad de la respuesta y su relación con la localización de deformaciones. Modelo uniaxial..	A.4.1
A.4.2. Energía específica plástica para un proceso de tracción uniaxial. Relación con la energía de fractura G_f	A.4.5
A.4.3. Energía específica plástica para un proceso de compresión uniaxial. Relación con la energía de aplastamiento G_c	A.4.6
Anejo A.5. Listado del programa de homogeneización de variables de un problema de mampostería.....	A.5.1
Anejo A.6. Cálculo de los parámetros en el espacio real y ficticio.....	A.6.1

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

La mampostería es uno de los materiales de construcción con mayor abanico de usos, ya sea en el pasado como en el presente, así es como hoy en día también se puede encontrar en la construcción de edificaciones modernas. Los materiales utilizados a lo largo de la historia como elementos componentes de la mampostería han sido muchos y muy variados: desde la simple roca unida con mortero de cal (sillería), pasando por los enormes bloques de mármol usados en la construcción de los grandes monumentos del apogeo de la arquitectura del Renacimiento, hasta llegar a elementos cerámicos refractarios como los que se utilizan para la construcción de hornos, centrales nucleares e incluso como aislante térmico de naves espaciales.

La mampostería ha sido usualmente un material barato. El encarecimiento de la mano de obra hace que la obra de fábrica no sea atractiva desde el punto de vista económico con respecto a materiales como el hormigón o el acero.

El paulatino paso del tiempo ha traído consigo la evolución en la fabricación de los componentes que conforman la mampostería (ladrillos y morteros), mientras que su colocación en obra sigue siendo la misma que en las últimas décadas. El utillaje y los materiales cambian; por el contrario, la forma de colocación sigue siendo a mano, por lo que el factor humano como elemento limitante en la calidad de la obra de fábrica todavía es muy importante.

Entre los elementos innovadores en la fabricación de la mampostería podríamos destacar la incorporación de armaduras a modo de hormigón armado (mampostería armada); mampostería con juntas interiores donde el mortero queda escondido entre los elementos cerámicos permitiendo la regularidad de la colocación e impidiendo la degradación de dichas juntas; generación de muros de carga de mampostería (la mampostería no sólo tiene aplicación ornamental); paneles resistentes a sismos y cargas de viento; etc. Todos ellos son elementos que hacen atractiva la mampostería como material de construcción con altas prestaciones.

La innovación ha venido por la vertiente tecnológica e industrial, pero los métodos de cálculo utilizados para el diseño de estructuras de obra de fábrica no han seguido un desarrollo paralelo como en el caso de otros materiales (hormigón armado, hormigón pretensado). Los métodos más utilizados son aquéllos que preconizan las diferentes normativas simplificadas que rigen en cada país, ya que entre los calculistas existe un desconocimiento generalizado del comportamiento estructural de la mampostería que impide diseñar este tipo de estructuras de forma óptima. Estas normativas frecuentemente están obtenidas sobre la base de estudios empíricos que intentan simplificar los mecanismos de comportamiento de la obra de fábrica y que traen como consecuencia un sobredimensionamiento de la estructura. Otra de las consecuencias del uso de este tipo de reglas de cálculo es que se formen mecanismos de carga que no han sido considerados, apareciendo fisuraciones cuando en teoría y en base al cálculo éstas

no deberían aparecer; un paseo por cualquiera de nuestras ciudades nos delata esta forma errónea de proceder.

Los métodos de cálculo avanzado (modelos constitutivos de la mecánica del medio continuo) deben ser el pilar sobre el que desarrollar elementos más objetivos de análisis estructural de la mampostería. Los elementos finitos son una herramienta potente en la que apoyar el cálculo de la obra de fábrica pero, debido a que ésta tiene un tamaño pequeño respecto a las dimensiones globales de la estructura, se hacen inviables desde el punto de vista computacional.

La necesidad de encontrar un método que equilibre sencillez, objetividad y rapidez de cálculo es la que motiva el desarrollo de formulaciones con tratamiento al nivel de macromodelo de la mampostería. La inquietud por conseguir este equilibrio hace a Jacob Lubliner y Sergio Oller sentar las bases que permitirán el desarrollo del modelo constitutivo homogeneizado que se presenta en este trabajo.

CAPÍTULO 2

DESCRIPCIÓN DE LA MAMPOSTERÍA

En el presente capítulo se pasará a definir los elementos que constituyen la mampostería así como la descripción de las propiedades de los diferentes materiales que la componen. El comportamiento de éstos por separado tendrá una gran influencia en la posterior respuesta de la mampostería tratada como único material (homogeneización).

2.1.-DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA MAMPOSTERÍA

Por mampostería se entiende el conjunto de dos fases materiales constituidas por bloques, ya sean en forma natural o de fábrica, como los ladrillos, y una sucesión de juntas de mortero dispuestas en forma irregular (como en el caso de la sillería) o regular (como en el caso de la obra de fábrica). En este último caso, las juntas siguen la disposición del contorno de los ladrillos teniendo dos grupos principales: horizontales y verticales. En el caso del presente trabajo, se centrará en la mampostería compuesta por ladrillos de forma regular y paralelepípeda, no entrando en el estudio de bloques irregulares.

La mampostería es un material que presenta diferentes propiedades en función de la dirección en la que estén orientadas las juntas de mortero. Éstas constituyen planos de debilidad. El fallo de las estructuras de mampostería va precedido generalmente por un desarrollo masivo de fisuración en dichas juntas, por lo que éstas son las limitantes en la capacidad resistente final.

Las propiedades de los materiales son determinadas a partir de ensayos experimentales individualizados de cada una de las partes que conforman la mampostería.

A continuación se pasa a describir algunas de las propiedades que caracterizan a la mampostería:

- **Ladrillos** : las propiedades de los ladrillos fabricados a partir de arcilla horneada varía considerablemente en función de la hornada a la que pertenecen. Así pues, ladrillos de diferentes hornadas suelen tener propiedades diferentes. En la actualidad, esta disipación de las propiedades del ladrillo se está resolviendo mediante la aplicación de normas de buena práctica ya estandarizadas, tales como la Norma ISO 9000, la Norma española *FL-90* (Norma NBE de muros resistentes de fábrica de ladrillos) o el *Pliego general para la recepción de ladrillos cerámicos en las obras de fábrica RL-88*. Esta variación es inherente al proceso de fabricación y es uno de los factores contribuyentes a la dispersión de resultados que se podrían obtener en ensayos de mampostería. Los ladrillos presentan un comportamiento típico elasto-frágil, pero no necesariamente homogéneo o isótropo.

- **Mortero** : el mortero utilizado en mampostería está compuesto por diferentes combinaciones de cemento, arena y finos. Es usual la fabricación de morteros con menores resistencias que las del ladrillo. El logro de un mortero de alta resistencia no es tan importante como el de la consecución de una unión sólida entre mortero y ladrillo. El mortero presenta un comportamiento no-lineal a nivel tensodeformacional que provoca deformaciones inelásticas significativas en la mampostería. Lenczner (1973) estableció que las deformaciones por deslizamiento en mampostería pueden ser bastante significativas siendo del mismo orden que el crecimiento de fisuración que ocurre cuando cambian los contenidos de humedad.
- **Mampostería** : la mampostería es un material que transmite cargas de compresión de forma muy efectiva. Su capacidad está gobernada por las propiedades mecánicas de los ladrillos, ya que el fallo se produce por agrietamiento a causa de la tracción transversal en el ladrillo provocada por una expansión diferencial lateral del ladrillo rígido y una ductilidad mayor del mortero.

La resistencia mecánica de la mampostería es extremadamente baja mientras la unión mecánica sea baja y en los cálculos de diseño se suele tomar como 0 (Yokel and Fattal, 1976).

El comportamiento de la mampostería sujeta a complejos estados tensionales está marcadamente influenciado por la orientación de las juntas de mortero y las cargas aplicadas. La mayoría de las deformaciones plásticas aparecen en las juntas y las características de éstas se ven afectadas por la magnitud del cortante y la tensión normal. Dependiendo del grado de compresión al que se vea sometido, el fallo puede ocurrir solamente en las juntas o en una combinación de fisuración junta-mortero. No todos los mecanismos de fractura en mampostería son totalmente comprensibles y los criterios de fisuración no han sido del todo desarrollados, por lo que es usual la utilización de criterios de plasticidad aplicados en geomateriales (Mohr-Coulomb (1882) , Drucker-Prager (1952) , Lubliner-Oller (1990) , ... , etc).

2.2.-PROPIEDADES DEL MORTERO Y DEL LADRILLO A NIVEL EXPERIMENTAL.

Las propiedades de la mampostería, tal y como se ha indicado en el punto anterior, dependen fuertemente de las propiedades de sus constituyentes. Los ensayos de compresión son fáciles de realizar y obtienen buenos indicadores de la calidad de los materiales a usar en la fabricación de elementos de mampostería. La CEN Eurocódigo 6 (1995) establece el ensayo de compresión de los componentes como ensayo de determinación de la resistencia de la mampostería, incluso si la veracidad de los valores a buscar no es simple.

Los ensayos estandarizados realizados en bancadas con placa de carga rígida establecen una resistencia a compresión artificial debida al efecto restrictivo que introduce la utilización de dicha bancada estandarizada para ensayar paneles de mampostería. El Eurocódigo 6 (1995) minimiza este efecto mediante la consideración de una resistencia a compresión normalizada f_b , el cual resulta a partir del ensayo de compresión estándar en la dirección de carga pertinente multiplicada por un factor forma/dimensión. El ensayo de compresión normalizado al que se hace referencia establece como probeta a ensayar la de $100 \times 100 \times 100 \text{ mm}^3$, pero ésta no puede ser representativa para establecer una resistencia

real. Ensayos para analizar el comportamiento uniaxial post-pico en compresión para los ladrillos es virtualmente inexistente y no existen recomendaciones acerca de cuál debe ser la energía de fractura G_f o la energía de aplastamiento G_c .

La dificultad de relacionar la resistencia a tracción de la mampostería con la resistencia a compresión se debe a las distintas formas, materiales, procesos constructivos y volumen de perforaciones en los ladrillos. Para la resistencia a tracción longitudinal de la arcilla, silicato cálcico y hormigón, Schubert (1988) estableció un test del que obtuvo una relación entre resistencia a tracción y compresión con rangos que oscilan entre 0.03 y 0.10. Para la energía de fractura a tracción G_f de sólidos arcillosos y silicatos cálcicos, Van Der Pluijm (1992) estableció valores con rangos entre 0.06 y 0.13 N·mm/mm² pudiendo alcanzar valores de hasta 1.5 a 3.5 N·mm/mm².

Ensayos biaxiales para el estudio del comportamiento de ladrillos y bloques son también carentes en la literatura existente. Este aspecto toma relevancia debido al comportamiento ortótropo de los elementos que presentan perforaciones. Como consecuencia, el comportamiento biaxial de los ladrillos con una forma dada es comúnmente desconocida, aunque el comportamiento del material del que están fabricados (hormigón o arcilla) sí que es conocido.

En el caso del mortero, la resistencia a compresión se obtiene a partir de ensayos estandarizados de probetas prismáticas de 40x40x160 mm³ en ensayo a flexotracción.

2.3.- PROPIEDADES DE LA INTERFASE LADRILLO-MORTERO

La unión entre ladrillo y mortero es, a menudo, una unión débil. El comportamiento no-lineal de las juntas, el cual es controlado por la interfase ladrillo-mortero, es una de las propiedades más relevantes del comportamiento de la mampostería. Dos diferentes fenómenos aparecen en la interfase ladrillo-mortero, uno asociado con la fisuración por tracción y otro asociado con el modo de fallo debido a cortante.

2.3.1.- Modo de fisuración por tracción

Van der Pluijm, en 1992, realizó ensayos de deformación controlada en pequeñas probetas de mampostería. A través de estos ensayos se obtuvo una curva asociada al comportamiento a tracción con una forma próxima a una exponencial descendente (ablandamiento). Asimismo, se obtuvieron valores para la energía de fractura G_f asociados a este modo que rondaban entre 0.005 a 0.02 N·mm/mm² para valores de resistencia a tracción del orden de 0.3 a 0.9 N/mm² dependiendo de la tipología de las juntas. Observaciones mediante microscopía han revelado que el área efectiva de unión es menor que el espesor seccional de las juntas de mortero.

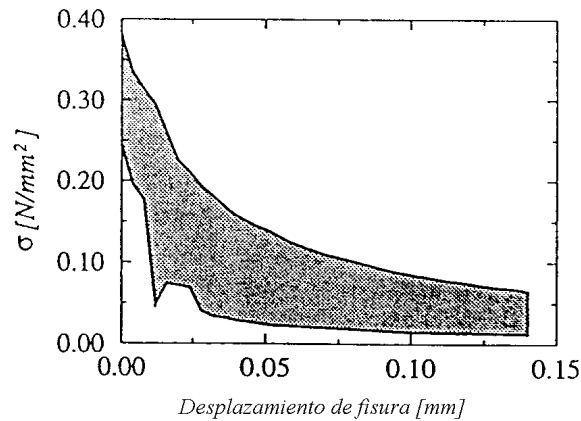


Figura 2.1. Curva experimental tensión-desplazamiento de fisura

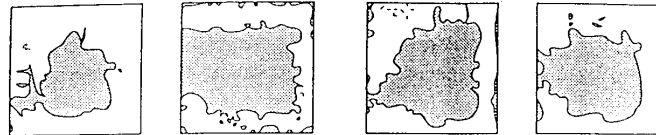


Figura 2.2 Típicas superficies de unión.

La red de superficies de unión (así llamada por Van der Pluijm a la interfase) parece estar concentrada en la parte interior de la junta, la cual puede ser resultado de la reducción de volumen del mortero y de un proceso de colocación de los ladrillos en el lecho de mortero. En el caso de un muro, la red de superficie de unión puede ser corregida y aumentada debido a que las juntas de mortero, en especial las horizontales, presentan pocas discontinuidades.

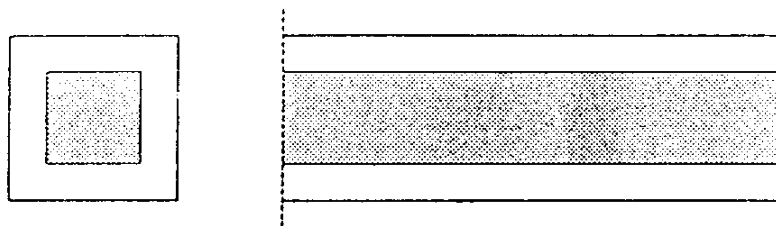


Figura 2.3 Extrapolación de las superficies de unión.

Los esquemas presentados en la Figura 2.3 hacen referencia a esquemas reales de secciones de muros y proceden de la extrapolación de la medida de la red de superficie de unión de la zona que se ha supuesto como red de superficie de unión de un muro, no

haciendo influir el efecto de las juntas verticales. Esta asimilación daría a entender que para este modo la mampostería sería una sucesión de capas horizontales formadas por ladrillos y juntas de mortero sucesivamente.

2.3.2.- Modo de fisuración debido a cortante

Un aspecto importante en la determinación de la respuesta a cortante de las juntas en mampostería es la capacidad de generarse estados uniformes de tensión en las juntas. Esto comporta que en cualquier ensayo existe la dificultad de obtención de este modo de comportamiento debido a que el equilibrio restringe la introducción de estados no uniformes de tensiones normales en la junta.

Al igual que en el punto 2.3.1., Van der Pluijm (1993) estableció una completa caracterización del comportamiento a cortante de la mampostería. A partir de un ensayo de corte directo con probetas confinadas y ensayándolo a diferentes niveles de carga, pudo establecer el comportamiento real de la interfase junta-mortero para el caso de sollicitaciones tangenciales. Cabe destacar que en muchos de los ensayos con alto nivel de confinamiento en el ensayo a corte, el mecanismo de fallo en la interfase ladrillo-mortero va acompañado de una fisuración diagonal de los bloques de ladrillo.

Los ensayos dan como resultado unas curvas exponenciales decrecientes (ablandamiento) con una resistencia inicial residual tal como se puede ver en la Figura 2.4.

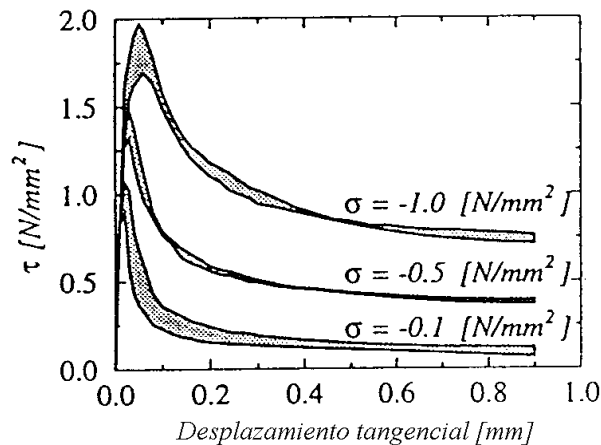


Figura 2.4. Curva tensión-desplazamiento para diferentes estados de carga.

El área encerrada por la curva tensión-desplazamiento y la resistencia residual es lo que se denomina energía de fractura G_f , asociada a mecanismos de corte y cuyos valores van desde 0.01 a 0.25 N·mm/mm² para valores de la cohesión inicial de entre 0.1 a 1.8 N/mm². El valor de la energía de fractura depende, además, del nivel de confinamiento al que se ve sometida la probeta, tal como se puede ver en la Figura 2.5.

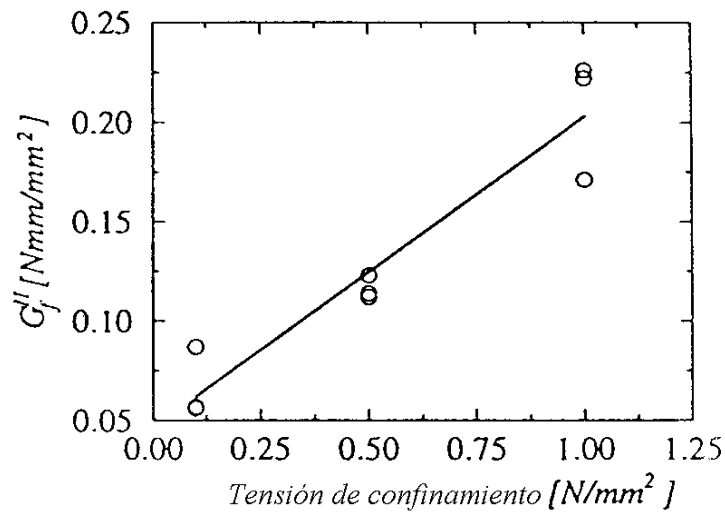


Figura 2.5. Curva representante de la variación de la energía de fractura en función del nivel de carga de confinamiento.

El valor del ángulo de fricción interna inicial ϕ_0 asociado con el modelo friccional de Mohr-Coulomb presenta valores con rangos que oscilan entre 30° y 50° en función de las características de las juntas de mortero. El valor del ángulo de fricción interna residual ϕ_r se puede suponer aproximadamente constante e igual a 37° . El ángulo de dilatación interna ψ se obtiene a partir de ensayos confinados con baja presión de confinamiento, y éste puede tomar valores entre 11° y 35° , dependiendo de la rugosidad de la superficie del ladrillo. Para altas presiones de confinamiento, el valor de ψ decrece hasta 0° . Con superficies de contacto entre mortero y ladrillo deslizantes, ψ decrece a 0° debido a la suavidad éstas.

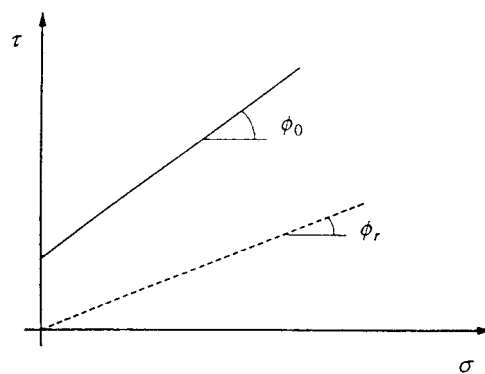


Figura 2.6. Ángulo de rozamiento interno (inicial y residual)

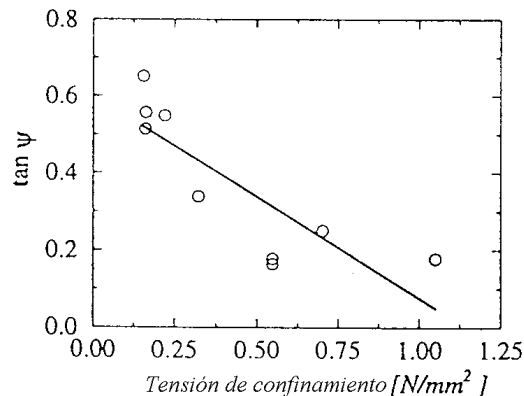


Figura 2.7. Ángulo de dilatación en función del estado de carga.

2.4.- PROPIEDADES DEL MATERIAL COMPUESTO. MAMPOSTERÍA

El comportamiento uniaxial del material compuesto se describe a continuación con respecto a los ejes del material conocidas las direcciones paralelas y normal a la orientación de las juntas.

2.4.1- Comportamiento de la mampostería en compresión uniaxial

La resistencia a compresión de la mampostería en la dirección normal a la junta ha sido tradicionalmente vista como una propiedad relevante del material, al menos hasta la reciente introducción de los métodos numéricos para las estructuras de mampostería. Un ensayo frecuentemente usado para obtener esta resistencia a compresión uniaxial es el ensayo de prisma con elementos apilados (véase Figura 2.8). Pero es aún algo incierto el uso de los parámetros de resistencia obtenidos con ensayos de este tipo según Mann y Betzler (1994). El ensayo más comúnmente aceptado para la determinación de la resistencia a compresión uniaxial de la mampostería en dirección normal a las juntas de mortero es el que se obtiene a partir de los ensayos llamados RILEM (Wesche y Ilanzis, 1980), que se puede ver en la Figura 2.8. Este tipo de ensayo es relativamente largo y costoso de ejecutar, especialmente si se compara con el ensayo estándar mediante probetas cilíndricas de hormigón. La compresión uniaxial de la mampostería conduce a un estado triaxial de compresión en el mortero y a una compresión-tracción en el ladrillo. Mann y Betzler (1994) observaron que inicialmente aparecían fisuras verticales en los ladrillos a lo largo de la línea media de las piezas, que generalmente coincidían con la continuación de las juntas verticales de mortero. A medida que crece la deformación van apareciendo fisuras adicionales, normalmente verticales en pequeñas zonas de la pieza, que llevan al fallo por deslizamiento de las fisuras en la pieza.

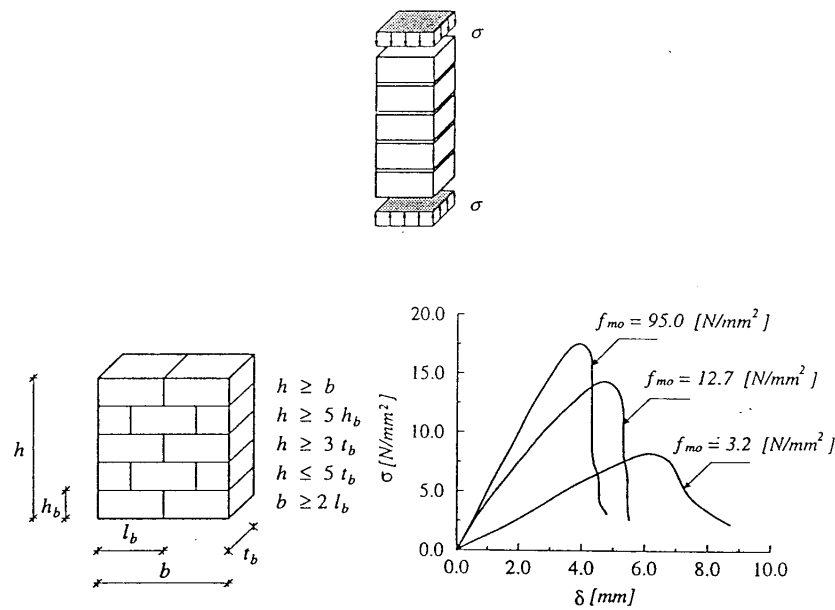


Figura 2.8. Comportamiento uniaxial de la mampostería bajo carga normal al plano de las juntas horizontales

El comportamiento de la mampostería bajo compresión uniaxial en dirección paralela a las juntas de mortero recibe menos atención. Sin embargo, la mampostería es un material anisótropo y, particularmente en el caso de resistencia a compresión longitudinal baja de los ladrillos debido a la alta o desfavorable perforación de éstos, la resistencia a compresión bajo cargas paralelas a las juntas de mortero puede tener un efecto decisivo a la hora de la determinación de la carga de pandeo en los muros. De acuerdo con Hoffmann y Schubert (1994), la relación entre la resistencia a compresión uniaxial paralela a las juntas y normal a éstas tienen valores que oscilan entre 0.2 y 0.8. Estas relaciones han sido obtenidas para bloques perforados, bloques de mortero y bloques de hormigón ligero. En el caso de ladrillos macizos, la relación antes mencionada puede tomarse como 1.0.

2.4.2.-Comportamiento a tracción uniaxial de la mampostería

Para cargas a tracción en sentido perpendicular a las juntas de mortero, el colapso es causado por una bajada en la resistencia a tracción relativa en la interfase mortero-ladrillo. En una aproximación no rigurosa, la resistencia a tracción de la mampostería se puede equiparar a la resistencia a tracción de la unión entre la junta y el ladrillo.

En mampostería con baja resistencia de los ladrillos y gran resistencia a tracción de la unión entre la junta y el ladrillo, por ejemplo, mortero de alta resistencia y ladrillo con numerosas perforaciones, el fallo ocurre como resultado de la superación por parte de las tensiones de la resistencia a tracción del ladrillo. Como aproximación a la resistencia a tracción de la mampostería se toma la resistencia a tracción del ladrillo.

A partir de ensayos realizados se han observado dos diferentes mecanismos de rotura en paneles ensayados a tracción paralelos a la junta. El primero de éstos falla por

desarrollo de fisuración en las juntas verticales y horizontales y en forma de zigzag. El segundo se presenta como una fisura perpendicular a la fuerza de tracción y que aparece siguiendo las juntas verticales de mortero y atravesando los ladrillos.

En el primero de los mecanismos de rotura, la respuesta de la mampostería viene gobernada por la energía de fractura de las juntas verticales, mientras que en las juntas horizontales es el mecanismo de cortante el que gobierna la fisuración. En el segundo de los mecanismos, dado que toda la fisuración es vertical e involucra tanto a las juntas como al ladrillo, es la energía de fractura G_f de cada material conjuntamente la que gobierna la fisuración total de la estructura.

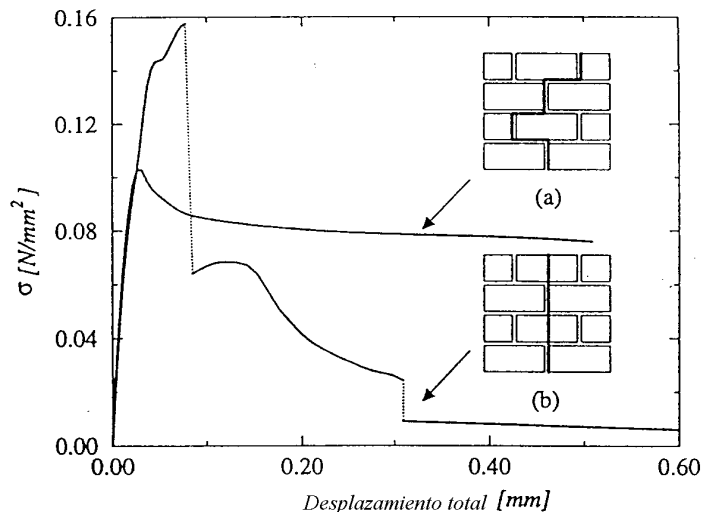


Figura 2.9. Curvas experimentales tensión-desplazamiento para tracción en dirección paralela a las juntas horizontales de mortero (a) el fallo ocurre por fisuración escalonada paralela a las juntas ;(b) el fallo ocurre verticalmente a lo largo de juntas y ladrillos.

2.4.3.- Comportamiento biaxial

El comportamiento biaxial de la mampostería bajo estados biaxiales de tensión, puede no ser completamente descrito por una ley constitutiva bajo condiciones de carga uniaxiales. La influencia del estado biaxial de tensiones es importante con el fin de conocer el comportamiento resistente, el cual no puede ser descrito solamente en términos de tensiones principales ya que la mampostería es un material anisótropo. Por lo tanto, la envolvente de tensiones biaxiales de mampostería puede ser descrita en términos de la orientación de los ejes respecto al material y de las tensiones principales, siendo θ el ángulo que forman las tensiones principales y los ejes del material. La más completa información recogida sobre la proporcionalidad de la carga biaxial de la mampostería es la que se puede observar en la Figura 2.10, desarrollada por Page (1981-1983) en base a los ensayos realizados sobre un muro experimentado y cuyo desarrollo se explicita en el capítulo 3.

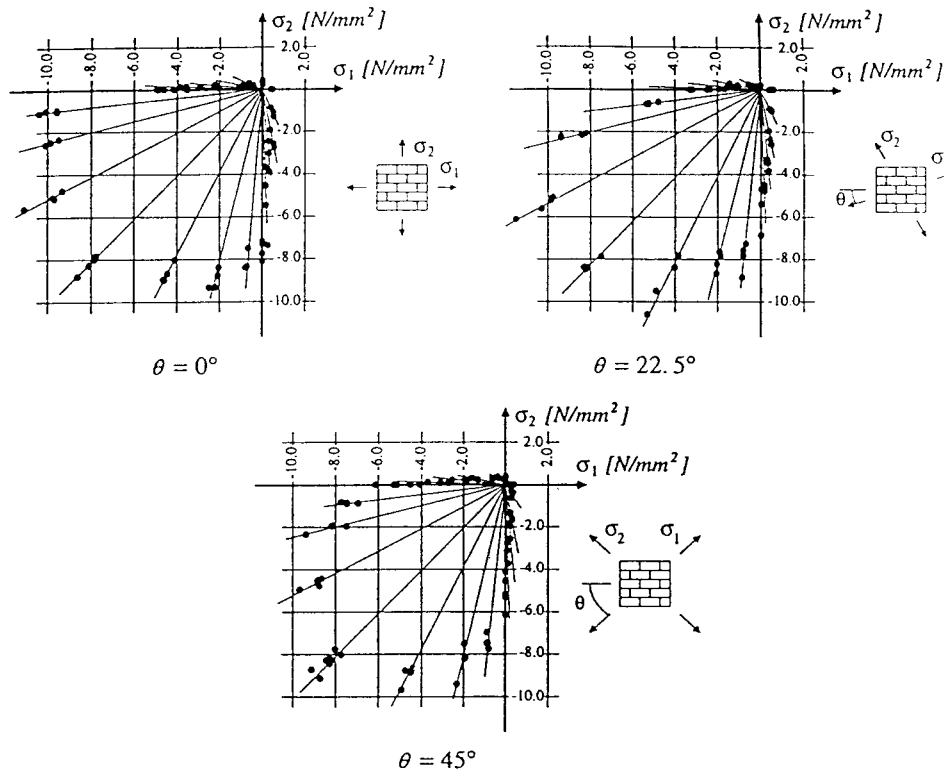


Figura 2.10. Ensayo biaxial.

Uno de los resultados importantes obtenidos por Page fue la determinación de los diferentes mecanismos de ruptura o fisuración en función de la orientación de la carga respecto a los ejes definidos para el material. Figura 2.11.

Ángulo θ	Tracción uniaxial	Tracción/Compresión	Compresión uniaxial	Compresión biaxial
0°				
22.5°				
45°				
67.5°				
90°				

Figura 2.11. Mecanismos de fisuración en mampostería.

Para tracción uniaxial el fallo ocurre por fisuración y deslizamiento de unos bloques sobre otros en la línea formada por el acoplamiento de dichas fisuras. La influencia de la tracción lateral en la resistencia a tracción global no es conocida debido a que no hay ensayos experimentales conocidos. La compresión lateral hace decrecer la resistencia a tracción, lo cual puede ser explicado debido al daño inducido en el material compuesto por formación de microfisuras en las juntas y en los ladrillos. En el caso de cargas combinadas tracción-compresión el fallo ocurre tanto por fisuración y deslizamiento en las juntas como por un mecanismo combinado que involucra tanto a ladrillos como a juntas. Parecidos tipos de fallo aparecen en el caso de compresión uniaxial, pero en el caso de compresión biaxial se observan tránsitos suaves hacia otros mecanismos de ruptura. El mecanismo de fallo típico en compresión biaxial ocurre por fisuración de los paneles en la zona media de la estructura y siguiendo una dirección paralela al plano de carga. El incremento de la resistencia a compresión bajo estados de compresión biaxial puede explicarse por el desarrollo de una fricción en las juntas, así como una fricción interna en el mortero.

2.5.- ASPECTOS DEL COMPORTAMIENTO POST-PICO. ABLANDAMIENTO O “SOFTENING”.

El ablandamiento es un decremento gradual de las propiedades resistentes bajo incrementos continuos de deformaciones impuestas sobre un material determinado o estructura. Éste es un rasgo característico de los materiales cuasi frágiles tales como ladrillos de arcilla, morteros, materiales cerámicos, rocas u hormigón, los cuales fallan debido a un proceso de progresivo deterioramiento interno por desarrollo de microfisuras en las interfases de los materiales componentes. Tal comportamiento mecánico ha sido atribuido a la heterogeneidad del material, debido a la presencia de diferentes fases y defectos en él tales como efluencias y porosidades. Incluso anterior a los procesos de carga, el mortero contiene microfisuras debidas a retracción durante el curado y de la presencia de aditivos. En el caso de los ladrillos fabricados de arcilla, éstos contienen defectos y microfisuras debido a retracciones en el proceso de cocción de las piezas. Las tensiones iniciales y las fisuras, así como variaciones en las rigideces internas y resistencias, causan el progresivo crecimiento de fisuras cuando el material está sometido a deformaciones progresivas. Inicialmente las microfisuras son estables, lo que significa que sólo crecerán cuando la carga se incremente. Alrededor de la carga de rotura se genera una aceleración en la formación de fisuras y comienza el proceso de formación de macrofisuras. Las macrofisuras son inestables, lo cual significa que la carga debe decrecer con el fin de evitar un crecimiento incontrolado de éstas. En los ensayos de deformación controlada, el crecimiento de la macrofisura degenera en un ablandamiento y localización de fisuras en pequeñas zonas, mientras que en el resto de la estructura aparece un proceso de descarga.

En el caso de los mecanismos de fallo en tracción, el fenómeno está bien identificado. En el caso del cortante, el proceso de ablandamiento se puede observar también como degradación de la cohesión del modelo resistente de Mohr-Coulomb. En los casos de compresión, el fenómeno de ablandamiento es altamente dependiente de las condiciones de contorno en la estructura de mampostería, así como de las medidas de sus materiales componentes.

En la Figura 2.12 se puede ver el diagrama característico tensión-desplazamiento para materiales cuasi frágiles en el caso de corte puro. A través del análisis de las gráficas σ - δ , se pueden extraer las energías de fractura G_f y energía de aplastamiento G_c , las cuales son determinantes a la hora de establecer el comportamiento post-pico del material.

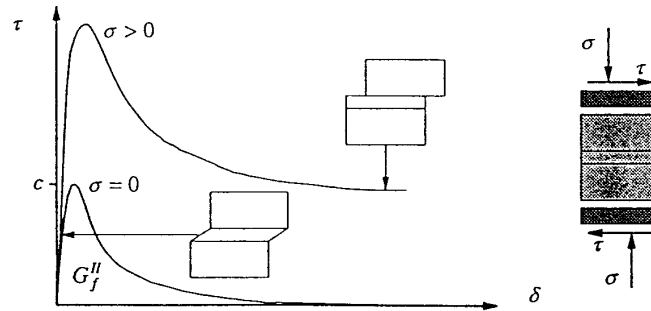


Figura 2.12. Comportamiento de la mampostería bajo estados de corte puro.

CAPÍTULO 3

ESTADO DEL ARTE DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO

En el presente capítulo se hará un repaso al estado del arte referente a las formas de cálculo existentes utilizando como herramienta el método de los elementos finitos. Si bien este método no es el único, sí es el que refleja en sus resultados un comportamiento más real. Una forma de calcular la mampostería es también la utilizada hasta ahora, discretizando la mampostería con modelos aproximados de barras, donde el ladrillo se discretiza mediante una barra mientras que las juntas de mortero están representadas por soportes elásticos en extremo de barra. Este último tipo de análisis no será objeto de este capítulo ya que se aleja de la filosofía de los modelos constitutivos generados a partir de la mecánica de sólidos.

La mampostería es un material que presenta direccionalidad en sus propiedades debido a que las juntas del mortero actúan como planos de debilidad en el material. En general, la aproximación hacia una modelización numérica puede ser enfocada con *Micromodelos*, los cuales discretizan de forma detallada y separada ladrillos y juntas. Por otra parte, existe la posibilidad de hacer un tratamiento como *Macromodelo* donde se trata a la mampostería como un material compuesto. Dependiendo del nivel de detalle deseado es posible utilizar la siguientes formas de modelización:

- Micromodelización detallada: ladrillos y morteros son representados por elementos continuos, mientras que el comportamiento de la interfase mortero-ladrillo es representada por elementos discontinuos.
- Micromodelización simplificada: En este caso, los materiales están representados por un elemento continuo donde el comportamiento de las juntas de mortero y la interfase ladrillo-mortero está separada por discontinuidades.
- Macromodelización: los ladrillos, mortero e interfase ladrillo-mortero están englobados por un mismo elemento. Dentro de este tipo de discretización podemos englobar la técnica de homogeneización que en este trabajo se pasará a desarrollar.

En una primera aproximación, el módulo de Young, el coeficiente de Poisson y, opcionalmente, las propiedades inelásticas de ambos materiales se han de tener en cuenta para cualquier tipo de modelo que se utilice. La interfase junta-ladrillo representa una superficie de fisuración potencial con una rigidez ficticia inicial con tal de evitar la interpenetración del continuo. Ésto produce la acción combinada de ladrillo, mortero e interfase. En una segunda aproximación, cada junta consistente en mortero y dos interfases mortero-ladrillo se unen en una interfase que recoge estos tres elementos con el fin de simplificar el problema sin cambiar la geometría. La mampostería es, por ello, considerada como un conjunto de bloques elásticos separados por superficies potenciales

de fractura en las juntas. La precisión se pierde en el momento que el efecto Poisson del mortero no es incluido. La tercera aproximación no hace distinción entre ladrillos individuales y juntas, ya que trata la mampostería como un continuo homogéneo y anisótropo. Una de estas estrategias de modelización no puede ser preferible por encima de otras, ya que el campo de aplicación es diferente para el caso de micromodelos que para el de macromodelos.

Los micromodelos tienen su campo de aplicación en el estudio del comportamiento local de detalles estructurales de mampostería como estudio del comportamiento real de la interfase y comportamiento en puertas y ventanas (discontinuidades en la estructura). Este tipo de discontinuidades generalmente son determinantes en el comportamiento global de las estructuras de mampostería. Este tipo de modelización aplica una notable discretización en elementos, lo que comporta un coste computacional muy alto respecto a la escala para la que se utiliza.

Los macromodelos son aplicables cuando la estructura está compuesta por muros sólidos con dimensiones lo suficientemente grandes que hacen que las tensiones a través y a lo largo de los elementos sean esencialmente uniformes. Evidentemente, la macro-modelización es mucho más práctica debido al reducido tiempo y memoria requerido computacionalmente hablando, así como una mayor facilidad en la generación de malla. Este tipo de modelización tiene mayor valor cuando el compromiso entre precisión y eficiencia es necesario.

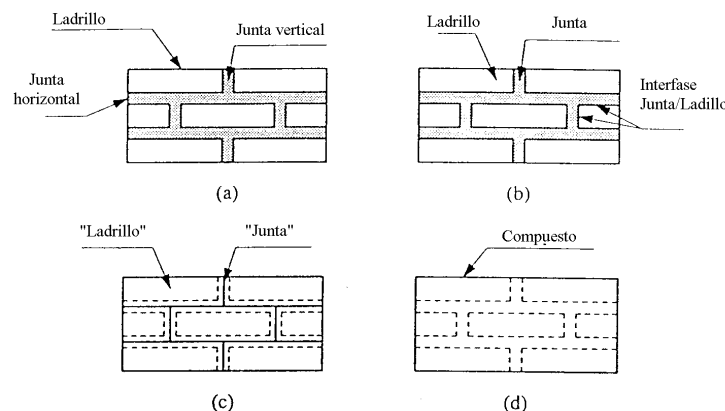


Figura 3.1. Diferentes estrategias de modelización de la mampostería:(a) Mampostería simple; (b) Micromodelo ;(c) Micromodelo simplificado; (d) Macromodelo.

La precisión de los micromodelos y los macromodelos de estructuras de mampostería exigen una descripción de los materiales a través de experimentación. Sin embargo, las propiedades de la mampostería están influidas por un gran número de factores como las propiedades de las unidades de mortero, la calidad de la mano de obra, el grado de curado, desarrollo y edad. Debido a esta diversidad, la utilización de modelos numéricos como contraposición a los ensayos experimentales tiene un gran interés. De todas maneras, la obtención de los parámetros debe ser por lo general determinada a partir de ensayos experimentales para posteriormente introducirlos como datos en los modelos numéricos.

3.1.- MICROMODELOS

Los micromodelos son probablemente la mejor herramienta capaz de entender el comportamiento de la mampostería. El provecho de su utilización como aproximación es, sobre todo, la posibilidad de consideración de diferentes mecanismos de fallo (fisuración, deslizamiento). La teoría de plasticidad actual ha desarrollado dos tipos de mecanismos de fallo para este tipo de modelización, por una parte un primer modo de fallo consistente en la consideración de fisuración por corte y, por otro lado, un mecanismo de fractura por compresión en base a la consideración de las superficies de fluencia de Mohr-Coulomb. La consideración de que estos fenómenos inelásticos se produzcan en la interfase entre elementos confiere una robusta herramienta de trabajo a los micromodelos, capaces de seguir completamente todo el proceso de carga de una estructura hasta la total degradación de rigidez de ésta.

Un minucioso micromodelo debe incluir todos los tipos básicos de mecanismos de fallo que caracterizan a la mampostería, como por ejemplo fisuración de las juntas, deslizamiento a lo largo del plano de las juntas a bajos niveles de tensión normal, fisuración de los ladrillos por tracción directa, fisuración diagonal por tracción en los ladrillos en valores de tensión normal suficientes para desarrollar la fricción en la juntas y el llamado “masonry crushing”, comúnmente identificado por un agrietamiento de los ladrillos por tracción como resultado de la dilatación del mortero a altos niveles de confinamiento por tensión normal (véase Figura 3.2)

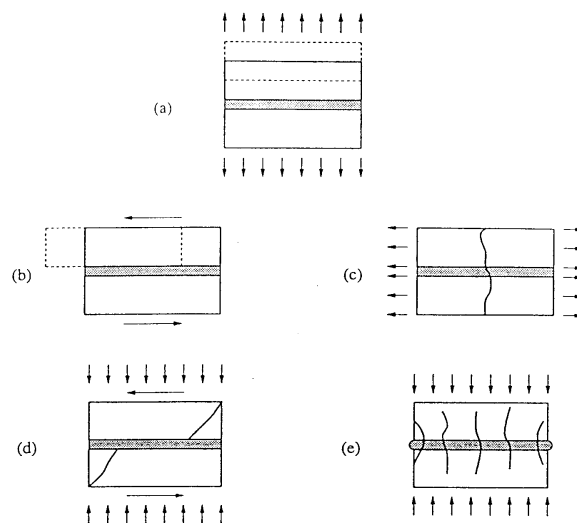


Figura3.2. Mecanismo de fallo de la mampostería: (a) Fisuración por tracción; (b) Deslizamiento por junta; (c) Fisuración del ladrillo por tracción directa; (d) Fisuración diagonal del ladrillo por tracción; (e) Fisuración por "Masonry crushing".

En los dos primeros casos, el mecanismo se produce en las juntas; en el tercero se produce en el ladrillo y, en el cuarto y quinto, el mecanismo es combinado involucrando tanto a juntas como a ladrillos. La aproximación seguida en los micromodelos se hace concentrando todo el daño en un espesor relativo de las juntas y, si es necesario, en el caso de tracción, se concentra la fisuración en una zona vertical en el medio del ladrillo.

Esta fisuración potencial en los ladrillos es capaz de reproducirse como un salto desde el límite de una junta hasta la siguiente, inmediatamente por encima y por debajo de la primera (véase Figura 3.3).

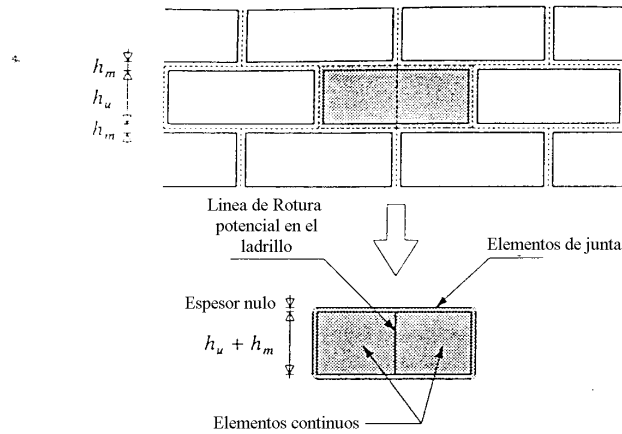


Figura 3.3. Modelo adoptado

En el criterio de fluencia en las juntas tienen que ser incluidos todos los mecanismos anteriormente citados a excepción de la fisuración por tracción uniaxial del ladrillo. La combinación compresión-cortante, tracción diagonal de los ladrillos y “masonry crushing”, pueden ser incorporados al modelo aunque no es usual su implementación. Los elementos de la interfase junta-ladrillo permiten discontinuidades en el campo de desplazamientos y su comportamiento se describe en términos de relaciones entre tracciones \mathbf{t} y los desplazamientos relativos $\Delta \mathbf{u}$ a lo largo de la interfase. Las relaciones elástico-lineales entre estas tensiones generalizadas y las deformaciones se escriben de forma estándar :

$$\vec{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \vec{\epsilon} \quad (3.1)$$

donde para el caso de configuraciones planas :

$$\vec{\sigma} = \{\sigma, \tau\}^T$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\vec{\epsilon} = \{\Delta u_n, \Delta u_s\}^T$$

donde n y s denotan las componentes normal y tangencial respectivamente. La matriz de rigidez elástica \mathbf{D} puede obtenerse a partir de las propiedades de los dos componentes de la mampostería (ladrillo y mortero) y el espesor de las juntas. De las expresiones (3.3) se puede ver que debido al espesor nulo inherente al elemento de interfase, la dimensión de los ladrillos debe ser ampliada por el espesor del mortero h_m en ambas direcciones. A continuación, las propiedades elásticas del “ladrillo ampliado” y de la “interfase” deben ser ajustadas con el fin de corregir la respuesta del modelo a un comportamiento real. Debido a las dimensiones relativas de las juntas de mortero y los ladrillos, se asume un comportamiento elástico del ladrillo constante. Entonces, teniendo en cuenta la disposición de los elementos (con distribución regular) y una distribución de tensiones uniforme en las juntas y los ladrillos, las componentes de la matriz de rigidez elástica \mathbf{D} se pueden escribir como :

$$k_n = \frac{E_L \cdot E_m}{h_m \cdot (E_L - E_m)} \quad (3.3)$$

$$k_s = \frac{G_L \cdot G_m}{h_m \cdot (G_L - G_m)}$$

donde E_L y E_m son los módulos de Young, G_L y G_m son los módulos de cortante respectivamente para el ladrillo y el mortero, y h_m es el espesor de la junta. El valor de la rigidez se obtiene a partir de esta fórmula, la cual no corresponde a una aproximación casual ; ello significa que superponer ladrillos colindantes sujetos a compresión llegarán a hacerse visibles. Este rasgo es, sin embargo, intrínseco a la formulación con elementos de contacto y es independiente de los valores de la rigidez normal.

3.2 MODELO DE HOMOGENEIZACIÓN DE ADRIAN W. PAGE (1978).

El modelo de Page [Page, 1978] viene a analizar los muros de mampostería sujetos a carga en su plano. Este tipo de carga es el más usual al que está sometida la mampostería. En el pasado, muchos análisis habían considerado la mampostería como un ensamblaje de bloques y mortero con semejantes propiedades. Con el fin de simplificar el problema, el cálculo se hacía mediante la simplificación de suponer un comportamiento isotrópico y elástico tanto para los componentes como para el conjunto que forma la mampostería. Estas simplificaciones daban un comportamiento satisfactorio si lo que se quería predecir eran deformaciones en bajos niveles tensionales, pero no podían predecir el adecuado comportamiento con altos niveles tensionales, ya que se vio que existía un fenómeno de redistribución de tensiones. Esta redistribución está causada por el comportamiento no lineal del material (predominantemente en las juntas de mortero) y el fallo en zonas localizadas debido a la pérdida del vínculo físico entre el mortero y los bloques.

Page crea un modelo en el que puede representar el comportamiento no lineal de la mampostería. La mampostería se considera como un material formado por dos fases

consistente en un bloque elástico dentro de una matriz de mortero inelástica. El fallo ocurre en las juntas si la tensión de compresión o de tracción, o bien, el esfuerzo cortante superan un cierto nivel que hace perder el vínculo entre bloque y mortero. El modelo de Page se basa en el estudio mediante el método de elementos finitos no lineal que tiene en cuenta la progresiva fisuración de las juntas de la matriz que forma el mortero. Para la validación de su método se trabajó con parámetros mecánicos basados en resultados experimentales.

3.2.1.-Características mecánicas de los materiales utilizados en el modelo.

En base a los ensayos realizados se han obtenido los diferentes parámetros que entran a formar parte del cálculo.

Propiedades de los bloques: los bloques se asumen isótropos y elásticos; esta hipótesis no cumple con la variabilidad inherente en las propiedades de los bloques y del pequeño grado de anisotropía que demuestran los ensayos realizados y que refleja la siguiente tabla.

Propiedad	Valor
• Módulo de elasticidad para carga paralela a la base la placa de carga, E_{bp} (en kp/cm^2)	59200
• Módulo de elasticidad para carga perpendicular a la base de la placa de carga, E_{bn} (en kp/cm^2)	75500
• E_{bp}/E_{bn}	1.35
• Coeficiente de Poisson en el plano	0.167

Los valores de E_{bp} y E_{bn} que se ven en la tabla serán utilizados para hallar el módulo de elasticidad del bloque o ladrillo E_b . Si el proceso de fabricación y modelado de los ladrillos ha sido por extrusión (proceso usualmente utilizado en la actualidad), la hipótesis de isotropía puede relajarse debido al alto grado de ortotropía inducida por el proceso de fabricación.

Características mecánicas de las juntas: las características deformacionales de las juntas pueden obtenerse indirectamente a partir de los ensayos diseñados para mampostería una vez las propiedades elásticas de los ladrillos son conocidas.

Las características de las juntas para carga normal a la base de la placa de carga han sido determinadas a partir de ensayos uniaxiales de compresión sobre mampostería. Las deformaciones han sido medidas en el punto central de los paneles ensayados. De este modo, si el módulo elástico del ladrillo E_{bn} es conocido, la deformación total del bloque se puede calcular en un nivel determinado de carga.

La diferencia entre la deformación total medida y la deformación del bloque calculada es lo que se deforma el mortero.

La deformación del mortero ε_m para un nivel de tensión σ determinado puede entonces ser expresado como :

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_t \cdot L_t - \frac{\sigma}{E_{bn}} \cdot L_b}{L_m} \quad (3.4)$$

en donde ε_t = deformación total medida experimentalmente ; L_m = espesor total del mortero ; L_b = espesor total del bloque o ladrillo ; L_t = altura total del muro. El efecto del módulo de Poisson está incluido en el valor de E_{bn} . También :

$$\begin{aligned} L_m &= 6 \cdot t_m \\ L_b &= 5 \cdot t_b + \frac{2 \cdot t_b}{2} \\ L_t &= L_b + L_m \end{aligned} \quad (3.5)$$

en donde t_m = espesor de la junta de mortero ; y t_b = espesor del bloque o ladrillo.

De acuerdo con los ensayos realizados por Page, sustituyendo los valores apropiados de $L_t = 10$ in. (25 cm.) ; $L_b = 8,8$ in. (22 cm.) ; $E_{bn} = 1,096$ ksi (75.500 kp/cm²) ; $L_m = 1,18$ in. (3 cm.), la deformación del mortero es :

$$\begin{aligned} \varepsilon_m &= 8.47 \cdot \varepsilon_t - 0.0068 \cdot \sigma \\ \varepsilon_m &= 8.47 \cdot \varepsilon_t - 0.0010 \cdot \sigma \end{aligned} \quad (3.6)$$

En estas expresiones, σ está expresada en kips/in² en la primera y en MN/m² en la segunda.

De estas expresiones, la curva tensión-deformación para el mortero puede venir determinada utilizando valores medios de ε_t correspondiente a la tensión σ obtenida a partir de paneles experimentados. La curva obtenida a partir de los ensayos se puede ver en la Figura 3.5 que se presenta a continuación :

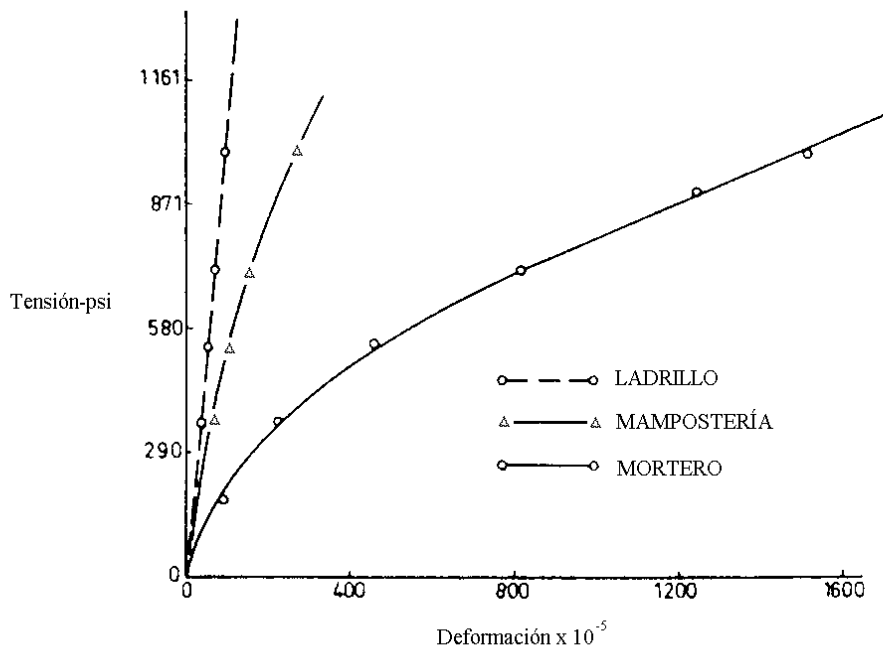


Figura 3.4. Curvas Tensión-Deformación de Ladrillos, Mortero y Mampostería.

De la gráfica puede observarse la sustancial diferencia de rigidez entre la mampostería, los ladrillos y el mortero.

Las características de las juntas respecto al comportamiento a cortante pueden ser obtenidas de forma similar a partir de ensayos sobre paneles con las juntas inclinadas respecto al plano de carga. La deformación a cortante del mortero puede ser determinada a partir de la deformación debida a esfuerzo cortante en el ladrillo y de la deformación total debida a esfuerzo cortante del panel. Como consecuencia, se obtienen las siguientes expresiones, análogas a las obtenidas para el caso de tensión normal :

$$\begin{aligned}
 L_m &= 3 \cdot t_m \\
 L_b &= 2 \cdot t_b + 2 \cdot (0.75 \cdot t_b) \\
 L_t &= L_b + L_m
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

y de la medida del módulo elástico del ladrillo que es

$$E_b = \frac{E_{bp} + E_{bn}}{2} = 978 \text{ ksi} (6.740 \text{ MN} / \text{m}^2)$$

Si al ladrillo se le asume un comportamiento isótropo con un valor del coeficiente de Poisson, ν , igual a 0.167, el módulo de rigidez a cortante, G_b , viene determinado por :

$$G_b = \frac{E_b}{2 \cdot (1 + \nu)} = 418 \text{ ksi} (28800 \text{ kp} / \text{cm}^2)$$

La deformación por cortante del mortero, γ_m , para una tensión tangencial τ , viene determinada por :

$$\gamma_m = \frac{\gamma_t \cdot L_t - \frac{\tau}{G_b} \cdot L_b}{L_m} \quad (3.8)$$

en donde γ_t = deformación debida a cortante total medida experimentalmente.

Sustituyendo los valores apropiados de $L_t = 5.71$ in. (14.5 cm) ; $L_b = 5.12$ in. (13 cm.) ; y $L_m = 0.59$ in. (1.5 cm.), la deformación por cortante en el mortero se puede obtener a partir de las expresiones :

$$\begin{aligned} \gamma_m &= 9.67 \cdot \gamma_t - 0.021 \cdot \tau \\ \gamma_m &= 9.67 \cdot \gamma_t - 0.003 \cdot \tau \end{aligned} \quad (3.9)$$

en donde τ viene expresado en kips/m^2 en la primera expresión, mientras que en la segunda viene dado en MN/m^2 .

De estas ecuaciones se obtiene la curva tensión-deformación que puede verse en la Figura 3.5 que se adjunta a continuación.

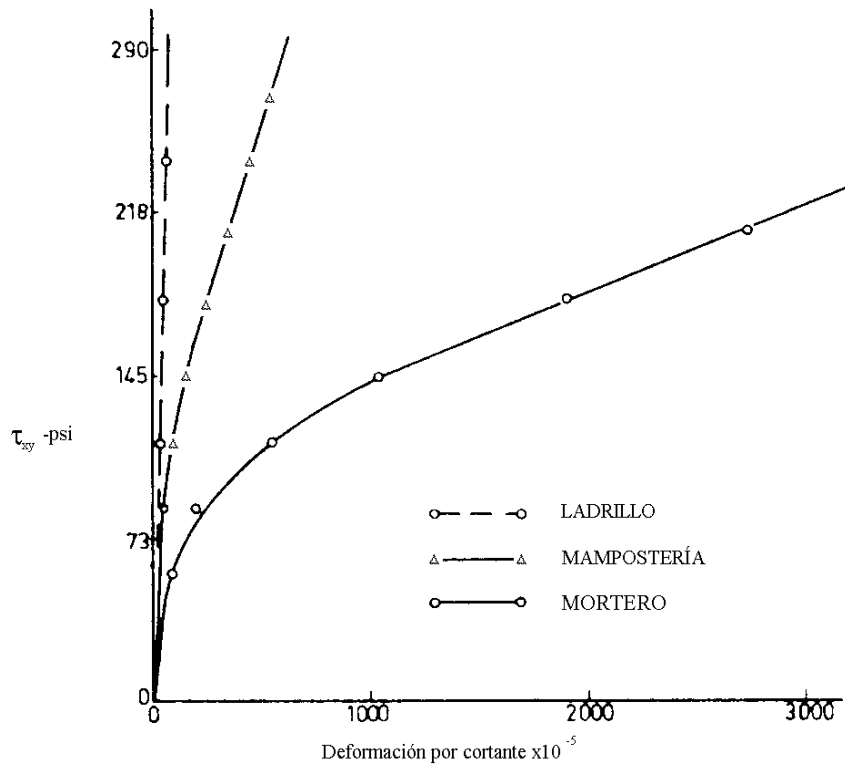


Figura 3.5. Curvas Tensión-Deformación debida a cortante.

De la curva obtenida vista en la figura anterior, se han obtenido los datos que se han utilizado en el modelo analítico. La alta flexibilidad del mortero es de nuevo evidente cuando se compara con las medidas obtenidas para la mampostería y los ladrillos.

Criterio de fallo para las juntas : El criterio de fallo utilizado en los elementos de junta dependen sólo de las magnitudes relativas a las tensiones normal y tangencial. Un criterio de este tipo puede ser obtenido directamente a partir de los ensayos sobre mampostería que se han descrito anteriormente. En la figura que se presenta a continuación, se pueden ver dibujados los resultados experimentales en términos de la tensión última de cortante, τ_u , y la tensión última de compresión, σ_{nu} . Se han utilizado dos ramas lineales por sencillez a partir de los estudios de regresión utilizados para interpolar dichas curvas.

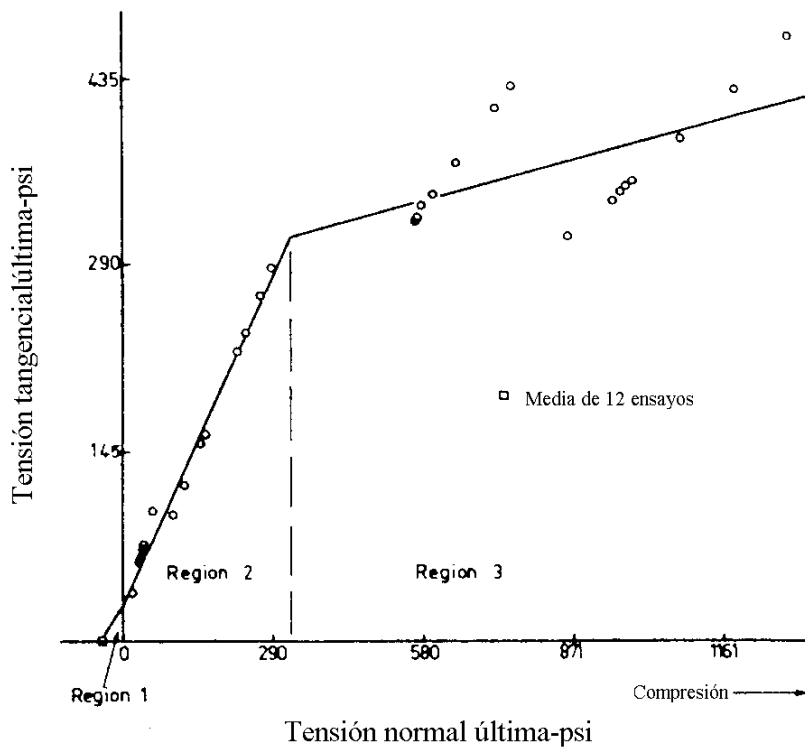


Figura 3.6. Envolvente del estado de fisuración en las juntas ($1 \text{ psi} = 6.89 \text{ kN/m}^2$)

El cambio significativo en la pendiente de la curva se corresponde con un cambio en el modo de fractura pasando de una zona donde la fisuración es debida a la pérdida de contacto entre ladrillo y mortero a un modo de fractura combinado entre junta y fisuración de ladrillo. Las relaciones adoptadas para el modelo de Page son :

$$\tau_u = 0.66 \cdot \sigma_{nu} + 0.19 \quad (3.10)$$

$$\tau_u = 0.87 \cdot \sigma_{nu} + 0.19$$

$$\tau_u = 0.11 \cdot \sigma_{nu} + 1.91$$

siendo estas expresiones las correspondientes a la Región 1, Región 2 y Región 3 respectivamente de la gráfica anterior. Dichas expresiones han sido obtenidas de forma experimental.

Cuando se utiliza un modelo analítico, estos criterios permiten que la fisuración en las juntas se vayan propagando progresivamente. Si el criterio de fisuración es superado por la junta de un elemento, las propiedades del elemento se modifican y se vuelve a resolver el problema de nuevo (no linealidad). Las propiedades asignadas dependen, por tanto, del estado de tensión al que se ve sometido el elemento.

Si el criterio es superado en la Región 1, la fisuración debida al estado tensional aparece sin haber resistencia residual en la junta. Si la fisuración ocurre bajo una combinación de compresión y cortante (Regiones 2 y 3), el mecanismo de fractura se debe a cortante. La rigidez de la junta en la dirección normal se asume que no sufre cambios, mientras que la rigidez a cortante desciende hasta llegar al valor asociado a la resistencia a compresión.

3.2.2.-Modelo en elementos finitos

El comportamiento plano de la mampostería se ha modelado utilizando elementos sólidos a los que se ha aplicado la hipótesis de tensión plana con superposición de elementos de junta que simulan las juntas de mortero.

A continuación se pasará a describir los dos componentes en los que se divide el modelo de Page.

Elementos sólidos : Los ladrillos han sido modelizados utilizando elementos planos rectangulares de 8 nodos con 4 grados de libertad por nodo, así como un comportamiento isótropo y elástico tal como se ha indicado anteriormente.

La utilización de elementos rectangulares es conveniente en este caso debido a la forma regular que presenta la mampostería. La construcción de la mampostería sigue la disposición de las juntas, por lo que la utilización del método de los elementos finitos con elementos rectangulares se adapta fácilmente a la geometría real. Una discretización típica en elementos de la mampostería se puede ver en la figura que aparece a continuación.

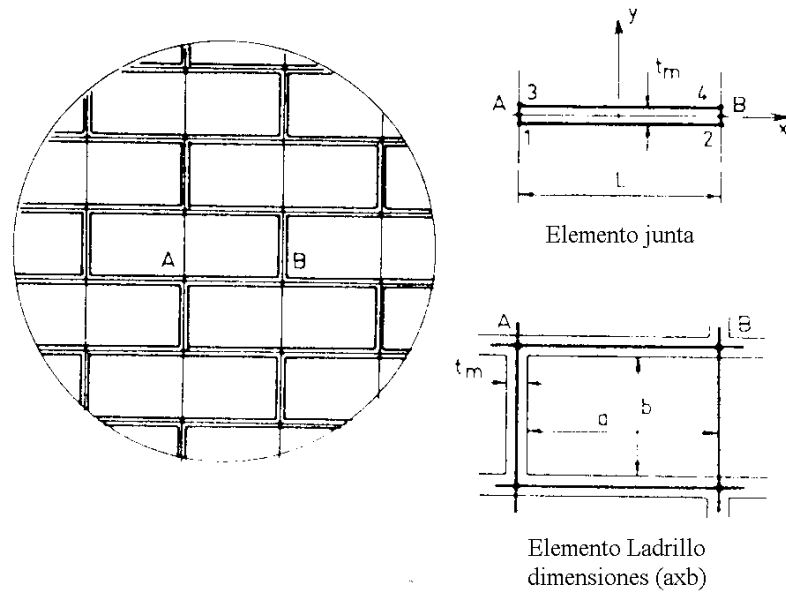


Figura 3.7. Discretización típica en Mampostería.

Dado que los elementos de junta son extremadamente delgados, los pares de nudos [(1,3) y (2,4) de la Figura 3.7] se asocian a las mismas coordenadas, ya que el espesor de las juntas es usado para el cálculo de las propiedades del elemento junta. El elemento asociado al ladrillo tiene las mismas dimensiones que el espaciado de la malla con la que se ha discretizado menos el espesor de las juntas.

Elementos de junta : La técnica de añadir elementos de unión rígidos a la rigidez total de la estructura fue desarrollado por primera vez por Ngo y Scordelis para modelos utilizados en hormigón armado [Ngo y Scordelis,1967], y fue adaptado al campo de la mecánica de rocas por muchos investigadores. Tal como hemos descrito, el concepto de elemento junta puede ser aplicado a la mampostería, de forma que las propiedades de las juntas no se tienen en cuenta. Sin embargo, alguna de las características esenciales del método han sido examinadas para demostrar su aplicación en el análisis de mampostería.

La rigidez del elemento junta es calculada mediante la minimización de la energía potencial respecto a los desplazamientos del elemento. La geometría del elemento en el sistema de coordenadas local se puede ver en la Figura 3.7. Puesto que el elemento junta tiene propiedades limitadas y sólo puede deformarse en las direcciones normal y tangencial, el vector desplazamiento relativo de cualquier punto en la junta $\{w\}$ tomará la forma :

$$\{w\} = \begin{bmatrix} w_s(\text{arriba}) - w_s(\text{abajo}) \\ w_n(\text{arriba}) - w_n(\text{abajo}) \end{bmatrix}$$

en la que los subíndices n y s se refieren a las direcciones normal y tangencial. El vector de fuerza por unidad de longitud del elemento $\{F\}$ será :

$$\{\mathbf{F}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix}$$

El vector $\{\mathbf{F}\}$ puede ser expresado en términos de los desplazamientos nodales del elemento por

$$\{\mathbf{F}\} = [\mathbf{k}]\{\mathbf{w}\}$$

en donde $[\mathbf{k}]$ es la matriz que expresa las propiedades materiales de la rigidez de la junta por unidad de longitud en direcciones normal y tangencial.

$$[\mathbf{k}] = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{k}_n \end{bmatrix}$$

Los valores de k_s y k_n se obtienen directamente a partir de las curvas tensión-deformación obtenidas en pasos anteriores.

Para un espesor de muro de valor T y un espesor de junta igual a t_m :

$$k_n = \frac{E' \cdot T}{t_m}$$

$$k_s = \frac{G' \cdot T}{t_m}$$

en donde E' y G' representan los módulos elásticos tangente y de cortante para el caso particular de σ_n y τ considerado.

La energía de deformación elástica U es, por tanto :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} \{\mathbf{w}\}^T \{\mathbf{F}\} \cdot dx$$

Sustituyendo $\{\mathbf{F}\}$ por su expresión, la energía de deformación elástica se expresa en términos de los desplazamientos nodales como :

$$U = \frac{1}{2} \cdot \int_{-L/2}^{+L/2} \{\mathbf{w}\}^T \{\mathbf{K}\} \cdot \{\mathbf{w}\} \cdot dx$$

El vector desplazamientos locales $\{\mathbf{w}\}$ está relacionado con los desplazamientos nodales utilizando una fórmula de interpolación lineal. La matriz de rigidez del elemento, así como el vector de tensión pueden entonces ser determinadas utilizando los métodos usuales. Las propiedades del elemento junta están formuladas en coordenadas locales, por lo que en estas direcciones sus propiedades deben ser justificadas.

Para la verificación del modelo en elementos finitos formulado por Page, se han comparado los resultados obtenidos para un muro con una carga determinada tanto experimental como numéricamente.

En la Figura 3.8 viene representado el muro del ensayo, así como la sección donde se han hecho las mediciones experimentales (A-A).

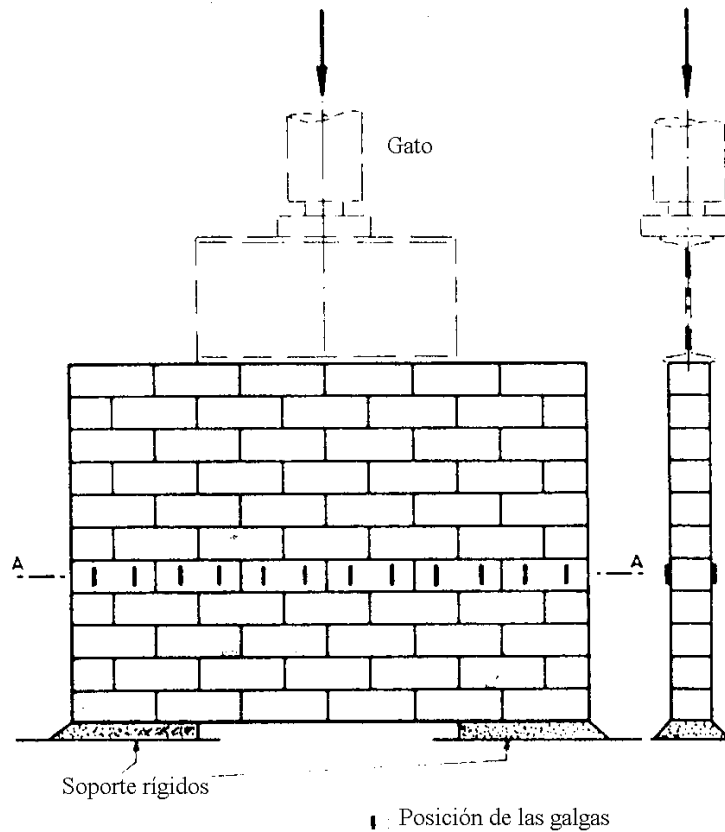


Figura 3.8. Esquema general del panel ensayado.

Un ensayo de esta naturaleza produce unos altos gradientes de tensiones acompañados de una redistribución de tensiones debido a la aparición de fisuras y a la no linealidad material.

La mampostería ha sido construida utilizando los mismos materiales y técnicas que los experimentos realizados. La carga central ha sido aplicada y los apoyos han sido coartados para prevenir la separación de la base. La distribución de la deformación vertical medida en la línea A-A se ha hecho mediante galgas extensométricas que han sido calibradas con ladrillos. Las deformaciones han sido obtenidas en 12 puntos a cada lado del panel y normalizadas con el fin de eliminar los efectos de pandeo. La distribución de tensión vertical ha sido determinada a partir de estos valores. El panel ha sido cargado hasta colapso, siendo la carga última del panel de 10920 kp.

Las distribuciones de tensiones verticales en la línea A-A obtenidas experimentalmente han sido comparadas con las obtenidas mediante el modelo numérico, viéndose éstas en la gráfica que aparece a continuación.

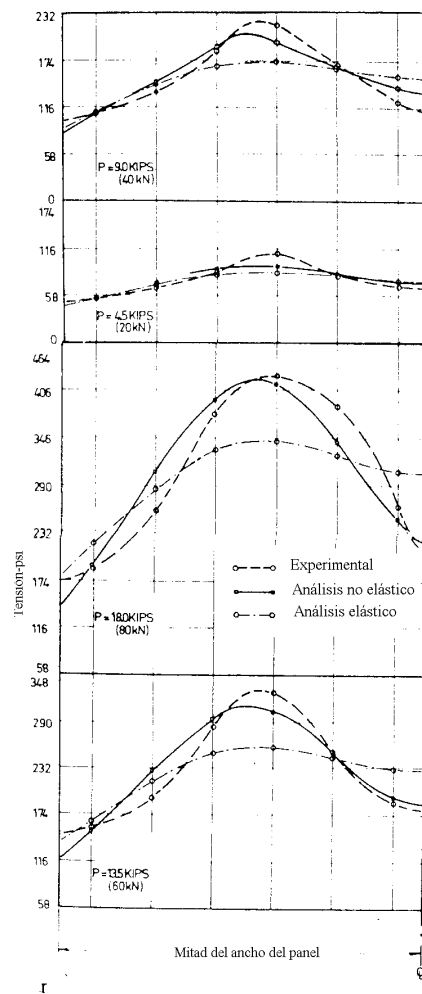


Figura 3.9. Distribución de tensiones obtenidas en el ensayo del panel.

Las distribuciones de tensiones han sido comparadas para 4 niveles de carga aplicada (P). Las discontinuidades en las juntas verticales han sido omitidas. Los resultados obtenidos en base a los métodos convencionales de análisis con elementos finitos y comportamiento elástico e isotrópico han sido incluidos en las gráficas. Para el análisis final se ha asumido unos valores del módulo elástico y coeficiente de Poisson de 47000 kp/cm^2 y 0.2 respectivamente. Se puede ver que el modelo analítico reproduce las distribuciones de tensiones internas de forma razonable en comparación con los resultados obtenidos experimentalmente en el muro. El incremento de salida de las dos curvas en la solución elástica y para los incrementos de carga mencionados son debidos a la no linealidad natural del material.

La progresiva fisuración de las juntas es predicha por el modelo en elementos finitos. Las juntas fisuran por tensión o por deslizamiento debido a cortante. Mientras todas las cargas estén aplicadas en el plano del muro, el tamaño de las fisuras será pequeño y éstas sólo serán apreciables próximas a la carga de colapso. Para una predicción afinada de la carga última, el criterio de colapso del ladrillo debería ser incluido en el modelo, cosa que Page no introdujo.

3.3.- MODELO DE PIETRUSZCZAK(1992).

El modelo que se presenta se considera importante en su aportación a la resolución de la mampostería por la formalidad de su formulación, aunque no presenta los resultados alcanzados.

El presente modelo considera que un panel de mampostería, a nivel de macroescala (macromodelos), puede ser considerado como un compuesto bifase consistente en unidades de ladrillos interceptadas por dos conjuntos ortogonales de juntas de mortero.

Para describir el comportamiento mecánico de la mampostería se considera que la misma está formada por dos medios superpuestos (véase Figura 3.10).

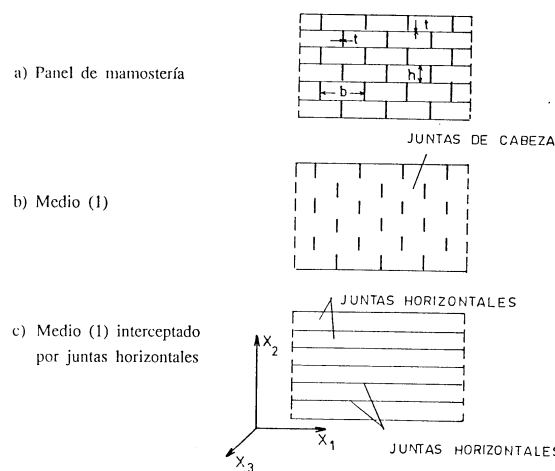


Figura 3.10. Panel de Mampostería según Pietruszczak.

El medio (1) está formado por la matriz de ladrillos con una familia de juntas de cabeza (verticales) de los ladrillos. Estas juntas pueden ser tratadas como intrusiones *débiles* alineadas y uniformemente distribuidas en la matriz. Este medio homogeneizado puede considerarse como un material ortótropo, elástico-frágil. En este caso las componentes de la matriz de rigidez se pueden calcular a partir de la solución de Eshelby [Pietruszczak, 1992] para el problema de inclusiones elipsoidales combinada con la teoría del campo medio de Mori-Tanaka [Pietruszczak, 1992].

El panel de mampostería completo puede representarse como el medio homogéneo (1) estratificado con una familia de juntas (2). Estas juntas son continuas y atraviesan todo el panel creando vínculos débiles en la microestructura del panel. En particular estas juntas pueden tener un comportamiento elastoplástico.

Suponiendo que ambos componentes, (1) y (2), existen simultáneamente y están perfectamente adheridos, la ley tensión-deformación del conjunto puede obtenerse a través de la siguiente regla de promedio [Hill, 1963] :

$$(3.11)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = k_1 \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{(1)} + k_2 \cdot \dot{\epsilon}_{ij}^{(2)}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = k_1 \cdot \dot{\sigma}_{ij}^{(1)} + k_2 \cdot \dot{\sigma}_{ij}^{(2)}$$

donde k_1 y k_2 representan las proporciones de volumen de cada uno de los componentes y los requerimientos de equilibrio proveen dos condiciones adicionales, una cinemática y otra estática que, escritas en forma matricial :

$$[\delta^*] \cdot \bar{\epsilon}^{(1)} = [\delta^*] \cdot \bar{\epsilon}^{(2)} \quad (3.12)$$

$$[\delta] \cdot \bar{\sigma}^{(1)} = [\delta] \cdot \bar{\sigma}^{(2)} \quad (3.13)$$

donde :

$$[\delta^*] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$[\delta] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Las ecuaciones (3.11) a (3.13) junto con las leyes constitutivas de cada una de las fases :

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(1)} = C_{ijkl}^{(1)} \cdot \dot{\epsilon}_{kl}^{(1)} \quad (3.15)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} \cdot \dot{\epsilon}_{kl}^{(2)}$$

permiten resolver el problema.

La implementación de este modelo en un programa de elementos finitos no es directa. Para este modelo Pietruszczak [Pietruszczak, 1992] no incluye comparaciones con resultados experimentales, sólo presenta un análisis cualitativo del comportamiento de la mampostería.

3.4.-MODELO DE COMBINACIÓN DE MODELOS CONSTITUTIVOS DE DAÑO Y PLASTICIDAD - TEORÍA DE MEZCLAS.

La *Teoría de Mezclas* fue estudiada por Truesdell y Toupin [Truesdell, 1960] quienes dieron las bases para los trabajos de Ortiz y Popov [Ortiz,1982] realizados años más tarde. Desarrollos recientes de esta teoría en el ámbito de los materiales compuestos pueden encontrarse en las referencias bibliograficas [Oller et al, 1993][Oñate et al,1991].

En primer lugar se describe las hipótesis y principios fundamentales de la teoría de mezclas para pasar a continuación a describir detalles del modelo de cálculo.

3.4.1.- Teoría de Mezclas.

La teoría de mezclas parte de las siguientes hipótesis :

- Cada volumen infinitesimal de la mezcla está compuesto por un número finito de materiales componentes.
- Cada componente participa en el comportamiento total del compuesto en la misma proporción de volumen total.
- Todas las sustancias componentes experimentan las mismas deformaciones (compatibilidad de deformaciones).
- El volumen ocupado por cada una de las sustancias componentes es menor que el volumen total del compuesto.

La segunda de las hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en una cierta región del compuesto.

La interacción entre las distintas sustancias componentes, cada una con su propio modelo constitutivo, da como resultado un comportamiento de conjunto del compuesto que depende del volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto.

La tercera hipótesis supone que en ausencia de difusión atómica (temperaturas moderadas) entre las sustancias componentes del sólido, se cumple la siguiente ecuación de compatibilidad :

$$\left(\varepsilon_{ij}\right)_1 = \left(\varepsilon_{ij}\right)_2 = \dots = \left(\varepsilon_{ij}\right)_c = \dots = \left(\varepsilon_{ij}\right)_n = \varepsilon_{ij} \quad (3.16)$$

Más aún, en materiales compuestos la energía libre puede ser escrita como [Truesdell y Toupin, 1960] :

$$m \cdot \psi(\varepsilon_{ij}^e, \alpha, \beta) = m \cdot \psi\left(\varepsilon_{ij}, \underbrace{\varepsilon_{ij}^p}_{p_r}, \alpha, \beta\right) = m \sum_{c=1}^n k_c \cdot \psi_c\left(\left(\varepsilon_{ij}\right)_c, \left(p_r\right)_c\right) \quad (3.17)$$

Donde $\psi_c\left(\left(\varepsilon_{ij}\right)_c, \left(p_r\right)_c\right)$ es la energía correspondiente a cada componente de los n que intervienen en la mezcla, $\left(p_r\right)_c$ un conjunto de variables internas para cada componente c y $k_c = \frac{dV_c}{dV}$ la participación de la fracción de volumen del “c-ésimo” componente dentro del volumen total. Es conveniente observar que estas relaciones de volumen deben cumplir con la condición :

$$\sum_{c=1}^n k_c = 1 \quad (3.18)$$

3.4.2.- Aplicación de la Teoría de Mezclas a materiales compuestos.

3.4.2.1.- Estado tensional.

La tensión en el compuesto se calcula a partir de la energía libre de la misma forma que en el caso de materiales simples. Para problemas térmicamente estables :

$$\sigma_{ij} = m \cdot \frac{\partial \psi(\varepsilon_{kl}, p_r)}{\partial \varepsilon_{ij}} = m \cdot \sum_{c=1}^n k_c \cdot \frac{\partial \psi_c\left(\left(\varepsilon_{kl}\right)_c, \left(p_r\right)_c\right)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \cdot \left(\sigma_{ij}\right)_c \quad (3.19)$$

donde $\left(\sigma_{ij}\right)_c$ es la tensión en la “c-ésima” componente.

3.4.2.2.- Disipación mecánica.

Siguiendo la desigualdad de Clausius Planck se puede obtener la expresión termodinámica de la *disipación mecánica* :

$$\Xi_{mec} = \frac{\partial \psi(\varepsilon_{mn}, p_r)}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i = \sum_{c=1}^n k_c \cdot \frac{\partial \psi_c\left(\left(\varepsilon_{mn}\right)_c, \left(p_r\right)_c\right)}{\partial \left(p_i\right)_c} \cdot \left(\dot{p}_i\right)_c \leq 0 \quad (3.20)$$

3.4.2.3.- Rigidez tangente.

$$C_{ijkl} = m \cdot \frac{\partial \psi(\varepsilon_{mn}, p_r)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{ij}} = m \cdot \sum_{c=1}^n k_c \cdot \frac{\partial \psi_c\left(\left(\varepsilon_{mn}\right)_c, \left(p_r\right)_c\right)}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \cdot \left(C_{ijkl}\right)_c \quad (3.21)$$

3.4.2.4.- Deformación.

Teniendo en cuenta la compatibilidad de deformaciones, la deformación en el compuesto puede escribirse como :

$$\varepsilon_{ij} = \left(\varepsilon_{ij}\right)_c = \left(\varepsilon_{ij}^e\right)_c + \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_c = \left(C_{ijkl}^{s^{-1}}\right)_c \cdot \left(\sigma_{kl}\right)_c + \left(\varepsilon_{ij}^p\right)_c \quad (3.22)$$

Debe observarse que la compatibilidad de deformaciones implica la igualdad de deformaciones totales pero no necesariamente de deformaciones elásticas y plásticas.

3.4.2.5.- Relación constitutiva secante.

La relación constitutiva secante se obtiene como :

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c \cdot (\sigma_{ij})_c = \sum_{c=1}^n k_c \cdot (C_{ijkl}^s)_c \cdot (\epsilon_{kl}^e)_c = C_{ijkl}^s \cdot \epsilon_{kl}^e \quad (3.23)$$

3.4.2.6.- Deformación plástica del compuesto.

Desarrollando la ecuación (3.23) se obtiene :

$$\sigma_{ij} = \sum_{c=1}^n k_c \cdot (C_{ijkl}^s)_c \cdot (\epsilon_{kl})_c - \sum_{c=1}^n k_c \cdot (C_{ijkl}^s)_c \cdot (\epsilon_{kl}^p)_c \quad (3.24)$$

y por otro lado :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^s \cdot \epsilon_{kl} - C_{ijkl}^s \cdot \epsilon_{kl}^p \quad (3.25)$$

Igualando las expresiones (3.24) y (3.25), se obtiene :

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl}^{s-1} \cdot \sum_{c=1}^n k_c \cdot (C_{ijkl}^s)_c \cdot (\epsilon_{kl}^p)_c \quad (3.26)$$

En esta ecuación se ha tenido en cuenta que

$$C_{ijkl}^s = \sum_{c=1}^n k_c \cdot (C_{ijkl}^s)_c \quad (3.27)$$

En realidad esta deformación permanente no tiene sentido físico ni interviene en el cálculo ya que se trabaja con cada modelo constitutivo a nivel de cada componente a partir de una deformación del compuesto que es dato.

3.4.3.- Estado plano de tensiones en materiales compuestos.

Conviene destacar que cuando se aplica la teoría de mezclas a un compuesto bajo estado plano de tensiones, la tensión normal al plano debe cumplir con la restricción :

$$\sigma_{zz} = \sum_{c=1}^n k_c (\sigma_{zz})_c = 0 \quad (3.28)$$

lo cual no necesariamente implica que cada una de las componentes del compuesto esté bajo un estado plano de tensiones. Todas las componentes tendrán la misma deformación transversal al plano, pero, en general tendrán tensiones no nulas en la dirección Z. Dichas tensiones tendrán que equilibrarse entre todas las componentes de manera que cumplan con la ecuación (3.28).

Esta observación tiene particular importancia en la solución de problemas de estado plano de tensiones mediante programas de elementos finitos en 2D.

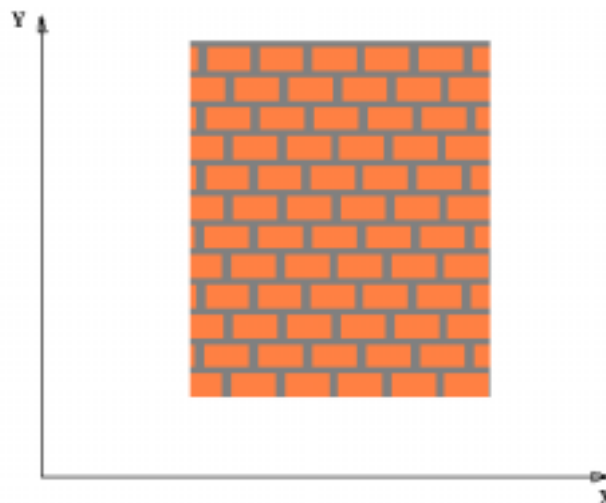
3.4.4.- Limitaciones de la Teoría de Mezclas en mampostería.

La Teoría de Mezclas tiene como hipótesis fundamental la compatibilidad de deformaciones de todos los componentes (Ecuación 3.16). Ésto es equivalente a una idealización del material como un sistema en paralelo en que todos los componentes sufren la misma deformación y la tensión se reparte entre ellos de forma proporcional a la relación del volumen total que ocupa cada una de ellas (3.19).

A partir de la experimentación llevada por Luccioni (1993) en un panel de mampostería se observó que la Teoría de Mezclas no cumple estrictamente con la forma de trabajo de la mampostería. En la dirección vertical (Y), perpendicular a la junta, el comportamiento responde más bien a un modelo “serie”, la deformación total es la suma de las deformaciones de los componentes y la tensión es la misma en todos los componentes. En la dirección horizontal (X), paralela a la junta, el comportamiento se parece más a un modelo paralelo que a uno serie. Si además se pretende tener en cuenta las juntas verticales, el comportamiento es más complejo aún.

Figura 3.11. Panel de Mampostería.

El comportamiento elástico de la mampostería podría simularse aproximadamente mediante la Teoría de Mezclas siguiendo las hipótesis de comportamiento presentado en el apartado anterior (3.4.1). Esta forma muestra cierta complejidad de cálculo y *sólo* es



aplicable al rango elástico.

Es muy difícil simular cualquier discontinuidad en el comportamiento, plastificación o degradación de la rigidez, a través de un criterio tensional. Casos en la mampostería como la tracción de un panel en dirección vertical en la que el fallo se produce por

alcance del umbral de resistencia en las juntas horizontales, el modelo de mezclas no lo puede simular ya que la tensión se reparte entre los componentes y en este caso el fallo se produce cuando falla el último componente. Asimismo, fenómenos a nivel local no pueden ser tenidos en cuenta por el modelo de material compuesto.

La Teoría de Mezclas no es la técnica adecuada para el análisis de mampostería ya que la disposición y orientación de sus elementos es decisivo para obtener su comportamiento, mientras que en ésta los componentes están uniformemente distribuidos en el elemento de volumen.

3.5.-MODELO HOMOGENEIZADO DE ARMELLE ANTHOINE (1995).

En el estudio de Anthoine se analiza comparativamente el comportamiento de la mampostería haciendo un estudio de homogeneización plano y tridimensional.

El trabajo se basó en el desarrollo de un modelo homogeneizado con elementos planos y elementos tridimensionales. El caso plano se basa en asumir la hipótesis de tensión plana y deformación plana de la mecánica del medio continuo.

La mampostería permite la generación de la malla a partir de un elemento y hacerlo repetir a partir de una translación a lo largo de dos direcciones de periodicidad (vectores v_1 y v_2 de la Figura 3.) tanto en el caso bidimensional como en el caso tridimensional : la superficie límite ∂V para la celda V está, por tanto, compuesto por dos regiones diferentes, una interna ∂V_I (contacto con los elementos adyacentes) y una externa ∂V_E (caras exteriores de los elementos que no tienen contacto con elementos adyacentes), mientras que el límite ∂S para el caso bidimensional es exclusivamente debido a contacto con los elementos adyacentes. Cabe destacar que V difiere del elemento básico de un volumen de mampostería tomando las tres direcciones de periodicidad : el límite ∂V de este último está limitado a ∂V_I y no se hace distinción entre las direcciones coplanaria y no coplanaria del panel de mampostería (Pande *et al.*(1989), Pietruszczak y Niu (1992), Lourenço (1996)).

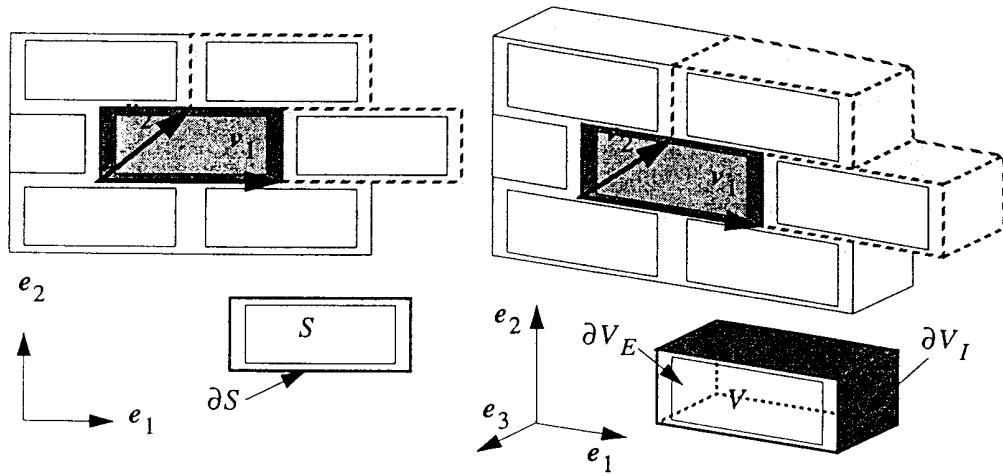


Figura 3.12. Discretización en elementos 2D y 3D.

La identificación de un comportamiento macroscópico de la mampostería equivale a construir la relación Σ -E a partir de la resolución de dicho problema de homogeneización, donde Σ es la tensión homogeneizada y E su variable conjugada. Bajo la hipótesis generalizada de tensión plana o deformación plana, este problema se puede escribir como

- Condición de equilibrio : $\text{div } \sigma = 0$ en S (no hay fuerzas aplicadas)
- Ley constitutiva : $\sigma = f(\epsilon(u))$ (hipótesis de tensión plana o deformación plana)
- Condición de periodicidad : σ es periódico en ∂S ($\sigma \cdot n$ anti-periódico en ∂S)
- Campo de deformaciones : $\langle \epsilon(u) \rangle = E$, E dado (deformación controlada)

(3.29)

donde

$$E_{\alpha\beta} = \langle \epsilon_{\alpha\beta}(u) \rangle = \frac{1}{|S|} \int_S \epsilon_{\alpha\beta}(u) \cdot ds \quad (3.30)$$

donde $|S|$ representa el área del elemento. Entonces, Σ puede ser calculada a través de la expresión :

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{|S|} \int_S \sigma_{\alpha\beta} \cdot ds \quad (3.31)$$

En el caso del análisis en 3D el problema se lee como :

- Condición de equilibrio : $\text{div } \sigma = 0$ en V (no hay fuerzas aplicadas)
- Ley constitutiva : $\sigma = f(\epsilon(u))$ (ecuación constitutiva en 3D)
- $\sigma \cdot n = 0$ en ∂V_E (tensión nula en las caras externas del panel)

(3.32)

- Condición de periodicidad : σ periódico en ∂V_I ($\sigma \cdot n$ anti-periódico en ∂V_I)
 $u - \langle \varepsilon(u) \rangle \cdot x$ es periódico en ∂V_I
- Campo de deformaciones : $\langle \varepsilon(u) \rangle = E$, E dado (deformación controlada)

donde $\langle \varepsilon(u) \rangle$ hace referencia ahora a $\delta_{i[v1]\alpha} \cdot \langle \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \rangle \cdot \delta_{\beta j[v2]} \cdot x_j$, siendo δ la función delta de Kronecker. Análogamente al desarrollo para el caso plano se tienen las expresiones para el caso tridimensional :

$$E_{\alpha\beta} = \langle \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \varepsilon_{\alpha\beta}(u) \cdot dv \quad (3.33)$$

y

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \langle \sigma_{\alpha\beta} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma_{\alpha\beta} \cdot dv \quad (3.34)$$

donde $|V|$ representa el volumen de un elemento. Hacer notar que la diferencia fundamental entre el sistema de ecuaciones (3.29) y (3.32) versa en las condiciones de contorno.

Las componentes de Σ_{i3} para $i=1,2$ ó 3 se obtienen a partir de las expresiones de (3.31) o (3.34), pero éstas son siempre nulas : en el caso de tensión plana, σ_{i3} son nulas sobre S ; en el caso de deformación plana, la resultante de σ_{i3} sobre S , es nula ; finalmente en el caso tridimensional :

$$\sigma_{i3} = \sigma_{ij} \cdot \delta_{3j} = \sigma_{ij} \cdot x_{3,j} = (\sigma_{ij} \cdot x_3)_{,j} - \sigma_{ij,j} \cdot x_3 = (\sigma_{ij} \cdot x_3)_{,j} \quad (3.35)$$

por lo que la definición (3.34) puede transformarse a través del teorema de la divergencia como :

$$\Sigma_{i3} = \langle \sigma_{i3} \rangle = \frac{1}{|V|} \int_V \sigma_{i3} \cdot dv = \frac{1}{|V|} \int_{\partial V} \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot x_3 \cdot ds \quad (3.36)$$

Esta última integral desaparece ya que en el contorno ∂V del elemento está compuesto por contornos con tensión libre ∂V_E , donde $\sigma_{ij} \cdot n_j = 0$, y el contorno interior ∂V_I , donde $\sigma_{ij} \cdot n_j \cdot x_3$ es anti-periódico.

En tensión plana y deformación plana se infraestima y sobrestima respectivamente la solución obtenida mediante un desarrollo tridimensional : el conjunto de estados tensionales admisibles se ve reducido bajo la hipótesis de tensión plana (σ_{i3} puede no ser 0 sólo en ∂V_E sino en todo V), mientras que es ampliado en el caso de deformación plana

(en ∂V_E , σ_{i3} puede ser 0 en media solamente). La aproximación de tensión plana puede ser exacta cuando el espesor del muro tiende a 0 ; la aproximación de deformación plana es exacta cuando el espesor pasa a ser infinito. Para espesores finitos, la hipótesis de tensión plana (respectivamente deformación plana) puede ser tanto más cierta (tanto más falsa) en las caras externas del muro : esto explica por qué en la figura del último párrafo la solución de tensión plana está asociada con las caras externas del muro, mientras que la de deformación plana está asociada con puntos de la sección media del muro.

3.5.1.-Ley constitutiva de daño

Ambos materiales constitutivos (ladrillo y mortero) han sido asociados a una ley isotrópica de daño definida por Mazars (1986). Este modelo isótropo involucra la evolución de una variable escalar de daño D que es función del estado local de tensión descrito a partir de una deformación equivalente $\tilde{\epsilon}$ (norma del tensor positivo de deformación ϵ^+) :

$$\sigma = (1 - D)\Lambda : \epsilon \quad (0 \leq D = D(\gamma\tilde{\epsilon}) \leq 1)$$

$$\tilde{\epsilon} = \sqrt{\sum_i (\tilde{\epsilon}_i^+)^2}; \quad \tilde{\epsilon}_i^+ = \max(0, \epsilon_i); \quad \gamma = \frac{\sqrt{\sum_i (\sigma_i^-)^2}}{-\sum_i \sigma_i^-}; \quad \sigma_i^- = \min(0, \sigma_i) \quad (3.37)$$

donde σ es el tensor de tensiones de Cauchy, ϵ es el tensor (pequeñas deformaciones) de deformaciones (σ_i y ϵ_i son los valores principales) y Λ es el tensor isótropo elástico, definido a partir del módulo de Young y el coeficiente de Poisson ν . La deformación equivalente $\tilde{\epsilon}$ se ve modificada por el parámetro γ , el cual depende del tensor negativo de tensiones σ^- , con el objetivo de obtener una envolvente óptima de fallo en compresión multiaxial.

La variable de daño D no puede decrecer y su ley de evolución viene expresada por :

$$D = \alpha_t^\beta \cdot D_t + \alpha_c^\beta \cdot D_c \quad \dot{D} > 0 \quad \alpha_t + \alpha_c = 1$$

$$\left(\begin{array}{l} \gamma\tilde{\epsilon} \leq \epsilon_{d0} \Rightarrow D_j = 0 \\ \gamma\tilde{\epsilon} > \epsilon_{d0} \Rightarrow D_j = 1 - \frac{\epsilon_{d0}(1 - A_j)}{\gamma\tilde{\epsilon}} - A_j \exp(B_j(\epsilon_{d0} - \gamma\tilde{\epsilon})) \end{array} \right. \quad [v3] \quad (3.38)$$

donde ϵ_{d0} es el valor umbral por encima del cual aparece el daño ; D_t y D_c son las funciones de daño en tracción y compresión respectivamente, caracterizado por los

parámetros A_t , B_t , A_c y B_c ; α_t es un coeficiente de balance de caracterización de la tracción (relación entre la norma de la deformación positiva debido a la tensión positiva y $\tilde{\varepsilon}$):

$$\alpha_t = \frac{\sum_i (\varepsilon_i^+ \varepsilon_i^{++})}{\sum_i (\varepsilon_i^+)^2} \quad \text{donde} \quad \varepsilon_i^{++} = \left(\frac{\Lambda^{-1}}{(1-D)} : \sigma^+ \right)^+ \quad (3.39)$$

Finalmente, β es un parámetro el cual permite que el modelo a seguir de la mejor respuesta en situaciones de cortante dominante.

Las típicas curvas uniaxiales de Mazars presentan un comportamiento con ablandamiento tanto para compresión como para tracción.

3.5.2.-Resultados numéricos.

Los resultados numéricos obtenidos por Antoinelle son los correspondientes a un único ladrillo de 0.120 x 0.055 x 0.090 m. Las juntas verticales y horizontales de mortero corresponden a un espesor de 0.010 m. Ladrillo y mortero se han supuesto perfectamente solidarios en su interfase.

Debido a la simetría de las propiedades de los elementos bidimensionales y tridimensionales, el análisis ha sido llevado a cabo para un cuarto del elemento bidimensional y un octavo del elemento tridimensional. Las mallas utilizadas pueden verse en la Figura 3.13.

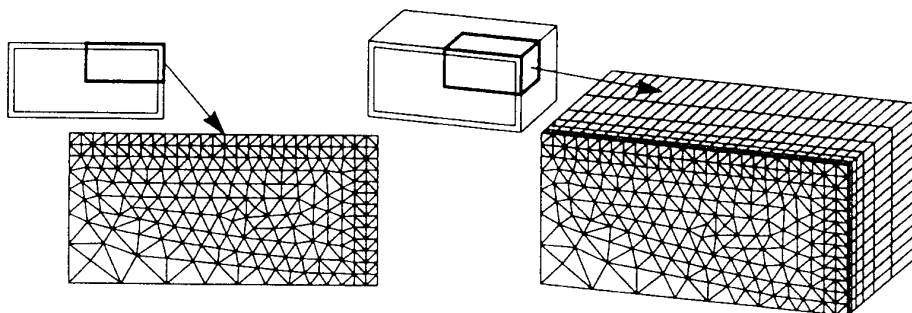


Figura 3.13. Mallas para análisis 2D (1/4 de elemento) y 3D (1/8 de elemento).

En el proceso de cálculo llevado a cabo la hipótesis de deformación plana ha sido impuesta de forma que la tensión resultante $|S| \Sigma_{33}$ pueda ser impuesta directamente a través de la condición de Neumann ($|S| \Sigma_{33}=0$); solamente E_{33} puede ser determinado

ya que E_{13} y E_{23} son cero gracias a la simetría del problema. Las condiciones de periodicidad en los desplazamientos son impuestas a través de los multiplicadores de Lagrange.

Los coeficientes de la ley de Mazars (1986) han sido escogidos de forma que se obtengan valores reales de tracción y compresión para ambos materiales. Las dos curvas uniaxiales tensión-deformación han sido dibujadas en la Figura 3.14, conjuntamente con las obtenidas del cálculo utilizando las hipótesis de tensión plana (PS), deformación plana (GPS) y cálculo tridimensional para mampostería bajo compresión uniaxial. Siendo el parámetro de control la deformación vertical E_{22} , ha podido obtenerse una pequeña rama de la rama plástica (con ablandamiento) en el caso de tensión plana, vía arc-length. El comportamiento post-pico es muy sensible al tamaño de la malla.

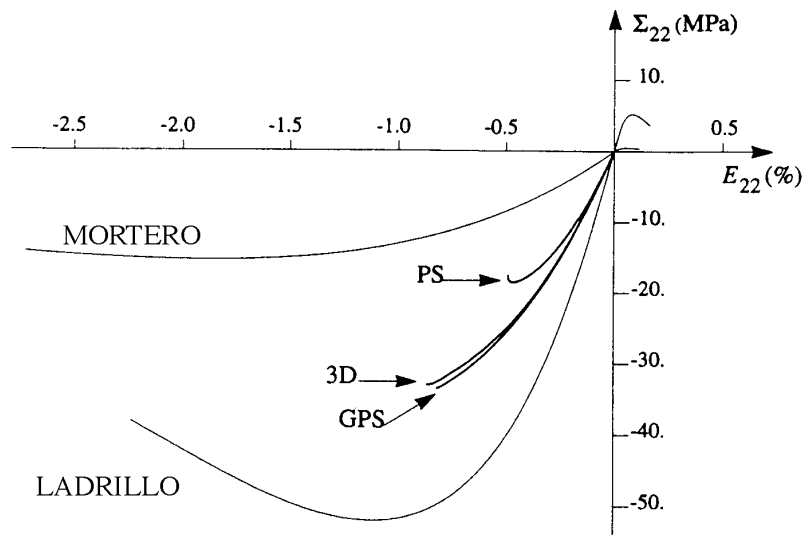


Figura 3.14. Curvas obtenidas por el modelo bajo carga de compresión uniaxial.

Tal como se esperaba, el cálculo en régimen elástico da un buen comportamiento para cualquiera de las tres hipótesis que se realicen. Estudios posteriores llevados a cabo por Anthonielle han demostrado que existe muy poca variación entre las características elásticas de la mampostería ya sea en tensión plana o deformación plana, aunque la componente σ_{33} sea diferente en ambos casos (nula en tensión plana para los planos externos de la mampostería).

Los resultados divergen cuando es la rama plástica la que se quiere calcular.

En tensión plana conduce a una resistencia de la mampostería del 44% inferior que en el caso tridimensional, mientras que en el caso de deformación plana se sobrestima en un 2%. Además, los modos de fractura que se pueden visualizar a partir de los valores de igual daño de la gráfica de máximas deformaciones (Figura 3.15) son sensiblemente diferentes: en el caso de tensión plana, la fisuración ocurre por tracción en las juntas

verticales y el aplastamiento de las juntas horizontales sin fisuración de los ladrillos. En el caso de deformación plana, la fisuración ocurre por tracción en las juntas verticales y los ladrillos, mientras que las juntas horizontales quedan intactas. Finalmente en el caso

tridimensional, las juntas verticales fallan también a tracción pero las juntas horizontales están aplastadas superficialmente y el fallo ocurre por fisuración interior de los ladrillos. Este último modo de fallo es uno de los más usuales observados experimentalmente.

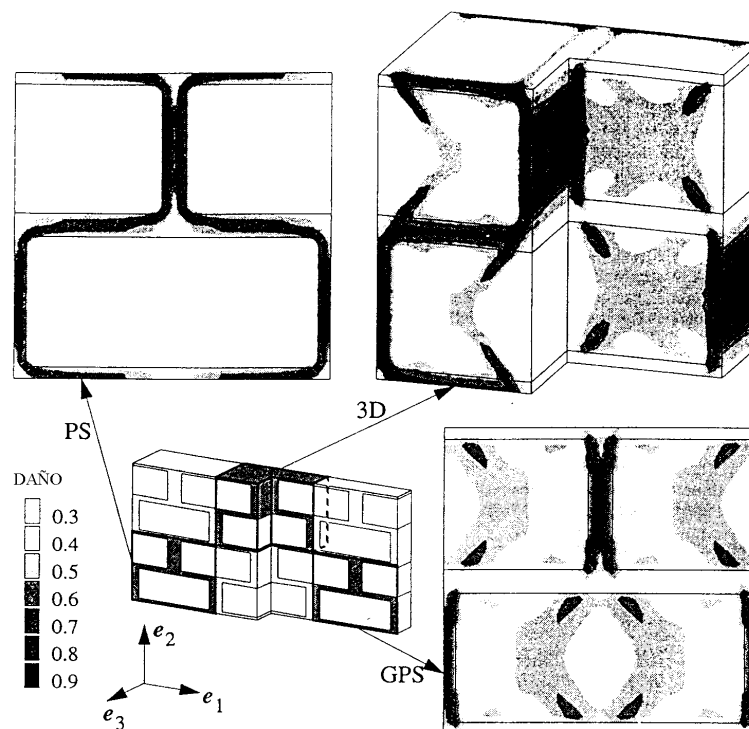


Figura 3.15. Valores de la variable de daño para máximas deformaciones

La diferencia entre los tres modos de calcular es, por supuesto, debido a la componente no coplanaria del campo de tensiones locales : la evolución de la variable de daño está afectada por valores no nulos de σ_{33} , ya sean positivos o negativos (véase la definición de $\tilde{\epsilon}$ y γ de (3.37)). Cabe destacar que este efecto no es exclusivo de la ley de daño de Mazars (1986) ya que muchas leyes usadas para describir el comportamiento de los geomateriales (Mohr-Coulomb (1882), Drucker-Prager (1952),...,etc) podrían llevar a resultados similares.

3.6.- MODELO HOMOGENEIZADO DE LOURENÇO (1992).

El modelo de Lourenço (1992) se basa en la consideración de la mampostería como un material compuesto por una sucesión de capas que posteriormente pasan a ser homogeneizadas (véase Figura 3.4). Lourenço, en su modelo, hace un desarrollo diferenciado entre la formulación elástica y la formulación elasto-plástica.

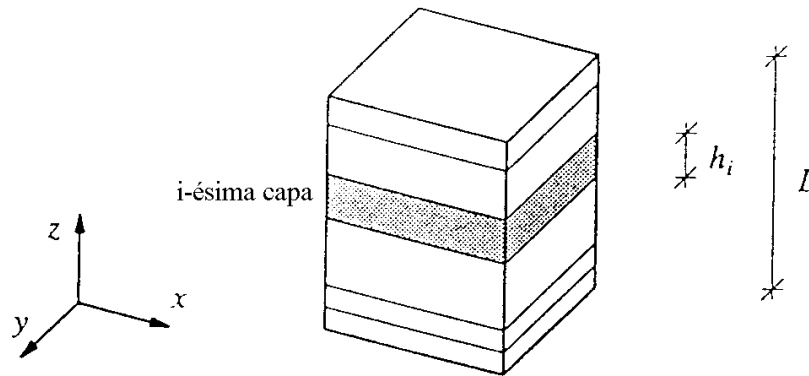


Figura 3.16. Celda básica. Representa el volumen de un prisma formado por un sistema de capas.

El modelo está construido a partir de la consideración de la mampostería como un sistema paralelo de capas, las cuales en este caso se consideran con propiedades elásticas e isotropas. Esta hipótesis puede ser considerada como una simplificación. Las capas se consideran alineadas perpendicularmente a la dirección del eje Z (véase Figura 3.16). El elemento unitario representa un prisma tal como se indica en la Figura 3.16, y se supone que existe una periodicidad en el global de la estructura (en las otras dos direcciones). En este modelo se hace la hipótesis de que las capas permanecen continuas después de la deformación y que no hay desplazamiento relativo entre las capas de interfase. El prisma representativo del elemento unitario de material compuesto se le supone, además, que está sujeto a distribuciones de tensiones y deformaciones homogéneas. Esto significa que el volumen del prisma unitario debe ser lo suficientemente pequeño para que lo haga insignificante respecto al tamaño global del medio así como la variación de tensiones y deformaciones en él.

En el modelo de Lourenço, aunque es un modelo homogeneizado, sus elementos se acercan más a lo que es la teoría de mezclas que a un modelo homogeneizado propiamente dicho. Además, es un modelo desarrollado tridimensionalmente, lo que lo convierte en una herramienta con alto costo computacional tanto a nivel de cálculo como a nivel de generación de malla.

Para la formulación elasto-plástica, Lourenço considera como superficies de fluencia la superficie de Rankine (1876) en el caso de tracción y la superficie de Hill (1948) como criterio para el caso de compresión. Asimismo, Lourenço hace la consideración muy extendida para el caso de la mampostería de un comportamiento ortótropo debido a la distribución de los elementos.

Mayores detalles sobre este modelo pueden consultarse en las fuentes [Lourenço,1992].

CAPÍTULO 4

PROPUESTA DE MODELO CONSTITUTIVO HOMOGENEIZADO EN MAMPOSTERÍA

En el presente capítulo se presenta un nuevo modelo constitutivo que debe regir el comportamiento estructural de la mampostería. El objetivo es formular un modelo homogeneizado tal que las propiedades de éste contengan intrínsecamente las diferentes propiedades de la estructura de este material tanto geométricas como mecánicas a partir de la definición básica de los materiales componentes (ladrillo y mortero). El modelo homogeneizado permitirá reducir considerablemente la discretización de los elementos de mampostería, ya que con esta técnica se evita la discretización clásica que se haría utilizando un micromodelo. Es conveniente destacar que en los micromodelos los ladrillos y las juntas de mortero deben discretizarse con elementos diferentes, ya que tienen propiedades diferentes. Es por esta razón por la que el trabajo de generar malla utilizando micromodelos se convierte en una labor tediosa ya que hay que tener en cuenta que el tamaño relativo de ladrillos y juntas es pequeño en comparación con el tamaño de los muros de los cuales forman parte.

4.1.- MODELO CONSTITUTIVO.

El modelo se basa en un análisis detallado de las formas o modos de deformación que tiene la mampostería bajo los diferentes estados de carga un elemento unitario que conjuga tanto el bloque de ladrillo como las juntas y tendeles de mortero. En la Figura 4.1 se indica la notación empleada para identificar las dimensiones con las que queda caracterizado el elemento.

Entre las hipótesis básicas que se van a manejar hay que destacar dos principalmente:

- Las dimensiones de altura y anchura son grandes respecto al canto del propio elemento estructural lo que permite hacer la hipótesis de tensión plana, siempre que carguemos en el plano de la estructura. Ésto permite el poder hacer un análisis plano del problema.
- Dada la disposición de los ladrillos y de las juntas de mortero podemos aceptar el comportamiento ortótropo del conjunto.

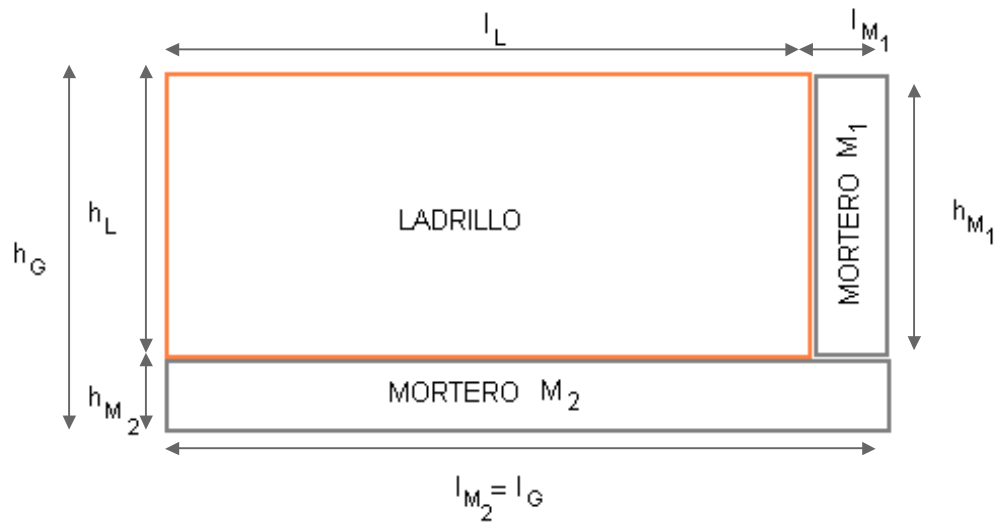


Figura 4.1. Notación empleada en las dimensiones de los elementos componentes de la celda básica.

A continuación se pasa a desarrollar las ecuaciones que gobiernan cada uno de los modos de deformación de un elemento unitario de mampostería. En lo sucesivo es necesario tener en cuenta que el índice "L" representa el "Ladrillo", el " M_1 " el mortero vertical, " M_2 " el mortero horizontal y "G" las medidas globales del conjunto (homogeneizado) o celda básica.

4.1.1.- Ecuaciones del modo 1

Establecemos el modo 1, el correspondiente al de tracción-compresión según el eje X correspondiente al esquema que se presenta en la Figura 4.2.



Figura 4.2. Representación del Modo 1.

Condición de equilibrio :

$${}_x\sigma \cdot h_G = {}_x\sigma_L \cdot h_L + {}_x\sigma_{M_2} \cdot h_{M_2} = {}_x\sigma_{M_1} \cdot h_{M_1} + {}_x\sigma_{M_2} \cdot h_{M_2}$$

$$h_{M_1} = h_L \Rightarrow {}_x\sigma_L \equiv {}_x\sigma_{M_1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_x\sigma = {}_x\sigma_L \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_x\sigma_{M_1} \cdot \frac{h_{M_1}}{h_G} \\ {}_x\sigma = {}_x\sigma_{M_1} \cdot \frac{h_{M_1}}{h_G} + {}_x\sigma_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

donde ${}_i\sigma_j$ representa el estado tensional homogéneo en la dirección “i” del material componente “j”; h_i representa la altura del material componente “i”.

Condición de Compatibilidad:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{{}_x\varepsilon}_G \cdot l_G = \dot{{}_x\varepsilon}_{M_2} \cdot l_{M_2} \\ \dot{{}_x\varepsilon}_G \cdot l_G = \dot{{}_x\varepsilon}_L \cdot l_L + \dot{{}_x\varepsilon}_{M_1} \cdot l_{M_1} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

donde ${}_i\varepsilon_j$ representa la deformación homogénea en la dirección “i” del material componente “j”; l_i representa la longitud del material componente “i”.

Ecuación Constitutiva : (para cada material componente)

$$\dot{{}_x\sigma}_i = {}_xE_i(\omega_i) \cdot (\dot{{}_x\varepsilon}_i - \dot{{}_x\varepsilon}_i^p) \quad (4.3)$$

$$\dot{{}_x\varepsilon}_i = \frac{\dot{{}_x\sigma}_i}{{}_xE_i(\omega_i)} + \dot{{}_x\varepsilon}_i^p$$

En la expresión 4.3 puede observarse que el módulo de Young depende del parámetro de daño ω , debido a que el módulo de elasticidad cambia de valor en el momento que dejamos la rama elástica. En el caso de materiales con degradación, como es el caso de los geomateriales, E disminuye su valor. En el caso del modelo que en este trabajo se presenta, dado que no se utiliza la teoría de daño dentro del modelo constitutivo éste valor permanecerá constante a lo largo de todo el proceso y solamente se considerará la influencia de la plasticidad.

Determinación de las tensiones en cada componente :

Sustituyendo (4.1) en (4.3) y su resultado en (4.2) se obtiene :

$${}^x\sigma_{M_2} = {}^x\sigma \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - {}^x\sigma_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \Rightarrow \dot{{}^x\sigma}_{M_2} = \dot{{}^x\sigma} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - \dot{{}^x\sigma}_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}}$$

$$\dot{{}^x\epsilon}_{M_2} = \frac{{}^x\sigma}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - \frac{{}^x\sigma_L}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} + \dot{\epsilon}^p$$

De la expresión (4.2) obtenemos la deformación global:

$$\dot{{}^x\epsilon}_G \cdot l_G = \frac{{}^x\sigma}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} - \frac{{}^x\sigma_L}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} + \dot{\epsilon}^p \cdot l_{M_2} \quad (4.4)$$

$$\dot{{}^x\epsilon}_G \cdot l_G = \underbrace{\frac{{}^x\sigma_L}{E_L} \cdot l_L + \dot{\epsilon}_L^p \cdot l_L}_{\dot{{}^x\epsilon}_L \cdot l_L} + \underbrace{\frac{{}^x\sigma_L}{E_{M_1}} \cdot l_{M_1} + \dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1}}_{\dot{{}^x\epsilon}_{M_1} \cdot l_{M_1}} \quad (4.5)$$

Igualando (4.4) y (4.5) se obtiene la variación temporal de la tensión en el ladrillo:

$$\frac{{}^x\sigma}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} + \dot{\epsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - \frac{{}^x\sigma_L}{E_L} \cdot l_L - \dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} = \frac{{}^x\sigma_L}{E_L} \cdot l_L + \frac{{}^x\sigma_L}{E_{M_1}} \cdot l_{M_1} + \dot{\epsilon}_L^p \cdot l_L + \dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} + \frac{{}^x\sigma}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2}$$

$$\dot{{}^x\sigma}_L = \frac{{}^x E_L \cdot {}^x E_{M_1} \cdot {}^x E_{M_2} \cdot h_{M_2}}{\underbrace{{}^x E_{M_1} \cdot {}^x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_L + {}^x E_L \cdot {}^x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_2} + {}^x E_L \cdot {}^x E_{M_1} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_1}}_{{}^x A_L}}$$

$$\cdot \left[\frac{{}^x\sigma}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \cdot l_{M_2} + \dot{\epsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - \dot{\epsilon}_L^p \cdot l_L - \dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} \right]$$

$$\dot{{}^x\sigma}_L = \dot{{}^x\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{{}^x A_L}{E_{M_2}} \cdot \frac{l_{M_2}}{h_{M_2}} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} \right)}_{{}^x B_L} + \underbrace{{}^x A_L \cdot \left(\dot{\epsilon}_{M_2}^p \cdot l_{M_2} - \dot{\epsilon}_L^p \cdot l_L - \dot{\epsilon}_{M_1}^p \cdot l_{M_1} \right)}_{{}^x C_L}$$

$$\boxed{\dot{{}^x\sigma}_L = \dot{{}^x\sigma} \cdot {}^x B_L + {}^x C_L \equiv \dot{{}^x\sigma}_{M_1}} \quad (4.6)$$

A partir de (4.1) se obtiene la variación temporal de la tensión en el mortero 2:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{M_2} &= \dot{\sigma} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - \dot{\sigma}_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} = \dot{\sigma} \cdot \frac{h_G}{h_{M_2}} - \dot{\sigma} \cdot {}^x B_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} - {}^x C_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}} \\ \dot{\sigma}_{M_2} &= \dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{h_G - {}^x B_L \cdot h_L}{h_{M_2}} \right)}_{{}^x B_{M_2}} - \underbrace{{}^x C_L \cdot \frac{h_L}{h_{M_2}}}_{{}^x C_{M_2}} \end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}_{M_2} = \dot{\sigma} \cdot {}^x B_{M_2} - {}^x C_{M_2}$$

Determinación de la ley constitutiva global para cada elemento:

A partir de la expresión (4.5) obtenemos :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_G &= \frac{\dot{\sigma}}{{}^x E_L} \cdot \frac{l_L}{l_G} + \dot{\varepsilon}_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \frac{\dot{\sigma}_L}{{}^x E_{M_1}} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} + \dot{\varepsilon}_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \\ \dot{\varepsilon}_G &= \dot{\sigma}_L \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{{}^x E_L} \cdot \frac{l_L}{l_G} + \frac{1}{{}^x E_{M_1}} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \right)}_{{}^x D} + \underbrace{\dot{\varepsilon}_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \dot{\varepsilon}_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G}}_{{}^x E} \end{aligned}$$

Sustituyendo $\dot{\sigma}_L$ por su expresión, resulta:

$$\dot{\varepsilon}_G = \left(\dot{\sigma} \cdot {}^x B_L + {}^x C_L \right) \cdot {}^x D + {}^x E$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_G &= \left(\dot{\sigma} \cdot {}^x B_L + {}^x D \right) + \left({}^x C_L \cdot {}^x D + {}^x E \right) \\ \dot{\varepsilon}_G &= \frac{1}{{}^x E_G} = {}^x B_L \cdot {}^x D \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\varepsilon}_G^p &= {}^x C_L \cdot {}^x D + {}^x E \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\dot{\varepsilon}_G = \underbrace{\frac{\dot{\sigma}}{{}^x E_G}}_{{}^x \varepsilon_G^e} + \dot{\varepsilon}_G^p$$

4.1.2.- Ecuaciones del modo 2

Se establece como modo 2, el correspondiente al de tracción-compresión según el eje Y correspondiente al esquema que se presenta en la Figura 4.3.

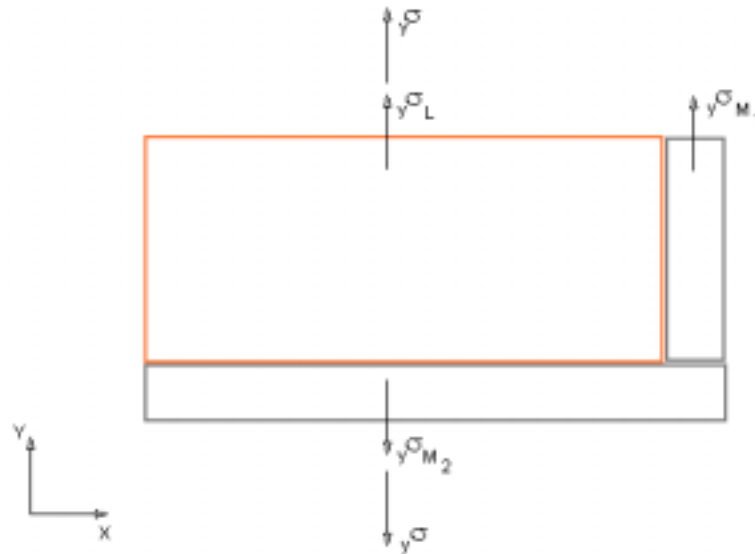


Figura 4.3. Representación del Modo 2.

Planteando las ecuaciones constitutivas que deben regir este modo y actuando de igual manera que se ha hecho con el modo anterior:

Condición de equilibrio :

$${}_y\sigma \cdot I_G = {}_y\sigma_L \cdot I_L + {}_y\sigma_{M_1} \cdot I_{M_1} = {}_y\sigma_{M_2} \cdot I_{M_2}$$

$$I_{M_2} = I_G \Rightarrow {}_y\sigma \equiv {}_y\sigma_{M_2}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} {}_y\sigma = {}_y\sigma_L \cdot \frac{I_L}{I_G} + {}_y\sigma_{M_1} \cdot \frac{I_{M_1}}{I_G} \\ {}_y\sigma = {}_y\sigma_{M_1} \end{array} \right. \quad (4.9)$$

donde ${}_i\sigma_j$ representa el estado tensional homogéneo en la dirección “i” del material componente “j”; I_i representa la longitud del material componente “i”.

Condición de compatibilidad :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y}\epsilon_G \cdot h_G = \dot{y}\epsilon_L \cdot h_L + \dot{y}\epsilon_{M_2} \cdot h_{M_2} \\ \dot{y}\epsilon_G \cdot h_G = \dot{y}\epsilon_{M_1} \cdot h_{M_1} + \dot{y}\epsilon_{M_2} \cdot h_{M_2} \end{array} \right. \quad (4.10)$$

donde $\dot{y}\epsilon_j$ representa la deformación homogénea en la dirección “i” del material componente “j”; h_i representa la altura del material componente “i”.

Ecuación Constitutiva : (para cada material componente)

$$\dot{y}\sigma_i = \dot{y}E_i(\omega_i) \cdot (\dot{y}\epsilon_i - \dot{y}\epsilon_i^p) \quad (4.11)$$

$$\dot{y}\epsilon_i = \frac{\dot{y}\sigma_i}{\dot{y}E_i(\omega_i)} + \dot{y}\epsilon_i^p$$

Al igual que en el modo anterior y como hipótesis del modelo el módulo de Young será independiente del parámetro de daño ω , por lo que E_i será constante a lo largo de todo el proceso.

Determinación de las tensiones en cada componente :

Sustituyendo (4.9) en (4.10) y su resultado en (4.11) se obtiene :

$$\begin{aligned} \dot{y}\sigma_{M_1} &= \dot{y}\sigma \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \dot{y}\sigma_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} \Rightarrow \dot{y}\sigma_{M_1} = \dot{y}\sigma \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \dot{y}\sigma_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} \\ \dot{y}\epsilon_{M_1} &= \frac{\dot{y}\sigma}{\dot{y}E_{M_1}} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \frac{\dot{y}\sigma_L}{\dot{y}E_{M_1}} \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} + \dot{y}\epsilon_{M_1}^p \\ \dot{y}\epsilon_{M_2} &= \frac{\dot{y}\sigma_{M_2}}{\dot{y}E_{M_2}} + \dot{y}\epsilon_{M_1}^p = \frac{\dot{y}\sigma}{\dot{y}E_{M_2}} + \dot{y}\epsilon_{M_1}^p \end{aligned}$$

Sustituyendo en las ecuaciones de compatibilidad global, resulta:

$$\begin{aligned} \dot{y}\epsilon_G \cdot h_G &= \dot{y}\epsilon_L \cdot h_L + \dot{y}\epsilon_{M_2} \cdot h_{M_2} = \left(\frac{\dot{y}\sigma_L}{\dot{y}E_L} + \dot{y}\epsilon_L^p \right) \cdot h_L + \left(\frac{\dot{y}\sigma}{\dot{y}E_{M_2}} + \dot{y}\epsilon_{M_2}^p \right) \cdot h_{M_2} \\ \dot{y}\epsilon_G \cdot h_G &= \dot{y}\epsilon_{M_1} \cdot h_{M_1} + \dot{y}\epsilon_{M_2} \cdot h_{M_2} = \left(\frac{\dot{y}\sigma}{\dot{y}E_{M_1}} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \frac{\dot{y}\sigma_L}{\dot{y}E_{M_1}} \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} + \dot{y}\epsilon_{M_1}^p \right) \cdot h_{M_1} + \left(\frac{\dot{y}\sigma}{\dot{y}E_{M_2}} + \dot{y}\epsilon_{M_2}^p \right) \cdot h_{M_2} \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones se obtiene la variación temporal de la tensión en el ladrillo:

$$\begin{aligned} & \dot{\sigma}_y \frac{l_G}{E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} - \frac{\dot{\sigma}_y}{E_{M_2}} \cdot h_{M_2} + \frac{\dot{\sigma}_y}{E_{M_2}} \cdot h_{M_2} - \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L - \dot{\epsilon}_{M_2}^P \cdot h_{M_2} + \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} + \dot{\epsilon}_{M_2}^P \cdot h_{M_2} = \\ & = \frac{\dot{\sigma}_L}{E_L} \cdot h_L + \dot{\sigma}_L \cdot \frac{l_L}{E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} \end{aligned}$$

$$\dot{\sigma}_y \left(\frac{l_G}{E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} - \frac{h_{M_2}}{E_{M_2}} + \frac{h_{M_2}}{E_{M_2}} \right) - \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L + \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} = \dot{\sigma}_L \cdot \left(\frac{h_L}{E_L} + \frac{l_L}{E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} \right)$$

$$\dot{\sigma}_L = \underbrace{\left(\frac{E_L \cdot E_{M_1} \cdot l_{M_1}}{E_L \cdot l_{M_1} \cdot h_L + E_L \cdot l_L \cdot h_{M_1}} \right)}_{A_L} \cdot \left[\left(\frac{l_G}{E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \cdot h_{M_1} \right) \dot{\sigma}_y - \dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L + \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} \right]$$

$$\dot{\sigma}_L = \dot{\sigma}_y \underbrace{\left(\frac{A \cdot l_G \cdot h_{M_1}}{E_{M_1} \cdot l_{M_1}} \right)}_{B_L} + A \cdot \underbrace{\left(-\dot{\epsilon}_L^P \cdot h_L + \dot{\epsilon}_{M_1}^P \cdot h_{M_1} \right)}_{C_L}$$

$$\dot{\sigma}_L = \dot{\sigma}_y B_L + C_L$$

$$\dot{\sigma}_{M_1} = \dot{\sigma}_y \frac{l_G}{l_{M_1}} - \dot{\sigma}_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}} = \dot{\sigma}_y \frac{l_G}{l_{M_1}} - \left(\dot{\sigma}_y B_L + C_L \right) \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}}$$

$$\dot{\sigma}_{M_1} = \dot{\sigma}_y \underbrace{\left(\frac{l_G - B_L \cdot l_L}{l_{M_1}} \right)}_{B_{M_1}} - \underbrace{C_L \cdot \frac{l_L}{l_{M_1}}}_{C_{M_1}}$$

$$\dot{\sigma}_{M_1} = \dot{\sigma}_y B_{M_1} - C_{M_1}$$

Además por equilibrio se cumple que:

$$\dot{\sigma}_{M_2} = \dot{\sigma}_y$$

Ley constitutiva global para cada elemento:

$$\begin{aligned}
 \dot{\varepsilon}_G &= \dot{\varepsilon}_L \cdot \frac{h_L}{h_G} + \dot{\varepsilon}_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \\
 \dot{\varepsilon}_G &= \left(\frac{\dot{\sigma}_L}{E_L} + \dot{\varepsilon}_L^P \right) \cdot \frac{h_L}{h_G} + \left(\frac{\dot{\sigma}_{M_2}}{E_{M_2}} + \dot{\varepsilon}_{M_2}^P \right) \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \\
 \dot{\varepsilon}_G &= \frac{\dot{\sigma}_L}{E_L} \cdot \frac{h_L}{h_G} + \dot{\varepsilon}_L^P \cdot \frac{h_L}{h_G} + \frac{\dot{\sigma}_{M_2}}{E_{M_2}} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} + \dot{\varepsilon}_{M_2}^P \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \\
 \dot{\varepsilon}_G &= \left(\dot{\sigma} \cdot {}^y B_L + {}^y \dot{C}_L \right) \cdot \frac{h_L}{E_L \cdot h_G} + \frac{\dot{\sigma} \cdot h_{M_2}}{E_{M_2} \cdot h_G} + \dot{\varepsilon}_L^P \cdot \frac{h_L}{h_G} + \dot{\varepsilon}_{M_2}^P \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \\
 \dot{\varepsilon}_G &= \dot{\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{{}^y B_L \cdot h_L}{E_L \cdot h_G} + \frac{h_{M_2}}{E_{M_2} \cdot h_G} \right)}_{\frac{1}{E_G}} + \underbrace{\left(\frac{{}^y \dot{C}_L \cdot h_L}{E_L \cdot h_G} + \dot{\varepsilon}_L^P \cdot \frac{h_L}{h_G} + \dot{\varepsilon}_{M_2}^P \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)}_{\dot{\varepsilon}_G^P}
 \end{aligned}$$

$$\dot{\varepsilon}_G = \frac{\dot{\sigma}}{E_G} + \dot{\varepsilon}_G^P$$

(4.12)

4.1.3.- Ecuaciones del modo 3

El tercer modo es el que corresponde al modo de deformación provocado por la actuación de una tensión tangencial actuando en el plano XY del elemento. En la Figura 4.4 se puede ver el elemento discretizado así como la configuración deformada considerada. Mencionar que el bloque de ladrillo y el mortero sufren distorsiones diferentes al tener propiedades mecánicas y geométricas diferentes. Al introducir la teoría de la homogeneización, se ha introducido una distorsión global del elemento homogeneizado que se obtiene a partir de la unión con una línea recta los puntos extremos del elemento.

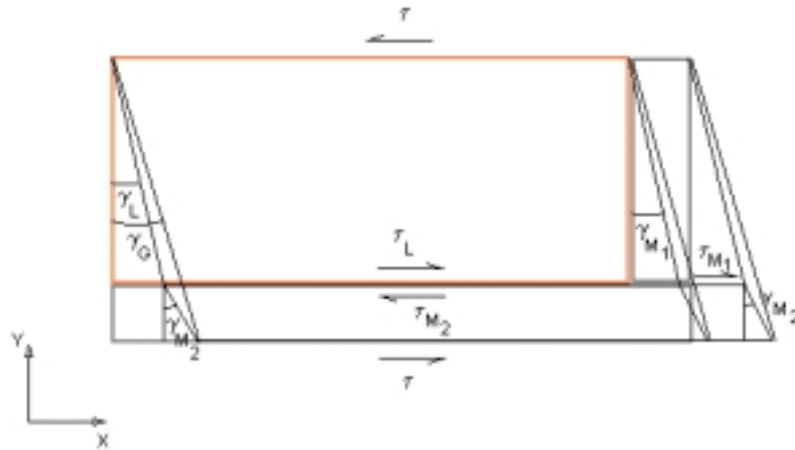


Figura 4.4. Representación del Modo 3.

Siguiendo los mismos pasos que los desarrollados en los otros dos modos :

Condición de equilibrio

$$\dot{\tau} \cdot I_G = \dot{\tau}_L \cdot I_L + \dot{\tau}_{M_1} \cdot I_{M_1} = \dot{\tau}_{M_2} \cdot I_{M_2} \Rightarrow \dot{\tau} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{I_L}{I_G} + \dot{\tau}_{M_1} \cdot \frac{I_{M_1}}{I_G} = \dot{\tau}_{M_2}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\tau} &= \dot{\tau}_L \cdot \frac{I_L}{I_G} + \dot{\tau}_{M_1} \cdot \frac{I_{M_1}}{I_G} \\ \dot{\tau} &= \dot{\tau}_{M_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.13. a) \quad (4.13. b)$$

(4.13)

Donde τ_i representa la tensión tangencial en el plano XY en el material componente “i”.

Condición de compatibilidad

Por hipótesis:

$${}_{xy} \gamma_{M_1} = {}_{xy} \gamma_L$$

$$h_{M_1} = h_L$$

Donde ${}_{xy} \gamma_j$ representa la distorsión en el plano XY del material componente “j”.

Aplicando compatibilidad de movimientos y la hipótesis anterior obtenemos la distorsión en el ladrillo y en el mortero 1:

$${}_{xy} \dot{\gamma}_{M_1} \cdot h_{M_1} = {}_{xy} \dot{\gamma}_L \cdot h_L \Rightarrow {}_{xy} \dot{\gamma}_{M_1} = {}_{xy} \dot{\gamma}_L$$

lo que implica tener igual distorsión para el ladrillo y el mortero M_1 .

$${}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^e = {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1} - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p = {}_{xy}\dot{\gamma}_L - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p = ({}_{xy}\dot{\gamma}_L + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p) - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p$$

$$\dot{\tau}_{M_1} = {}_{xy}G_{M_1} \cdot {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^e = {}_{xy}G_{M_1} \cdot \left(\frac{\dot{\tau}_L}{{}_{xy}G_L} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p \right)$$

$$\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{{}_{xy}G_{M_1}}{{}_{xy}G_L} + {}_{xy}G_{M_1} \cdot ({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p) \quad (4.14)$$

Determinación de las tensiones en cada componente:

Sustituyendo la expresión (4.14) en la expresión (4.13.a) se obtiene la variación temporal de la tensión en el ladrillo:

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \dot{\tau}_L \cdot \frac{{}_{xy}G_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} + {}_{xy}G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} ({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p) \stackrel{(4.13.b)}{\equiv} \dot{\tau}_{M_2}$$

$$\dot{\tau} = \dot{\tau}_L \cdot \left(\frac{l_L}{l_G} + \frac{{}_{xy}G_{M_1}}{{}_{xy}G_L} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \right) + {}_{xy}G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \cdot ({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p)$$

$$\dot{\tau}_L = \left[\dot{\tau} - \underbrace{{}_{xy}G_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} \cdot ({}_{xy}\dot{\gamma}_L^p - {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1}^p)}_{\dot{B}_L} \right] \cdot \underbrace{\left(\frac{{}_{xy}G_L \cdot l_G}{{}_{xy}G_L \cdot l_L + {}_{xy}G_{M_1} \cdot l_{M_1}} \right)}_{A_L}$$

$$\boxed{\dot{\tau}_L = \dot{\tau} \cdot A_L - \dot{B}_L \cdot A_L} \quad (4.15)$$

A partir de (4.13. a) obtenemos:

$$\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - \dot{\tau}_L \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} = \dot{\tau} \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}} - (\dot{\tau} \cdot A_L - \dot{B}_L \cdot A_L) \cdot \frac{l_G}{l_{M_1}}$$

$$\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau} \cdot \left(\frac{l_G}{l_{M_1}} - \frac{A_L \cdot l_L}{l_{M_1}} \right) + \frac{\dot{B}_L \cdot A_L \cdot l_L}{l_{M_1}}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{A_{M_1}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{-\dot{B}_{M_1}}$

$$\boxed{\dot{\tau}_{M_1} = \dot{\tau} \cdot A_{M_1} - \dot{B}_{M_1}} \quad (4.16)$$

Obteniendo la expresión de la variación temporal de la tensión en el mortero 1.

Ley constitutiva:

$$\dot{\tau}_i = {}_{xy}G_i(\omega_i) \cdot ({}_{xy}\dot{\gamma}_i - {}_{xy}\dot{\gamma}_i^p) \Rightarrow {}_{xy}\dot{\gamma}_i = \frac{\dot{\tau}_i}{{}_{xy}G_i} + {}_{xy}\dot{\gamma}_i^p$$

Ecuación de compatibilidad global para cada elemento :

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G \cdot h_G = ({}_{xy}\dot{\gamma}_L \cdot h_L) + ({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2} \cdot h_{M_2}) = ({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_1} \cdot h_{M_1}) + ({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2} \cdot h_{M_2})$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \left({}_{xy}\dot{\gamma}_L \cdot \frac{h_L}{h_G} \right) + \left({}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

Introduciendo la ecuación constitutiva se obtiene

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \left(\frac{\dot{\tau}_L}{{}_{xy}G_L} \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} \right) + \left(\frac{\dot{\tau}_{M_2}}{{}_{xy}G_{M_2}} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \left((\dot{\tau} \cdot A_L - \dot{B}_L \cdot A_L) \cdot \frac{h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} \right) + \left(\dot{\tau} \cdot \frac{h_{M_2}}{{}_{xy}G_{M_2} \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \dot{\tau} \cdot \frac{A_L \cdot h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + \dot{\tau} \cdot \frac{h_{M_2}}{{}_{xy}G_{M_2} \cdot h_G} - \dot{B}_L \cdot A_L \cdot \frac{h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \dot{\tau} \cdot \left(\underbrace{\frac{A_L \cdot h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + \frac{h_{M_2}}{{}_{xy}G_{M_2} \cdot h_G}}_{\frac{1}{{}_{xy}G_G}} \right) + \left(\underbrace{-\dot{B}_L \cdot A_L \cdot \frac{h_L}{{}_{xy}G_L \cdot h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}}_{{}_{xy}\dot{\gamma}_G^p} \right)$$

$${}_{xy}\dot{\gamma}_G = \dot{\tau} \cdot \frac{1}{{}_{xy}G_G} + {}_{xy}\dot{\gamma}_G^p$$

(4.17)

4.1.4.- Ecuaciones del modo 4

El cuarto modo de deformación es el que corresponde al campo de deformaciones fuera del plano de cargas (plano XY). Dado que en el modelo aceptamos la hipótesis de tensión plana, las deformaciones en el plano XZ se deben exclusivamente a deformaciones producidas por efecto Poisson. Así mismo, debido a que no existen

acciones tangenciales exteriores asociadas a los planos XZ y YZ (hipótesis de tensión plana), la resultante de las tensiones tangenciales τ_{xz} y τ_{yz} integradas para todo el elemento son nulas. Las distorsiones asociadas se supondrán nulas.

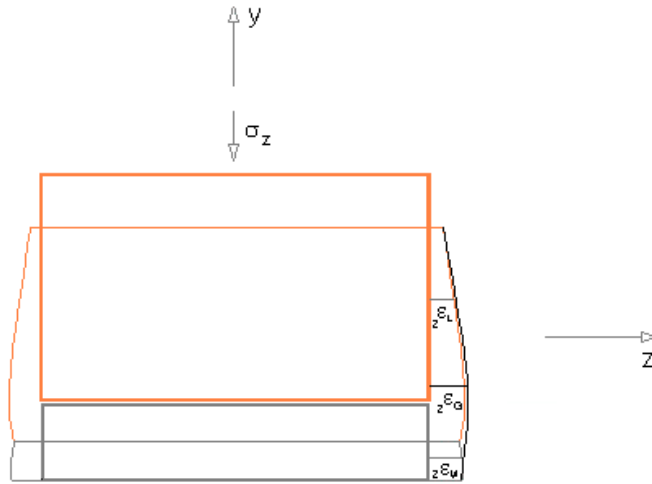


Figura 4.5. Representación del Modo 4.

Del dibujo de la Figura 4.5 se puede observar que ladrillo y mortero presentan deformadas sin continuidad en sus curvaturas debido a las diferentes propiedades mecánicas y geométricas de cada componente. En el modelo homogeneizado se ha adoptado como deformada la envolvente de las deformadas.

A diferencia que la operativa desarrollada para los modos anteriores, en este caso trabajaremos implícitamente con las ecuaciones en términos de variables homogeneizadas, tomando como punto de partida la expresión del tensor de rigidez secante en el caso de simetría ortótropica.

$$\mathbf{C}^s = \begin{bmatrix} \frac{{}_x E_G \cdot (-1 + {}_{yz} v_G \cdot {}_{zy} v_G)}{D} & -\frac{{}_x E_G \cdot ({}_{yx} v_G + {}_{yz} v_G \cdot {}_{zx} v_G)}{D} & -\frac{{}_x E_G \cdot ({}_{zx} v_G + {}_{yx} v_G \cdot {}_{zy} v_G)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{{}_y E_G \cdot ({}_{xy} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{zy} v_G)}{D} & \frac{{}_y E_G \cdot (-1 + {}_{xz} v_G \cdot {}_{zx} v_G)}{D} & -\frac{{}_y E_G \cdot ({}_{zy} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{zx} v_G)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{{}_z E_G \cdot ({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G)}{D} & -\frac{{}_z E_G \cdot ({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G)}{D} & -\frac{{}_z E_G \cdot (-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G)}{D} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}_{xy} G_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & {}_{yz} G_G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}_{zx} G_G \end{bmatrix}$$

donde:

$$D = -1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{zx} v_G + {}_{yz} v_G \cdot {}_{zy} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \cdot {}_{zx} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \cdot {}_{zy} v_G$$

$$\vec{\sigma}_G = \mathbf{C}^s \cdot \vec{\epsilon}_G$$

Hay que indicar que ${}_x E_G$, ${}_y E_G$, ${}_z E_G$, ${}_{xy} G_G$, ${}_{xz} G_G$, ${}_{yz} G_G$ son las obtenidas en los desarrollos de los modos anteriores.

Aislado la componente de ${}_z \sigma_G$ del vector $\vec{\sigma}_G$ y aplicando la hipótesis de tensión plana resulta :

$$\sigma_z = -\frac{E_z}{D} \left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \epsilon_G - \frac{E_z}{D} \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G + \frac{E_z}{D} \left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G = 0$$

$$\sigma_z = \frac{E_z}{D} \left[- \left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \epsilon_G - \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G + \left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G \right] = 0$$

$${}_z \epsilon_G = {}_z \epsilon_G^e + {}_z \epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \epsilon_G + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)}$$

$${}_z \epsilon_G = {}_z \epsilon_G^e + {}_z \epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \left({}_x \epsilon_G^e + {}_x \epsilon_G^p \right) + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \left({}_y \epsilon_G^e + {}_y \epsilon_G^p \right)}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)}$$

A partir de esta expresión y separando las componentes elásticas y plásticas se tienen las deformaciones globales según la dirección Z:

$${}_z \epsilon_G^e = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \epsilon_G^e + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G^e}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)} \quad (4.18)$$

$${}_z \epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot \epsilon_G^p + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot \epsilon_G^p}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)} \quad (4.19)$$

4.2.- OBTENCIÓN DE LOS PARÁMETROS MECÁNICOS HOMOGENEIZADOS.

A partir del desarrollo del modelo constitutivo se han obtenido los valores de los parámetros mecánicos de la mampostería homogeneizados. De los resultados que se presentan se puede observar la sensibilidad de éstos a las dimensiones de los elementos componentes (ladrillos y juntas de mortero).

Con el fin de ser congruentes en la notación del modelo en la Figura 4.6 se presentan los diferentes parámetros geométricos que se utilizan.

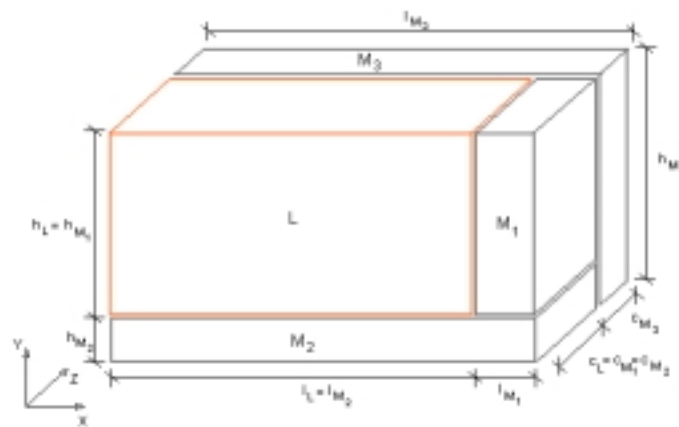


Figura 4.6. Representación geométrica tridimensional de un elemento de mampostería.

A continuación se pasa a hallar las expresiones de los parámetros mecánicos en forma explícita a partir del modelo constitutivo.

De la expresión 4.8 se obtiene el módulo de elasticidad longitudinal en dirección X global:

$$\boxed{{}^x E_G = \frac{1}{{}^x B_L \cdot {}^x D}} \quad (4.20)$$

donde :

$${}^x D = \frac{l_L}{{}^x E_L \cdot l_G} + \frac{l_{M1}}{{}^x E_{M1} \cdot l_G}$$

$${}^x B_L = \frac{{}^x A_L \cdot l_{M2} \cdot h_G}{{}^x E_{M2} \cdot h_{M2}}$$

$${}^x A_L = \frac{{}^x E_L \cdot {}^x E_{M1} \cdot {}^x E_{M2} \cdot h_{M1}}{{}^x E_{M1} \cdot {}^x E_{M2} \cdot h_{M2} \cdot l_L + {}^x E_L \cdot {}^x E_{M2} \cdot h_{M2} \cdot l_{M1} + {}^x E_L \cdot {}^x E_{M1} \cdot h_L \cdot l_{M2}}$$

De la expresión 4.12 se obtiene el módulo de elasticidad longitudinal en dirección Y global:

$$\boxed{{}^y E_G = \frac{1}{\frac{{}^y B_L \cdot h_L}{{}^y E_L \cdot h_G} + \frac{h_{M2}}{{}^y E_{M2} \cdot h_G}}} \quad (4.21)$$

donde :

$${}^y B_L = \frac{{}^y A_L \cdot l_G \cdot h_{M1}}{{}^y E_{M1} \cdot h_{M1}}$$

$${}^x A_L = \frac{{}^y E_L \cdot {}^y E_{M1} \cdot l_{M1}}{{}^x E_{M1} \cdot l_{M1} \cdot h_L + {}^x E_L \cdot l_L \cdot h_{M1}}$$

En el caso de ${}^z E_G$ dado que el comportamiento es igual que en el caso del modo 1 se obtiene el módulo de elasticidad longitudinal en dirección Z global:

$$\boxed{{}^z E_G = \frac{1}{{}^z B_L \cdot {}^z D}} \quad (4.22)$$

donde :

$${}^z D = \frac{c_L}{{}^z E_L \cdot c_G} + \frac{c_{M1}}{{}^z E_{M1} \cdot c_G}$$

$${}^z B_L = \frac{{}^z A_L \cdot c_{M2} \cdot h_G}{{}^z E_{M2} \cdot h_{M2}}$$

$${}^z A_L = \frac{{}^x E_L \cdot {}^x E_{M1} \cdot {}^x E_{M2} \cdot h_{M1}}{{}^x E_{M1} \cdot {}^x E_{M2} \cdot h_{M2} \cdot c_L + {}^x E_L \cdot {}^x E_{M2} \cdot h_{M2} \cdot c_{M3} + {}^x E_L \cdot {}^x E_{M1} \cdot h_L \cdot c_{M2}}$$

De la expresión 4.17 se obtiene el módulo de distorsión en el plano XY global:

$$\boxed{{}^{xy} G_G = \frac{1}{\frac{{}^{xy} A_L \cdot h_L}{{}^{xy} G_L \cdot h_G} + \frac{h_{M2}}{{}^{xy} G_{M2} \cdot h_G}}} \quad (4.23)$$

donde:

$${}^{xy} A_L = \frac{{}^{xy} G_L \cdot l_G}{{}^{xy} G_L \cdot l_L + {}^{xy} G_{M1} \cdot l_{M1}}$$

Actuando de igual forma para el resto de direcciones se obtienen:

Módulo de distorsión en el plano YX global

$$\boxed{{}_{yx}G_G = \frac{1}{\frac{{}_{yx}A_L \cdot l_L}{{}_{yx}G_L \cdot l_G} + \frac{l_{M_2}}{{}_{yx}G_{M_2} \cdot l_G}}} \quad (4.24)$$

donde:

$${}_{yx}A_L = \frac{{}_{xy}G_L \cdot h_G}{{}_{xy}G_L \cdot h_L + {}_{xy}G_{M_1} \cdot h_{M_2}}$$

Módulo de distorsión en el plano XZ global

$$\boxed{{}_{xz}G_G = \frac{1}{\frac{{}_{xz}A_L \cdot c_L}{{}_{xz}G_L \cdot c_G} + \frac{c_{M_3}}{{}_{xz}G_{M_3} \cdot c_G}}} \quad (4.25)$$

donde:

$${}_{xz}A_L = \frac{{}_{xz}G_L \cdot l_G}{{}_{xz}G_L \cdot l_L + {}_{xz}G_{M_1} \cdot l_{M_1}}$$

Módulo de distorsión en el plano ZX global

$$\boxed{{}_{zx}G_G = \frac{1}{\frac{{}_{zx}A_L \cdot l_L}{{}_{zx}G_L \cdot l_G} + \frac{l_{M_1}}{{}_{zx}G_{M_1} \cdot l_G}}} \quad (4.26)$$

donde:

$${}_{zx}A_L = \frac{{}_{zx}G_L \cdot c_G}{{}_{zx}G_L \cdot c_L + {}_{xz}G_{M_3} \cdot c_{M_3}}$$

Módulo de distorsión en el plano ZY global

$$\boxed{\quad} \quad (4.27)$$

$${}_{zy}G_G = \frac{1}{\frac{{}_{zy}A_L \cdot h_L}{{}_{zy}G_L \cdot h_G} + \frac{h_{M_2}}{{}_{zy}G_{M_2} \cdot h_G}}$$

donde:

$${}_{zy}A_L = \frac{{}_{zy}G_L \cdot c_G}{{}_{zy}G_L \cdot c_L + {}_{xy}G_{M_3} \cdot c_{M_3}}$$

Módulo de distorsión en el plano YZ global

$$\boxed{{}_{yz}G_G = \frac{1}{\frac{{}_{yz}A_L \cdot c_L}{{}_{yz}G_L \cdot c_G} + \frac{c_{M_3}}{{}_{zx}G_{M_3} \cdot c_G}}} \quad (4.28)$$

donde:

$${}_{yz}A_L = \frac{{}_{yz}G_L \cdot h_G}{{}_{yz}G_L \cdot h_L + {}_{yz}G_{M_2} \cdot c_{M_2}}$$

Dado que los elementos están orientados según las direcciones principales, se debe cumplir que :

$${}_{xy}G_G = \alpha_{xy} \cdot \sqrt{{}_x E_G \cdot {}_y E_G} \quad {}_{yx}G_G = \alpha_{yx} \cdot \sqrt{{}_y E_G \cdot {}_x E_G}$$

$${}_{yz}G_G = \alpha_{yz} \cdot \sqrt{{}_y E_G \cdot {}_z E_G} \quad {}_{zy}G_G = \alpha_{zy} \cdot \sqrt{{}_z E_G \cdot {}_y E_G}$$

$${}_{xz}G_G = \alpha_{xz} \cdot \sqrt{{}_x E_G \cdot {}_z E_G} \quad {}_{zx}G_G = \alpha_{zx} \cdot \sqrt{{}_z E_G \cdot {}_x E_G}$$

donde para el caso de geomateriales dentro del campo elástico, se tiene (Luccioni,1993):

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(1 + \nu_{ij})$$

$${}_{ij}G_G = \frac{1}{2}(1 + \nu_{ij}) \cdot \sqrt{{}_i E_G \cdot {}_j E_G}$$

$$\boxed{\nu_{ij} = \frac{2 \cdot {}_{ij}G_G}{\sqrt{{}_i E_G \cdot {}_j E_G}} - 1} \quad (4.29)$$

Por lo que obtenemos para las diferentes direcciones los diferentes coeficientes de Poisson:

$$\begin{aligned} v_{xy}^G &= \frac{2 \cdot_{xy} G_G}{\sqrt{{}_x E_G \cdot {}_y E_G}} - 1 & v_{yx}^G &= \frac{2 \cdot_{yx} G_G}{\sqrt{{}_y E_G \cdot {}_x E_G}} - 1 \\ v_{xz}^G &= \frac{2 \cdot_{xz} G_G}{\sqrt{{}_x E_G \cdot {}_z E_G}} - 1 & v_{zx}^G &= \frac{2 \cdot_{zx} G_G}{\sqrt{{}_z E_G \cdot {}_x E_G}} - 1 \\ v_{yz}^G &= \frac{2 \cdot_{yz} G_G}{\sqrt{{}_y E_G \cdot {}_z E_G}} - 1 & v_{zy}^G &= \frac{2 \cdot_{zy} G_G}{\sqrt{{}_z E_G \cdot {}_y E_G}} - 1 \end{aligned}$$

donde ${}_{ij}v_G$ representa el coeficiente de Poisson homogeneizado en el plano "ij".

4.3.- FLUJO PLÁSTICO HOMOGENEIZADO.

Superado el límite elástico, el cual viene definido por el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado (véase Anejo 4) el material presenta deformaciones plásticas. Es en este momento cuando el estado tensional viene representado por un punto sobre la superficie de fluencia definida.

La mampostería presenta un marcado carácter anisótropo (en el caso del modelo propuesto se ha aceptado la hipótesis de ortotropía) y el criterio de fluencia esta definido para un espacio isótropo. Para ello y con el fin de utilizar un criterio de fluencia definido en un espacio isótropo, la *Teoría del Mapeo de Espacios* (Anejo 3) transforma el espacio anisótropo en un espacio isótropo ficticio en el cual llevar a cabo la evolución de la superficie de fluencia al incrementar la carga.

En principio se trabajara con la hipótesis de plasticidad asociada, por lo que la superficie de fluencia $f(\tau)$ dada por el criterio de Mohr-Coulomb y la superficie de potencial plástico $g(\tau)$ coinciden en el espacio isótropo ficticio.

Para que el material plastifique se debe cumplir que:

$$f(\tau) - c_G (\kappa^P) > 0 \quad (4.30)$$

donde :

$f(\tau)$: función de fluencia de Mohr-Coulomb modificada

$c_G(\kappa^P)$: cohesión del material homogeneizado función del parámetro de daño κ^P

τ : tensor de tensiones en el espacio isótropo ficticio.

El valor de la cohesión homogeneizada se obtiene a partir de la expresión 4.13.a desarrollada en el modo 3 de deformación del modelo constitutivo. También puede obtenerse a partir de la ecuación 4.9 desarrollada en el modo 2.

$$c_G(\kappa^P) = c_L(\kappa^P) \cdot \frac{I_L}{I_G} + c_{M1}(\kappa^P) \cdot \frac{I_{M1}}{I_G} \quad (4.31)$$

El valor del parámetro de daño κ^P se supone que es contribución directa de los parámetros de daño plástico de cada uno de los componentes [Oller,1991]:

$$\kappa^P = \kappa_L^P + \kappa_{M1}^P + \kappa_{M2}^P$$

A diferencia que en el caso de los micromodelos en el caso de las técnicas de homogeneización la fisuración interpretada por el proceso plástico no está localizada en juntas o en ladrillos ya que se trata de un material homogeneizado.

Cumplida la expresión (4.30) la deformación total homogeneizada se puede expresar como suma de una componente elástica y otra plástica:

$${}_i \varepsilon_G = {}_i \varepsilon_G^e + {}_i \varepsilon_G^p \quad (4.32)$$

Las diferentes componentes de la deformación plástica se obtienen del desarrollo presentado en este capítulo.

De la expresión (4.8):

$${}_x \varepsilon_G^p = A_x^p \cdot \left({}_x \varepsilon_{M2}^p \cdot I_{M2} - {}_x \varepsilon_L^p \cdot I_L - {}_x \varepsilon_{M1}^p \cdot I_{M1} \right) + \left({}_x \varepsilon_L^p \cdot \frac{I_L}{I_G} + {}_x \varepsilon_{M1}^p \cdot \frac{I_{M1}}{I_G} \right)$$

Debido a que tomamos una superficie homogeneizada para la material homogeneizada podemos escribir la expresión anterior como:

$${}_x \varepsilon_G^p = A_x^p \cdot \left(I_{M2} - I_L - I_{M1} \right) \cdot {}_x \varepsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}} + \left(\frac{I_L}{I_G} + \frac{I_{M1}}{I_G} \right) \cdot {}_x \varepsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}$$

$${}_x \varepsilon_G^p = \left[A_x^p \cdot I_{M2} + \left(\frac{1}{I_G} - A_x^p \right) \cdot \left(I_L + I_{M1} \right) \right] \cdot {}_x \varepsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}} \quad (4.33)$$

donde:

$$A_x^p = \frac{{}_x E_L \cdot {}_x E_{M_1} \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2}}{{}_x E_{M_1} \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_L + {}_x E_L \cdot {}_x E_{M_2} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_2} + {}_x E_L \cdot {}_x E_{M_1} \cdot h_{M_2} \cdot l_{M_1}} \left(\frac{l_L}{{}_x E_L \cdot l_G} + \frac{l_{M_1}}{{}_x E_{M_1} \cdot l_G} \right)$$

De (4.12) desarrollado en el modo 2 :

$${}_y \epsilon_G^p = A_y^p \cdot \left(-{}_y \epsilon_L^p \cdot h_L + {}_y \epsilon_{M_1}^p \cdot h_{M_1} \right) + \left({}_y \epsilon_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_y \epsilon_{M_1}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} \right)$$

Tomando la misma superficie de fluencia para todas las deformaciones igual que en el caso anterior

$${}_y \epsilon_G^p = A_y^p \cdot \left(-h_L + h_{M_1} \right) \cdot {}_y \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}} + \left(\frac{h_L}{h_G} + \frac{h_{M_2}}{h_G} \right) \cdot {}_y \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}$$

$$\boxed{{}_y \epsilon_G^p = \left[A_y^p \cdot h_{M_1} + \left(\frac{1}{h_G} - A_y^p \right) \cdot h_L + \frac{h_{M_2}}{h_G} \right] \cdot {}_y \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}} \quad (4.34)$$

donde :

$$A_y^p = \frac{{}_y E_L \cdot {}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1}}{{}_y E_{M_1} \cdot l_{M_1} \cdot h_L + {}_y E_L \cdot l_L \cdot h_{M_1}} \cdot \frac{h_L}{{}_y E_L \cdot h_G}$$

De (4.17) desarrollado en el modo 3 :

$${}_{xy} \gamma_G^p = A_\gamma^p \cdot \left({}_{xy} \gamma_L^p - {}_{xy} \gamma_{M_1}^p \right) + {}_{xy} \gamma_L^p \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy} \gamma_{M_2}^p \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G}$$

Debido a que tomamos una superficie homogeneizada para la material homogeneizada podemos escribir la expresión anterior como :

(4.35)

$${}_{xy} \gamma_G^p = A_\gamma^p \cdot \left({}_{xy} \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}} - {}_{xy} \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}} \right) + {}_{xy} \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}} \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_{xy} \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}} \cdot \frac{h_{M2}}{h_G}$$

$${}_{xy} \gamma_G^p = \left(\frac{h_L + h_{M2}}{h_G} \right) \cdot {}_{xy} \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}}$$

donde:

$$A_\gamma^p = G_{M1} \cdot \frac{I_{M1}}{I_G} \cdot \left(\frac{G_L \cdot I_G}{G_L \cdot I_L + G_{M1} \cdot I_{M1}} \right) \cdot \frac{h_L}{G_L \cdot h_G}$$

De la expresión (4.19) obtenemos directamente:

$${}_z \epsilon_G^p = \frac{\left({}_{xz} v_G + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yz} v_G \right) \cdot {}_x \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}} + \left({}_{yz} v_G + {}_{xz} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right) \cdot {}_y \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}}{\left(-1 + {}_{xy} v_G \cdot {}_{yx} v_G \right)} \quad (4.36)$$

A partir de las expresiones (4.33), (4.34), (4.35) y (4.36) obtenemos el vector de deformaciones plásticas en el caso del modelo de mampostería en función del vector calculado a partir de la teoría de Mohr-Coulomb:

$$\vec{\epsilon}_G^p = \mathbf{M}^p \cdot \vec{\epsilon}^p \Big|_{\text{Mohr}} \quad (4.37)$$

donde:

$$\vec{\epsilon}_G^p = \left\{ {}_x \epsilon_G^p, {}_y \epsilon_G^p, {}_{xy} \gamma_G^p, \epsilon_G^p \right\}^T$$

$$\vec{\epsilon}^p \Big|_{\text{Mohr}} = \left\{ {}_x \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}, {}_y \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}, {}_{xy} \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}}, \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}} \right\}^T$$

$$\mathbf{M}^p = \begin{bmatrix} \left[A_x^p \cdot I_{M2} + \left(\frac{1}{I_G} - A_x^p \right) \cdot (I_L + I_{M1}) \right] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left[A_y^p \cdot h_{M1} + \left(\frac{1}{h_G} - A_y^p \right) \cdot h_L + \frac{h_{M2}}{h_G} \right] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h_L + h_{M2}}{h_G} & 0 \\ \frac{{}_{xz} v + {}_{xy} v \cdot {}_{yz} v}{-1 + {}_{xy} v \cdot {}_{yx} v} & \frac{{}_{yz} v + {}_{xz} v \cdot {}_{yx} v}{-1 + {}_{xy} v \cdot {}_{yx} v} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

El vector de flujo plástico se obtiene como:

$$\dot{\bar{g}}_G = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_G^p}{\dot{\lambda}} \quad (4.38)$$

donde :

$$\dot{\lambda} = \frac{f(\tau) - c_G}{H + g_G : C : f_G}$$

Siendo f_G la superficie de Mohr-Coulomb y g_G la superficie de potencial plástico del material homogeneizado.

De (4.37) y (4.38) obtenemos:

$$\dot{\bar{g}}_G = \mathbf{M}^p \cdot \dot{\bar{g}}^p \Big|_{\text{Mohr}}$$

donde:

$$\dot{\bar{g}}_G = \left\{ \frac{x \epsilon_G^p}{\dot{\lambda}}, \frac{y \epsilon_G^p}{\dot{\lambda}}, \frac{xy \gamma_G^p}{\dot{\lambda}}, \frac{\epsilon_G^p}{\dot{\lambda}} \right\}^T$$

$$\dot{\bar{g}}^p \Big|_{\text{Mohr}} = \left\{ \frac{x \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}}{\dot{\lambda}}, \frac{y \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}}{\dot{\lambda}}, \frac{xy \gamma_G^p \Big|_{\text{Mohr}}}{\dot{\lambda}}, \frac{z \epsilon_G^p \Big|_{\text{Mohr}}}{\dot{\lambda}} \right\}^T$$

Por lo que se está forzando al problema a que no sea de plasticidad asociada, aunque tratemos el problema con criterios de fluencia como el de Mohr-Coulomb.

CAPÍTULO 5

CALIBRACIÓN DEL MODELO Y RESULTADOS NUMÉRICOS

Para la implementación numérica del modelo se ha modificado el código fuente del programa PLCD2 [Oller, Car, Luccioni, 1996] de forma que permita el cálculo de estructuras de mampostería mediante *Modelo Constitutivo Homogeneizado*, según las pautas desarrolladas en el capítulo 3 del presente trabajo. Este programa permite resolver mediante el *Método de los Elementos Finitos*:

- Problemas con no-linealidad geométrica y constitutiva.
- Problema de fractura y localización de deformaciones inelásticas.
- Problemas de materiales compuestos mediante la teoría de mezclas.
- Problemas de anisotropía general mediante la teoría de mapeo de espacios.

Paralelamente se ha desarrollado un módulo externo de homogeneización de variables (HOMOGENEIZACION.FOR, Véase Anejo 5) con el fin de tratar los parámetros mecánicos de la mampostería. Homogeneizados dichos parámetros se obtiene el fichero con los datos a introducir en el programa PLCD2.

Los ejemplos que se desarrollaran en este capítulo han sido generados mediante el programa de generación de malla GID [Ribó, 1997] y posteriormente tratados para su implementación en el programa. Así mismo el postproceso de resultados ha sido llevado a cabo mediante el programa FLAVIA2D [CIMNE, 1996].

Las fases de cálculo realizados han seguido el siguiente proceso:

- Verificación del modelo de homogeneización.
- Verificación de la anisotropía.
- Calibración del modelo.
- Ejemplos.

5.1.- VERIFICACIÓN DEL MODELO DE HOMOGENEIZACIÓN.

Para la verificación de que el modelo constitutivo homogeneizado realmente se está comportando como tal, se ha llevado a cabo un análisis elastoplástico de tres muros de iguales dimensiones. El primero de ellos tiene como propiedades mecánicas las características del ladrillo, el segundo las de mortero y el tercero de mampostería (ladrillos y juntas de mortero). Las propiedades de los materiales utilizados pueden verse en la Tabla 5.1 y han sido a partir de los datos de los materiales componentes del ensayo de Page (1978) y homogeneizados mediante el modelo de homogeneización desarrollado en este trabajo.

Parámetro	Ladrillo	Mortero
${}_xE$ [kp/cm ²]	59200	16949
${}_yE$ [kp/cm ²]	59200	16949
${}_zE$ [kp/cm ²]	75500	16949
ν	0.167	0.21
${}_{xy}G$ [kp/cm ²]	34543.2	10254.1
${}_{yz}G$ [kp/cm ²]	39009.9	10254.1
${}_{xz}G$ [kp/cm ²]	39009.9	10254.1
σ_H [kp/cm ²]	365	140
G_f [kp/cm]	103.68	4.16
G_c [kp/cm]	296.16	192
ϕ [°]	32	32

Tabla 5.1. Propiedades mecánicas de los materiales componentes

El muro tiene unas dimensiones de 100x100x11.5 cm³. Los ladrillos se han escogido de dimensiones estándares en la construcción de 24x7x11.5 cm³. Las juntas de mortero tienen un espesor de 1cm y están orientadas paralelas a los ejes coordenados de del sistema de referencia adoptado, Figura 5.1.

Para el análisis estructural del muro de mampostería se ha discretizado mediante una malla formada por elementos cuadrilateros de 4 nodos con cuatro puntos de Gauss.

La comprobación se ha hecho para estados de carga de compresión uniaxial, compresión biaxial y corte puro, analizando los resultados en el punto de Gauss 1 del elemento de la esquina inferior izquierda, ya que es éste el más solicitado. La implementación de la carga en el panel se ha hecho mediante desplazamientos impuestos sobre las caras de los elementos con el fin de imponer iguales deformaciones a los nudos de una misma cara. El proceso de cálculo a consistido en la sucesiva aplicación de escalones de carga de forma que no haya distorsión de resultados provocado por el paso de régimen elástico a régimen plástico de forma brusca.

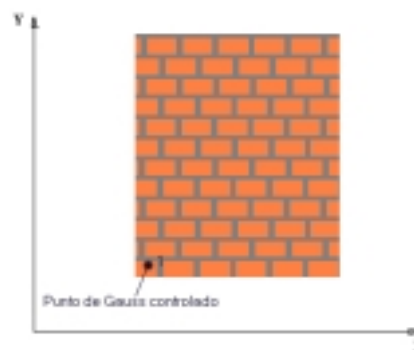


Figura 5.1 Orientación de las juntas respecto a los ejes del sistema de referencia
Punto de Gauss controlado.

A continuación se presentan las curvas obtenidas por el programa para los distintos casos de carga. En todos los casos las medidas corresponden al punto de Gauss del primer elemento de la malla, Figura 5.1.

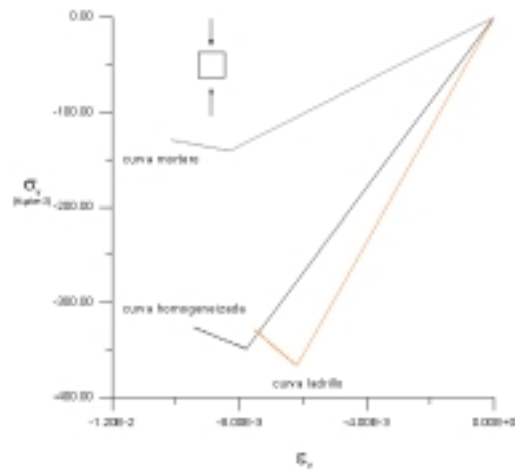


Figura 5.2. Ensayo de compresión uniaxial. Curva $\sigma_x - \epsilon_x$.

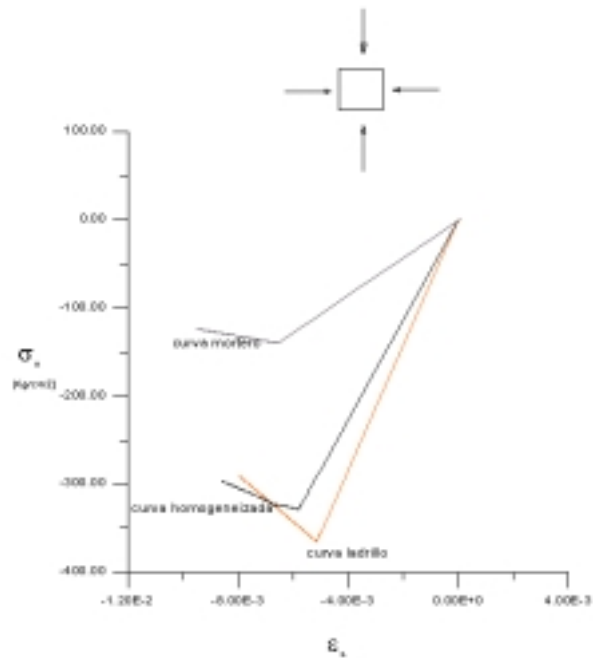


Figura 5.3. Ensayo de compresión biaxial. Curva $\sigma_x - \epsilon_x$.

De las curvas $\sigma - \epsilon$ (Figuras 5.2 a 5.5) se puede observar que realmente el modelo de homogeneización está funcionando correctamente. La respuesta se puede observar que a nivel de resistencia está próxima a la del ladrillo pero con una mayor ductilidad en su comportamiento debida a la contribución del mortero de las juntas. Esta ductilidad en la respuesta en los casos de compresión, tanto uniaxial como biaxial, se transforma en una aparición de la tensión última a mayores deformaciones. La respuesta post-pico es sensiblemente más tendida que en el caso del ladrillo sólo. En la realidad, este efecto, se manifiesta en una absorción de la carga por parte del mortero cuando el ladrillo a fisurado, perdiendo sus características geométricas y por lo tanto disminuyendo sus características resistentes (Ablandamiento).

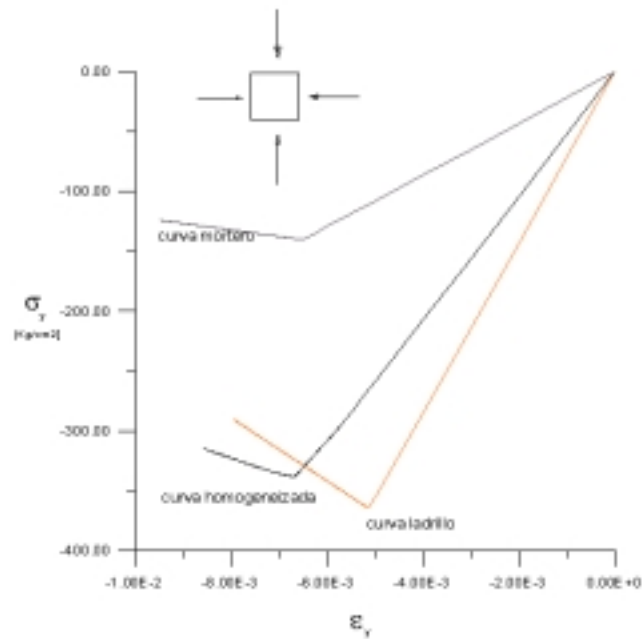


Figura 5.4. Ensayo de compresión biaxial. Curva $\sigma_y-\epsilon_y$.

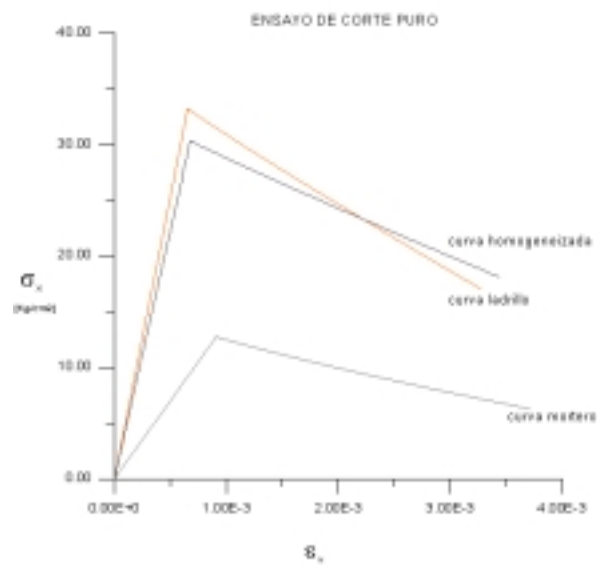


Figura 5.5. Ensayo de corte puro. Curva $\sigma_x-\epsilon_x$.

En el caso de corte puro estas diferencias son menos marcadas ya que ante deformaciones impuestas debidas a corte ambos materiales (ladrillo y mortero) presentan similares ordenes de magnitud en cuanto a la deformación última.

5.2.- VERIFICACIÓN DE LA ANISOTROPÍA.

La mampostería tiene un marcado comportamiento anisótropo. Este comportamiento anisótropo se manifiesta tanto en las diferencias entre parámetros mecánicos como en los resistentes.

Para la verificación del comportamiento anisótropo del modelo constitutivo se ha analizado el panel ensayado en el apartado anterior. El objetivo es encontrar el límite elástico (comienzo de la plastificación) para diferentes hipótesis de carga. Al igual que en el apartado 5.1. en este ensayo se ha introducido la carga en forma de desplazamientos impuestos. Este ensayo permite visualizar el criterio de fluencia implícito que contiene el modelo que aquí se presenta.

Las juntas horizontales de mortero se han orientado de forma que sean paralelas al eje X del sistema de referencia global adoptado. El ensayo se ha realizado discretizando el panel con 4 elementos cuadriláteros de 4 nodos con malla estructurada de forma que los lados de los elementos son paralelos a las juntas de mortero, tanto horizontales como verticales. Las restricciones en los nudos dependen de la hipótesis que establezcamos, Figuras 5.6 a 5.8.

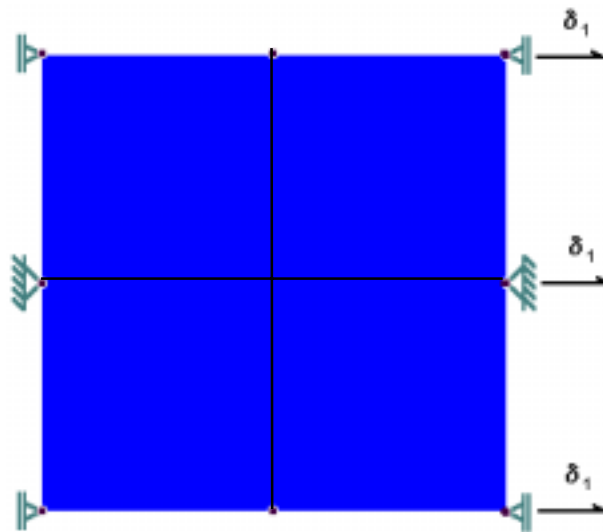


Figura 5.6. Malla utilizada para carga uniaxial en dirección X

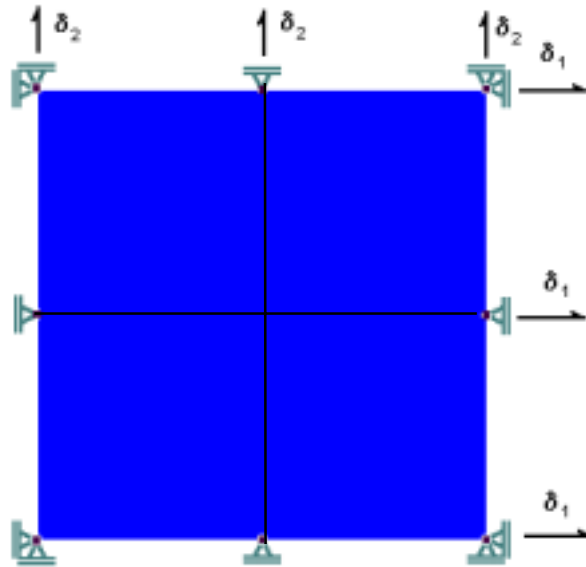


Figura 5.7. Malla utilizada para carga biaxial

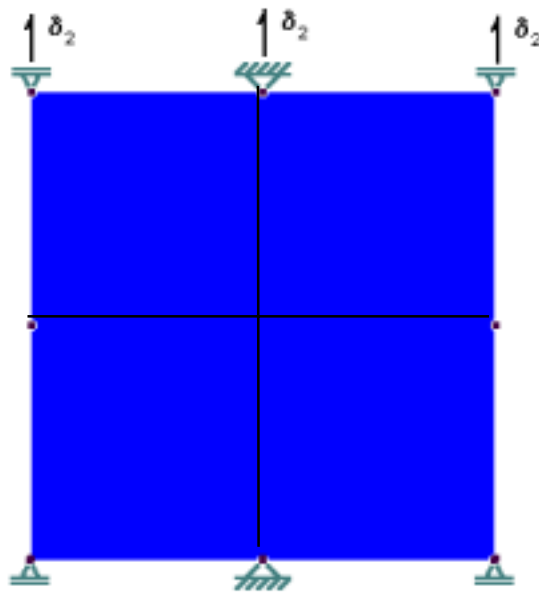


Figura 5.8. Malla utilizada para carga uniaxial en dirección Y

La determinación del límite elástico con precisión es un proceso que requiere pasos pequeños. Las técnicas que permiten esta determinación pueden ser de dos tipos :

- Incrementar la carga en pasos pequeños.
- Utilizar la técnica de “Arc-Lenght” (longitud de arco) [Oller,1991], avanzando por la curva carga-desplazamiento limitando el desplazamiento máximo.

El segundo de estos métodos es más veloz, ya que en el primero se deben hacer correcciones paulatinas con el fin de corregir el paso de carga que se le debe dar.

Las hipótesis de carga (en desplazamientos) recorren todo el abanico de posibilidades, desde compresión uniaxial a tracción biaxial. Éstas pueden verse en la Tabla 5.2.

Hipótesis	δ_1	δ_2	σ_x [kg/cm ²]	σ_y [kg/cm ²]
1	-1	0	-329.39	-0.1757
2	1	0	32.8266	0.005386
3	2	1	32.8564	17.6795
4	3	1	32.8564	13.2805
5	0	-1	-0.0034	347.333
6	0	1	0.000023829	34.731
7	1	2	22.4538	34.7317
8	1	3	16.7639	34.7317
9	1	1	32.8564	29.9337
10	-1	-1	-328.54	-299.334
11	-2	-1	-328.564	-176.593
12	-3	-1	-328.56	-132.648
13	-1	-2	-224.487	-347.314
14	-1	-3	-167.639	-347.314
15	1	-1	30.3162	-26.852
16	2	-1	31.8014	-11.1525
17	3	-1	32.2822	-6.06113
18	1	-2	27.1735	-60.0723
19	1	-3	23.7889	-95.8512
20	-1	1	-35.0382	31.0279
21	-2	1	-76.1436	26.6827
22	-3	1	-118.618	22.1928
23	-1	2	-15.006	33.1454
24	-1	3	-8.401	33.8436
25	-20	-1	-328.56	-53.8913
26	-3	-2	-328.563	-218.929
27	-1	-20	-65.2322	-347.313
28	-2	-3	-279.006	-347.315

Tabla 5.2. Valores de carga (desplazamientos relativos) y valores de las tensiones en el punto donde comienza la plastificación.

Si representamos estos valores en la gráfica $\sigma_x - \sigma_y$ y dibujamos la envolvente de todos los puntos, obtenemos la forma que presenta la típica superficie de Mohr-Coulomb con la particularidad que no es simétrica respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Esto es debido a la anisotropía de la mampostería, observando que tiene mayor resistencia en la dirección Y (vertical) que coincide con la dirección típica de trabajo de los muros de carga de mampostería.

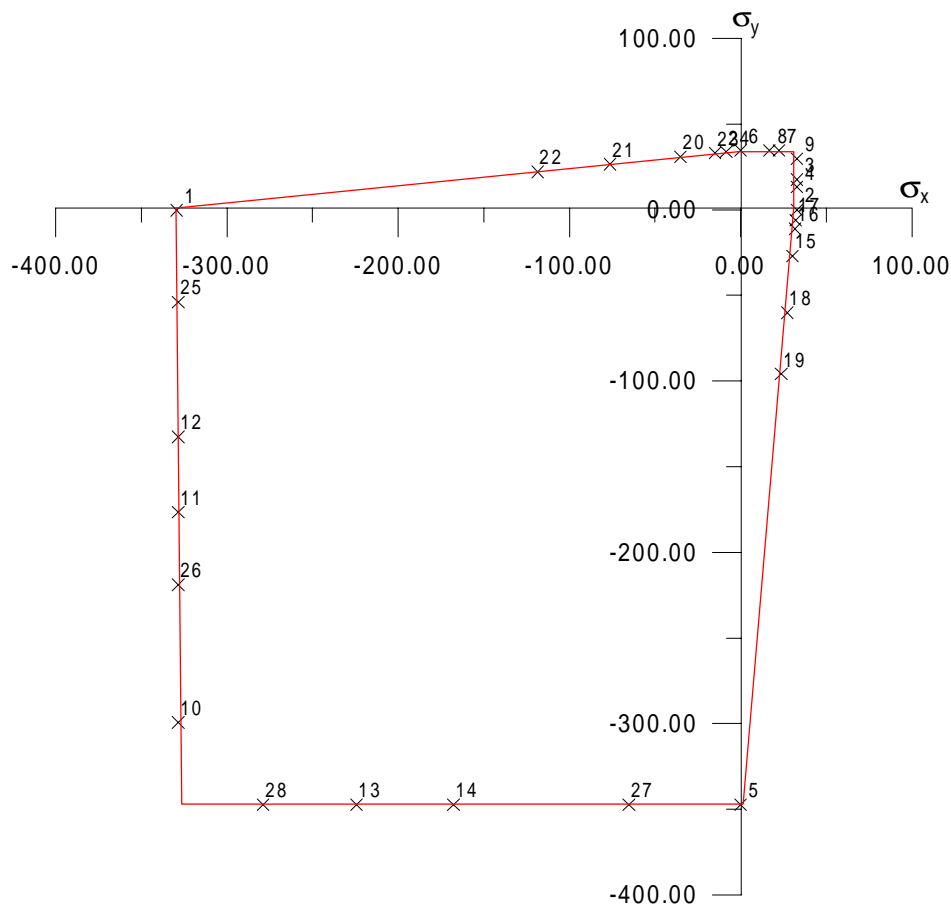


Figura 5.9. Superficie de fluencia obtenida por el modelo constitutivo homogeneizado.

5.3.- CALIBRACIÓN DEL MODELO.

Para la calibración del modelo se ha utilizado los resultados experimentales de Page (1978). Este ensayo es uno de los más utilizados para calibración de modelos numéricos en mampostería. Lourenço (1992) también utilizó este ensayo para calibrar su modelo, por lo que los resultados obtenidos en este trabajo, si bien se contrastan con el modelo experimental también se tomará como referencia el modelo numérico de Lourenço.

Las dimensiones del panel son de $75.7 \times 45.7 \times 5.4 \text{ cm}^3$, utilizando ladrillos de $12.2 \times 3.7 \times 5.4 \text{ cm}^3$ siendo las juntas de un espesor de 0.5 cm. Las características mecánicas de los materiales utilizados se resumen en la Tabla 5.3. El ensayo obtiene valores de tensiones y deformaciones verticales en una línea de galgas dispuestas a 18.65 cm del paramento inferior. La carga se introduce de forma puntual (P) con un gato que se encarga de repartir una viga de acero en la zona central y con una longitud de reparto de 38.1 cm (véase Figura 3.8 del capítulo 3).

Propiedad	Valor
• Módulo de elasticidad para carga paralela a la base de la placa de carga del ladrillo, E_x (en kp/cm^2)	59200
• Modulo de elasticidad para carga perpendicular a la base de la placa de carga del ladrillo, E_y (en kp/cm^2)	75500
• E_y/ E_x	1.35
• Coeficiente de Poisson en el plano	0.167
• Resistencia a compresión del ladrillo (en kp/cm^2)	362.5
• Resistencia a compresión del mortero (en kp/cm^2)	32
• Ángulo de rozamiento interno	30°
• Módulo de elasticidad para el mortero (en kp/cm^2)	8041

Tabla 5.3. Parámetros mecánicos de la mampostería.

Debido a que en el ensayo no existían registros de los valores de las energías de fractura y aplastamiento de los materiales, se han adoptado como valores para la de fractura de mortero y ladrillo $8.32 \text{ kp}/\text{cm}$ y $207.36 \text{ kp}/\text{cm}$ respectivamente. En el caso de la energía de aplastamiento se toman $384 \text{ kp}/\text{cm}$ para mortero y $592 \text{ kp}/\text{cm}$ para ladrillo. Estos valores se han tomado altos para mejorar la convergencia de la ecuación constitutiva para niveles altos de tensión. El objetivo fundamental no es obtener toda la respuesta post-pico, y por ello se considera como aceptable la adaptación de estos valores de energía.

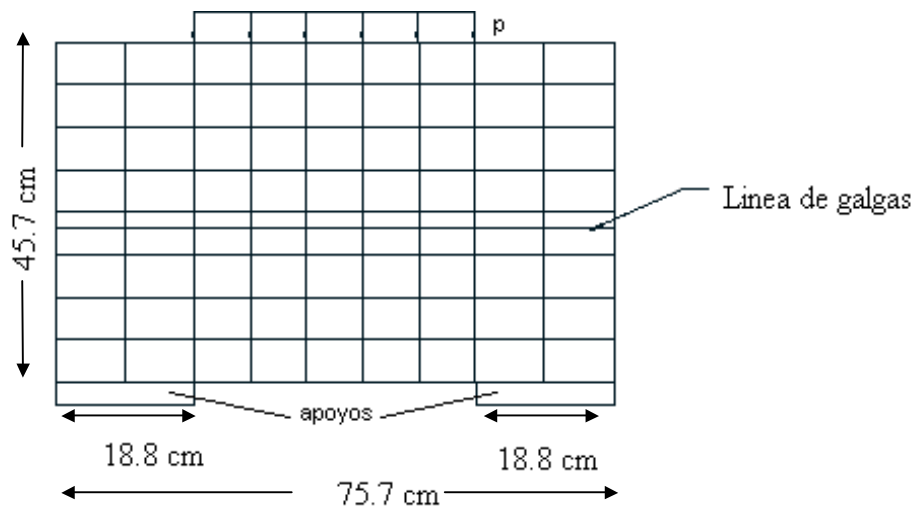
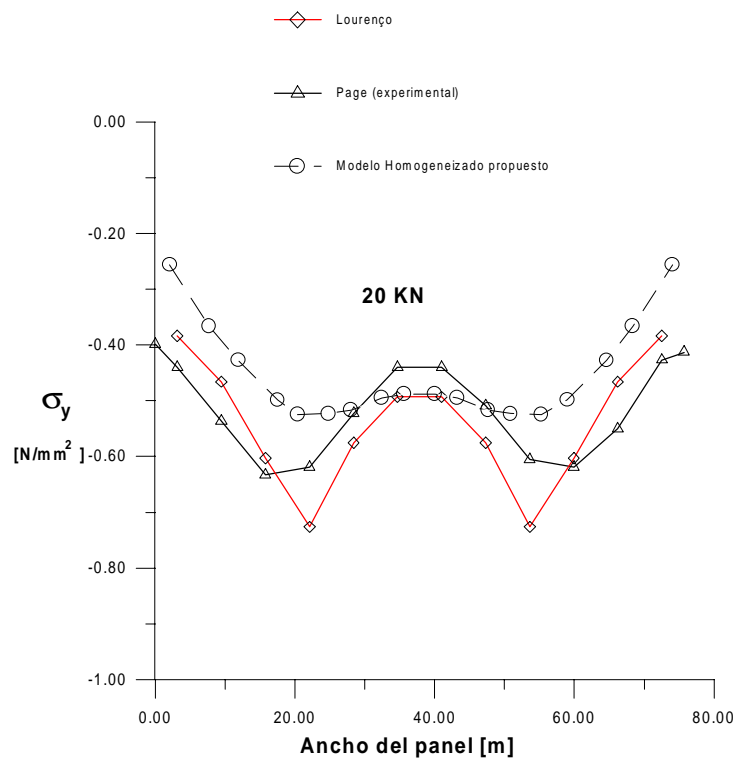


Figura 5.10. Esquema geométrico del ensayo de Page.

El ensayo se ha llevado para cargas de 20 KN. , 40 KN. , 60 KN y se han obtenido los resultados que aparecen en la Figura 5.11. y 5.12. Las galgas coinciden con la posición de los puntos de Gauss superiores de los elementos de la franja intermedia por lo que los resultados controlados han sido tomados para dichos puntos de Gauss.

La malla generada tiene 72 elementos cuadriláteros de 4 nodos y 4 puntos de Gauss por elemento. El no utilizar mayor número de elementos tiene por objetivo observar la respuesta del modelo ante mallas de pequeño número de elementos, ya que hacer mallados tupidos no destacaría las ventajas respecto a micromodelos simplificados donde juntas y ladrillos están discretizados por elementos distintos. El provecho de este tipo de homogeneización es la de poder ahorrar tiempo computacional y simplificar el proceso de generación de malla.

A continuación se establece una comparación entre el estado tensional de los tres ensayos (Page,1978 ; Lourenço,1996 ; Modelo homogeneizado) a lo largo de la línea de galgas. Se comienza a incrementar la carga paulatinamente, recogiéndose los resultados para valores característicos.



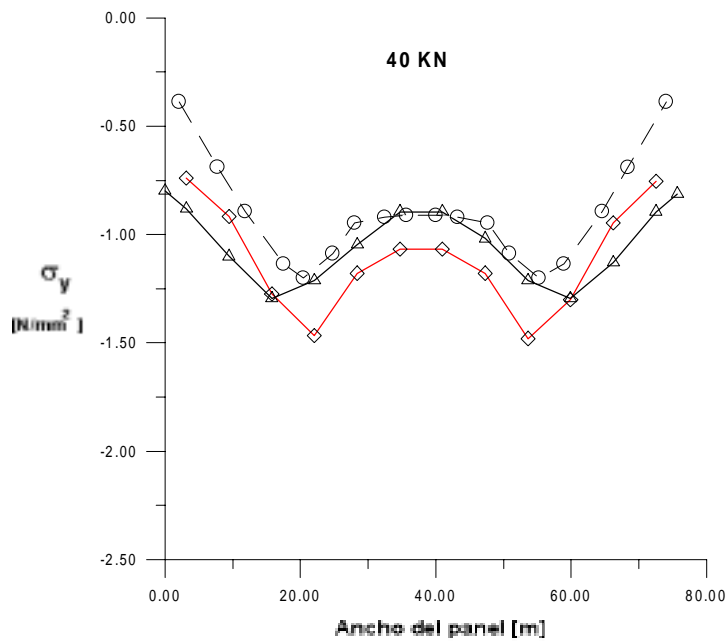


Figura 5.11. Curvas tensión-deformación para 20 KN y 40 KN.

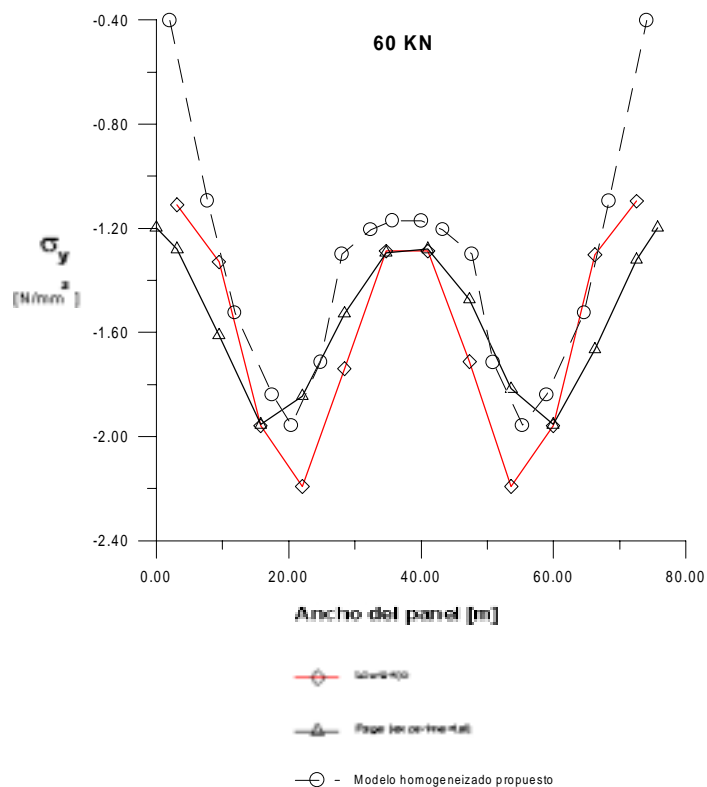


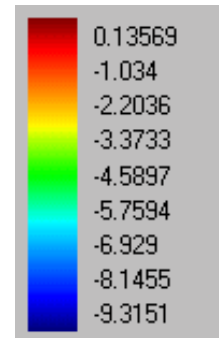
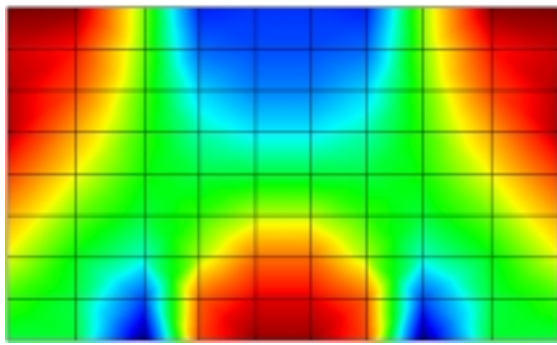
Figura 5.12. Curva tensión-deformación para 60 KN.

De las curvas podemos extraer que la aproximación es buena a excepción de los extremos que puede ser motivado a efectos locales en la zona de medida (experimental) o que el punto de Gauss donde se ha tomado la medida no coincida exactamente con la posición exacta de la galga ya que no se tiene registro exacto de su posición. También la

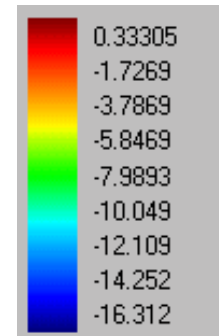
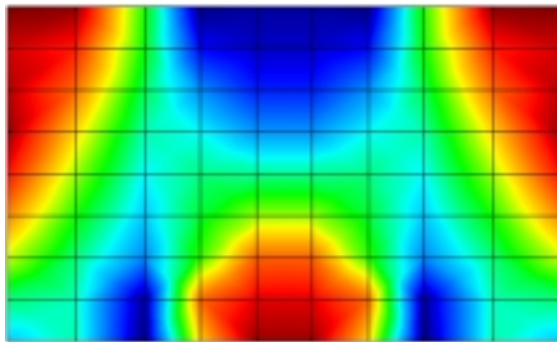
falta de discretización en los extremos puede producir este efecto de pobre aproximación.

Otra de las conclusiones que se obtienen de la valoración de las gráficas es que el comportamiento es mejor para niveles altos de tensión una vez superado el límite elástico, debido a que la gráfica $P-\delta$ de la que se obtiene la energía de fisuración y aplastamiento se ha tomado como aproximación una ley lineal mientras que la real tiene una ley exponencial decreciente tal como se indica en la Figura 5.13.

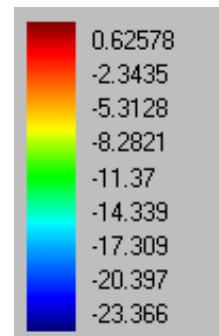
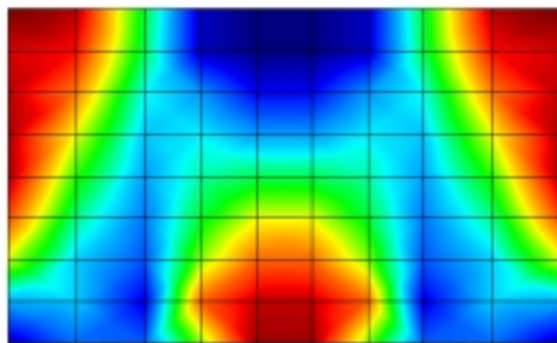
A continuación se presentan resultados de postproceso gráfico con algunos de los resultados obtenidos para el ensayo de Page a los diferentes niveles de carga. Las unidades de los valores que aparecen en las leyendas están expresadas en kp/cm^2 .



20 KN

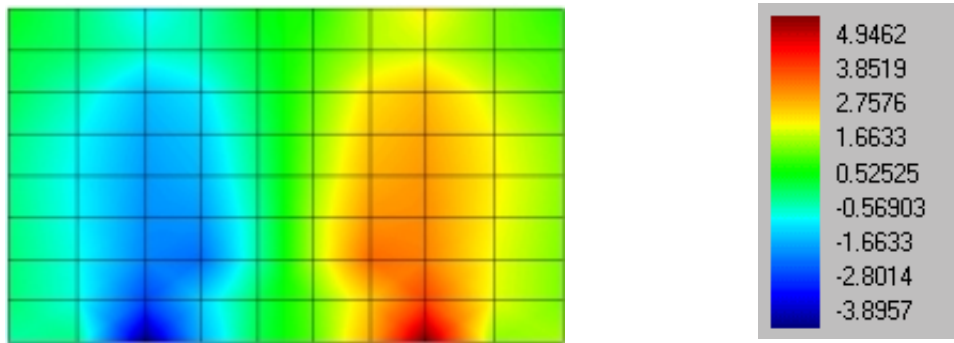


40 KN

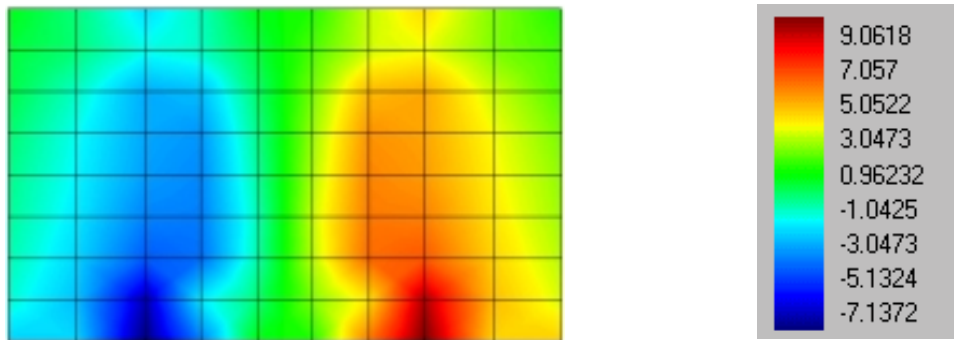


60 KN

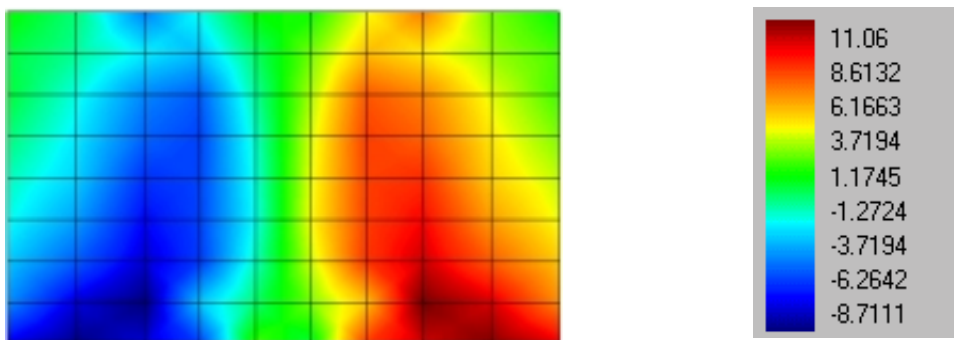
Figura 5.13. Tensiones principales menores.



20 KN

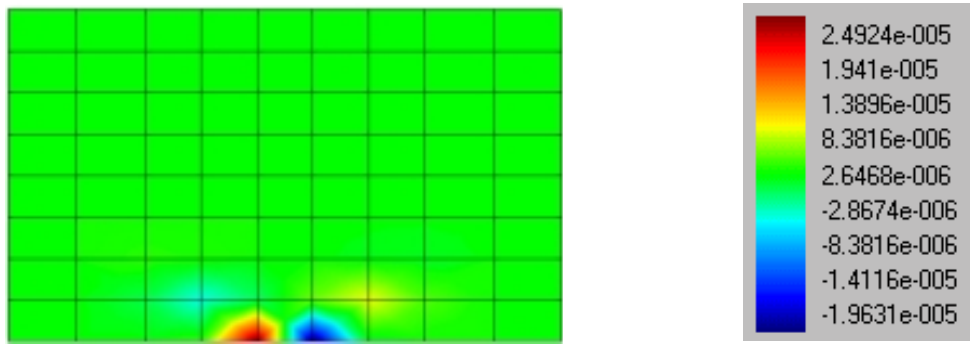


40 KN

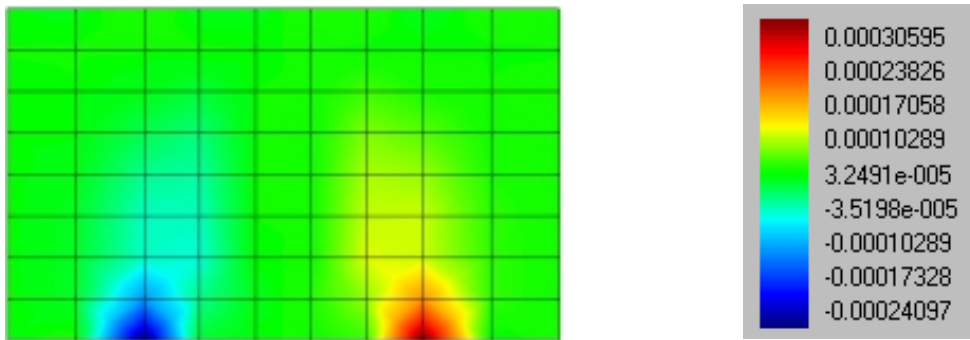


60 KN

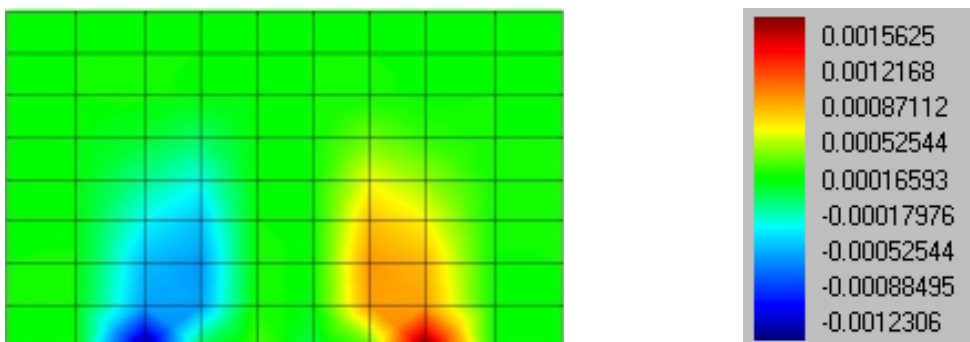
Figura 5.14. Tensiones tangenciales.



20 KN



40 KN



60 KN

Figura 5.15. Deformaciones plásticas debidas a cortante.

De las gráficas se puede sacar como resultado que la fisuración predominante en el muro de Page es debida a dos fenómenos acoplados, por una parte al mecanismo de cortante que se forma en las zonas interiores de los apoyos rígidos, los cuales al actuar la carga actúa como si fuera un cuchillo en la base. Por otra parte un segundo mecanismo de tracción en la zona central inferior del muro que tiende a abrir las juntas fisuradas por el mecanismo de cortante así como una fisuración y deslizamiento de las juntas horizontales de la misma zona. Secundariamente en las esquinas superiores del muro se fisuran por tracción predominante desgarrando las juntas horizontales y abriéndolas.

En la Figura 5.16 se puede observar el mecanismo de fractura formado en el ensayo y su comparación con la obtenida en este trabajo (Figura 5.17).

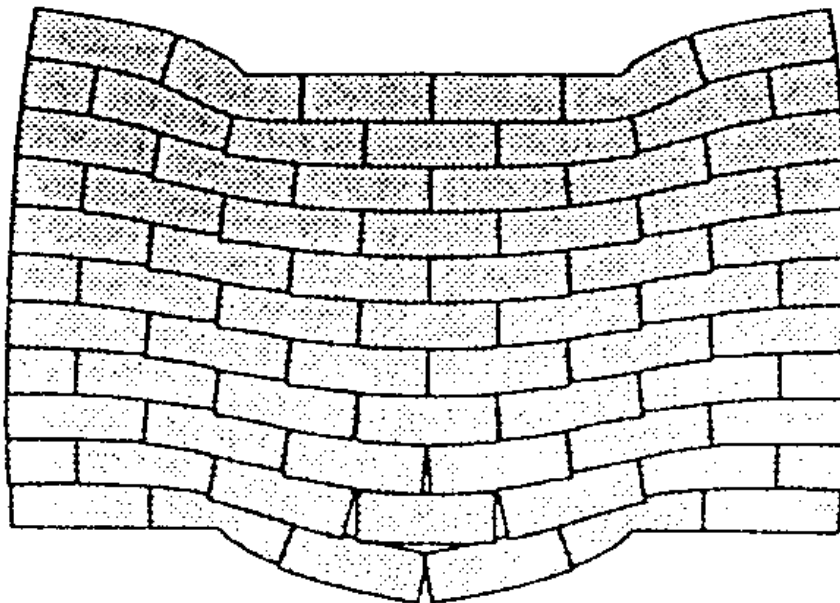


Figura 5.16. Muro de Page deformado

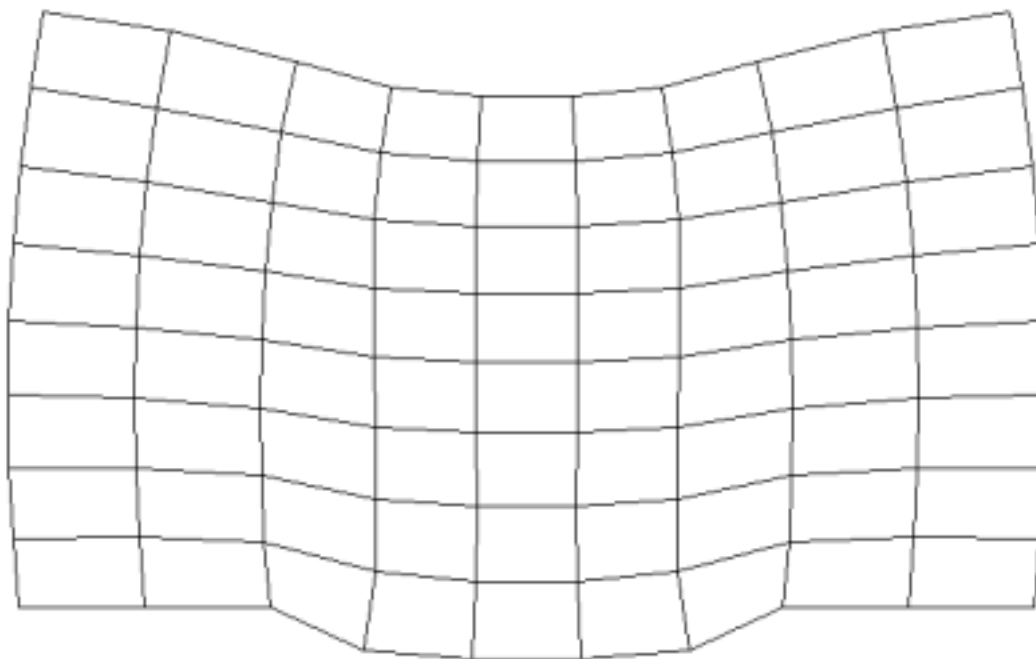


Figura 5.17. Deformada obtenida con el modelo constitutivo propuesto.

5.4. EJEMPLOS DE APLICACIÓN INGENIERIL.

Como ejemplos de aplicación ingenieril se ha escogido una fachada de un edificio de planta baja más primera planta al cual se le supone que le entrega carga un forjado situado en la primera planta. La fachada tiene orificios generados por tres ventanas situadas en la primera planta y dos ventanas y una puerta en la planta baja. Las dimensiones de la fachada son de $7 \times 5 \text{ m}^2$ y los detalles interiores se indican en el croquis de la Figura 5.18. Las propiedades mecánicas se han escogido las mismas que las del test realizado en el apartado 5.1 de este capítulo.

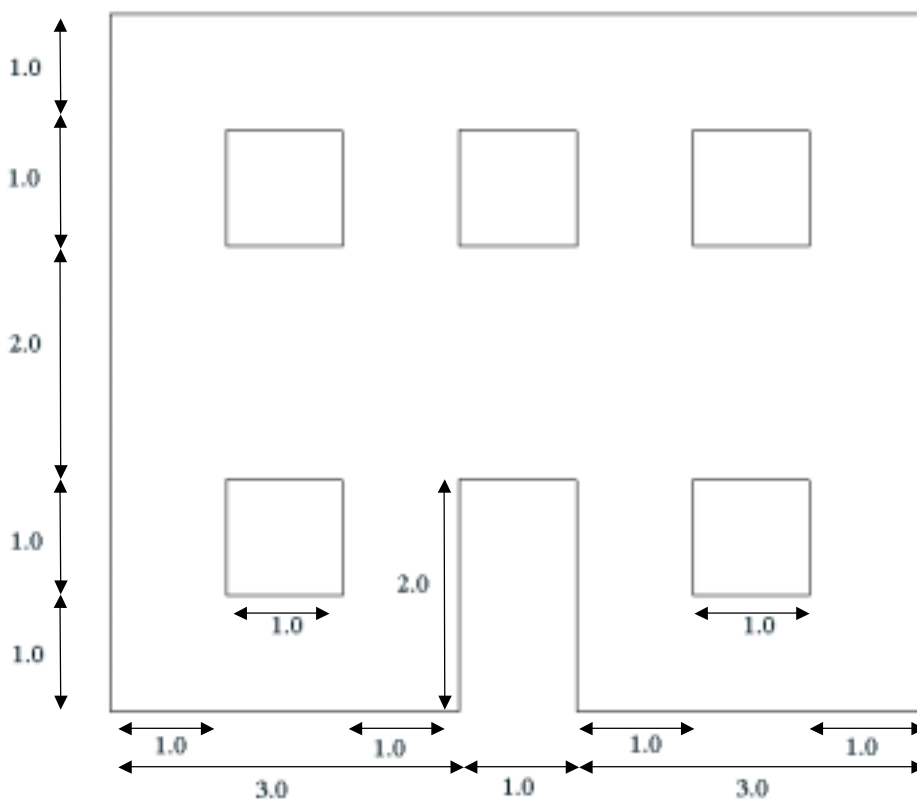


Figura 5.18. Dimensiones de los detalles interiores.

Las hipótesis de carga son:

- **Hipótesis 1:** forjado y coronación se carga con igual carga hasta llegar a las 7 Ton. Se prescriben los movimientos de la base y las paredes laterales.

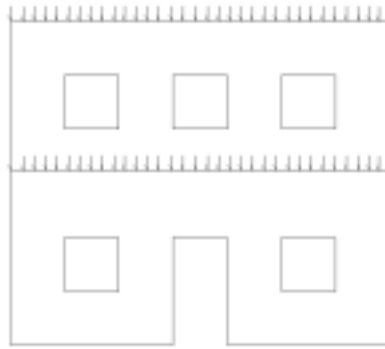


Figura 5.19. Hipótesis de carga 1.

- **Hipótesis 2:** Hipótesis 1+ carga lateral de igual magnitud que en el caso de la Hipótesis 1. Se prescriben los movimientos de la base.

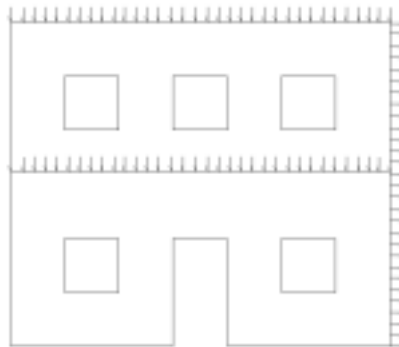


Figura 5.20. Hipótesis de carga 2.

- **Hipótesis 3:** Carga tangencial en coronación y forjado con sentidos opuestos. Se prescriben los movimientos de la base.



Figura 5.21. Hipótesis de carga 3.

Para todas las hipótesis se ha utilizado una malla de 560 elementos (equivalentes a 20000 ladrillos) y 656 nodos. Los elementos utilizados son cuadriláteros de 4 nodos con 4 puntos de Gauss formando malla estructurada.

A continuación se presentan los resultados para las diferentes hipótesis de carga.

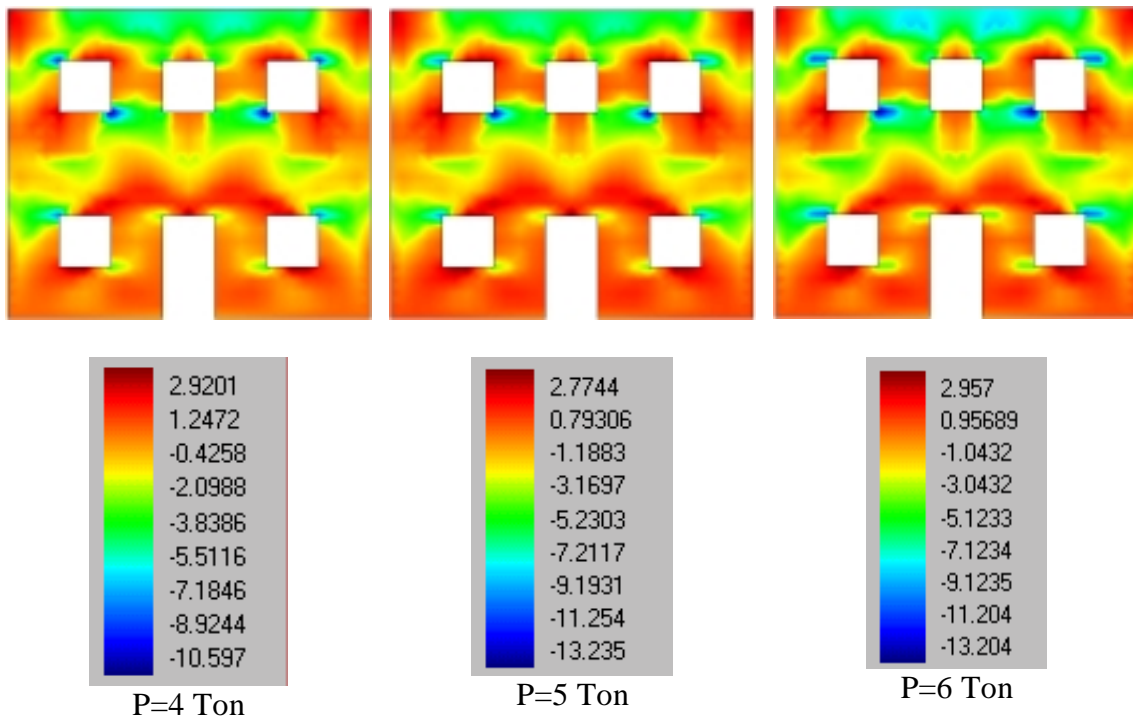
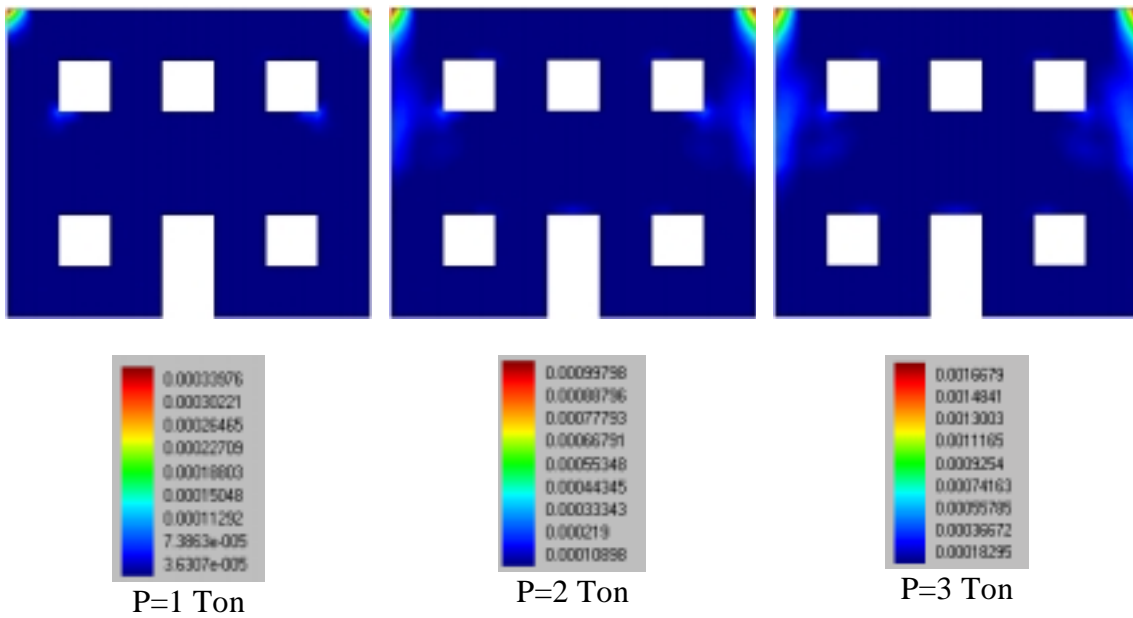


Figura 5.23. Tensiones principales mayores σ_1 .



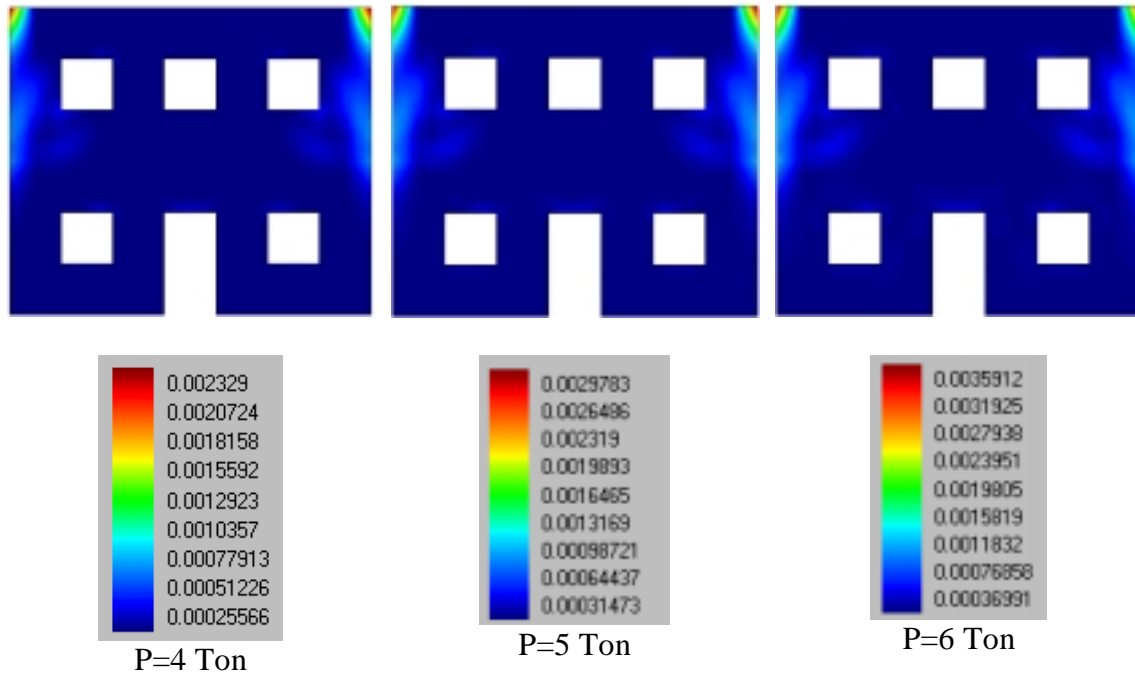
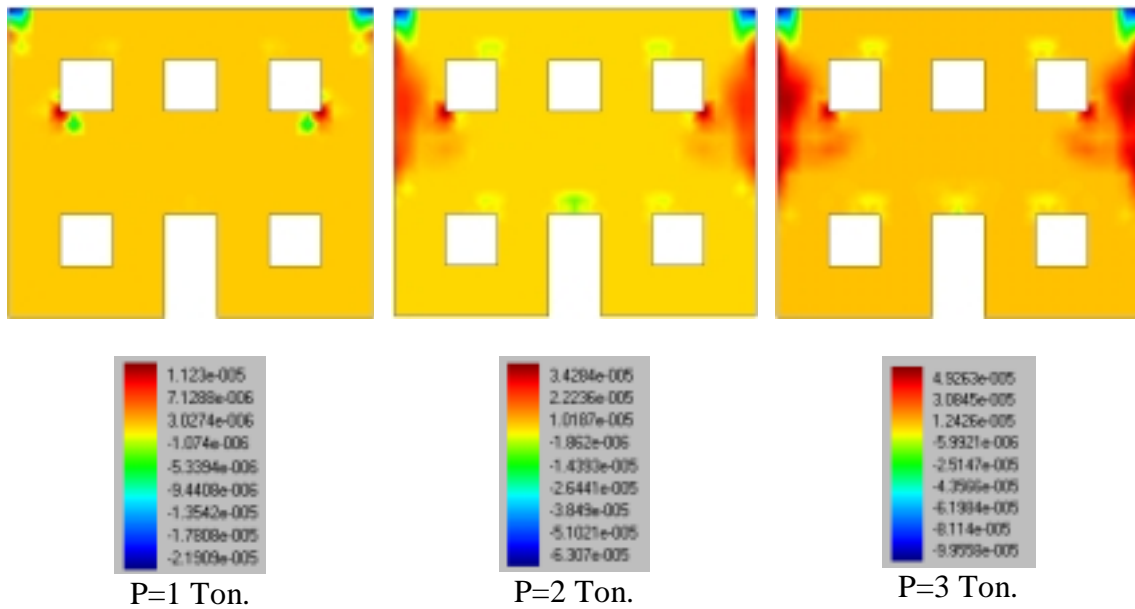


Figura 5.24. Deformaciones plásticas en la dirección de la tensión principal mayor.



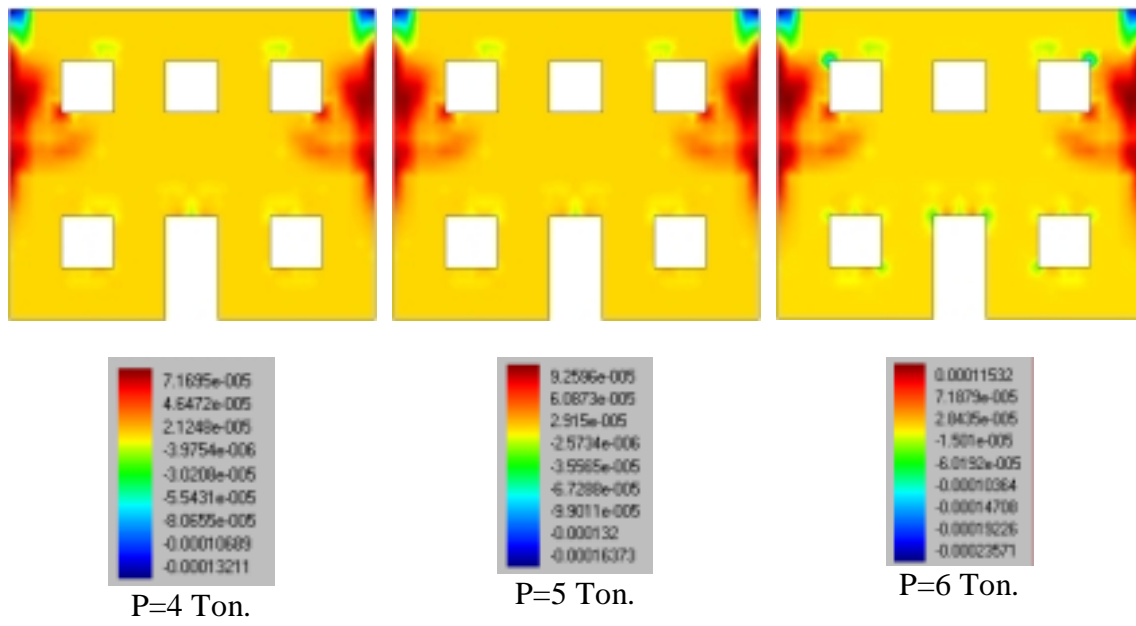


Figura 5.25. Deformaciones plásticas en la dirección de la tensión principal menor.

5.4.2. Resultados de la hipótesis de carga 2.

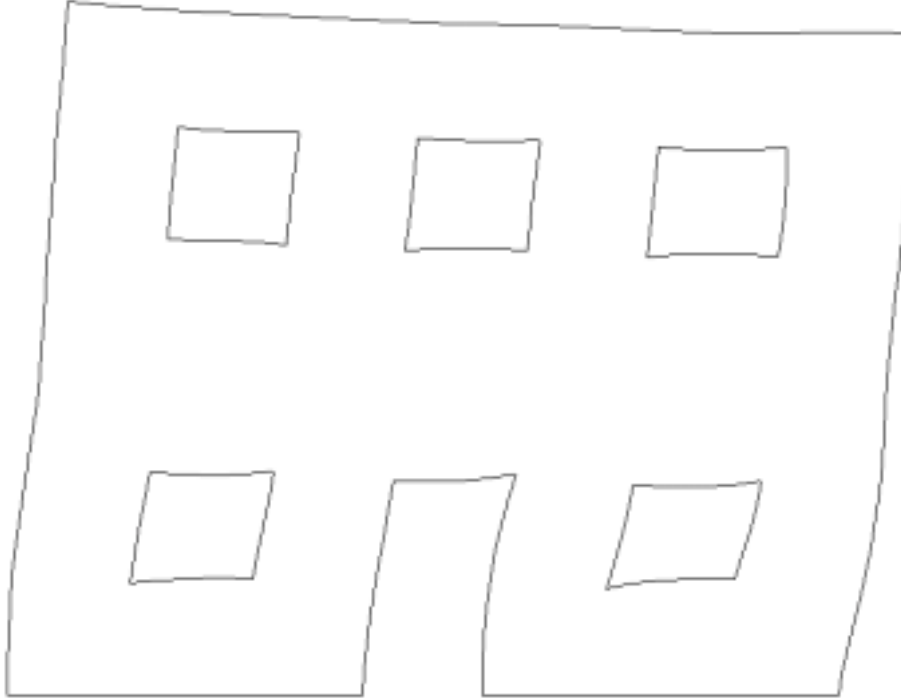


Figura 5.25. Deformada

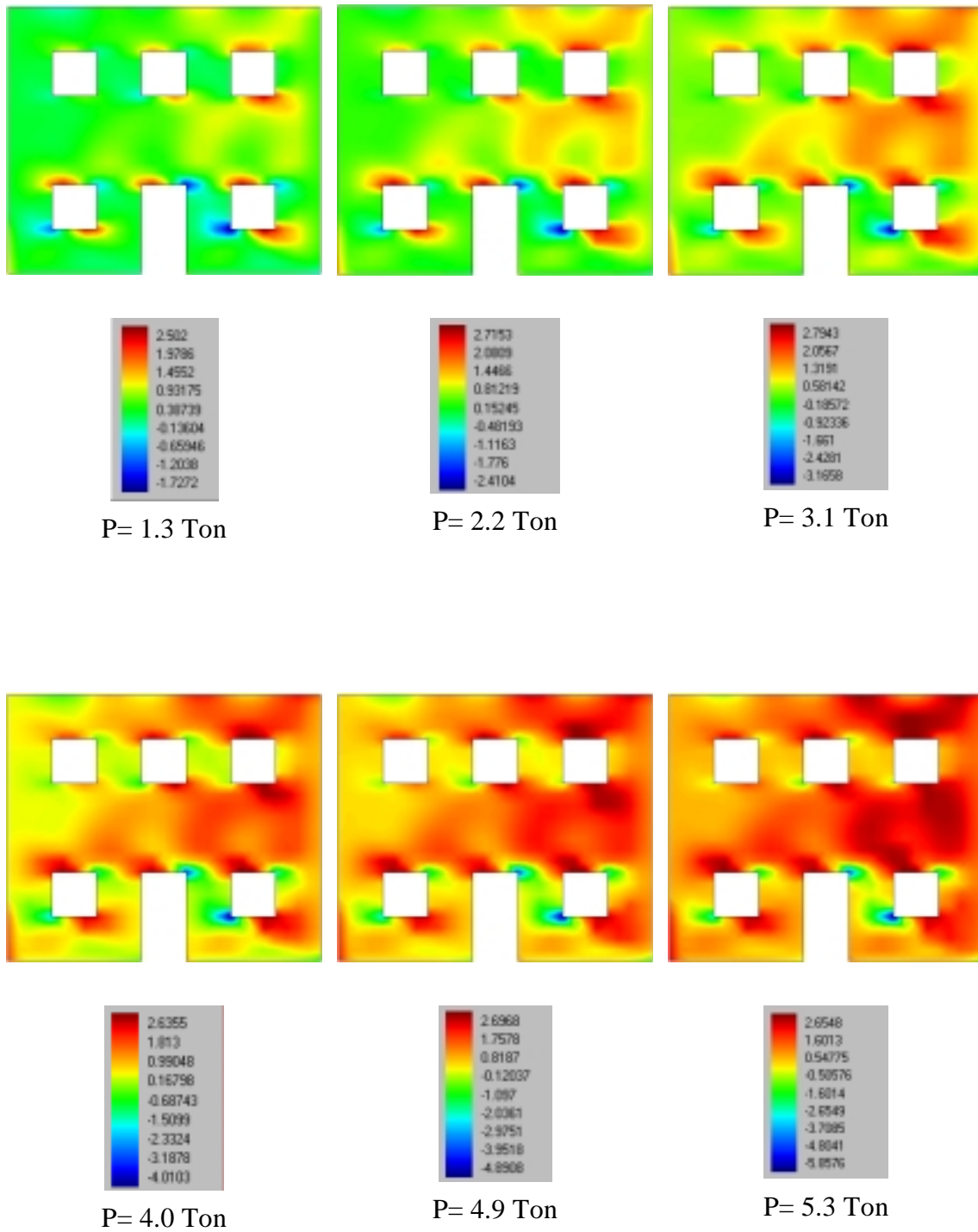


Figura 5.26. Tensiones principales mayores.

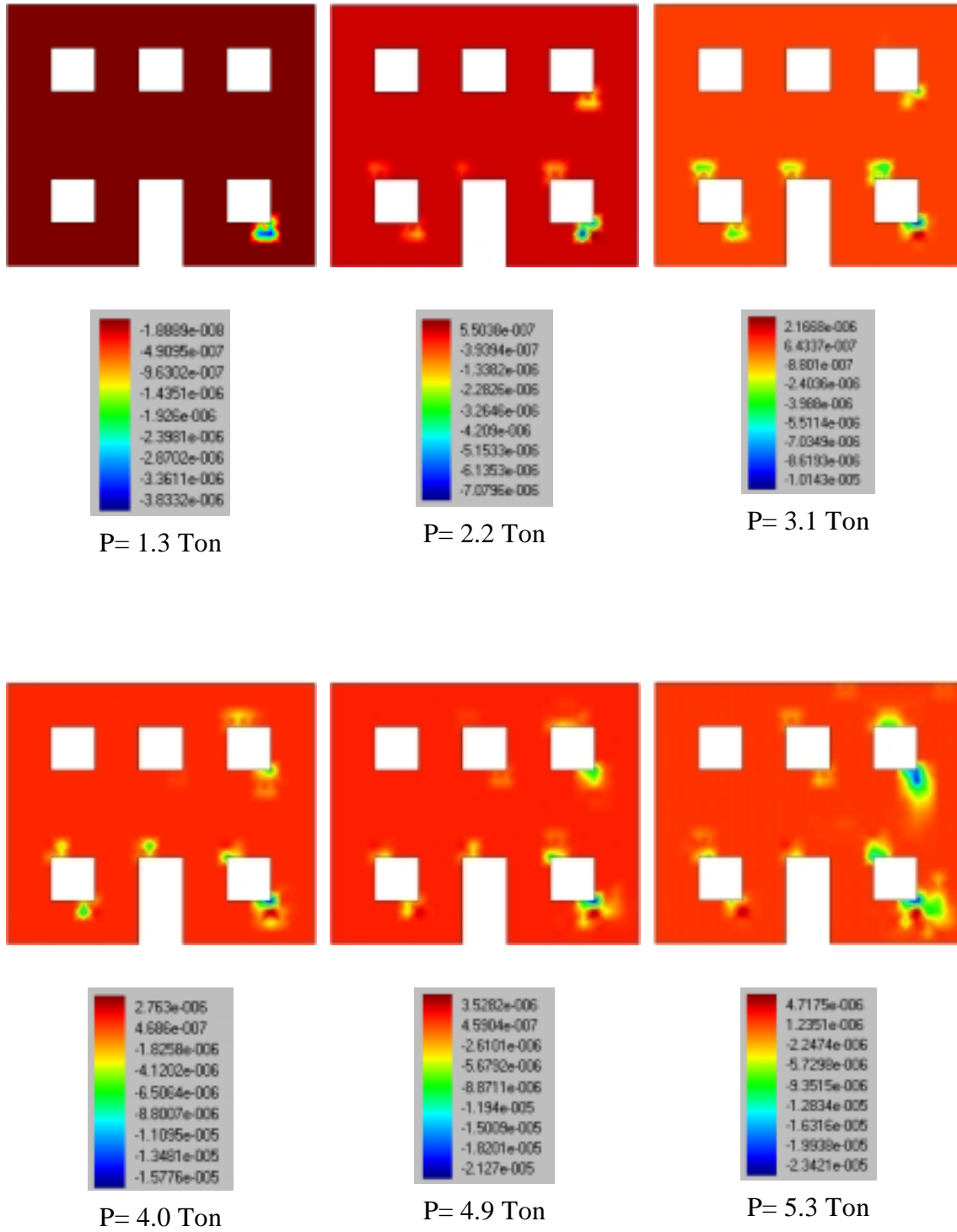


Figura 5.27. Deformaciones plásticas debidas a la tensión principal menor.

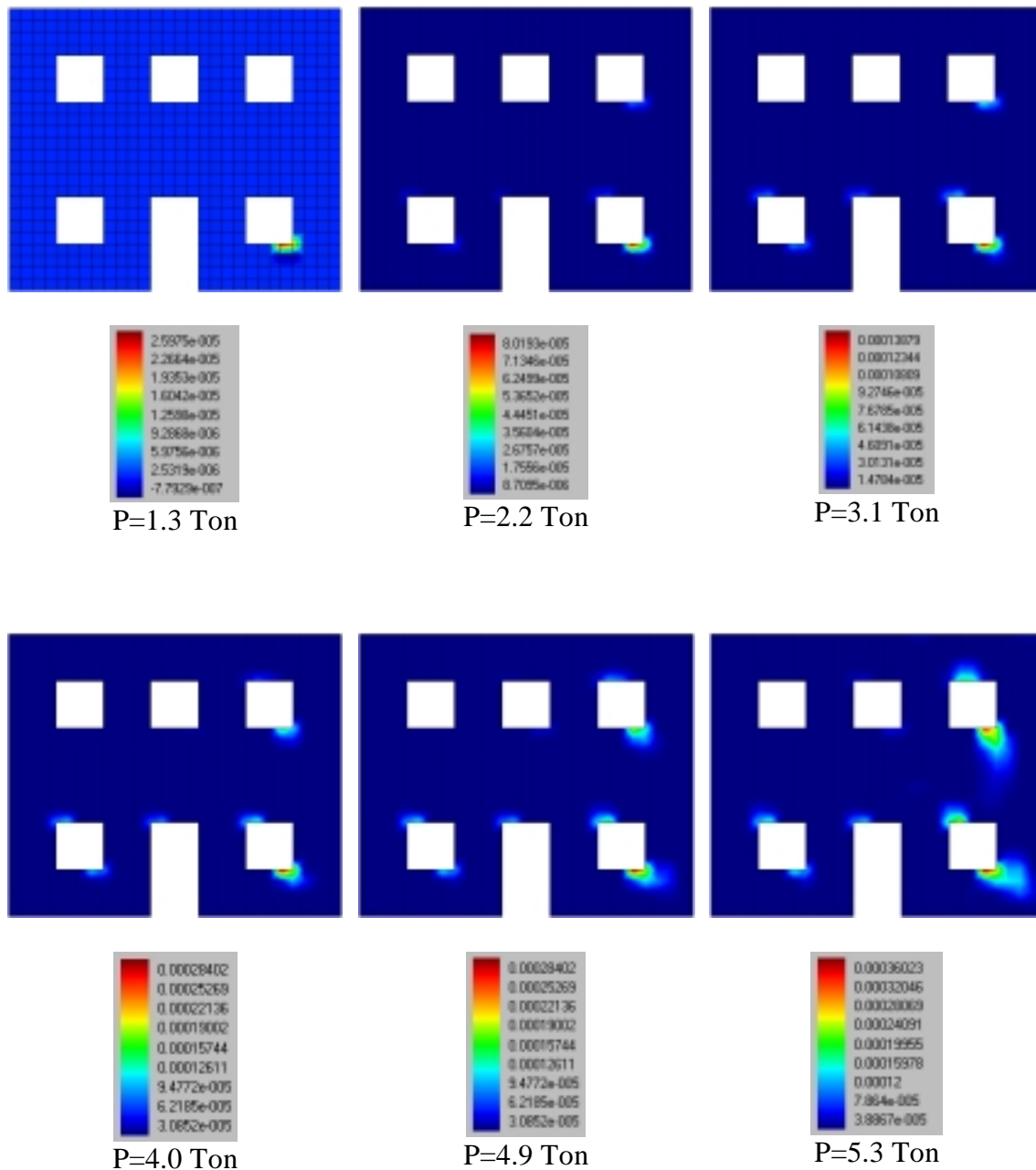


Figura 5.28. Deformación plástica en dirección de la tensión principal mayor.

5.4.3.- Resultados de la hipótesis de carga 3.

De los resultados de la aplicación de la hipótesis de carga 3 se pueden observar las típicas diagonales de rotura (Figura 5.31) que se han formado como resultado del mecanismo de cortante que actúa (efecto análogo al que se produce por efecto de un sismo)

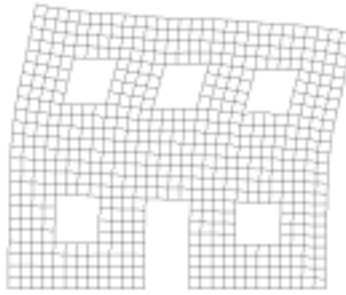
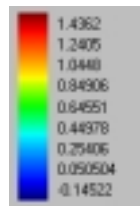
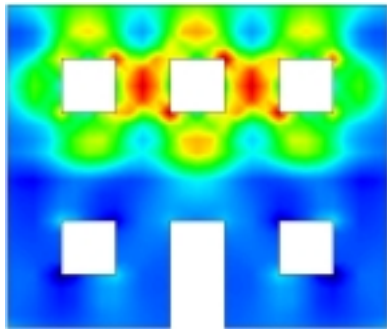
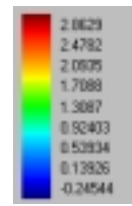
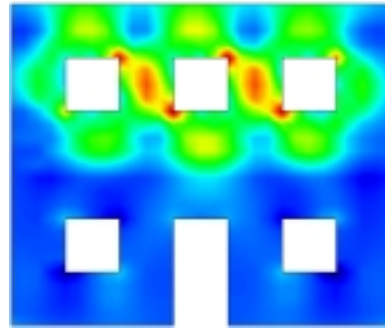


Figura 5.29. Deformada.

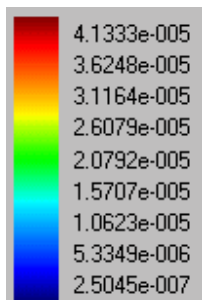
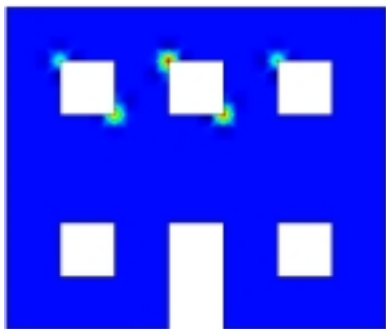


P=0.3 Ton

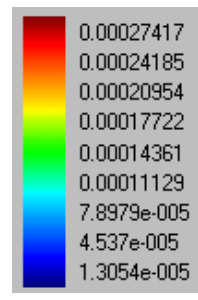
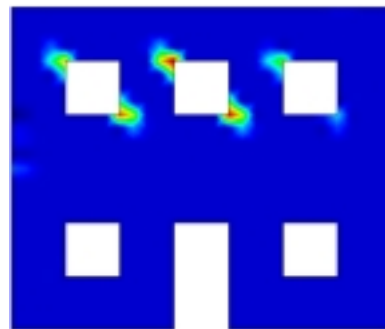


P=0.6 Ton

Figura 5.30. Tensión tangencial.



P=0.3 Ton



P=0.6 Ton

Figura 5.31. Deformación debida a tensión tangencial.

CAPÍTULO 7

BIBLIOGRAFÍA

Anthoine, A. (1995), “Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory”, *Journal of Solids Structures*, No 32, 137-163.

Anthoine, A. (1997),” Homogenization of periodic masonry : plane stress, generalized plane strain or 3D modelling”. *Numerical Methods in Engineering*, Vol. 13, 319-326.

Bazant, Z. (1976), “Inestability, ductility, and size effect in strain softening concrete”, *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 102, No. EM2, 331-344.

Bazant, Z., Oh, B. (1983), “Crack band theory for fracture of concrete”, *Mat. Construct.*, Vol. 16, 155-177.

Betten, J. (1981), “Creep theory of anisotropic solids”, *Journal of Reology*, 25(6), 565-581.

Eurocode No 6, (1992). *Common Unified Rules for Masonry Structures*, Report EUR 9888 EN.

FL-90, (1990). *Muros Resistentes de Fábrica de Ladrillo*, Norma básica de la edificación, Ministerio de Obras Públicas y Transportes, España.

Lenczner, D. (1973). “Creep in brickwork with and without damp proof courses”, *Proceedings of the British Ceramic Society*, No. 21, 39-49.

Luccioni, B. (1993). *Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos*, Tesis Doctoral. Universidad Nacional de Tucumán. Argentina.

Luccioni, B., Martín, P. E., Danesi, R. (1996). “Modelo elastoplástico general para materiales ortótropos”. *Mecánica Computacional*, Vol. 17, 373-382. Tucumán. Argentina.

Lourenço, P. B. (1996). *Computational Strategies for Masonry Structures*, Tesis doctoral, Universidad Tecnológica de Delf . Delf University Press.

Mazars, J. (1986). “A description of micro- and macroscale damage of concrete structures”, *Engineering in Fractural Mechanics*, No. 25, 729-737.

Molins, C. (1996). *Un Model per a l'Anàlisi del Comportament Resistent de Construccions de Maçoneria*, Tesis Doctoral, Universidad Politècnica de Catalunya, Barcelona .

Ngo, D., Scordelis, A. C. (1967). "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *Journal of the American Concrete Institute*, Vol. 64, No. 3, 152-163.

Oller, S., Oliver, J., Lubliner, J., Oñate, E. . (1988). "Un modelo constitutivo de daño plástico para materiales friccionales". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 4, 397-431.

Oller, S. (1989). *Nuevos Materiales Estructurales Cerámicos en Ingeniería*, Ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

Oller, S. (1991). *Modelización Numérica de Materiales Friccionales*, Monografía No. 3, Ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

Oller, S., Oñate, E., Miquel, J., Botello, S. (1993). "A Finite Element Model for Analysis of Multiphase Composite Materials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.

Oller, S., Botello, S., Miquel, J., Oñate, E. (1995). "An isotropic elastoplastic model based on an isotropic formulation". *Engineering Computations*, Vol. 12, 245-262.

Oñate, E., Oller, S., Botello, S., Miquel, J. (1991). *Métodos Avanzados de Cálculo de Estructuras de Materiales Compuestos*, Publicación CIMNE No 11, Barcelona, España.

Oñate, E. (1992). *Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos. Analisis Estático Lineal*. Ed. Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería. Barcelona.

Ortiz, M., Popov, E. P. (1982) *Plain Concrete as Composite Material*, Mechanics of Materials. North Holland Publishing Company. No 1. 139-150.

Ottosen, N. S. (1986). "Thermodynamic consequences of strain softening in tension", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 112, 1152-1164.

Page, A. W. (1973). "Structural brickwork-A literature review", *Engineering Bulletin No. CE4*, Departament of Civil Engineering, Universidad de Newcastle, Australia.

Page, A. W. (1978). "Finite element model for masonry", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 104, No. ST8, Proc. Paper 13957, 1267-1285.

Page, A. W. (1981). "The Biaxial Compressive Strength of Brick Masonry", *Proc. Instn. Civ. Engrs*, 71, (2), 893-906.

Pande, G. N., Liang, J. X., Middleton, J. (1989). "Equivalent elastic moduli for brick masonry", *Computation and Geotechnic*, No. 8, 243-265.

Pietruszczak, S., Mroz, Z. (1981). "Finite element analysis of deformation of strain softening material", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 327-334.

Pietruszcak, S., Niu, X. (1992). "A mathematical description of macroscopic behaviour of brick masonry", *Journal of Solids Structures*, No 29, 531-546.

Truesdell, C, Tourpin, R. (1960). *The Classical Field Theories*. Ed. S. Flugge-Handbuch der Physics III/I, Springer Verlag, Berlin.

Yokel, F. Y., Fattal, S. G. (1976). "Failure hypothesis for masonry shear walls", *Journal of the Structural Division*, ASCE, Vol. 102, No. ST3, Proc. Paper 11992, 515-532.

ANEJO A.1

CRITERIO DE FLUENCIA DE MOHR-COULOMB

MODIFICADO

La utilización del criterio de fluencia original de Mohr-Coulomb en el caso de los geomateriales (hormigón, mampostería, etc.), presenta el inconveniente de no cumplir con la relación inicial entre la resistencia uniaxial de tracción y compresión $R_0 = |\sigma_c^0|/|\sigma_t^0|$ para ángulos de rozamiento interno ϕ comprendidos dentro de los valores usuales de los geomateriales, $30^\circ \leq \phi \leq 35^\circ$.

Entre las soluciones que se adoptan habitualmente para resolver el problema, está el de aumentar éste ángulo de rozamiento interno hasta alcanzar la relación inicial de resistencia uniaxial requerida. No obstante, ésta no es una solución si se trabaja en plasticidad asociada, pues el criterio de Mohr-Coulomb definido como superficie de potencial plástico con un ángulo de dilatancia $\psi = \phi$, produciría en el sólido un efecto excesivo del fenómeno de dilatancia. Debido a esto, se presenta la necesidad de utilizar

una regla de flujo no asociada $\frac{\partial G}{\partial \sigma} \neq \frac{\partial F}{\partial \sigma}$ con el fin de controlar el incremento de deformación plástica volumétrica $\dot{\epsilon}_v^p$. Otra solución que se adopta frecuentemente, es la de delimitar el dominio del criterio de fluencia de Mohr-Coulomb en la zona de tracción total, dentro del espacio de tensiones principales, con un criterio de barrera que no es otra cosa que una disminución de tensión llevada a cabo mediante el criterio de Rankine.

Con el fin de trabajar con plasticidad asociada, y de evitar el inconveniente que presenta la utilización de la función de fluencia de Mohr-Coulomb definida con un ángulo de rozamiento interno muy alto, se adopta el *criterio modificado* (Oller, 1991) del criterio original, consistente en afectar la tensión principal mayor σ_1 de un parámetro de ajuste α_R que permite regular la relación de resistencia uniaxial, hasta cumplir con el valor deseado. De esta manera se obtiene la ecuación del criterio de fluencia :

$$F(\sigma, c, \phi, \alpha_R) = \left(\frac{\alpha_R \cdot \sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_R \cdot \sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \phi - c \cdot \cos \phi = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

donde :

$\sigma_1 = \sigma^{\max}$: Tensión principal mayor

$\sigma_3 = \sigma^{\min}$: Tensión principal menor

c : Cohesión interna entre partículas del sólido.

ϕ : Angulo de rozamiento interno entre partículas del sólido

α_R : Parámetro de ajuste de la tensión principal mayor σ_1

operando algebraicamente con esta expresión se puede obtener la forma análoga:

$$\sigma^{\min} = \alpha_R \cdot \sigma^{\max} \cdot R_{\text{Mohr}} - 2 \cdot c \cdot \sqrt{R_{\text{Mohr}}} \quad (\text{A.1.2})$$

siendo :

$$R_{\text{Mohr}} = R^0 = \frac{|\sigma_c^0|}{|\sigma_T^0|} = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right)$$

A partir de la expresión (A.1.2) se puede obtener el valor de α_R necesario para cumplir con la relación de resistencia uniaxial requerida $R'_{\text{Mohr}} = \alpha_R \cdot R_{\text{Mohr}}$, cualquiera que sea el ángulo de rozamiento interno ϕ que se proponga ($0^\circ < \phi < 90^\circ$).

Esto es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{para } \sigma^{\max} = 0 \Rightarrow \sigma^{\min} = -2 \cdot c \cdot \sqrt{R_{\text{Mohr}}} \\ \text{para } \sigma^{\min} = 0 \Rightarrow \sigma^{\max} = \frac{2 \cdot c}{\alpha_R \sqrt{R_{\text{Mohr}}}} \end{array} \right. \quad (\text{A.1.3})$$

obteniendo :

$$R^0 = R'_{\text{Mohr}} = \frac{|\sigma_c'|}{|\sigma_T'|} = \frac{|\sigma^{\min}|}{|\sigma^{\max}|} = \frac{2 \cdot c \cdot \sqrt{R_{\text{Mohr}}}}{2 \cdot c} = \alpha_R \cdot R_{\text{Mohr}}$$

obteniéndose, a partir de esta última expresión, el ángulo de rozamiento interno ϕ , en función de la relación de la relación de resistencia uniaxial requerida R'_{Mohr} y el parámetro de ajuste α_R :

$$\phi = 2 \cdot \left(\arctan \left(\sqrt{\frac{R'_{\text{Mohr}}}{\alpha_R}} \right) - \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{A.1.4})$$

Para formular la ecuación (A.1.1) en función de los invariantes del tensor de tensiones σ y de su desviador \mathbf{s} , es necesario partir de la expresión de las tensiones principales en función de dichos invariantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{array} \right\} = \frac{2 \cdot J_2}{\sqrt{3}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \left(\theta + 2 \frac{\pi}{3} \right) \\ \sin(\theta) \\ \sin \left(\theta + 4 \frac{\pi}{3} \right) \end{array} \right\} + \frac{I_1}{3} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right\} \quad (\text{A.1.5})$$

pero dado que el criterio de Mohr-Coulomb no tiene en cuenta la tensión principal intermedia σ_2 , se obtiene :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(J_2)^{1/2} \cdot \sin\left(\theta + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(J_2)^{1/2} \left[\sin\theta \cdot \cos\left(\theta + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \cos\theta \cdot \sin\left(\theta + 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right] + \frac{I_1}{3} \\ \sigma_3 &= \frac{2}{\sqrt{3}}(J_2)^{1/2} \cdot \sin\left(\theta + 4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \frac{I_1}{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}(J_2)^{1/2} \left[\sin\theta \cdot \cos\left(\theta + 4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + \cos\theta \cdot \sin\left(\theta + 4 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \right] + \frac{I_1}{3}\end{aligned}$$

operando con estas expresiones se llega a :

$$\sigma_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(J_2)^{1/2} \cdot \sin(\theta) + (J_2)^{1/2} \cos\theta + \frac{I_1}{3} = \sqrt{J_2} \cdot \left(\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \right) + \frac{I_1}{3}$$

$$\sigma_3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(J_2)^{1/2} \cdot \sin(\theta) - (J_2)^{1/2} \cos\theta + \frac{I_1}{3} = \sqrt{J_2} \cdot \left(-\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\sqrt{3}} \right) + \frac{I_1}{3}$$

de donde resulta :

$$(\alpha_R \cdot \sigma_1 - \sigma_3) = \sqrt{J_2} \cdot \left[(1 - \alpha_R) \cdot \cos\theta + \frac{(1 - \alpha_R)}{\sqrt{3}} \cdot \sin\theta \right] + \frac{I_1}{3} (\alpha_R - 1) \quad (\text{A.1.6})$$

$$(\alpha_R \cdot \sigma_1 + \sigma_3) = \sqrt{J_2} \cdot \left[(1 + \alpha_R) \cdot \cos\theta - \frac{(1 + \alpha_R)}{\sqrt{3}} \cdot \sin\theta \right] + \frac{I_1}{3} (\alpha_R + 1)$$

sustituyendo (A.1.6) en (A.1.1) resulta la expresión del Criterio modificado de Mohr-Coulomb :

$$F(I_1, J_2, \theta, c, \phi, \alpha_R) = \frac{I_1}{3} K_3 + \sqrt{J_2} \left(K_1 \cos\theta - K_2 \frac{\sin\theta \sin\phi}{\sqrt{3}} \right) - \cos\phi = 0$$

siendo

$$K_1 = \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} \sin\phi$$

$$K_2 = \frac{(\alpha_R + 1)}{2} - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} \frac{1}{\sin\phi}$$

$$K_3 = \frac{(\alpha_R + 1)}{2} \sin\phi - \frac{(1 - \alpha_R)}{2} = K_2 \sin\phi$$

También puede escribirse ésta función en el espacio de Westergard sin más que multiplicar por $\sqrt{3}$ la función de fluencia :

$$F(\xi, \rho, \theta, c, \phi, \alpha_R) = \sqrt{2} \cdot \xi \cdot K_3 + \sqrt{3} \cdot \rho \cdot \left(K_1 \cos \theta - K_2 \frac{\sin \theta \sin \phi}{\sqrt{3}} \right) - \sqrt{6} \cdot c \cdot \cos \phi = 0$$

expresión que da una superficie de fluencia con meridianos rectos, y que permite ajustar la relación de resistencia uniaxial para un ángulo de rozamiento interno ϕ dado.

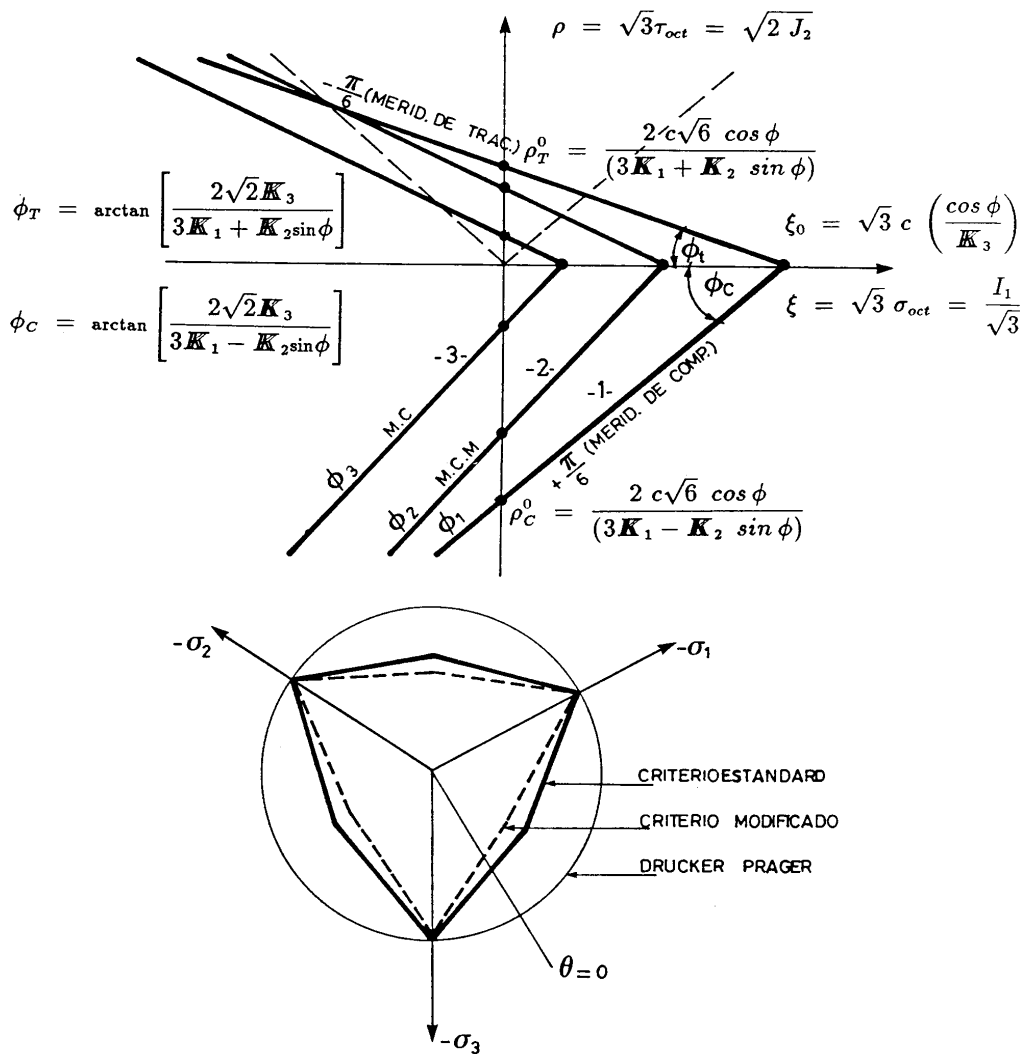


Figura A.1.1. Criterio de Mohr-Coulomb modificado : según los meridianos de tracción y compresión máxima y según un plano octaédrico cualquiera

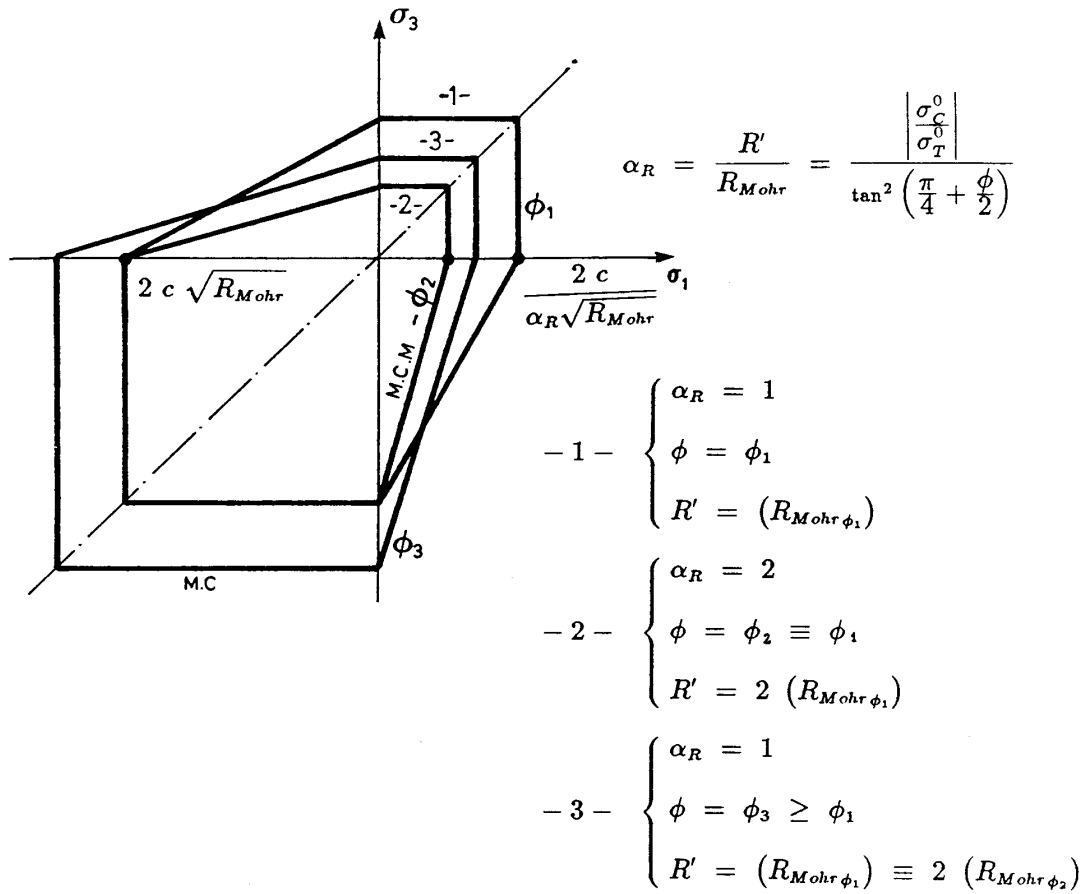


Figura A.1.2 Criterio de Mohr-Coulomb modificado : según el plano principal $\sigma_1 - \sigma_3$, $\sigma_2=0$.

ANEJO A.2

INTEGRACIÓN DE LA ECUACIÓN CONSTITUTIVA. INTEGRACIÓN IMPLÍCITA. MÉTODO DE EULER-BACKWARD

El problema de integración de la ecuación constitutiva consiste en reemplazar la ley elasto-plástica diferencial por una regla que permita realizar cálculos para incrementos finitos de carga. Durante el cálculo, se deben actualizar las deformaciones $(\epsilon_{ij})_{n-1}$, las variables internas $(\alpha_i)_{n-1}$ y las tensiones $(\sigma_{ij})_{n-1}$ asociadas con una configuración de equilibrio n-1, a sus valores $(\epsilon_{ij})_n$, $(\alpha_i)_n$ y $(\sigma_{ij})_n$ en la configuración actualizada n. En los problemas con no linealidad física, el proceso de búsqueda de soluciones se realiza considerando que los desplazamientos que definen la actualización son datos. Los estados n-1 y n corresponden, en general, a dos incrementos sucesivos durante la aplicación de la carga.

Para un sólido elastoplástico el proceso de integración de la ecuación constitutiva sigue el proceso que a continuación se detalla:

- En cada punto de Gauss se conoce:

$$(\Delta u_i)_n = \text{dato} \quad (\text{A.2.1})$$

debiéndose calcular :

$$(\Delta \epsilon_{ij})_n = (\Delta u_{ij})_n \quad (\text{A.2.2})$$

actualizando el estado tensional y las variables internas :

$$(\sigma_{ij})_n = (\sigma_{ij})_{n-1} + (\Delta \sigma_{ij})_n \quad (\text{A.2.3})$$

$$(\alpha_i)_n = (\alpha_i)_{n-1} + (\Delta \alpha_i)_n$$

Donde :

$$(\Delta \sigma_{ij})_n = C_{ijkl}^s \cdot \left((\Delta \epsilon_{kl})_n - (\Delta \epsilon_{kl}^p)_n \right) \quad (\text{A.2.4})$$

$$(\Delta \epsilon_{ij}^p)_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\tau \quad (\text{A.2.5})$$

$$(\Delta \alpha_i)_n = \int_t^{t+\Delta t} \dot{\lambda} \cdot H_i(\sigma_{kl}, \alpha_r) \cdot d\tau \quad (\text{A.2.6})$$

- $(\Delta u_i)_n$: Incremento de desplazamiento entre los estados n-1 y n
 $(\Delta \varepsilon_{ij})_n$: Incremento del tensor de deformaciones correspondiente a $(\Delta u_i)_n$
 $(\sigma_{ij})_{n-1}$: Tensor de tensiones en el estado n-1
 $(\sigma_{ij})_n$: Tensor de tensiones en el estado n
 $(\Delta \sigma_{ij})_n$: Incremento del tensor de deformaciones plásticas entre los estados n-1 y n
 C_{ijkl}^s : Tensor de rigidez secante
 $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)_n$: Incremento del tensor de deformaciones plásticas entre los estados n-1 y n
 Δt : Incremento de tiempo entre los estados n-1 y n
 $\dot{\lambda}$: Parámetro de consistencia plástica
 G : Función potencial plástico
 τ : Parámetro de medida del tiempo
 α_i : Vector de variables internas
 H_i : Módulo plástico

El problema reside en evaluar las integrales de las ecuaciones (A.2.5) y (A.2.6) para actualizar las tensiones y las variables internas a un nuevo estado n que satisfaga la condición de fluencia y la condición de consistencia incremental:

$$F_n = F\left((\sigma_{ij})_n, (\alpha_i)_n\right) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta F_n = F\left((\Delta \sigma_{ij})_n, (\Delta \alpha_i)_n\right) = 0 \quad (\text{A.2.7})$$

Un algoritmo eficiente para la integración numérica de la ecuación constitutiva debe satisfacer tres exigencias principales (Ortiz y Popov, 1985):

- Consistencia con las relaciones constitutivas* a integrar o precisión de primer orden. Esta condición requiere que las variables actualizadas calculadas mediante la integración numérica coincidan con sus valores exactos dentro de los términos de segundo orden en Δt .
- Estabilidad numérica*. La estabilidad numérica juega un papel fundamental debido a que junto con la condición anterior constituyen condiciones necesarias y suficientes para la convergencia cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, caso del análisis que se realiza en este trabajo.
- Condición de consistencia plástica incremental*

Partiendo de estas premisas se desarrolla el método de Euler-Backward como caso particular de la Regla del Trapecio Generalizada la cual viene expresada a partir de las ecuaciones:

$$\left(\sigma_{ij}\right)_n = \left(\sigma_{ij}\right)_{n-1} + \left(\Delta\sigma_{ij}\right)_n$$

$$\left(\Delta\sigma_{ij}\right)_n = \mathbf{C}_{ijkl}^s \cdot \left(\left(\Delta\varepsilon_{kl}\right)_n - \left(\Delta\varepsilon_{kl}^p\right)_n \right) = \left(\Delta\sigma_{ij}^e\right)_n - \left(\Delta\sigma_{ij}^p\right)_n$$

$$\left(\Delta\varepsilon_{kl}^p\right)_n = \Delta\lambda \cdot \left((1-\alpha) \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{n-1} + \alpha \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_n \right)$$

$$\left(\alpha_i\right)_n = \left(\alpha_i\right)_{n-1} + \Delta\lambda \cdot \left((1-\alpha) \cdot \left(H_i\right)_{n-1} + \alpha \cdot \left(H_i\right)_n \right)$$

$$F_n = F\left(\left(\sigma_{ij}\right)_n, \left(\alpha_i\right)_n\right) = 0$$

Donde :

$\left(\Delta\sigma_{ij}^e\right)_n$: Incremento predictor elástico de tensión

$\left(\Delta\sigma_{ij}^p\right)_n$: Incremento plástico de tensión

$\Delta\lambda$: Parámetro de consistencia plástica que se obtiene de la condición de consistencia plástica

α : Parámetro escalar que puede variar entre 0 y 1

La forma de actualizar las tensiones viene representada en la Figura A.1 donde se observa el predictor elástico y el mapeo para restablecer la condición de fluencia en dos etapas :

1°. Proyección a lo largo del flujo plástico inicial $\left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{n-1}$

2°. Proyección en la dirección del flujo plástico final $\left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_n$

Este algoritmo de retorno mapeado puede ser usado en plasticidad no asociada y con reglas de endurecimiento arbitrarias.

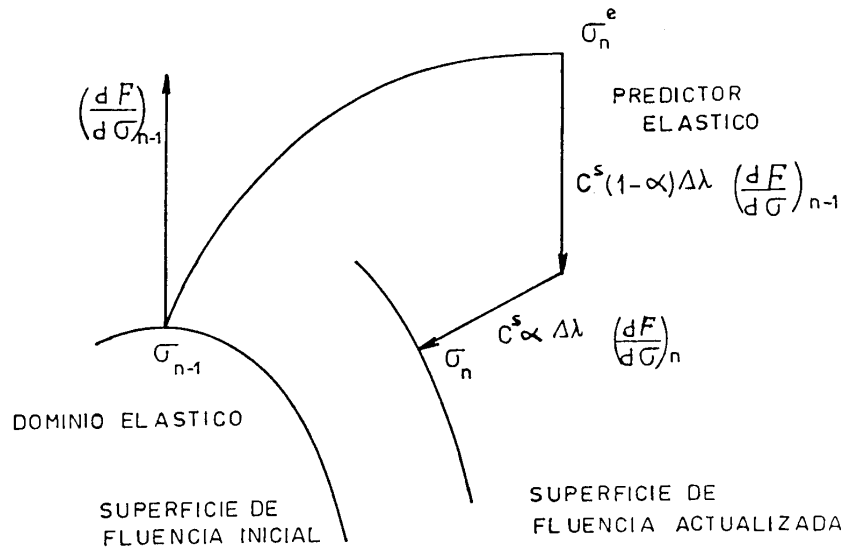


Figura A.2.1. Regla del trapecio generalizado.

Para $\alpha=1$ se obtiene el Método de Euler-Backward. Como consecuencia se obtiene las variables del problema del siguiente modo:

$$\left(\sigma_{ij}\right)_n = \left(\sigma_{ij}^e\right)_n - \Delta\lambda \cdot C_{ijkl}^s \cdot \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right)_n$$

$$\left(\alpha_i\right)_n = \left(\alpha_i\right)_{n-1} + \Delta\lambda \cdot \left(H_i\right)_n$$

Si se sustituye en la condición de fluencia:

$$F_n = F\left(\left(\sigma_{ij}\right)_n, \left(\alpha_i\right)_n\right) = 0$$

se obtiene una ecuación no lineal en $\Delta\lambda$ de la forma:

$$f(\Delta\lambda) = 0$$

que puede resolverse utilizando métodos numéricos como Newton-Rapshon:

$$\Delta\lambda^k = \Delta\lambda^{k-1} - \left(\frac{df}{d(\Delta\lambda)}\right)^{-1} \cdot f(\Delta\lambda^{k-1})$$

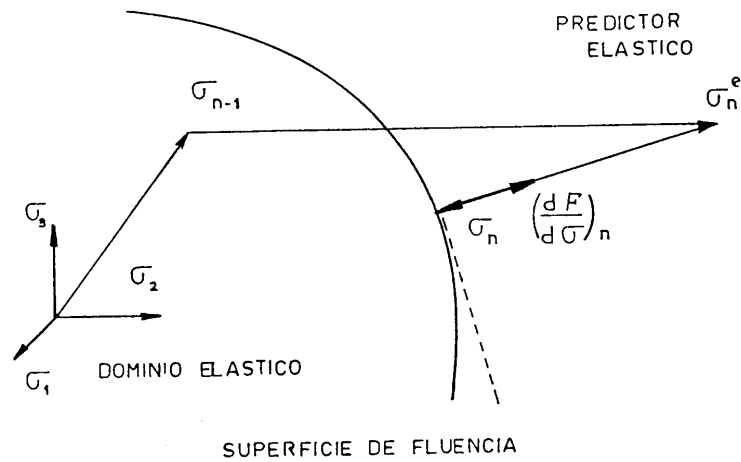


Figura A.2.2. Método de Euler-Backward.

La mayor dificultad que presenta este método es la evaluación de la derivada de la función de fluencia respecto del incremento del parámetro de consistencia plástica.

Una de las ventajas que presenta este modelo es que permite resolver problemas de estado plano de tensiones (caso de la mampostería) con programas de elementos finitos en 2D de forma directa.

ANEJO A.3

TEORÍA DE TRANSFORMACIÓN DE ESPACIOS

Debido a que la mampostería presenta un comportamiento marcadamente direccional, la simulación de éste es un problema que presenta una gran complejidad. Para simular el comportamiento elasto-plástico en la mampostería se ha escogido el enfoque planteado por la Teoría de Transformación de Espacios en el que se simula el comportamiento del sólido anisótropo real mediante un sólido ficticio isótropo (Betten, 1981 ; Oller, 1991).

La metodología que utiliza dicho método se basa en la suposición de la existencia de dos espacios : un espacio anisótropo real y un espacio isótropo ficticio. El problema se resuelve siempre en el espacio isótropo ficticio, utilizando funciones de fluencia originalmente desarrolladas para materiales isótropos (en nuestro caso, Mohr-Coulomb modificado). Los tensores de tensión en ambos espacios están relacionados mediante una transformación lineal. El tensor de transformación contiene toda la información sobre la anisotropía inicial del material, es independiente del tipo de carga y permanece constante a medida que evoluciona el proceso elasto-plástico.

En el caso de la mampostería, debido a que el grado de anisotropía o la relación entre resistencias en distintas direcciones depende del tipo de estado tensional : compresión, tracción, combinación compresión-tracción la Teoría de Transformación de Espacios difiere de la teoría general. En el trabajo llevado por Luccioni, Martín y Danesi (1996) desarrollan una Teoría de Transformación de Espacios dependiente del estado tensional.

Pasando a analizar la Teoría de Transformación de Espacios propiamente dicha, ésta parte de la hipótesis de que los tensores de tensión en el espacio real y en el espacio ficticio están relacionados mediante una transformación del tipo :

$$\tau_{ij} = A_{ijkl}(\sigma, \kappa^p) \cdot \sigma_{kl}$$

donde τ_{ij} representa el tensor de tensión en el espacio anisótropo real, mientras que σ_{kl} representa el tensor de tensión en el espacio isótropo ficticio. El tensor de cuarto orden A_{ijkl} contiene la información sobre la anisotropía de resistencia. En el caso más general, éste es función del tipo de estado tensional y de la evolución del proceso elasto-plástico. Luccioni, Martín y Danesi (1996) proponen como tensor de transformación la siguiente expresión :

$$A_{ijkl} = s(\sigma_{kl}) \cdot A_{ijkl}^t(\kappa^p) + [1 - s(\sigma_{kl})] \cdot A_{ijkl}^c(\kappa^p)$$

Los tensores $A_{ijkl}^t(\kappa^p)$ y $A_{ijkl}^c(\kappa^p)$ representan los tensores de transformación correspondientes a procesos de tracción y compresión simple, los cuales son función de la variable de daño plástico κ^p (Luccioni, Oller, Oliver, Lubliner, Oñate, 1988) que hace las funciones de variable de endurecimiento plástico isótropo. Para un estado

termodinámico dado e identificado a través de dicha variable de daño plástico, los tensores de transformación de espacios se calculan a partir de los valores de las funciones tensoriales de endurecimiento en procesos de tracción y compresión simple.

$$A_{ijkl}^t(\kappa^p) = \bar{f}_{ik}^t(\kappa^p) \cdot f_{jl}^t(\kappa^p)^{-1} \quad \text{en tracción} \quad (\text{A.3.1})$$

$$A_{ijkl}^c(\kappa^p) = \bar{f}_{ik}^c(\kappa^p) \cdot f_{jl}^c(\kappa^p)^{-1} \quad \text{en compresión} \quad (\text{A.3.2})$$

donde \bar{f}_{ik}^t y f_{jl}^t son las funciones tensoriales de endurecimiento en tracción en los espacios isotrópico ficticio y anisótropo real respectivamente, y \bar{f}_{ik}^c y f_{jl}^c son las funciones tensoriales de endurecimiento en compresión en los espacios isotrópico ficticio y anisótropo real respectivamente. Todos estos tensores dependen de la evolución del proceso plástico a través de la variable de daño plástico κ^p , y deben estar referidos al sistema de coordenadas global. En el caso de materiales ortótropos, como es en general el caso de la mampostería, si se toma como referencia las direcciones principales de anisotropía, éstos tensores son diagonales. Los elementos de la diagonal son los valores de la función de endurecimiento en dichas direcciones. Para poder calcular $A_{ijkl}^t(\kappa^p)$ y $A_{ijkl}^c(\kappa^p)$ mediante las expresiones (A.3.1) y (A.3.2) se debe rotar dichos tensores diagonales al sistema de referencia global.

El factor $s(\sigma_{kl})$ tiene en cuenta el tipo de estado tensional y se calcula como :

$$s(\sigma_{kl}) = \frac{|\sigma_{kl}| + \sigma_{kl}}{2 \cdot \sigma_{kl}}$$

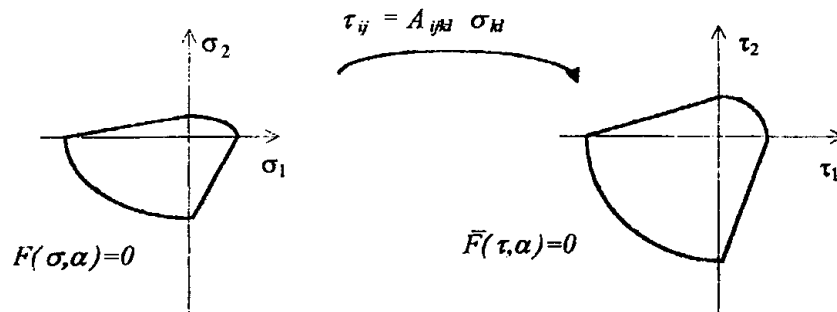


Figura A.3.1. Transformación de espacios.

El proceso elasto-plástico en el espacio isótropo ficticio se describe mediante el modelo de daño plástico modificado (Luccioni, 1993), el cual constituye una generalización de la teoría clásica de plasticidad para poder tener en cuenta unos aspectos fundamentales del comportamiento de geomateriales.

El umbral de comportamiento elástico se define mediante una función de fluencia :

$$F(\sigma_{ij}; \alpha_k) = \bar{F}(\tau_{ij}; \bar{\alpha}_k) = 0$$

donde F y \bar{F} representan las funciones de fluencia en los espacios anisótropo real e isótropo ficticio (en este caso, criterio de Mohr-Coulomb) y α_k y $\bar{\alpha}_k$ son variables internas correspondientes a dichos espacios.

La transformación de espacios permite utilizar funciones de fluencia definidas para materiales isótropos en el espacio isótropo ficticio.

ANEJO A.4

ENERGÍAS DISIPADAS POR UNIDAD DE AREA

El problema de la objetividad en la respuesta de los modelos basados en formulaciones locales, que consideran ablandamiento (caso de la mampostería) como una propiedad del material en el punto de análisis, no está totalmente aclarado, habiendo resultado de este tema una gran cantidad de opiniones controvertidas.

A.4.1.-OBJETIVIDAD EN LA RESPUESTA Y SU RELACIÓN CON LA LOCALIZACIÓN DE DEFORMACIONES. MODELO UNIAXIAL.

En un problema uniaxial, como el de una simple barra constituida por un material homogéneo e isótropo y sin degradación de rigidez, de sección transversal constante (Véase Figura A.4.1), que incluye el ablandamiento como propiedad del material, se puede ver de forma sencilla el comportamiento con localización de deformaciones, y también el problema de falta de objetividad en la respuesta en caso de no considerar las dimensiones de la zona dañada en la ley constitutiva.

Si se somete la barra de la Figura A.4.1 a sostenidos incrementos de desplazamientos ϵ en sus extremos, llegará el instante del proceso de carga cuasi-estática, en que el nivel de tensiones en cualquier punto del sólido habrá alcanzado la tensión de pico (punto C de la Figura A.4.1), o segundo límite de fallo. A partir de este punto se iniciará un proceso de carga con ablandamiento que continuará con una bifurcación en la respuesta como consecuencia de una localización de deformaciones en una zona del sólido de dimensiones L^p .

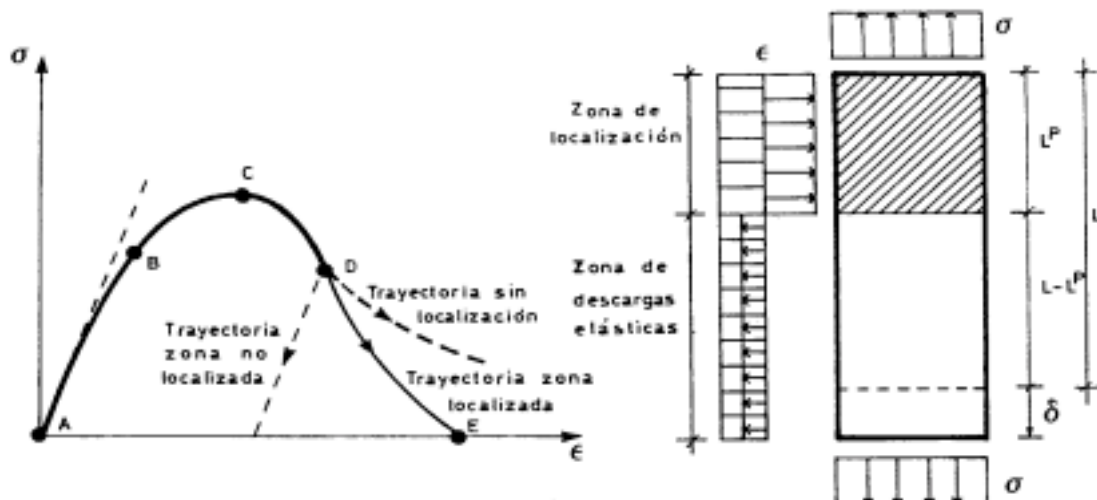


Figura A.4.1 Localización del daño plástico en una barra sometida a incrementos de desplazamientos controlados en sus extremos

La ecuación constitutiva uniaxial tangente, para un material sin degradación de rigidez, es :

$$\dot{\sigma} = E_T \cdot \dot{\varepsilon} \quad (\text{A.4.1})$$

tal que aplicada al ejemplo propuesto, permite escribir :

$$\dot{u} = \left[\frac{L^p}{E_T} + \frac{L-L^p}{E_T} \right] \cdot \dot{\sigma} = \left[\frac{L^p}{E_T} + \frac{L-L^p}{E_S} \right] \cdot \dot{\sigma} \quad (\text{A.4.2})$$

donde L^p es la longitud de la zona dañada, E_S el módulo de elasticidad secante, y E_T el módulo de elasticidad tangente, que es negativo para un proceso elastoplástico con ablandamiento. Para un proceso de carga de este tipo, se tiene que cuando crece \dot{u} decrece $\dot{\sigma}$, de donde resulta que la ecuación anterior se cumple siempre que :

$$\left[\frac{L^p}{E_T} + \frac{L-L^p}{E_S} \right] < 0 \quad (\text{A.4.3})$$

siendo ésta la condición que debe cumplir el tamaño de la zona dañada en función de las rigideces secante y tangente :

$$L \geq L^p \geq \frac{L}{1 - \frac{E_S}{E_T}} \quad (\text{A.4.4})$$

Esta condición ha sido establecida por Bazant (1976) y presentada por Ottosen (1986), con el fin de establecer un criterio de estabilidad global para los materiales con ablandamiento por deformación. Si el fenómeno de localización se produce durante el desarrollo de un proceso elasto-plástico uniaxial, se puede relacionar la ecuación A.4.4 con la pendiente de la curva uniaxial σ - ε^p (Figura A.4.2). Así, esta pendiente puede ser expresada como una función del tamaño de la zona dañada. Esto es :

$$A' = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = - \frac{E_S}{1 - \frac{E_S}{E_T}} \quad (\text{A.4.5})$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación A.4.4, resulta :

$$L \geq L^p \geq L \cdot \left[- \frac{A'}{E_S} \right] \quad (\text{A.4.6})$$

de donde se deducen las condiciones de extremo de A' (Figura A.4.2), las cuales coinciden con las de Pietruszac-Mróz (1981):

$$(\text{A.4.7})$$

$$\begin{cases} \text{si : } L^P \rightarrow L \Rightarrow |-A'| \rightarrow |E_S| & \text{Plasticidad con ablandamiento} \\ \text{si : } L^P \rightarrow 0 \Rightarrow |-A'| \rightarrow 0 & \text{Plasticidad perfecta} \end{cases}$$

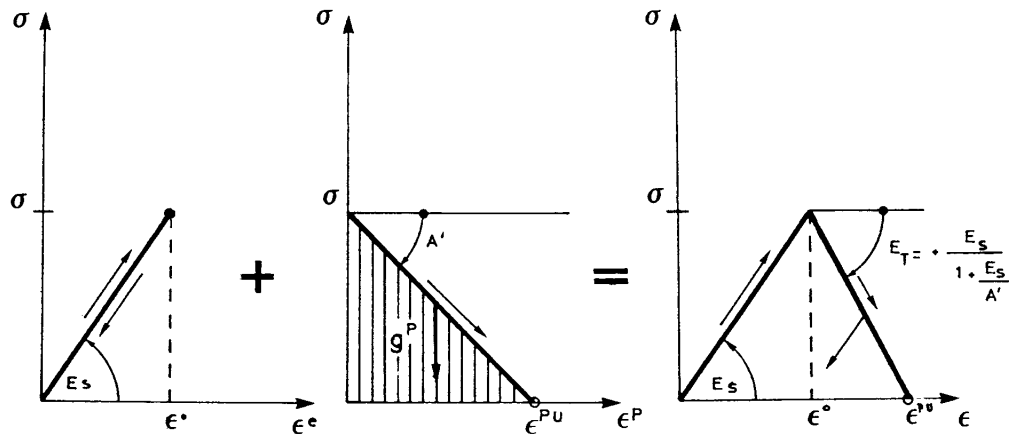


Figura A.4.2. Esquema uniaxial de la respuesta elasto-plástica de un punto de un material con ablandamiento.

Por otro lado, para este problema uniaxial, la densidad total de energía disipada o energía específica plástica es igual al área encerrada por la curva $\sigma-\epsilon^P$, o lo que es lo mismo :

$$g^P = \int_{t=0}^{\infty} \sigma^T \cdot \dot{\epsilon}^P \cdot dt \tag{A.4.8}$$

y la energía disipada por todo el sólido será :

$$W^P = \int_{V^P} g^P \cdot dV^P \tag{A.4.9}$$

Se puede comprobar para este ejemplo simple, con ablandamiento lineal, que cualquiera sea el tamaño de la zona dañada L^P , siempre que cumpla con la ecuación A.4.6, se tendrá la misma energía disipada W^P . Para ello si la longitud de la zona dañada L^P se incrementa ρ veces, para mantener la misma energía disipada al finalizar el proceso de carga cuasi-estático, será necesario corregir la pendiente A' de la curva uniaxial $\sigma-\epsilon^P$ en la misma proporción. Esto es :

$$\rho \cdot L^P = L \cdot \left[-\frac{\rho \cdot A'}{E_S} \right] \tag{A.4.10}$$

resultando de aquí, para una función de ablandamiento lineal, una deformación plástica última, igual a :

$$\varepsilon^{pu} = \frac{\sigma^{pic}}{\rho \cdot A'} \quad (A.4.11)$$

y una densidad de energía disipada plásticamente, igual a :

$$g^p = \frac{1}{2} \frac{(\sigma^{pic})^2}{\rho \cdot A'} \quad (A.4.12)$$

que sustituyendo en la ecuación A.4.9 permite comprobar que la energía disipada en todo volumen del sólido es independiente de ρ , o sea :

$$W^p = \int_{V^p} g^p \cdot dV^p = g^p \cdot \rho \cdot V^p = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\sigma^{pic})^2}{A'} \cdot V^p \quad (A.4.13)$$

Como se ha visto, la objetividad ha sido lograda en función de la condición A.4.6, la cual exige una dependencia entre la pendiente de la curva uniaxial σ - ε^p (o indirectamente la densidad de energía disipada) y la longitud de daño plástico, quedando la ley constitutiva del material para este caso particular :

$$\dot{\sigma} = E_T \cdot \dot{\varepsilon} = \frac{E_S}{1 - \frac{E_S}{A'}} \cdot \dot{\varepsilon} \quad (A.4.14)$$

donde $A' = -E_S \cdot \frac{L^p}{L}$, por lo tanto el incremento de tensión resulta :

$$\dot{\sigma} = \left[E_S \cdot \frac{L^p}{L^p - L} \right] \cdot \dot{\varepsilon} \quad (A.4.15)$$

De esta expresión sencilla , se puede ver que el ablandamiento no es una propiedad exclusiva del material E_S , sino que depende también del tamaño de la zona dañada L^p . Se podría decir, que la ecuación A.4. 15 constituye una forma de presentar una formulación no-local a partir de una ecuación constitutiva que originalmente dependía solamente del punto mismo (formulación local).

Es importante observar en la ecuación A.4.9, que la energía disipada total ha sido obtenida a través de una integración en el volumen dañado. Si se quiere, se puede integrar sobre el volumen total, previa consideración de la relación de tamaño que hay entre este volumen y el de la zona dañada. Esto es :

$$r_v = \frac{V^p}{V} \rightarrow dV^p = r_v \cdot dV \quad (A.4.16)$$

sustituyendo ésta en la ecuación A.4.9, obtenemos:

$$W^p = \int_V g^p \cdot r_v \cdot dV \tag{A.4.17}$$

Esta relación de tamaño, es otra forma de introducir la influencia del comportamiento no-local , sobre la energía específica disipada por cada punto dañado.

A.4.2.-ENERGÍA ESPECÍFICA PLÁSTICA PARA UN PROCESO DE TRACCIÓN UNIAxIAL-RELACIÓN CON LA ENERGÍA DE FRACTURA G_f .

La mecánica de fractura, presenta la *energía de fractura por unidad de área* G_f como una propiedad del material, y la define como la energía que es necesario disipar para abrir una fisura de área unitaria. Siguiendo un esquema uniaxial, se tendrá una energía disipada por unidad de área, para una fisura abierta, igual a :

$$G_f = \frac{W^f}{A^f} \tag{A.4.18}$$

donde W^f es la energía disipada al final del proceso de carga cuasi-estático, y A^f el área total de la fisura abierta.

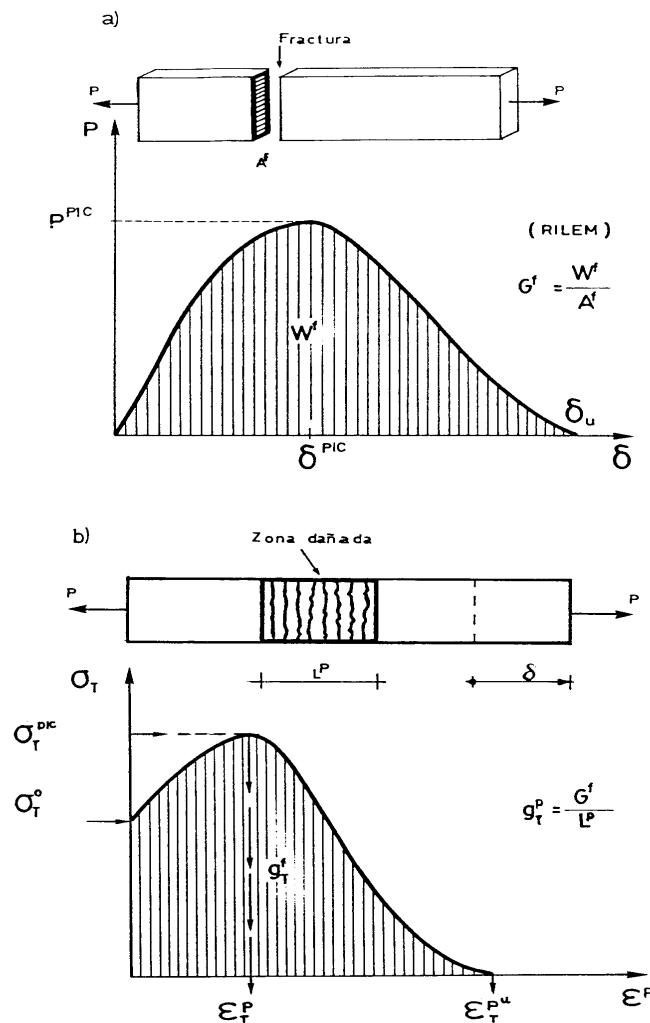


Figura A.4.3. Esquema de interpretación de daño : (a) por la mecánica de fractura, (b) por la mecánica del continuo.

Para un modelo basado en la mecánica de los medios continuos, como el desarrollado en este trabajo, será esta energía el parámetro vinculante con la mecánica de fractura, que permita obtener la objetividad de la respuesta. Para ello, se hace la hipótesis de que la energía total disipada durante el proceso de tracción uniaxial elasto-plástico con ablandamiento y sin degradación de rigidez W_T^p , es igual a la energía total disipada por un fenómeno de fractura W^f . Esto implica :

$$W^f = G^f \cdot A^f \equiv \int_V g_T^p \cdot \frac{V^p}{V} \cdot dV \quad (\text{A.4.19})$$

siendo g_T^p la energía específica plástica para un proceso de tracción pura.

Considerando que en el continuo la longitud de la zona dañada vale $L^p = V^p/A^f$ (véase Figura A.4.3), resulta de la expresión (A.4.19) la siguiente energía de fractura :

$$G^f = \int_V g_T^p \cdot \frac{L^p}{V} \cdot dV \quad (\text{A.4.20})$$

de donde resulta para este simple ejemplo, la siguiente relación entre el tamaño de la zona dañada y la energía específica plástica :

$$G^f = g_T^p \cdot L^p$$

ó

$$g_T^p = \frac{G^f}{L^p}$$

A.4.3.-ENERGÍA ESPECÍFICA PLÁSTICA PARA UN PROCESO DE COMPRESIÓN UNIAXIAL-RELACIÓN CON LA ENERGÍA DE APLASTAMIENTO G_c .

Si el proceso de carga es de compresión pura, sin degradación de la rigidez el daño plástico vendrá provocado por distintos mecanismos, tales como aplastamiento, distorsión y fisuración transversal a la deformación inelástica de estiramiento (casi paralela a la dirección de compresión máxima σ_1). Consecuentemente, si G^c fuese una propiedad del material, no podría ser identificada con ninguno de los mecanismos físicos antes mencionados. Más bien, ésta puede ser definida hipotéticamente en función de la energía disipada a partir del instante en que se inicia el proceso de localización de las deformaciones (en la rama de ablandamiento), dominio en que la respuesta del sólido se vuelve sensible al tamaño que tiene la malla de elementos finitos en la zona donde se ha localizado el daño plástico. De acuerdo con esto, una definición consistente de la energía específica plástica, para un proceso de compresión pura g_c^p surge de considerar la

siguiente forma aditiva : $g_c^{p^0} + g_c^{p^1}$, donde $g_c^{p^0}$ es el área que existe por debajo de la curva $\sigma - \epsilon^p$ desde el origen hasta el punto donde se inicia la localización de las deformaciones (Véase Figura A.4.4) y de $g_c^{p^1}$ es la parte restante del área encerrada por la misma curva, por lo que es identificable con los mecanismos de fisuración transversal por localización de deformaciones inelásticas de estiramiento. Debido a esto, $g_c^{p^0}$ es una energía independiente de la malla de los elementos finitos y por lo tanto es una propiedad del material, en cambio $g_c^{p^1}$ se postula, por conveniencia como $g_c^{p^1} = G^{c^1} / L^p$, donde L^p es la longitud de la zona dañada y G^{c^1} se adopta como una propiedad del material, que puede obtenerse de la siguiente relación :

$$G^{c^1} = \frac{W^{c^1}}{A^f} \tag{A.4.21}$$

donde W^{c^1} es la energía disipada desde que se inicia la localización de deformaciones en una banda, hasta el final del proceso de carga cuasi-estático, y A^f el área total de las fisuras abiertas (Véase Figura A.4.4).

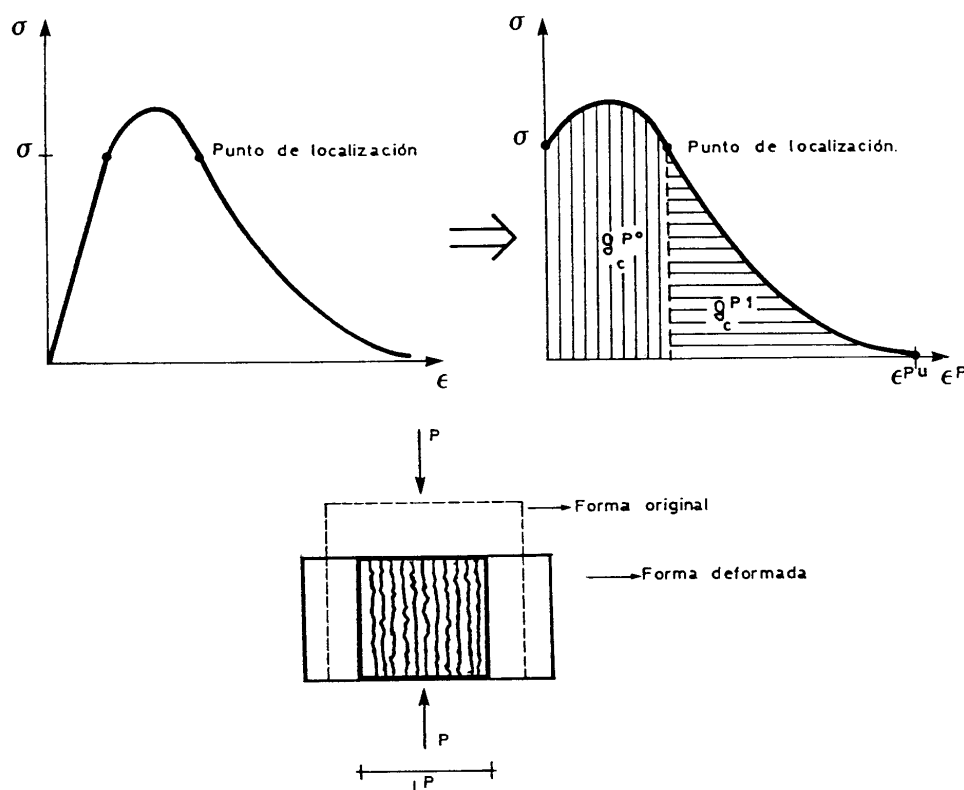


Figura A.4.4. Esquema de interpretación del daño a compresión.

La explicación del concepto antes mencionado, parte de admitir la hipótesis de que la energía total disipada durante un proceso de compresión uniaxial elastoplástico con

ablandamiento W^{c^p} , es igual a la energía total disipada en un ensayo uniaxial de compresión uniaxial W^c , que vale :

$$W^c = W^{c^0} + W^{c^1} = W^{c^0} + G^{c^1} \cdot A^f \equiv W_c^p = \int_V g_c^{p^0} \cdot dV + \int_V g_c^{p^1} \cdot \frac{V^p}{V} \cdot dV \quad (\text{A.4.22})$$

donde W^{c^0} y W^{c^1} son las energías disipadas por el sólido antes y después del límite de localización respectivamente. Considerando que en el continuo la longitud de la zona dañada vale $L^p = V^p / A^f$ (Véase Figura A.4.4), resulta de la ecuación (A.4.22) la siguiente energía por unidad de área dañada :

$$G^{c^1} = \int_V g_c^{p^1} \cdot \frac{L^p}{V} \cdot dV \quad (\text{A.4.23})$$

de donde resulta para este simple ejemplo, la siguiente relación entre el tamaño de la zona dañada y la energía específica plástica :

$$G^{c^1} = g_c^p \cdot L^p$$

ó

(A.4.24)

$$g_c^{p^1} = \frac{G^{c^1}}{L^p}$$

De esta forma, para cada L^p se obtiene una energía específica $g_c^{p^1}$, que sustituida en la ecuación (A.4.8) o en la (A.4.11), permite encontrar el parámetro A' que interviene en la rigidez tangente y permite definir la ecuación constitutiva (A.4.14).

ANEJO 5

LISTADO DEL PROGRAMA DE HOMOGENEIZACIÓN DE LAS VARIABLES DE UN PROBLEMA DE MAMPOSTERÍA

En el presente anejo se presenta el listado del programa auxiliar que obtiene las variables homogeneizadas (HOMOGENEIZACION.FOR) y que se introducen en el programa de elementos finitos PLCD2. El listado de éste programa no será detallado en este trabajo debido a la extensión de su código fuente.

```
c*****
c      MODULO DE HOMOGENEIZACIÓN DE VARIABLES      *
c      PARA ANALISIS DE MAMPOSTERIA EN EL          *
c      EL PROGRAMA PLCD2                            *
c*****
      implicit real*8 (a-h,r-z)
      implicit integer*4 (i-q)
      dimension rmatmamp(4,3)
      character*30 fichero
c*****
c      Lectura de datos:longitud(rl),altura(h),canto(c) *
c      modulo de Young,module de cortante.          *
c*****
      read(*,'(a)') fichero
      open(unit=2, file=fichero,status='old')
      open(unit=3, file='homog.res',status='unknown')
      read(2,*) rll,hl,cl
      read(2,*) Exl,Eyl,Ezl
      read(2,*) Gxyl,Gyyl,Gxzl
      read(2,*) rlm1,hm1,cm1
      read(2,*) Exm1,Eym1,Ezm1
      read(2,*) Gxym1,Gzym1,Gxzm1
      read(2,*) rlm2,hm2,cm2
      read(2,*) Exm2,Eym2,Ezm2
      read(2,*) Gxym2,Gzym2,Gxzm2
      read(2,*) rlm3,hm3,cm3
      read(2,*) Exm3,Eym3,Ezm3
      read(2,*) Gxym3,Gzym3,Gxzm3
c*****
c      Cálculo de parametros homogeneizados        *
c*****
      rlg=rlm2
      hg=hl+hm2
      cg=cm2
```

$$\begin{aligned}
dx &= (rll/(Exl*rlg)) + (rlm1/(Exm1*rlg)) \\
rpxl &= Exl*Exm1*Exm2*hm2 \\
sxl &= Exm1*Exm2*hm2*rll + Exl*Exm2*hm2*rlm1 + Exl*Exm1*hl*rlm2 \\
axl &= rpxl/sxl \\
bxl &= (axl*rlm2*hg)/(Exm2*hm2) \\
Exg &= 1/(bxl*dx)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ayl &= (Eyl*Eym1*rlm1)/((Eym1*rlm1*hl)+(Eyl*rl*hm1)) \\
byl &= (ayl*rlg*hm1)/(Eym1*rlm1) \\
syl &= ((byl*hl)/(Eyl*hg)) + (hm2/(Eym2*hg)) \\
Eyg &= 1/syl
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
dz &= (cl/(Ezl*cg)) + (cm3/(Ezm1*cg)) \\
rpzl &= Ezl*Ezm1*Ezm2*hm2 \\
szl &= Ezm1*Ezm2*hm2*cl + Ezl*Ezm2*hm2*cm3 + Ezl*Ezm1*hl*cm2 \\
azl &= rpzl/szl \\
bzl &= (azl*cm2*hg)/(Ezm2*hm2) \\
Ezg &= 1/(bzl*dz)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al &= (Gxyl*rlg)/((Gxyl*rl)+(Gxym2*rlm1)) \\
sxy &= ((al*hl)/(Gxyl*hg)) + (hm2/(Gxym2*hg)) \\
Gxyg &= 1/sxy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al &= (Gxyl*hg)/((Gxyl*hl)+(Gxym2*hm2)) \\
syx &= ((al*rl)/(Gxyl*rlg)) + (rlm1/(Gxym1*rlg)) \\
Gyxg &= 1/syx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al &= (Gxzl*rlg)/((Gxzl*rl)+(Gxzm1*rlm1)) \\
sxz &= ((al*cl)/(Gxzl*cg)) + (cm3/(Gxzm3*cg)) \\
Gxzg &= 1/sxz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al &= (Gxzl*cg)/((Gxzl*cl)+(Gxzm3*cm3)) \\
szx &= ((al*rl)/(Gxzl*rlg)) + (rlm1/(Gxzm1*rlg)) \\
Gzxc &= 1/szx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al &= (Gyyl*hg)/((Gyyl*hl)+(Gyym2*hm2)) \\
syz &= ((al*cl)/(Gyyl*cg)) + (cm3/(Gyym3*cg)) \\
Gyyc &= 1/syz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
al &= (Gyyl*cg)/((Gyyl*cl)+(Gyym3*cm3)) \\
szy &= ((al*hl)/(Gyyl*hg)) + (hm2/(Gyym2*hg)) \\
Gzyg &= 1/szy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
chixyg &= (2*Gxyg/(dsqrt(Exg*Eyg))) - 1 \\
chiyxg &= (2*Gyxg/(dsqrt(Exg*Eyg))) - 1 \\
chixzg &= (2*Gxzg/(dsqrt(Exg*Ezg))) - 1 \\
chizxg &= (2*Gzxc/(dsqrt(Exg*Ezg))) - 1 \\
chiyzg &= (2*Gyyc/(dsqrt(Ezg*Eyg))) - 1 \\
chizyg &= (2*Gzyg/(dsqrt(Ezg*Eyg))) - 1
\end{aligned}$$

```

c*****
c      Construcción de la matriz de transformación      *
c      del vector de flujo plástico en el espacio      *
c      homogeneizado.                                  *
c*****
      do i=1,4
      do j=1,3
      rmatmamp(i,j)=0.
      end do
      end do
      ax=axl*((rll/(Exl*rlg))+(rlm1/(Exm1*rlg)))
      ay=ayl*(hl/(Eyl*hg))

      rmatmamp(1,1)=(ax*rlm2)+(((1/rlg)-ax)*(rll+rlm1))
      rmatmamp(2,2)=(ay*hm1)+(((1/hg)-ay)*hl)+(hm2/hg)
      rmatmamp(3,3)=(hl+hm2)/hg
      rmatmamp(4,1)=(chixyg+(chixyg*chizg))/(-1+(chixyg*chixg))
      rmatmamp(4,2)=(chizyg+(chixzg*chizg))/(-1+(chixyg*chixg))
c*****
c      Escribimos los resultados en el archivo auxiliar      *
c      HOMOGR.RES                                          *
c*****
      write(3,*)'Ll=',rll
      write(3,*)'Hl=',hl
      write(3,*)'Cl=',cl
      write(3,*)'Lm1=',rlm1
      write(3,*)'Hm1=',hm1
      write(3,*)'Cm1=',cm1
      write(3,*)'Lm2=',rlm2
      write(3,*)'Hm2=',hm2
      write(3,*)'Cm2=',cm2
      write(3,*)'Lm3=',rlm3
      write(3,*)'Hm3=',hm3
      write(3,*)'Cm3=',cm3
      write(3,*)'Lg=',rlg
      write(3,*)'Hg=',hg
      write(3,*)'Cg=',cg
      write(3,*)'Exg=',Exg
      write(3,*)'Eyg=',Eyg
      write(3,*)'Ezg=',Ezg
      write(3,*)'Gxyg=',Gxyg
      write(3,*)'Gyxg=',Gyxg
      write(3,*)'Gyzg=',Gyzg
      write(3,*)'Gzyg=',Gzyg
      write(3,*)'Gxzg=',Gxzg
      write(3,*)'Gzxcg=',Gzxcg
      write(3,*)'chixyg=',chixyg
      write(3,*)'chixcg=',chixcg

```

```
write(3,*)'chizyg=',chizyg
write(3,*)'chizyg=',chizyg
write(3,*)'chizxg=',chizxg
write(3,*)'chixzg=',chixzg
do i=1,4
  do j=1,3
write(3,*)'matmamp('i','j')=',rmatmamp(i,j)
  end do
end do
c*****
c  Fin del programa *
c*****
close(2)
close(3)
end
```

ANEJO 6

CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS EN LOS ESPACIOS REAL Y FICTICIO

En el programa PLCD2 se debe introducir las relaciones de resistencias entre el espacio isótropo ficticio y el anisótropo real que conjuntamente con los parámetros mecánicos (módulos de Young, módulos de cortante, módulos de Poisson) se pueda establecer la aplicación que relacione ambos espacios por la Teoría de Transformación de Espacios. Para ello se presenta un ejemplo numérico de cuáles son los pasos a seguir para establecer dicha aplicación.

Como primer paso debe fijarse los parámetros del espacio isótropo ficticio que pueden ser cualesquiera siempre que cumplan con la condición de material isótropo. En el caso de este anejo se han escogido los parámetros que se presentan en la tabla A.1.1. Adoptamos un valor de 10 para la relación entre la resistencia a compresión y tracción.

$\bar{\sigma}_x$ [kp / cm ²]	365
$\bar{\sigma}_y$ [kp / cm ²]	365
$\bar{\sigma}_z$ [kp / cm ²]	365
ϕ [°]	32

Tabla A.6.1. Parámetros del espacio isótropo ficticio. Resistencias a compresión.

A partir de las expresiones desarrolladas por el criterio de fluencia de Mohr-Coulomb modificado se puede calcular:

$$R^0 = R_{Mohr}^0 = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) = 3.254$$

$$R'_{Mohr} = \frac{|\sigma_c^0|}{|\sigma_T^0|} = \frac{365}{36.5} = 10, \quad \alpha_R = \frac{R'_{Mohr}}{R_{Mohr}^0} = \frac{10}{3.254} = 3.072$$

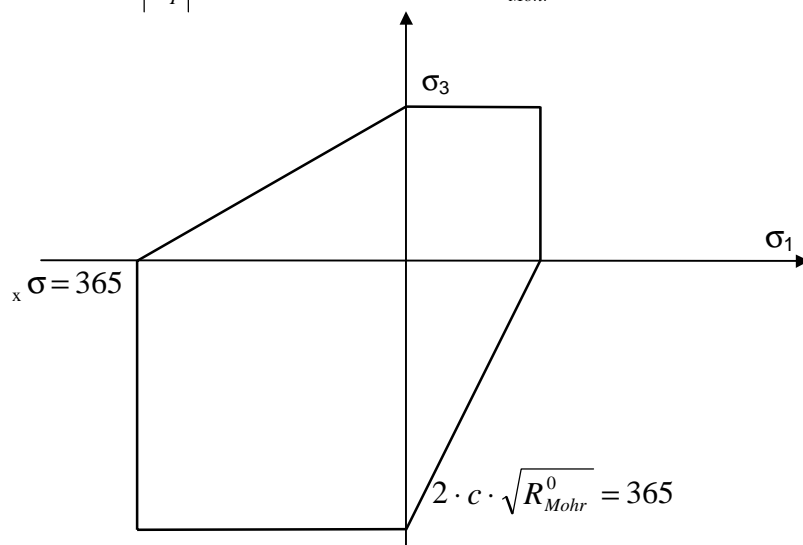


Figura A.6.1. Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales.

De la Figura A.6.1 se obtiene el valor de c :

$$\sigma_3 = 2 \cdot c \cdot \sqrt{R_{\text{Mohr}}^0}$$

$$365 = 2 \cdot c \cdot \sqrt{3.254}$$

$$c = 101.17$$

Para el ejemplo que se desarrolla se ha escogido las propiedades del Ladrillo y Mortero :

Parámetro	Ladrillo	Mortero
$\bar{\sigma}_x$ [kp / cm ²]	365	140
$\bar{\sigma}_y$ [kp / cm ²]	365	140
$\bar{\sigma}_z$ [kp / cm ²]	365	140
ϕ [°]	32	32

Tabla A.6.1. Parámetros del Ladrillo y Mortero. Resistencias a compresión

Actuando de igual forma que en el caso del espacio ficticio se obtiene:

$$c_L = 101.17$$

$$c_M = 38.80$$

Aplicando a ambos materiales las hipótesis de corte puro :

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau_{\text{max}}$$

$$\left(\frac{\alpha_R \cdot \sigma_1 - \sigma_3}{2} \right) + \left(\frac{\alpha_R \cdot \sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \cdot \sin \phi - c \cdot \cos \phi = 0$$

resulta :

$$\tau^L = 33.19$$

$$\tau^M = 12.73$$

Aplicando el modelo de homogeneización y suponiendo un ladrillo de 7x24x11 y juntas de 1:

$${}_x\sigma_G = {}_x\sigma_L \cdot \frac{h_L}{h_G} + {}_x\sigma_{M_2} \cdot \frac{h_{M_2}}{h_G} = 365 \cdot \frac{7}{8} + 140 \cdot \frac{1}{8} = 336.875$$

$${}_y\sigma_G = {}_y\sigma_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + {}_y\sigma_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} = 365 \cdot \frac{24}{25} + 140 \cdot \frac{1}{25} = 356$$

$$\tau_G = \tau_L \cdot \frac{l_L}{l_G} + \tau_{M_1} \cdot \frac{l_{M_1}}{l_G} = 33.19 \cdot \frac{24}{25} + 12.73 \cdot \frac{1}{25} = 32.3716$$

De los valores anteriores se observa que la mampostería es anisótropa. En la dirección Z se hace la hipótesis de iguales valores para el espacio real y ficticio.

Los valores de las relaciones de resistencias son:

$$\frac{{}_x\bar{\sigma}}{{}_x\sigma} = \frac{365}{336.875} = 1.0835$$

$$\frac{{}_y\bar{\sigma}}{{}_y\sigma} = \frac{365}{356} = 1.025$$

$$\frac{\bar{\tau}}{\tau} = \frac{33.19}{32.3716} = 1.025$$

$$\frac{{}_z\bar{\sigma}}{{}_z\sigma} = 1$$